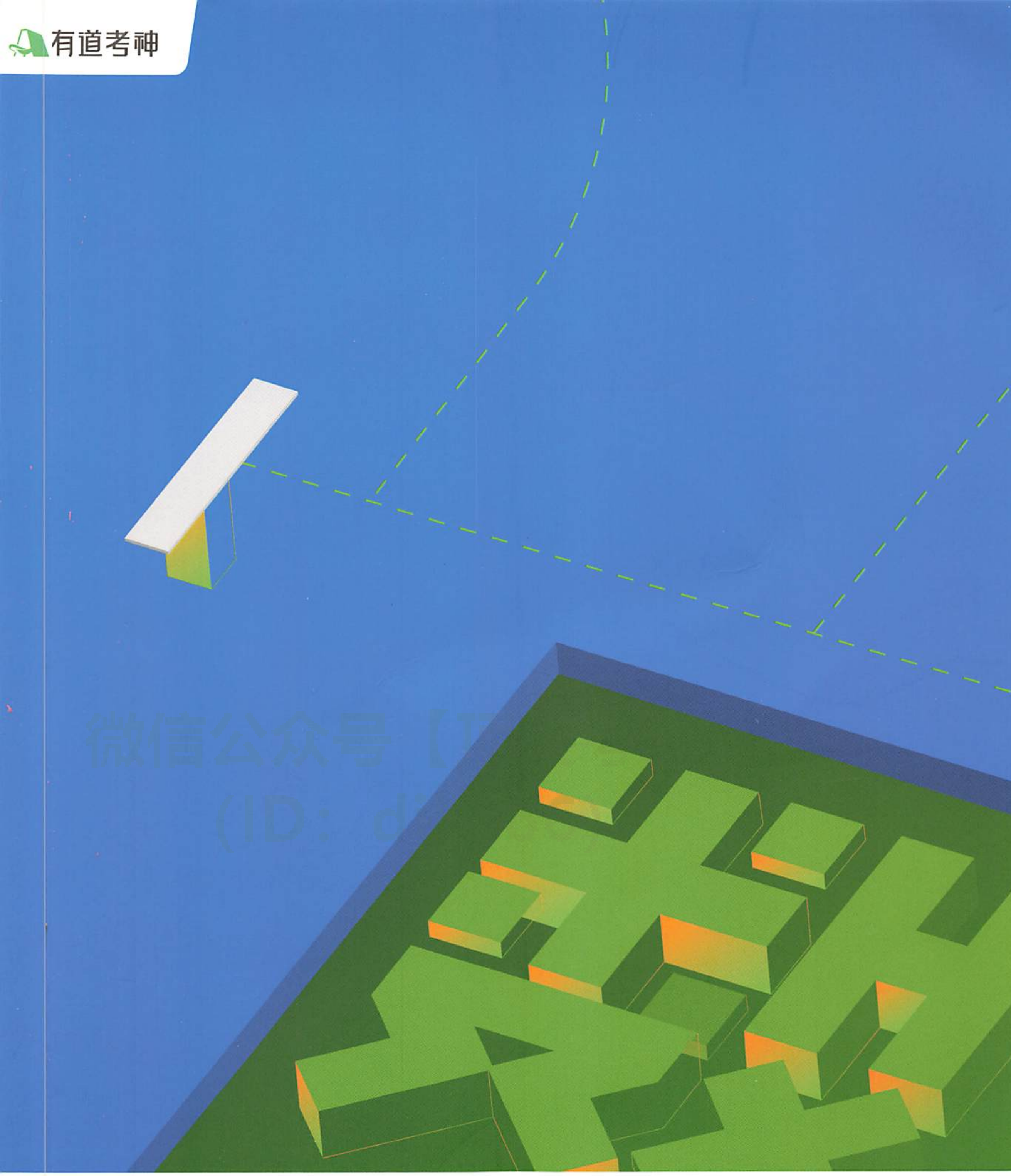
有道考神



考研 数学

复习宝典·核心基础

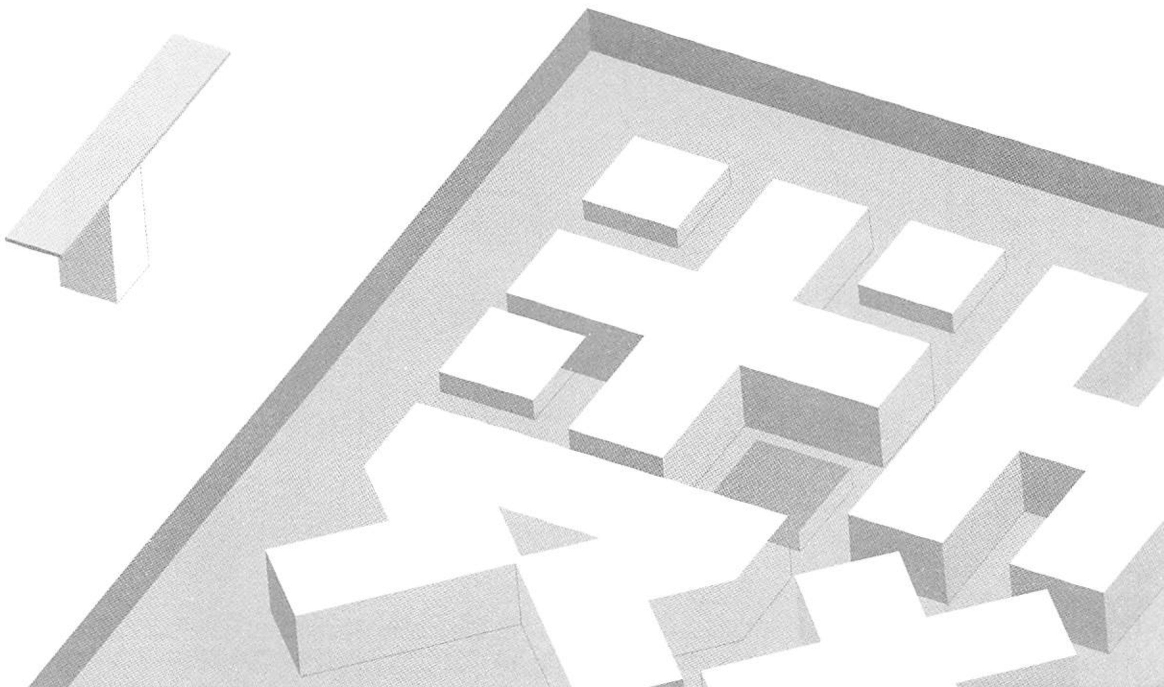
有道考神研发中心 编著

考研 数学

复习宝典·核心基础

有道考神研发中心 编著

微信公众号【顶尖考研】
（ID：djky66）



前　　言

考研人，在你开始学习前，我有两个故事讲给你听：

曾有一个二战考研的男生学员，想报考兰州大学的经济学，但是由于紧张没有发挥好，一战数三只考了 95 分，心有不甘想要二战。后来我发现，他其实很聪明，总能针对讲解的例题提出技巧性解法。比如在高数积分不等式证明题中，不同于我的“构造函数，利用单调性证明”法，他提出了可以用“Cauchy-Schwartz（柯西—许瓦兹）不等式”，此法也确实可行。这类事例有很多，他的知识范围要广一些，但是对于技巧性方法的理解运用相对有限。在基础课程的综合测评中，他的分数还是不太理想。我又特别提醒他，要重视基础复习，充分理解知识点，总结通用解题思路，对于难题要懂得取舍，他当时不以为意，只是说好。当年二战数学成绩 114 分，没有进入复试。我深感遗憾，鼓励他有条件的话再努力一次。一段时间后收到了他的留言，说自己要准备三战。后来我给他提供了讲授的课程视频及讲义，并再次叮嘱他一定要重视基础，总结通用方法，他回我以“抱拳＋流泪”的表情。三战结束，数三 136 分，不出所料地进入了复试并最终被顺利录取，得偿所愿。

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

当时跟他同班的一个应届生也让我印象深刻，这个女生基础中等，最初想考清华大学土木工程相关专业，但后来由于对专业课没有信心，改为北京建筑工程学院（2013 年更名为北京建筑大学）的管理科学与工程专业（考数三）。虽然对考研数学不甚了解，但她却很认真勤奋，一整年间，她都能按时完成预习、听课、整理、练习的学习任务。笔记、错题本整整齐齐做了五六个大厚本。那一年，她数学考了 147 分，拿到录取通知书时，她给我留言，半开玩笑地说：“应该试试考清华的，不过落袋为安啦！”

所以，按部就班地走，才是最近的路！重视基础，脚踏实地，才能在后期持续发力。

跟我们学习考研数学，你需要知道以下几点：

1. 配课用书：这是一册针对考研数学备考前期的复习用书，主要配合刷教材课程使用，我们分成了高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个部分覆盖大纲要求的全部考点。

2. 学习方法：开篇梳理基础知识，匹配典型例题，课上均会详细讲解；课下你需要对课堂内容及书中对应部分重做整理，形成自己的学习笔记，同时温故例题，充分理解，再配合其他复习资料习题，灵活运用；学习过程中的疑问也可以到班级群提问讨论，老师会在群里补充解答，及时帮你解决疑难问题。

3. 适用人群及学习侧重：

《高等数学》 数学一的考生要求掌握所有内容，数学二和数学农的考生要求掌握第1讲至第11讲的内容，数学三的考生要求掌握第1讲至第13讲的内容，自命题的考生需要对照目标院校专业的考试大纲确定学习范围。另外，数学一、数学二、数学三等考生对各章节中的部分考点要求也有所区别，已在相应考点处标明。

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

《线性代数》 数学一、数学二、数学三的考生均要求掌握所有内容，数学农的考生要求掌握第1讲至第5讲的内容，自命题的考生需要对照目标院校专业的考试大纲确定学习范围。

《概率论与数理统计》 数学一的考生要求掌握所有内容，数学二的考生不考查该科目，数学三的考生要求掌握第1讲至第6讲前半部分的内容，数学农的考生要求掌握第1讲至第5讲的内容，自命题的考生需要对照目标院校专业的考试大纲确定学习范围。

我们真诚希望你能走稳考研路上的每一步，有道考神愿成为你考研路上的守护神。祝你学习顺利，考研成功！

目 录

高等数学

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

线性代数

概率论与数理统计(数一、三)

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

高等数学

微信公众号【顶尖考研】
（ID：djky66）

第 1 讲　极限的概念、性质与无穷小

一、极限的概念

极限的概念经历了从“几何直观定义”到“静态抽象定义”的发展过程，所要表述的无非就是一种“当一些变量无限接近但不等于 A 时，可以用 A 来代替已经能够取得高度精确结果”的现象. 例如：

$$\begin{aligned} a_n &= 9\times10^{-1}+9\times10^{-2}+\cdots+9\times10^{-n} \\ &= \frac{9\times10^{-1}-9\times10^{-(n+1)}}{1-10^{-1}} \\ &= 1-10^{-n}, \end{aligned}$$

a_n 始终达不到 1，但当 $n\to\infty$时，a_n 无限接近于 1，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.\dot{9}=1$.

定义 1　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式

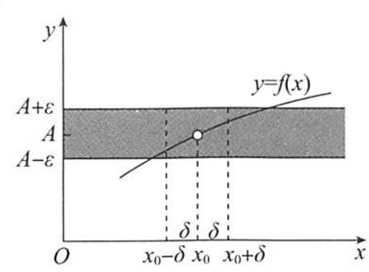
微信公众号【顶尖考研】

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

(ID：djky66)

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$



定义 1　可以简单地表述为：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

【例 1】证明：当 $x_0>0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

定义 2 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty).$$

定义 2 可简单地表达为：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\text{当 }|x|>X\text{ 时，有 }|f(x)-A|<\varepsilon.$$

定义 3 在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$

类似地，在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A.$$

左极限与右极限统称为**单侧极限**.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 2】设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$，讨论 $x\to0$ 时，$f(x)$ 的极限情况.

定义 4 如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

定理 在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小.

二、极限的性质

定理 1（函数极限的唯一性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

定理 2（函数极限的局部有界性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 3（函数极限的局部保号性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\,(A\neq0)$，那么就存在着 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，就有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】（ID：djky66）

推论 2 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$（或 $f(x)\leqslant0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant0$（或 $A\leqslant0$）.

【例 3】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，且 $f(0)=0$，则

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值.

(B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值.

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不取极值.

(D) 无法判定 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否取极值.

【拓展】若 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x-x^2}=1$ 呢？

定理 4(函数极限与数列极限的关系)如果极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于$x_0$的数列,且满足:$x_n \neq x_0 (n \in N_+)$,那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛,且$\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

三、无穷小与无穷大

(1)无穷小 极限为零的量称作无穷小量.

(2)无穷大 设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义).如果对于任意给定的正数M(不论它多么大),总存在正数δ(或正数X),只要x适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$),对应的函数值$f(x)$总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

那么称函数$f(x)$是当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时的无穷大.

定理 在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$为无穷大,那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果$f(x)$为无穷小,且$f(x) \neq 0$,那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

四、极限运算法则

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

定理 1 两个无穷小的和是无穷小.

定理 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

定理 3 如果$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,那么

(1)$\lim[f(x) \pm g(x)]=\lim f(x) \pm \lim g(x)=A \pm B$;

(2)$\lim[f(x) \cdot g(x)]=\lim f(x) \cdot \lim g(x)=A \cdot B$;

(3)若又有$B \neq 0$,则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}.$$

推论 1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,那么

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x).$$

推论 2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,那么

$$\lim\ [f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

推论 3 当$a_0 \neq 0$,$b_0 \neq 0$,m和n为非负整数时,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0,当 n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0},当 n=m,\\ \infty,当 n<m.\end{cases}$$

【例 4】求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

定理 4 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\lim_{n\to\infty}y_n=B,$$

那么

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$;

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$;

(3)当 $y_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$且 $B\neq 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

定理 5 如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$,而 $\lim\varphi(x)=A,\lim\psi(x)=B$,那么 $A\geqslant B$.

定理 6 (复合函数的极限运算) 设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$复合而成,$f[g(x)]$在点 x_0 的某去心领域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且存在 $\delta_0>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时,有 $g(x)\neq u_0$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

定理 7 洛必达法则

(1)当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$及 $F(x)$都趋于零;

(2)在点 x_0 的某去心领域内,$f'(x)$及 $F'(x)$都存在且 $F'(x)\neq 0$;

(3)$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大),

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

五、极限存在准则与两个重要极限

1. 极限存在准则

准则Ⅰ　如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

(1)从某项起，即$\exists n_0\in N_+$，当$n>n_0$时，有

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n;$$

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅰ'如果

(1)当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$(或$|x|>M$)时，

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x);$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，

那么$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在，且等于$A$.

准则Ⅰ　及准则Ⅰ'称为夹逼准则.

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

微信公众号【顶尖考研】

准则Ⅱ'　设函数$f(x)$在点x_0的某个左领域内单调并且有界，则$f(x)$在x_0的左极限$f(x_0^-)$必存在.

(ID：djky66)

2. 两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

【例 5】求①$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$　　②$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$　　③$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

【例 6】求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

六、无穷小的比较

(1)定义 设α,β为无穷小量,则:

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,那么就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,记作$\beta=o(\alpha)$;

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,那么就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小;

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,那么就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小;

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,那么就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小,记作$\alpha\sim\beta$.

(2)常见等价无穷小

①$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,a^x-1\sim x\ln a,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$;

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

②$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ln(1+x)-x\sim-\frac{1}{2}x^2,e^x-1-x\sim\frac{1}{2}x^2$;

③$\sin x-x\sim-\frac{1}{6}x^3,\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3,\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3,\arctan x-x\sim-\frac{1}{3}x^3$.

(3)等价定理

定理 1 β与α是等价无穷小的充分必要条件为

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

定理 2 设$\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$,且$\lim\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$存在,则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}.$$

【例 7】(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ (2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1-\sqrt[3]{1-2x^3}}$ (3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin x}{1-\sqrt[3]{1-2x^3}}$

巩固习题 01

一、极限的概念与左右极限：

(1)

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.			

(2)求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to0$ 时的极限是否存在.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(3) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$；

(9) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$；

(10) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）；

(13) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；

(14) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{2x}$；

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{kx}$（$k$ 为正整数）；

(17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{2x}$；

(18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$（$n,m$ 为正整数）；

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$

三、无穷大与无穷小:

(1)函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是否有界? 这个函数是否为 $x\to+\infty$时的无穷大? 为什么?

(2)证明:函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1]$内无界,但这函数不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大;

(3)当 $x\to 0$ 时,$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比,哪一个是高阶无穷小?

(4)当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)^2$ 与$\sin^2 x$ 相比,哪一个是高阶无穷小?

(5)当 $x\to 1$ 时,无穷小 $1-x$ 和①$1-x^3$,②$\dfrac{1}{2}(1-x^2)$是否同阶,是否等价?

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

巩固习题 01 答案速查

一、极限的概念与左右极限：

(1)

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$.	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$，使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1,\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=1\neq\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$不存在

二、计算下列极限：

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(1)0； (2)$\frac{1}{2}$； (3) $2x$； (4)1；

(5)0； (6)2； (7)$\frac{1}{2}$； (8)$\frac{1}{5}$；

(9)-1； (10)0； (11)0； (12)x

(13)$\frac{1}{e}$； (14)e^2(15)e^2； (16)e^{-k}；

(17)$\frac{3}{2}$； (18)$=\begin{cases}0,\text{当 } n>m \text{ 时}\\1,\text{当 } n=m \text{ 时}\\\infty,\text{当 } n<m \text{ 时}\end{cases}$； (19)$\frac{1}{2}$； (20)$-3$

三、无穷大与无穷小：

(1)函数 $y=x\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界，但当 $x\to+\infty$时，此函数不是无穷大.

(2)略

(3)当 $x\to0$ 时，x^2-x^3 是 $2x-x^2$ 高阶无穷小.

(4)当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是$\sin^2x$ 高阶无穷小.

(5)①同阶但不等价　②同阶且等价.

第 2 讲　极限的计算与函数的连续性

一、泰勒公式

1. 引例

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2x}{7x^3+5x^2-x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+4x^2+2x}{7x^3+5x^2-x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\sin x-x\cos x}{2x[1-\cos x]}$

2. 公式推导(用多项式近似代替一般函数)

(1)假设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 3 阶可导,则:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3).$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2)假设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导,则:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+0(x^n).$$

(3)假设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导,则:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\ (x-x_0)^n.$$

【注意】①多项式幂次越高,越精确.

②x 趋于什么,就在什么地方展开,因为这样最精确.

3. 九个常用的泰勒公式

(1) $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+0(x^3)$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

(2) $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$$

(3) $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

(4) $\arcsin x=x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$

(5) $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

(6) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

(7) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$

(8) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$

(9) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$

【例 1】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{1-\sqrt[3]{1-2x^3}}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 2】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\sin x - x\cos x}{2x[1-\cos x]}$.

二、极限计算的步骤

(1)把 $x\to$? 代入分析(极限类型、化简方法)

(2)化简(根式有理化,计算非零因子,提公因子,等价替换,幂指函数指数化,倒代换等)

(3)计算(洛必达法则,泰勒公式)

【例 3】求极限:(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$;(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}x^{\beta}$,$\alpha>0$,$\beta\in\boldsymbol{R}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0^{+}} x\ln x$;(4) $\lim\limits_{x\to0^{+}} x^{\alpha}\ln^{\beta}x$,$\alpha>0$,$\beta\in\boldsymbol{R}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 4】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x(\sqrt{\cos x}-1)}$.

【例 5】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^{2}}-\dfrac{1}{\sin^{2}x}\right)$.

【例 6】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{x}}$.

三、连续性与间断点

1. 连续的概念

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一领域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一领域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **连续**.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0^-)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 **左连续**. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0^+)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 **右连续**.

2. 间断点的类型

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 在此前提下，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

(1) 在 $x=x_0$ 没有定义；

(2) 虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) 虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，

那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 7】设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，求 $f(x)$ 的间断点，并判别其类型.

3. 初等函数在定义区间内都是连续的

四、闭区间上连续函数的性质

1. 最值定理

微信公众号【顶尖考研】

定理 1 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

(ID：djky66)

2. 零点定理(方程根的问题)

定理 2 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$)，则在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使

$$f(\xi)=0.$$

【例 8】设 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，证明：方程 $f_n(x)=0$ 存在唯一正根 x_n.

3. 介值定理

定理 3 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C(a<\xi<b).$$

推论 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 的值域为闭区间 $[m,M]$，其中 m 与 M 依次为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.

【例 9】设 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上连续，$f(1)+2f(2)+3f(3)=6$，

证明：在 $[1,3]$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=1$.

微信公众号【顶尖考研】
（ID：djky66）

巩固习题 02

一、计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(x+1)}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^{x}+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(13) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$；

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

(16) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$；

(17) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

(18) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$；

(19) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$；

(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$；

(21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

(22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$；

(23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；

二、间断点的连续性：

(1)下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点，那么补充或改变函数的定义使它连续：

① $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$，$x=1$，$x=2$；

②$y=\dfrac{x}{\tan x}$，$x=k\pi$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$；

③$y=\cos^2\dfrac{1}{x}$，$x=0$；

④$y=\begin{cases}x-1, x\leqslant 1,\\ 3-x, x>1,\end{cases}$ $x=1$

(2)讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，则判别其类型.

(3)下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

①如果函数 $f(x)$在 a 连续，那么 $|f(x)|$也在 a 连续；

②如果函数 $|f(x)|$在 a 连续，那么 $f(x)$也在 a 连续；

(4)设

$$f(x)=\begin{cases}x, x\in \boldsymbol{Q},\\ 0, x\in \boldsymbol{R}\backslash \boldsymbol{Q}.\end{cases}$$

判断 $f(x)$的连续性

提示：讨论在零处以及非零处两种情况.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(5)讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, x\leqslant 0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.

(6)设 $f(x)$在 R 上连续，且 $f(x)\neq0$，$\varphi(x)$在 R 上有定义，且有间断点，则下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果错的，试给出反例.

①$\varphi[f(x)]$必有间断点；

②$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点；

③$f[\varphi(x)]$未必有间断点；

④$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点；

三、证明题：

(1)假设函数 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，并且对$[0,1]$上任一点 x 有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，试证$[0,1]$中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$；

(2)证明方程 $x^5-3x=1$ 至少存在有一个根介于 1 和 2 之间；

(3)证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0,b>0$ 至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$；

(4)证明任一最高次幂的指数为奇数的代数方程

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一实根，其中 $a_0,a_1,\cdots a_{2n+1}$ 均为常数 $n\in N$

(5)若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b(n\geqslant 3)$，则在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 02 答案速查

一、计算下列极限:

(1)2; (2)$\cos\alpha$; (3)1; (4)$-\frac{1}{3}$;

(5)e^3; (6)$\frac{1}{2}$; (7)$\frac{1}{e}$; (8)-6;

(9)2; (10)2; (11)$-\frac{3}{5}$; (12)$-\frac{1}{8}$;

(13)1; (14)1; (15)1; (16)$+\infty$;

(17)$-\frac{1}{2}$; (18)1; (19)1; (20)$\frac{3}{2}$;

(21)$\frac{1}{6}$; (22)$-\frac{1}{12}$; (23)$\frac{1}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、间断点的连续性:

(1)①$x=1$ 为可去间断点;$x=2$ 为第二类间断点.

②$x=0,x=k\pi+\frac{\pi}{2}$为可去间断点;$x=k\pi(k\neq0)$为第二类间断点.

③$x=0$ 为第二类间断点.

④$x=1$ 为第一类间断点.

(2)$f(x)=\begin{cases}x,|x|<1\\0,|x|=1\\-x,|x|>1\end{cases}$,$x=-1,x=1$ 为第一类间断点.

(3)①对,因为$\left||f(x)|-|f(a)|\right|\leqslant|f(x)-f(a)|$,由此可推出结论.

②错,例如:$f(x)=\begin{cases}1,x\geqslant0\\-1,x<0\end{cases}$.

(4)①$f(x)$在 $x=0$ 连续.

②$f(x)$在非零的 x 处都不连续.

(5)在点 $x=0$ 处的连续.

(6)①错,例:$\varphi(x)=\operatorname{sgn}x,f(x)=e^x,\varphi[f(x)]\equiv1$ 在 R 上处处连续.

②错,例:$\varphi(x)=\begin{cases}1,x>0\\-1,x\leqslant 0\end{cases}$,$[\varphi(x)]^2\equiv 1$ 在 R 上处处连续.

③对,例:$\varphi(x)=\begin{cases}1,x>0\\-1,x\leqslant 0\end{cases}$,$f(x)=|\varphi(x)|\equiv 2$,在 R 上处处连续.

④对,若 $F(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$在 R 上连续,则 $\varphi(x)=F(x)f(x)$在 R 也上连续,与已知矛盾.

三、证明题:

略

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第 3 讲　导数与微分

一、导数的概念及意义

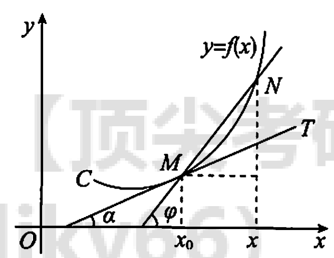
1. 函数的变化率

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2. 切线问题与单侧导数



微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 1】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　)

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

【例 2】证明：若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续但不可导，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，设 $F(x)=f(x)g(x)$，则 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充要条件是 $g(x_0)=0$.

上面讲的是函数在一点处可导.如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导,那么就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导这时,对于任一 $x\in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值.这样就构成了一个新的函数,这个函数叫做原来函数 $y=f(x)$ 的导函数,记作 y',$f'(x)$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

3. 切线方程与法线方程

根据导数的几何意义并应用直线的点斜式方程,可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过切点 $M(x_0,y_0)$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线.

如果 $f'(x_0)\neq 0$,法线的斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$,从而法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

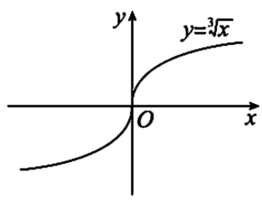
【例3】已知 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 2 的连续函数,且满足

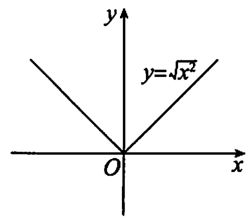
$$\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)-1]\sin x}{1-\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2},$$

求 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处的切线方程.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

4. 可导与连续的关系





5. 二阶、三阶导数

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$，即

$$y''=(y')' \text{或} \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的一阶导数.

类似地，二阶导数的导数，叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数……一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，分别记作

$$y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)}$$

或

$$\frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}.$$

函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数，也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导. 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，那么 $f(x)$ 在点 x 的某一领域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

二、函数求导

1. 基本求导公式

(1) $(C)'=0$，　　(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，

(3) $(\sin x)'=\cos x$，　　(4) $(\cos x)'=-\sin x$，

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$，　　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$，

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$，　　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

(9) $(a^x)'=a^x\ln a\,(a>0,a\neq 1)$，　　(10) $(e^x)'=e^x$，

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$, (12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, (16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 四则运算

设 $u=u(x)$, $v=v(x)$都可导,则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$, (2) $(Cu)'=Cu'$(C 是常数),

(3) $(uv)'=u'v+uv'$, (4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

3. 反函数求导法则

设 $x=f(y)$在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$,则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在 $I_x=f(I_y)$内也可导,且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

【例 4】求 $y=\arcsin x$ 的导数 y'.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

4. 复合函数求导法则

设 $y=f(u)$,而 $u=g(x)$且 $f(u)$及 $g(x)$都可导,则复合函数 $y=f[g(x)]$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\text{或}\ y'(x)=f'(u)\cdot g'(x).$$

【例 5】设 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$,求 y'.

5. 隐函数求导法则

【例 6】已知 $y=y(x)$是由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数,求 $y''(0)$.

【例 7】求 $y=x^{\sin x}\,(x>0)$的导数 y'.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

6. 参数方程求导

【例 8】计算由摆线的参数方程

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$$

所确定的函数 $y=y(x)$的二阶导数.

7. 相关变化率

设 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 间存在某种关系，从而变化率$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$间也存在一定关系. 这两个相互依赖的变化率称为相关变化率. 相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系，以便从其中一个变化率求出另一个变化率.

【例 9】一个正在变化的直角三角形，两直角边相对时间的变化率为 1cm/s 和 2cm/s，当两直角边变化分别变化到 3cm 和 4cm 时，斜边相对时间的变化率为多少？

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、高阶导数

1. 归纳法

【例 10】求函数 $\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

2. 莱布尼兹公式

$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$.

【例 11】设 $y=x^2e^{2x}$,求 $y^{(n)}(x)$ 及 $y^{(n)}(0)$.

3. 泰勒公式

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

四、微分

1. 概念

定义 设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义,x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内,如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数,那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的,而 $A\Delta x$

叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x.$$

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$. 于是函数 $y=f(x)$ 的微分又可记作

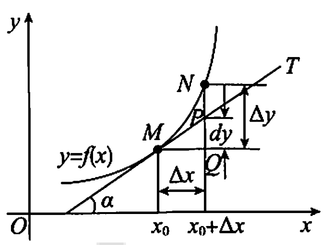
$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

这就是说，函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商等于该函数的导数. 因此，导数也叫做“微商”.

2. 微分的几何意义



微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

3. 微分的计算与凑微分

函数和、差、积、商的求导法则	函数和、差、积、商的微分法则
$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v$
$(Cu)'=Cu'$	$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$
$(uv)'=u'v+uv'$	$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$	$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v\neq 0)$

巩固习题 03

一、导数的定义与左右导数：

(1)下列各题中均假定 $f'(x_0)$存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么：

①$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；

②$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中 $f(0)=0$，且 $f'(0)$存在；

③$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

(2)设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$$

则 $f(x)$在 $x=1$ 处的(　　).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(A)左、右导数都存在.　　(B)左导数存在，右导数不存在.

(C)左导数不存在，右导数存在.　　(D)左、右导数都不存在.

(3)设 $f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$在 $x=0$ 处可导的(　　).

(A)充分必要条件.　　(B)充分条件但非必要条件.

(C)必要条件但非充分条件.　　(D)既非充分条件又非必要条件.

(4)如果 $f(x)$为偶函数，且 $f'(0)$存在，证明 $f'(0)=0$.

(5)已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$是否存在？

二、导数的几何意义：

(1)求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率：$x=\dfrac{2}{3}\pi$；$x=\pi$.

(2)求曲线 $y=\cos x$ 上点$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$处的切线方程和法线方程.

(3)求曲线 $y=e^x$ 在点$(0,1)$处的切线方程.

(4)在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点，作过这两点的割线，问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

(5)证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

(6)求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的切线方程和法线方程.

三、连续性与可导性：

(1)讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

①$y=|\sin x|$；　　②$y=\begin{cases} x^2 sin\dfrac{1}{x}, & x=0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

(2)设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1, \\ ax+b, & x>1. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a、b 应取什么值？

四、分段函数求导：

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

已知 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0, \end{cases}$，求 $f'(x)$.

五、求下列函数的导数：

(1)$y=5x^3-2^x+3e^x$　　(2)$y=x^2\ln x$；

(3)$y=3e^x\cos x$；　　(4)$y=\dfrac{\ln x}{x}$；

(5)$y=x^2\ln x\cos x$；　　(6)$y=\sin x-\cos x$，求 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}$，$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$

(7)$f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.　　(8)$y=ln(1+x^2)$

(9)$y=\sin^2 x$　　(10)$y=\sqrt{a^2-x^2}$

(11)$y=(\arcsin x)^2$　　(12)$y=\ln\cos x$.

(13)$y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$；　　(14)$y=\dfrac{\sin 2x}{x}$；

(15)$y=\arcsin\sqrt{x}$　　(16)$y=ln(x+\sqrt{a^2+.x^2})$

(17)$y=\ln(\sec x+\tan x)$　　(18)$y=\sqrt{1+ln^2 .x}$

(19)$y=e^{\arctan\sqrt{x}}$　　(20)$y=\ln\ln\ln x$

(21) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

(22) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

(23) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$;

(24) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$;

(25) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(26) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;

(27) $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

(28) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$.

六、求下列函数的二阶导:

(1) $y=x\cos x$;

(2) $y=e^{-x}\sin x$;

(3) $y=\ln(1-x^2)$;

(4) $y=xe^{x^2}$;

(5) $y=f(x^2)$;

(6) $y=\ln[f(x)]$.

七、隐函数求导:

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1)求由下列方程所确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$:

① $xy=e^{x+y}$;

② $y=1-xe^y$.

(2)求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$处的切线方程和法线方程.

(3)求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

① $y=\tan(x+y)$

② $y=1+xe^y$.

八、参数方程求导:

(1)求参数方程$\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta)\\y=\theta\cos\theta\end{cases}$所确定的函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

(2)已知$\begin{cases}x=e^t\sin t\\y=e^t\cos t\end{cases}$求当 $t=\dfrac{\pi}{3}$时$\dfrac{dy}{dx}$的值.

(3)写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

① $\begin{cases}x=\sin t\\y=\cos 2t\end{cases}$在 $t=\dfrac{\pi}{4}$处;

② $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2},\\y=\dfrac{3at^2}{1+t^2},\end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

(4)求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

①$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t; \end{cases}$　　②$\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=2e^{t}. \end{cases}$

九、求下列高阶导数：

(1)求下列函数所指定的阶的导数：

①$y=e^x\cos x$，求 $y^{(4)}$；　　② $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

(2)求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$在 $x=0$ 处 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

十、导数的综合题：

(1)设函数 $f(x)$满足下列条件：

①$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，对一切 $x,y\in R$；

②$f(x)=1+xg(x)$，而$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

试证明：$f(x)$在 R 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$.

(2)验证函数 $y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$($\lambda,C_1,C_2$ 是常数)满足关系式 $y-\lambda^2 y=0$.

微信公众号【顶尖考研】

(3)验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足关系式 $y''-2y'+2y=0$.

十一、求下列函数的微分：

(ID：djky66)

(1)$y=x\sin 2x$；　　(2)$y=\ln^2(1-x)$；　　(3)$y=x^2e^{2x}$；

(4)将适当的函数填入下列括号内，使等式成立：

①$d\left(\qquad\right)=2dx$；　　②$d\left(\qquad\right)=3xdx$；

③$d\left(\qquad\right)=\cos t dt$；　　④$d\left(\qquad\right)=\sin\omega x dx(\omega\neq 0)$；

⑤$d\left(\qquad\right)=\dfrac{1}{1+x}dx$；　　⑥$d\left(\qquad\right)=e^{-2x}dx$；

⑦$d\left(\qquad\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$；　　⑧$d\left(\qquad\right)=\sec^2 3x dx$.

巩固习题 03 答案速查

一、导数的定义与左右导数：

(1)下列各题中均假定 $f'(x_0)$存在，按照导数定义观察下列极限，指出 A 表示什么：

① $-f'(x_0)$；　　② $f'(0)$；　　③ $2f'(x_0)$.

(2)(B)　(3)(A).　(4)略(5)$f'_+(0)=0, f'_-(0)=-1, f'(0)$不存在.

二、导数的几何意义：

(1)$k_1=y'|_{x=\frac{2}{3}\pi}=-\dfrac{1}{2}$；$k_2=y'|_{x=\pi}=-1$.

(2)切线方程为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+y-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=0$；　法线方程为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\dfrac{1}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0$.

(3)$x-y+1=0$.　　(4)$(2,4)$.　　(5)略.

(6)切线方程为 $2x-y=0$. 法线方程为 $x+2y=0$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

三、连续性与可导性：

(1)讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

① $y=|\sin x|$在 $x=0$ 处连续，不可导.

② $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x=0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，可导.

(2)$a=2, b=-1$

四、分段函数求导：

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0. \end{cases}$$

五、求下列函数的导数：

(1)$15x^2-2^x\ln 2+3e^x$；　　(2)$x(2\ln x+1)$；

(3)$3e^x(\cos x-\sin x)$；　　(4)$\dfrac{1-\ln x}{x^2}$；

(5) $2x\ln x\cos x + x\cos x - x^2\ln x\sin x$；

(6) $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$；

(7) $f'(0) = \frac{3}{25}, f'(2) = \frac{17}{15}$.

(8) $\frac{2x}{1+x^2}$；

(9) $\sin 2x$；

(10) $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$；

(11) $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(12) $-\tan x$.

(13) $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$；

(14) $\frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$；

(15) $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

(16) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

(17) $\sec x$

(18) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+ln^2 x}}$

(19) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}e^{\arctan\sqrt{x}}$

(20) $\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$

(21) $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$；

(22) $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(23) $e^{-x}(-x^2+4x-5)$；

(24) $\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}$；

(25) $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(26) $\arcsin\frac{x}{2}$；

(27) $(\frac{x}{1+x})^x(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x})$；

(28) $\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right]$；

六、求下列函数的二阶导：

(1) $-2\sin x - x\cos x$；

(2) $-2e^{-x}\cos x$；

(3) $-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$；

(4) $2x(3+2x^2)e^{x^2}$；

(5) $2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$；

(6) $\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$

七、隐函数求导：

(1)求由下列方程所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$：

① $\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$；　　② $-\frac{e^y}{1+xe^y}$．

(2)切线方程为 $x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$，法线方程为 $x-y=0$.

(3)求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$：

① $-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$；　　② $\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$

八、参数方程求导：

(1)$\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$.　　(2)$\sqrt{3}-2$.

(3)写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程：

① 切线方程为 $2\sqrt{2}x+y-2=0$，法线方程为$\sqrt{2}x-4y-1=0$；

② 切线方程为 $4x+3y-12a=0$，去线方程为 $3x-4y+6a=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(4)求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$：

① $-\frac{b}{a^2\sin^3t}$；　　② $\frac{4}{9}e^{3t}$；

九、求下列高阶导数：

(1)求下列函数所指定的阶的导数：

①$y^{(4)}=-4e^x\cos x$；

② $y^{(50)}=2^{50}\left(-x^2\sin2x+50x\cos2x+\frac{1225}{2}\sin2x\right)$.

(2)$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$.

十、导数的综合题：

(1)略　　(2)略　　(3)略　　(4)略

十一、求下列函数的微分：

(1)$dy=(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$；

(2)$dy=\dfrac{2\ln(1-x)}{x-1}dx$；

(3)$dy=2x(1+x)e^{2x}dx$；

(4)将适当的函数填入下列括号内，使等式成立：

①$d(2x+C)=2dx$；　②$d\left(\dfrac{3}{2}x^2+C\right)=3xdx$；

③$d(\sin t+C)=\cos t dt$；　④$d\left(-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x+C\right)=\sin\omega x dx(\omega\neq 0)$；

⑤$d(\ln(1+x)+C)=\dfrac{1}{1+x}dx$；　⑥$d\left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C\right)=e^{-2x}dx$；

⑦$d(2\sqrt{x}+C)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$；　⑧$d\left(\dfrac{1}{3}\tan 3x+C\right)=\sec^2 3xdx$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第4讲　微分中值定理与导数的应用

一、微分中值定理

1. 费马引理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x\in U(x_0)$，有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\text{（或 }f(x)\geqslant f(x_0)\text{）},$$

那么 $f'(x_0)=0$.

通常称导数等于零的点为函数的驻点（或稳定点，临界点）.

2. 罗尔定理

如果函数 $f(x)$ 满足

(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

微信公众号【顶尖考研】

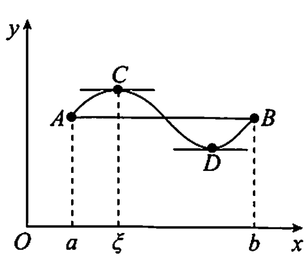
(2)在开区间 (a,b) 内可导；

(3)在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

(ID：djky66)

【几何意义】



【考试题型】

【例1】设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,3]$ 上连续，在开区间 $(0,3)$ 内可导，$f(0)=1$，$f(1)+2f(2)+3f(3)=6$，证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

【例 2】设 $g(x)$ 在闭区间 $[0,3]$ 上连续，在开区间 $(0,3)$ 内可导，$g(0)=1$，$g(1)=-1$，$f(x)=g(x)(x-2)(x-3)$. 证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$.

【例 3】设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 4】设 $f(x)$、$F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)\neq 0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

3. 拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$满足

(1)在闭区间 $[a,b]$上连续;

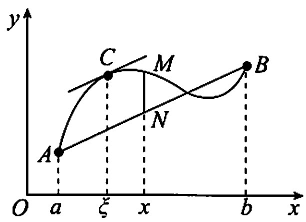
(2)在开区间 (a,b)内可导,

那么在 (a,b)内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$,使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

成立.

【几何意义】



【考试题型】

【例 5】证明:$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 6】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{\arctan x-\arctan(x\cos x)}$.

定理 如果函数 $f(x)$在区间 I 上连续,I 内可导且导数恒为零,那么 $f(x)$在区间 I 上是一个常数.

【例 7】证明:$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

4. 柯西中值定理

如果函数 $f(x)$及 $F(x)$满足

(1)在闭区间 $[a,b]$上连续;

(2)在开区间 (a,b)内可导;

(3)对任一 $x\in(a,b)$,$F'(x)\neq 0$,

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

那么在 (a,b)内至少有一点,使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

成立.

5. 泰勒中值定理

(1)皮亚诺余项

泰勒(Taylor)中值定理 1 如果函数 $f(x)$在 x_0 处具有 n 阶导数,那么存在 x_0 的一个邻域,对于该邻域内的任一 x,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

(2)拉格朗日余项

泰勒(Taylor)中值定理 2 如果函数 $f(x)$在 x_0 的某个领域 $U(x_0)$内具有 $(n+1)$阶导数,那么对任一 $x\in U(x_0)$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

二、导数的应用

1. 单调性

定理 1 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.

(1)如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geqslant 0$,且等号仅在有限多个点处成立,那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加;

(2)如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leqslant 0$,且等号仅在有限多个点处成立,那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

【例 8】证明:$e^x>1+x$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 凹凸性与拐点

(1)凹凸性的定义

定义 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续,如果对 I 上任意两点 x_1,x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凹的(或凹弧);如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 的图形是(向上)凸的(或凸弧).

如果函数 $f(x)$ 在 I 内具有二阶导数,那么可以利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性,这就是下面的曲线凹凸性的判定定理

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数,那么

①若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的;

②若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

(2)拐点的定义

一般地,设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续,x_0 是 I 内的点.如果曲线 $y=f(x)$ 在经过

点$(x_0,f(x_0))$时，曲线的凹凸性改变了，那么就称点$(x_0,f(x_0))$为这曲线的拐点.

(3)拐点的判定

按下列步骤来判定区间 I 上的连续曲线 $y=f(x)$ 的拐点：

①求 $f''(x)$；

②令 $f''(x)=0$，解出这方程在区间 I 内的实根，并求出在区间 I 内 $f''(x)$ 不存在的点；

③对于(2)中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点 x_0，检查 $f''(x)$ 在 x_0 左、右两侧邻近的符号，那么当两侧的符号相反时，点$(x_0,f(x_0))$是拐点，当两侧的符号相同时，点$(x_0,f(x_0))$不是拐点.

【例 10】确定参数 k，使曲线 $y=k(x^2-3)^2$ 的拐点处的法线通过原点.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

3. 极值与最值

(1)极值的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对于去心领域 $\dot{U}(x_0)$ 内的任一 x，有

$f(x)<f(x_0)$(或 $f(x)>f(x_0)$)，

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值).

(2)极值的判定

定理(第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心领域 $\dot{U}(x_0,\delta)$ 内可导.

①若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

②若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

③$x\in\dot{U}(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

定理(第二充分条件)　设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$, $f''(x)\neq 0$,则

①当 $f''(x_0)<0$ 时,函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

②当 $f''(x_0)>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

【例 11】求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

(3)最值的判定

①求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的驻点及不可导点;

②计算 $f(x)$ 在上述驻点、不可导点处的函数值及 $f(a)$, $f(b)$;

③比较②中诸值的大小,其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值,最小的便是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

微信公众号【顺学考研】(ID：djky66)

【例 12】求函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值.

三、函数图形的描绘

1. 判定奇偶性、周期性
2. 判定单调性、凹凸性，确定极值点、拐点
3. 确定函数渐近线
4. 确定函数的其他特殊点，如零点、不可导点、无定义点等.

四、曲率

1. 定义

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 曲率圆

巩固习题 04

一、微分中值定理的证明：

(1)不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

(2)证明恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(3)若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，证明方程

$$a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

(4)若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

(5)设 $a>b>0$，$n>1$，证明：

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(6)设 $a>b>0$，证明：

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

(7)证明下列不等式：

①$|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；

②当 $x>1$ 时，$e^x>ex$.

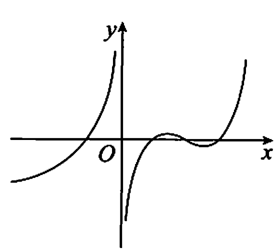
(8)设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内有一点 ξ，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

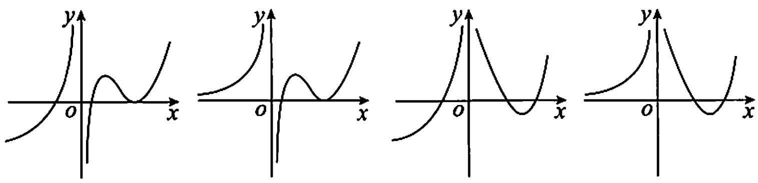
二、函数的单调性与凹凸性：

(1)判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性

(2)判定函数 $f(x)=x+\cos x$ 的单调性



(3)设函数 $f(x)$在定义域内可导，$y=f(x)$的图形如图所示，则导函数 $f'(x)$的图形为选项中所示的四个图形中的哪一个？



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

(4)单调函数的导函数是否必为单调函数？研究下面这个例子：$f(x)=x+\sin x$.

(5)求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间：

①$y=xe^{-x}$；

②$y=ln(x^2+1)$；

③$y=e^{\arctan x}$；

(6)问 a、b 为何值时，点 (1,3)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

(7)试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a、b、c、d，使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线，(1，−10)为拐点，且点(−2,44)在曲线上.

三、极值与最值：

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1)试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

(2)求 $y=x+\sqrt{1-x}$，$-5\leqslant x\leqslant 1$ 的最大值、最小值；

(3)问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7(1\leqslant x\leqslant 4)$在何处取得最大值？并求出它的最大值.

(4)问函数 $y=x^2-\frac{54}{x}(x<0)$在何处取得最小值？

(5)问函数 $y=\frac{x}{x^2+1}(x\geqslant 0)$在何处取得最大值？

四、函数不等式的证明：

(1)当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；

(2)当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

(3)当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\sin x+\tan x>2x$；

(4)当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$；

(5)当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$；

利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式：

(6)$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n(x>0,y>0,x=y,n>1)$

(7)$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x=y)$；

(8)$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}(x>0,y>0,x=y)$·

五、方程根(零点)问题：

(1)证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

(2)讨论方程 $\ln x=ax$(其中 $a>0$)有几个实根？

六、曲率(仅数一、数二)：

(1)求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0 ,2)处的曲率.

(2)求曲线 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$ 在 $t=t_0$ 相应的点处的曲率.

(3)对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 04 答案速查

一、微分中值定理的证明：

(1)有分别位于区间(1,2),(2,3)及(3,4)内的三个根.

(2)提示：参考“第 4 讲”正课讲解中的【例 7】

(3)提示：令 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$

(4)提示：参考“第 4 讲”正课讲解中的【例 2】

(5)提示：参考“第 4 讲”正课讲解中的【例 5】

(6)提示：参考“第 4 讲”正课讲解中的【例 5】

(7)证明下列不等式：

①提示：参考“第 4 讲”正课讲解中的【例 5】

②提示：参考“第 4 讲”正课讲解中的【例 5】或【例 8】

(8)提示：参考“第 4 讲”正课讲解中的【例 4】

二、函数的单调性与凹凸性：

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(1)单调减少.　　(2)单调增加.　　(3)(D).

(4)不一定，$f(x)=x+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调，但 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$内不单调.

(5)求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间：

①拐点$(2,\frac{2}{e^2})$，在$(-\infty,2]$内是凸的，在$[2,+\infty)$内是凹的；

②拐点$(-1,\ln 2)$，$(1,\ln 2)$，在$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$内是凸的，在$[-1,1]$上是凹的；

③拐点$(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}})$，在$(-\infty,\frac{1}{2}]$内是凹的，在$[\frac{1}{2},+\infty)$内是凸的.

(6)$a=-\frac{3}{2},b=\frac{9}{2}$.

(7)$a=1,b=-3,c=-24,d=16$.

(8)$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

三、极值与最值：

(1)$a=2$，$f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$为极大值.

(2)最大值 $f(\frac{3}{4})=1.25$，最小值 $f(-5)=-5+\sqrt{6}$.

(3)当 $x=1$ 时函数有最大值 -29.

(4)当 $x=-3$ 时函数有最小值 27.

(5)当 $x=1$ 时函数有最大值 $\frac{1}{2}$.

四、函数不等式的证明:

(1)—(5)提示:参考“第 4 讲”正课讲解中的【例 8】

(6)提示:令 $f(x)=x^n$,则 $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$,根据凹函数性质直接得结论.

(7)提示:令 $f(x)=e^x$,则 $f''(x)=e^x>0$,根据凹函数性质直接得结论.

(8)提示:等式两边除以 2,令 $f(x)=x\ln x$,则 $f''(x)=\frac{1}{x}>0$,根据凹函数性质直接得结论.

五、方程根(零点)问题:

(1)提示:参考“第 2 讲”正课讲解中的【例 8】

(2)①$a>\frac{1}{e}$时没有实根,②$a=\frac{1}{e}$时只有一个实根,③$0<a<\frac{1}{e}$时有两个实根.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

六、曲率(仅数一、数二):

(1)$K=2$.

(2)$K=\left|\frac{2}{3a\sin 2t_0}\right|$.

(3)$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\ln 2}{2}\right)$处曲率半径有最小值$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

第 5 讲　不定积分

一、不定积分的概念

1. 原函数

定义 1　如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任一 $x\in I$，都有

$$F'(x)=f(x)\text{或 } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$（或 $f(x)\mathrm{d}x$）在区间 I 上的一个原函数.

原函数存在定理　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$，使对任一 $x\in I$ 都有

$$F'(x)=f(x).$$

简单地说就是：连续函数一定有原函数.

2. 不定积分

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

定义 2　在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$（或 $f(x)\mathrm{d}x$）在区间 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

其中记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

注：不定积分与积分变量有关.

若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$

二、不定积分的性质

性质 1　设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2　设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2　由于 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x),$$

或

$$\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x;$$

又由于 $F(x)$是 $F'(x)$的原函数,所以

$$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

或记作

$$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$$

三、不定积分的计算

1. 基本积分公式

① $\int k\mathrm{d}x=kx+C$(k 是常数),

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq-1)$,

③ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$,

④ $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$,

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

⑤ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$,

⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$,

⑦ $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$,

⑧ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$,

⑨ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$,

⑩ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$,

⑪ $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$,

⑫ $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$,

⑬ $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$.

⑭ $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x=\mathrm{ch}x+C$,

⑮ $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x=\mathrm{sh}x+C$.

⑯ $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$,

⑰ $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$,

⑱ $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$,

⑲ $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$,

⑳ $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$,

㉑ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$,

㉒ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$,

㉓ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$,

㉕ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

2. 第一类换元法

定理 1 设 $f(u)$具有原函数，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}.$$

【例 1】求下列不定积分

(1) $\int\frac{1}{3+2x}dx$　　(2) $\int 2xe^{x^2}dx$　　(3) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

(4) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\ (a>0)$　　(5) $\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$　　(6) $\int\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}}dx$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

3. 第二类换元法

定理 2 设 $x=\psi(t)$是单调的可导函数，并且 $\psi'(t)\neq 0$. 又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)},$$

其中 $\psi^{-1}(x)$是 $x=\psi(t)$的反函数.

【例 2】求下列不定积分

(1) $\int x^2\sqrt{x-1}dx$　　(2) $\int x^2\sqrt{x-1}dx$

【例 3】求下列不定积分

(1) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx \quad (a > 0)$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx \quad (a > 0)$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 4】计算不定积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}dx$.

4. 分部积分法

【例 5】计算下列不定积分

(1) $\int x\ln x dx$ (2) $\int \arccos x dx$ (3) $\int e^{x}\sin x dx$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

5. 有理函数积分

【例 6】计算下列不定积分

(1) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$ (2) $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$ (3) $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)}dx$

6. 三角函数积分

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(1)奇数次凑微分

【例 7】计算下列不定积分

① $\int \sin^3 x dx$ ② $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$ ③ $\int \sec x dx$

(2)偶数次降幂

【例 8】计算下列不定积分

① $\int \cos^2 x dx$　　② $\int \cos^4 x dx$

(3)其他恒等变形

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 9】计算下列不定积分

① $\int \sec^4 x dx$　　② $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$

③ $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$　　④ $\int \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$

巩固习题 05

一、证明函数 $\arcsin(2x-1)$，$\arccos(1-2x)$和 $2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ 都是$\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的原函数.

二、求下列不定积分：

(1) $\int \dfrac{dx}{x^2}$；　(2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$；

(3) $\int (x^2+1)^2 dx$；　(4) $\int \dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$；

(5) $\int \left(\dfrac{3}{1+x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$；　(6) $\int \sec x(\sec x-\tan x) dx$；

(7) $\int \cos^2 \dfrac{x}{2} dx$；　(8) $\int \dfrac{dx}{1+\cos 2x}$；

(9) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x} dx$；　(10) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$；

(11) $\int \dfrac{x^2}{x^2+1} dx$；　(12) $\int \dfrac{3x^4+2x^2}{x^2+1} dx$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、求下列不定积分：

(1) $\int (3-2x)^3 dx$；　(2) $\int \dfrac{dx}{1-2x}$；

(3) $\int \dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$；　(4) $\int x e^{-x^2} dx$；

(5) $\int \dfrac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx$；　(6) $\int \dfrac{x+1}{x^2+2x+5} dx$；

(7) $\int \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} dx$；　(8) $\int \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$；

(9) $\int \dfrac{1+\ln x}{(x\ln x)^2} dx$；　(10) $\int \dfrac{dx}{\sin x\cos x}$；

(11) $\int \cos^3 x dx$；　(12) $\int \tan^3 x \sec x dx$；

(13) $\int \dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$；　(14) $\int \dfrac{x^3}{9+x^2} dx$；

(15) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$；　　(16) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；

(17) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$；

(18) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}}$；

(19) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

(20) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$；

(21) $\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx$.

四、求下列不定积分：

(1) $\int x\sin x dx$.　　(2) $\int \ln x dx$.　　(3) $\int \arcsin x dx$.

(4) $\int xe^{-x}dx$.　　(5) $\int x^2\ln x dx$.　　(6) $\int e^{-x}\cos x dx$.

(7) $\int x^2\arctan x dx$.　　(8) $\int \ln^2 x dx$.　　(9) $\int x\ln(x-1)dx$.

(10) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$.　　(11) $\int e^x\sin^2 x dx$.　　(12) $\int x\ln 2x dx$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

五、求下列不定积分：

(1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx$；　　(2) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$；

(3) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$；　　(4) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$；

(5) $\int \frac{1}{x^4-1}dx$；　　(6) $\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx$；

(7) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$；　　(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；

(9) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

六、一曲线通过点$(e^2,3)$，且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

巩固习题 05 答案速查

一、略,求导验证即可.

二、求下列不定积分:

(1) $-\frac{1}{x}+C$; (2) $2\sqrt{x}+C$; (3) $\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x+C$;

(4) $2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$; (5) $3\arctan x-2\arcsin x+C$;

(6) $\tan x-\sec x+C$; (7) $\frac{x+\sin x}{2}+C$; (8) $\frac{1}{2}\tan x+C$;

(9) $\sin x-\cos x+C$; (10) $-(\cot x+\tan x)+C$;

(11) $x-\arctan x+C$; (12) $x^3-x+\arctan x+C$.

三、求下列不定积分:

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1) $-\frac{1}{8}(3-2x)^4+C$; (2) $-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$;

(3) $-2\cos\sqrt{t}+C$; (4) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$;

(5) $-\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}}+C$; (6) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C$;

(7) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$; (8) $(\arctan\sqrt{x})^2+C$;

(9) $-\frac{1}{x\ln x}+C$; (10) $\ln|\tan x|+C$;

(11) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$; (12) $\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C$;

(13) $\arctan e^x+C$; (14) $\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(x^2+9)+C$;

(15) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$; (16) $-\arcsin\frac{1}{|x|}+C$;

(17) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$; (18) $\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$;

(19) $\arcsin x-\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+C$; (20) $\frac{1}{2}(\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|)+C$.

(21) $\frac{1}{2}(\frac{x+1}{x^2+1}+\ln(x^2+1)+\arctan x)+C$.

四、求下列不定积分：

(1)$-x\cos x+\sin x+C.$

(2)$x(\ln x-1)+C.$

(3)$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

(4)$-e^{-x}(x+1)+C.$

(5)$\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.$

(6)$\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C.$

(7)$\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$

(8)$x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$

(9)$\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C.$

(10)$-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)+C.$

(11)$\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{5}e^x\sin 2x-\frac{1}{10}e^x\cos 2x+C.$

(12)$\frac{1}{2}x^2(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2})+C.$

五、求下列不定积分：

(1)$\ln|x-2|+\ln|x+5|+C.$

(2)$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$

(3)$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(4)$2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C.$

(5)$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$

(6)$\arctan x-\frac{1}{x^2+1}+C.$

(7)$x-4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{1+x}+1)+C.$

(8)$2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$

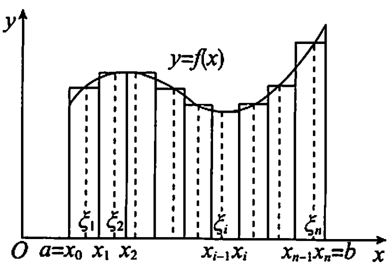
(9)$\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$ 或 $\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\arcsin x+C.$

六、$y=\ln x+1.$

第6讲　定积分与变限积分

一、定积分的定义

1. 一般定义



定义　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots x_{n-1}<x_n=b,$$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i\,(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，并作出和

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果当 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限总存在，且与闭区间 $[a,b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关，那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分(简称积分)，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a,b]$ 叫做积分区间.

注：积分与参量无关.

2. 简洁定义

【例1】$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例2】$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{2n}{n}\right)}$

3. 定积分的矢量性

4. 可积的条件

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 2 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

二、定积分的性质

1. 对称性

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 周期性

3. 几何性质

4. 运算性质

性质 1 设 α 与 β 均为常数,则

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2 设 $a<c<b$,则

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)=1$,那么

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

性质 2 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$,那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad (a<b).$$

推论 1 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$,那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

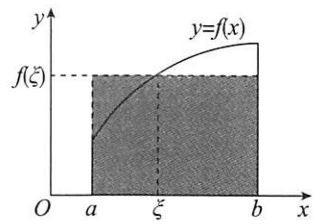
推论 2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b).$

性质 5 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值,则

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \quad (a<b).$$

性质 2 (定积分中值定理)如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续,那么在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ,使下式成立:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a\leqslant\xi\leqslant b).$$



按积分中值公式所得

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

三、变限积分函数

1. 定义

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 3】$F(x)=\int_0^x t\mathrm{d}t$，根据定积分的几何意义，确定 $F(1)$，$F(-1)$ 的值.

2. 导数

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上可导，并且它的导数

$$\Phi'(x)=\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)=\mathrm{d}t=f(x)\qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

【例 4】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$

微信公众号【顶尖考研】（ID：djky66）

四、定积分的计算

1. 牛顿莱布尼兹公式

定理 3 （微积分基本定理）如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

【例 5】计算下列定积分

(1) $\int_1^2 \ln x dx$　　(2) $\int_0^1 tdt$　　(3) $\int_0^{-1} tdt$　　(4) $\int_0^{\pi}\sin x dx$

2. 定积分的换元法

【例 6】计算下列定积分

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$　　(2) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx\ (a > 0)$　　(3) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$

【例 7】设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\cos x}, & -\pi < x < 0, \\ xe^{-x^2}, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 计算 $\int_1^4 f(x-2) dx$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 8】重要换元

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d}x$，由此计算

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x.$$

3. 定积分的分部积分法

【例 9】计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$.

【例 10】华里士公式

微信公众号【顶尖考研】
（ID：djky66）

巩固习题 06

一、定积分的定义与性质.

(1) 设 $a<b$，问 a,b 取什么值时，积分 $\int_a^b(x-x^2)dx$ 取得最大值？

(2) 设 $\int_{-1}^1 3f(x)dx=18$，$\int_{-1}^3 f(x)dx=4$，$\int_{-1}^3 g(x)dx=3$. 求

① $\int_{-1}^1 f(x)dx$；　② $\int_1^3 f(x)dx$；

③ $\int_3^{-1} g(x)dx$；　④ $\int_{-1}^3 \frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]dx$.

(3)根据定积分的性质，说明下列各对积分哪一个的值较大：

① $\int_0^1 x^2dx$ 还是 $\int_0^1 x^3dx$？

② $\int_1^2 x^2dx$ 还是 $\int_1^2 x^3dx$？

③ $\int_1^2 \ln x dx$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2dx$？

④ $\int_0^1 xdx$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)dx$？

⑤ $\int_0^1 e^xdx$ 还是 $\int_0^1 (1+x)dx$？

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

二、定积分的计算：

(1) $\int_0^a(3x^2-x+1)dx$；　(2) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$；

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta d\theta$；

(5) $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$；　(6) $\int_0^2 f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}x^2, & x>1.\end{cases}$

(7) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$；　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^3 xdx$；

(9) $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta$；　(10) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$；

(11) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；　(12) $\int_{\frac{3}{4}}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$；

(13) $\int_1^{e^2} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$；

(14) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx$；

(15) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta d\theta$；

(16) $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x dx}$；

(17) $\int_0^{2\pi} |\sin(x+1)| dx$.

(18) $\int_0^1 xe^{-x} dx$；

(19) $\int_1^e x\ln x dx$；

(20) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{x}{\sin^2 x} dx$；

(21) $\int_1^4 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$；

(22) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$；

(23) $\int_1^e \sin(\ln x) dx$；

(24) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$；

(25)设 $f(x)$具有三阶连续导函数，$y=f(x)$的图形如图所示. 问下列积分中的哪一积分值为负？

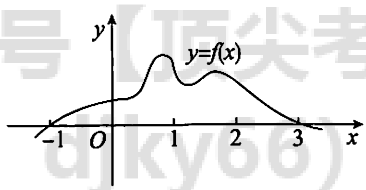
(A) $\int_{-1}^{3} f(x)dx$；

(B) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx$；

(C) $\int_{-1}^{3} f''(x)dx$；

(D) $\int_{-1}^{3} f'''(x)dx$；

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)



三、变限积分函数及其导数：

(1)试求函数 $y=\int_0^x \sin t dt$ 当 $x=0$ 及 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时的导数.

(2)求由参数表达式 $x=\int_0^t \sin u du$，$y=\int_0^t \cos u du$ 所确定的函数对 x 的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

(3)求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数对 x 的导数$\dfrac{dy}{dx}$

(4)当 x 为何值时，函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2} dt$ 有极值？

(5)证明 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^3} dt$ 在$[-1,+\infty)$上是单调增加函数，并求$(f^{-1})'(0)$

(6)求下列极限：

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$；　　② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2} dt}$

(7)设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1), \\ x, & x\in[1,2]. \end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在$[0,2]$上的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 在$(0,2)$内的连续性.

(8)设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi, \\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>\pi. \end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在$(-\infty,+\infty)$内的表达式.

(9)设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且 $f'(x)\leqslant 0$，$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$. 证明在$(a,b)$内有 $F'(x)\leqslant 0$.

(10)设 $F(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$，求 $F'(0)$.

(11)设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$内连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ 证明函数 $y=e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$ 满足方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=f(x)$，并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

巩固习题 06 答案速查

一、定积分的定义与性质.

(1)$a=0,b=1$.

(2)① 6　　② -2　　③ -3　　④ 5

(3)根据定积分的性质,说明下列各对积分哪一个的值较大:

① $\int_0^1 x^2dx$ 较大;　② $\int_1^2 x^3dx$ 较大;　③ $\int_1^2 \ln xdx$ 较大;

④ $\int_0^1 xdx$ 较大;　⑤ $\int_0^1 e^x dx$ 较大.

二、定积分的计算:

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1)$a(a^2-\frac{a}{2}+1)$;　(2)$\frac{21}{8}$;　(3)$\frac{\pi}{3}$;　(4)$1-\frac{\pi}{4}$;

(5)4;　(6)$\frac{8}{3}$.　(7)0;　(8)$\frac{1}{4}$;

(9)$\pi-\frac{4}{3}$;(10)$1-\frac{\pi}{4}$;　(11)$\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$;　(12)$1-2ln2$;　(13)$2(\sqrt{3}-1)$;

(14)0;　(15)$\frac{3}{2}\pi$;　(16)$2\sqrt{2}$;　(17)4.

(18)$1-\frac{2}{e}$;　(19)$\frac{1}{4}(e^2+1)$;(20)$(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9})\pi+\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}$;

(21)$4(2\ln 2-1)$;　(22)$\frac{1}{5}(e^\pi-2)$;(23)$\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1)$;

(24)$2(1-\frac{1}{e})$;　(25)C.

三、变限积分函数及其导数:

(1)$0,\frac{\sqrt{2}}{2}$ · (2)$\cot t$. (3)$-e^{-y}\cos x$

(4) 当 $x=0$ 时,函数 $I(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt$ 有极值.(5) 证明略;$(f^{-1})'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(6)①1　　②2

(7)$\Phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3, x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}, x\in[1,2]\end{cases}$，$\Phi(x)$在$(0,2)$内连续.

(8)$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$(9)略(10)1(11)1.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第 7 讲　反常积分与定积分的应用

一、反常积分的概念及计算

1. 无穷限的反常积分

(1)概念

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x, \tag{7-1}$$

根据算式(7－1)的结果是否存在，可引入反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛与发散的定义如下：

定义 1　①设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，如果极限(7－1)存在，那么称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为该反常积分的值；如果极限(7－1)不存在，那么称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

于是有
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{7-2}$$

②设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，如果极限(7－2)存在，那么称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为该反常积分的值；如果极限(7－2)不存在，那么称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

③设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，如果反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 与反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，那么称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 的值与反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的值之和为反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的值，否则就称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2)计算

【例 1】计算反常积分 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$,(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}xdx$.

【例 2】讨论(1)p 积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$,(2) 对数 p 积分 $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx$ 的敛散性.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 3】记反常积分 $I_k=\int_{0}^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}dx$,$k>0$,讨论 I_1、I_2 的敛散性,并猜测 I_k 的敛散性.

2. 无界函数的反常积分

(1)概念

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (7-4)$$

根据算式(7－4)的结果是否存在，可引入反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛与发散的定义如下：

定义 2 ① 设函数 $f(x)$在区间$(a,b]$上连续，点 a 为 $f(x)$的瑕点，如果极限(7－4)存在，那么称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为该反常积分的值；如果极限(7－4)不存在，那么称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

于是有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x) f\mathrm{d}x. \qquad (7-5)$$

②设函数 $f(x)$在区间$[a,b)$上连续，点 b 为 $f(x)$的瑕点，如果极限(7－5)存在，那么称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为该反常积分的值；如果极限(7－5)不存在，那么称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (7-6)$$

③设函数 $f(x)$在区间$[a,c)$及区间$(c,b]$上连续，点 c 为 $f(x)$的瑕点. 如果反常积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$与反常积分$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$均收敛，那么称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛，并称反常积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 的值与反常积分$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值之和为反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值；否则，就称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2)计算

【例 4】计算下列反常积分：

(1) $\int_0^1 \ln x dx$　　(2) $\int_0^1 \ln^2 x dx$　　(3) $\int_0^1 \ln^k x dx$

【例 5】讨论 p 积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$

二、反常积分敛散性的判定

1. 无穷限的反常积分

定理（比较审敛原理）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)\ (a\leqslant x+<+\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；如果 $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)\ (a\leqslant x<+\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 6】判断下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；　　(2) $\int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx$.

定理 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续. 如果反常积分

$$\int_{a}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛,那么反常积分

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

也收敛.

【例 7】判定反常积分 $\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}\sin bx dx$ (a,b 都是常数,且 $a>0$)得敛散性.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 无界函数的反常积分

【例 8】判定反常积分(1) $\int_1^e \frac{1}{\ln x}dx$,(2) $\int_1^e \frac{1}{\ln^k x}dx$ 的敛散性.

【例 9】判断反常积分(1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}dx$,(2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\ (x+1)^3}$ 的敛散性

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

三、定积分的几何应用(微分法)

1. 求面积

(1)直角坐标

【例 1】计算由两条抛物线 $y^2=x, y=x^2$ 所围成图形的面积.

【例 2】计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成图形的面积.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2)极坐标

【例 3】计算心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$所围成图形的面积.

(3)参数方程

【例 4】计算星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$所围成图形的面积.

2. 求体积

(1)旋转体

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

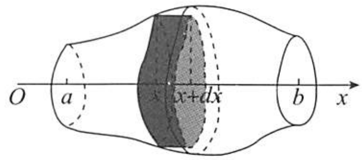
【例 5】计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体(叫做旋转椭球体)的体积.

【例 6】计算由摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与直线 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的旋转体的体积.

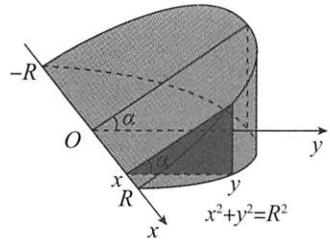
微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 7】计算由抛物线 $y=x(1-x)$ 与 x 轴所围图形绕直线 $x=-1$ 旋转一周所形成的旋转体的体积.

(2)已知平行截面面积的立体体积



【例 8】一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心,并与底面交成角 α,计算这平面截得圆柱体所得立体的体积.



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 求弧长(仅数学一、二)

【例 9】计算曲线 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的一段弧的长度.

【例 10】计算$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$的一拱($0\leqslant t\leqslant 2\pi$)的长度.

【例 11】计算阿基米德螺线 $r=a\theta(a>0)$相应于 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的一段弧的长度.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

4. 求侧面积(仅数学一、二)

巩固习题 07

一、反常积分的计算

(1)判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

① $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;　② $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;　③ $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx\,(a>0)$;

④ $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$;　⑤ $\int_0^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;　⑥ $\int_0^{2}\frac{dx}{(1-x)^2}$;

⑦ $\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.　⑧ $\int_0^{1}\ln x dx$.

(2)当 k 为何值时,反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛?当 k 为何值时,反常积分发散?又当 k 为何值时,这反常积分取得最小值?

微信公众号【顶尖考研】

二、反常积分敛散性的判定

(1)判定下列反常积分的收敛性:

(ID: djky66)

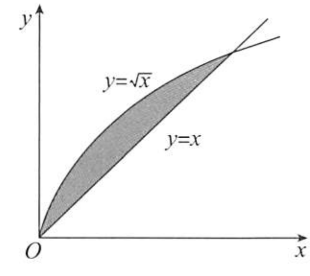
① $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;　② $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$;　③ $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x\,|\sin x|}$;

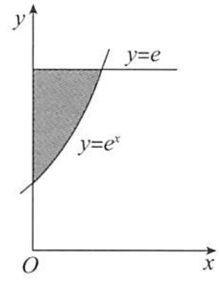
④ $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$;　⑤ $\int_1^{2}\frac{dx}{(\ln x)^3}$;　⑥ $\int_0^{1}\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

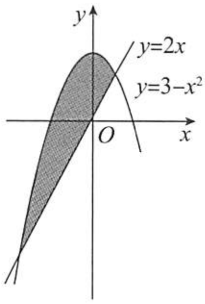
(2) 设反常积分 $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛. 证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛.

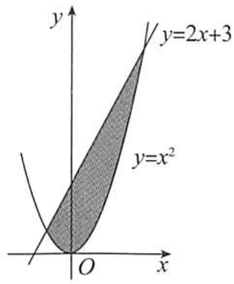
三、定积分的几何应用

(1)求下列图形中阴影部分的面积.









(2)求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

(3)求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

(4)求由摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与横轴所围成的图形的面积.

(5)求对数螺线 $r=ae^{\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 及射线 $\theta=\pi$ 所围成的图形的面积.

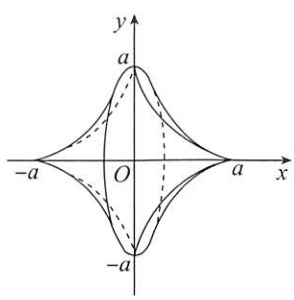
(6)求位于曲线 $y=e^x$ 下方、该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

(7)把抛物线 $y^2=4ax$ 及直线 $x=x_0,(x_0>0)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转,计算所得旋转体的体积.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(8)由 $y=x^3,x=2,y=0$ 所围成的图形,分别绕 x 轴及 y 轴旋转,计算所得两个旋转体的体积.

(9)把星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=a\sin^3 t\end{cases}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转,计算所得旋转体的体积.



(10)求下列已知曲线所围成的图形,按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

①$y=x^2,x=y^2$,绕 y 轴;

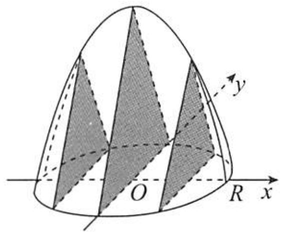
②$y=\arcsin x,x=1,y=0$,绕 x 轴;

③$x^2+(y-5)^2=16$,绕 x 轴;

④摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,$y=0$,绕直线 $y=2a$.

(11)求圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b(0<a<b)$旋转所成旋转体的体积.

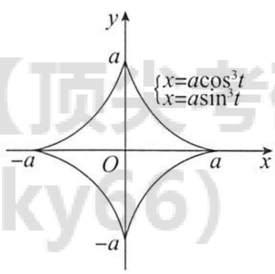
(12)计算底面是半径为 R 的圆,而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积.



(13)计算曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

(14)(仅数一、二)计算曲线 $y=\ln x$ 上相应于$\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$的一段弧的长度.

(15)(仅数一、二)计算星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=a\sin^3 t\end{cases}$的全长.



微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(16)求对数螺线 $r=ae^{\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\varphi)$的一段弧长.

(17)求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$的全长.

巩固习题 07 答案速查

一、反常积分的计算

(1)判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

①$\frac{1}{3}$ ②发散 ③$\frac{1}{a}$ ④$\frac{\pi}{4}$ ⑤1 ⑥发散 ⑦$\frac{\pi}{2}$ ⑧-1

(2)$k\leqslant 1$ 时发散,$k>1$ 时收敛;$k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$时取最小值.

二、反常积分敛散性的判定

(1)判定下列反常积分的收敛性:

①收敛 ②收敛 ③发散 ④收敛 ⑤发散 ⑥收敛

(2)证明略,提示:比较审敛法、均值不等式.

三、定积分的几何应用

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(1)求下列图形中阴影部分的面积.

①$\frac{1}{6}$ ②1 ③$\frac{32}{3}$ ④$\frac{32}{3}$

(2)$\frac{9}{4}$ (3)$\frac{16}{3}p^2$ (4)$3\pi a^2$ (5)$\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$

(6)$\frac{e}{2}$ (7)$2\pi a x_0^2$ (8)$V_x=\frac{128}{7}\pi, V_y=\frac{64}{5}\pi$ (9)$V=\frac{32}{105}\pi a^3$

(10)求下列已知曲线所围成的图形,按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

①$\frac{3}{10}\pi$ ②$\frac{1}{4}\pi^3-2\pi$ ③$160\pi^2$ ④$7\pi^2 a^3$

(11)$2\pi^2 a^2 b$ (12)$\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$ (13)$2\pi^2$

(14)(仅数一、二)$1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

(15)(仅数一、二)$6a$

(16)(仅数一、二)$\sqrt{2}a(e^{\varphi}-1)$

(17)(仅数一、二)$8a$

第 8 讲　微分方程（上）

一、微分方程的基本概念

1. 微分方程

表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程，叫做微分方程，有时也简称方程.

2. 微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫做微分方程的阶.

n 阶微分方程：$G(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$.

3. 微分方程的解

满足微分方程的函数（显函数或隐函数均可），叫做该微分方程的解.

4. 微分方程的通解

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解.

【例 1】分别求微分方程(1)$y'=x$(2)$xy'=x^2$(3)$y''=x$ 的通解.

5. 初值条件、特解与初值问题

类似 $y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y'_0$ 的已知条件，叫做微分方程的初值条件；根据初值条件，确定了通解中的任意常数以后，得到解叫做微分方程的特解.

求微分方程 $y'=f(x,y)$ 满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解这样一个问题，叫做一阶微分方程的初值问题，记作

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0. \end{cases}$$

【例 1(3)续】求满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

二、一阶微分方程

1. 可分离变量的微分方程

【例 2】求微分方程 $xy'=2\sqrt{y}-2y$ 的通解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 齐次方程

(1)k 次齐次函数：$f(tx,ty)=t^k t(x,y)$

(2)零次齐次函数：$f(tx,ty)=f(x,y)$

【例 3】求微分方程 $2xy\dfrac{dy}{dx}=x^2+2y^2$ 的通解.

(3)可化为齐次的方程

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

3. 一阶线性微分方程

【例 4】求微分方程 $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$ 的通解.

【例 5】求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$ 的通解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

4. 伯努利方程(仅数一)

三、可降阶的微分方程

1. $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程

2. $y''=f(x,y')$ 型的微分方程

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 6】求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy'$ 满足初值条件 $y(0)=1,y'(0)=3$ 的特解.

3. $y''=f(y,y')$ 型的微分方程

【例 7】求微分方程 $yy''-y'^2=0$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 08

一、一阶微分方程

(1)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

①$xy'-y\ln y=0$；　　②$y'-xy'=a(y^2+y')$；

③$y'=e^{x+y}$；　　④$ydx+(x^2-4x)dy=0$；

⑤$\cos ydx+(1+e^{-x})\sin ydy=0, y(0)=\frac{\pi}{4}$；　　⑥$y'\sin x=y\ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$；

(2)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

①$xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$；　　②$xy'=y\ln\frac{y}{x}$；

③$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}, y(1)=2$；　　④$(y^2-3x^2)dy+2xydx=0, y(0)=1$；

⑤$(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(3)设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧$\overset{\frown}{OA}$，对于$\overset{\frown}{OA}$上任一点 $P(x,y)$，曲线弧$\overset{\frown}{OP}$与直线段$\overline{OP}$所围图形的面积为 x^2，求曲线弧$\overset{\frown}{OA}$的方程.

(4)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

①$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$；　　②$(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$；

③$y\ln ydx+(x-\ln y)dy=0$；　　④$(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$；

⑤$\frac{dy}{dx}-y\tan x=\sec x, y(0)=0$；　　⑥$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}, y(\pi)=1$.

(5)求一曲线的方程，这曲线通过原点，并且它在点(x,y)处的切线斜率等于 $2x+y$.

(6)验证形如 $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ 的微分方程，可经变量代换 $v=xy$ 化为可分离变量的方程，并求其通解.

(7)用适当的变量代换化简下列微分方程化，然后求出通解：

①$\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$；　　②$xy'+y=y(\ln x+\ln y)$.

二、可降阶的微分方程.

(1)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

①$y''=y'+x$；

②$xy''+y'=0$；

③$yy''+2y'^2=0$；

④$y''=1+y'^2$；

⑤$y''-ay'^2=0,y(0)=0,y'(0)=-1$；

⑥$y''+(y')^2=1,y(0)=y'(0)=0$.

(2)试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的曲线方程.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 08 答案速查

一、一阶微分方程

(1)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

①$y=e^{Cx}$；　②$y=\dfrac{1}{a\ln|1-x-a|+C}$；

③$e^{x}+e^{-y}=C$；　④$y^{4}(4-x)=Cx$；

⑤$(e^{x}+1)\sec y=2\sqrt{2}$；　⑥$y=e^{\tan\frac{x}{2}}$ 或 $y=e^{\csc x-\cot x}$；

(2)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

①$y+\sqrt{y^{2}-x^{2}}=Cx^{2}(x>0)$，$y-\sqrt{y^{2}-x^{2}}=C(x<0)$；

②$\ln\dfrac{y}{x}=Cx+1$；　③$y^{2}=2x^{2}(\ln x+2)$；

④$y^{3}=y^{2}-x^{2}$；　⑤$x+2ye^{\frac{x}{y}}=C$.

(3)$y=x(1-4\ln x)$.

(4)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

①$y=e^{-\sin x}(x+C)$；　②$y=\dfrac{\sin x+C}{x^{2}-1}$；

③$x=\dfrac{1}{\ln y}\left(\dfrac{1}{2}ln^{2}y+C\right)$；　④$x=\dfrac{y^{2}}{2}+Cy^{3}$；

⑤$y=\dfrac{x}{\cos x}$；　⑥$y=\dfrac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$.

(5)$y=2(e^{x}-x-1)$.

(6) $\ln|x|+\displaystyle\int\frac{g(v)}{v[f(v)-g(v)]}dv=C$，求出后将 $v=xy$ 代回，得通解.

(7)用适当的变量代换化简下列微分方程化，然后求出通解：

①$y=-x+\tan(x+C)$；　②$y=\dfrac{e^{Cx}}{x}$.

二、可降阶的微分方程.

(1)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

①$y=C_{1}e^{x}-\dfrac{x^{2}}{2}-x+C_{2}$；　②$y=C_{1}\ln|x|+C_{2}$；

③$y^{3}=C_{1}x+C_{2}$；　④$y=-\ln|\cos(x+C_{1})|+C_{2}$；

⑤$y=-\dfrac{1}{a}\ln(ax+1)$；　⑥$y=\ln\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

(2)$y=\dfrac{x^{3}}{6}+\dfrac{x}{2}+1$.

第 9 讲 微分方程(下)

四、高阶线性微分方程

1. 二阶线性微分方程(推广到 n 阶)

2. 线性微分方程解的结构

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

五、常系数线性微分方程

1. 二阶常系数齐次线性微分方程(推广到 n 阶)

【例 8】求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

【例 9】求微分方程 $y''+2y'+y=0$ 满足初值条件 $y(0)=4, y'(0)=-2$ 的特解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 10】求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

【例 11】求微分方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

2. 二阶常系数齐次线性微分方程(推广到n阶)

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

【例 12】求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 13】求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

(2) $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ 型

【例 14】求微分方程 $y''+y=\sin x$ 的通解.

(3) $f(x)=e^{\alpha x}[A_m(x)\cos\beta x+B_n(x)\sin\beta x]$ 型

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 15】求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解.

六、欧拉方程(仅数一)

【例 16】求欧拉方程 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$ 的通解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 09

一、线性微分方程解的结构

(1)验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解,并写出该方程的通解.

(2)已知 $y_1=x+\cos x, y_2=x+\sin x, y_3=x$ 是二阶非齐次线性微分方程的三个解,求该微分方程的通解.

(3)已知 $y=xe^{-x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的一个特解,求 p,q.

二、二阶常系数线性微分方程

(1)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解:

①$y''-4y'=0$;

②$y''-4y'+4y=0$;

③$y''+6y'+13y=0$;

④$y^{(4)}-2y'''+y''=0$;

⑤$4y''+4y'+y=0, y(0)=2, y'(0)=0$;

⑥$y''-4y+13y=0, y(0)=0, y'(0)=3$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解:

①$2y''+y'-y=2e^x$;

②$y''+3y'+2y=3xe^{-x}$;

③$y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$;

④$y''+4y=x\cos x$;

⑤$y''+y=e^x+\cos x$;

⑥$y''-y=4xe^x, y(0)=0, y'(0)=1$.

(3)设函数 $f(x)$ 连续,且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$,求 $f(x)$.

巩固习题 09 答案速查

一、线性微分方程解的结构

(1)将 y_1、y_2 分别求导并代入方程是进行验证即可. 根据解的结构，方程的通解为：

$$y=C_1y_1+C_2y_2=(C_1+C_2x)e^{x^2}.$$

(2)$y_1-y_3=\cos x$，$y_2-y_3=\sin x$ 是二阶齐次线性微分方程的两个解，故齐次方程的通解为：$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$，从而非齐次方程的通解为：$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$.

(3)$p=2$，$q=1$.

二、二阶常系数线性微分方程

(1)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

①$y=C_1+C_2e^{4x}$；　②$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$；

③$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$；　④$y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^{x}$；

⑤$y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$　⑥$y=e^{2x}\sin 3x$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(2)求下列微分方程的通解或满足所给初始条件的特解：

①$y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^{x}$；

②$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\left(\dfrac{3}{2}x^2-3x\right)$；

③$y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\dfrac{1}{4}xe^{x}\cos 2x$；

④$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$；

⑤$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}x\sin x$；

⑥$y=e^{x}(x^2-x+1)-e^{-x}$.

(3)$f(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^{x})$.

第10讲　多元函数微分法与极值

一、多元函数、极限、连续

1. 二元函数 $z=f(x,y)$

2. 二元函数的极限

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

定义 设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得当点 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0).$$

为了区别于一元函数的极限，我们把二元函数的极限叫做二重极限.

(1)转化为一元极限

【例1】求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

(2)极限不存在

【例 2】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(3)极限为零

【例 3】$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

3. 二元函数的连续性

定义设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的聚点，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

那么称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

二、偏导数

1. 偏导数的定义

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0 y_0)$ 的某一领域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,那么称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},z_x\Big|\text{或}f_x(x_0,y_0).$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},z_y\Big|\text{或}f_y(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,那么这个偏导数就是 x、y 的函数,它就称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x\text{ 或 }f_x(x,y).$$

类似地,可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y\text{ 或 }f_y(x,y).$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

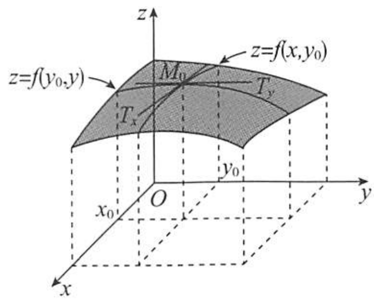
至于实际求 $z=f(x,y)$ 的偏导数,并不需要用新的方法,因为这里只有一个自变量在变动,另一个自变量是看做固定的,所以仍旧是一元函数的微分法问题.求$\frac{\partial f}{\partial x}$时,只要把 y 暂时看做常量而对 x 求导数;求$\frac{\partial f}{\partial y}$时,只要把 x 暂时看做常量而对 y 求导数.

【例 4】求 $z=\frac{x}{y}e^{xy}$ 的偏导数

2. 偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数有下述几何意义.

设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点，过 M_0 作平面 $y=y_0$，截此曲面得一曲线，此曲线在平面 $y=y_0$ 上的方程为 $z=f(x,y_0)$，则导数 $\left.\frac{d}{dx}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$，即偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，就是这曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率(见图 9—5). 同样，偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.



3. 高阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 5】设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

三、全微分

1. 定义

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某领域内有定义，如果函数在点 (x,y) 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A 和 B 不依赖于 Δx 和 Δy 而仅与 x 和 y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，那么称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

定理 1（必要条件） 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，那么该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

定理 2(充分条件) 如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$连续[①]，那么函数在该点可微分.

【例 6】设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

问：$f(x,y)$在$(0,0)$处是否可微？

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 计算

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

【例 7】计算函数 $u=x+\sin\frac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

四、多元复合函数的求导法则

【例 8】设 $u=f(x+y+z,xyz)$，且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

五、多元隐函数求偏导

【例 9】设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

六、多元函数的极值

定理 1（必要条件）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

定理 2（充分条件）设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某领域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A,f_{xy}(x_0,y_0)=B,f_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$ 时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论.

【例 10】求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

七、多元函数的条件极值

【引例】长为 $2l$ 的绳子，围成矩形，什么时候面积最大？

【例 11】求函数 $u=xyz$ 在附加条件

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}\ (x>0,y>0,z>0,a>0)$$

下的极值.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

五、闭区域上多元连续函数的最值

【例 12】设有一圆板占有平面闭区域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.该圆板被加热,以致在点$(x,y)$的温度是$T=x^2+2y^2-x$.求该圆板的最热点和最冷点.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

巩固习题 10

一、求下列各二重极限，不存的说明理由：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

二、计算下列偏导数

(1) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$　　(2) $z=(1+xy)^y$　　(3) $u=x^{\frac{y}{z}}$

(4)设 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，则 $l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}=$____________.

微信公众号【顶尖考研】

(5)设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，则 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________.

(ID: djky66)

(6)设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f_x(x,1)=$____________.

(7)设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

(8)设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=$____________.

三、求下列函数的全微分

(1) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　(2) $u=x^{yz}$

(3)设 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，则 $dz\big|_{(1,2)}=$____________.

(4)求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

(5)考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

②$f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)连续；

③$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微分；

④$f(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$存在.

若用 $P\Rightarrow Q$,表示可由性质 P 推出性质 Q,则下列四个选项中正确的是(　　).

(A)②⇒③⇒①　　(B)③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒①　　(D)③⇒①⇒④

四、计算下列偏导数

(1)设 $z=u^2\ln v$,而 $u=\dfrac{x}{y}$,$v=3x-2y$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(2)设 $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$,而 $y=a\sin x$,$z=\cos x$,求$\dfrac{du}{dx}$.

(3)设 $z=\arctan\dfrac{x}{y}$,而 $x=u+v$,$y=u-v$,求$\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=$____________.

(4)求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数)：

①$u=f(x^2-y^2,e^{xy})$；　②$u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$；　③$u=f(x,xy,xyz)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(5)设 $z=xy+xF(u)$,而 $u=\dfrac{y}{x}$,$F(u)$为可导函数,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(6)设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$,其中 $f(u)$为可导函数,则$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________.

(7)求下列函数的二阶偏导数(其中 f 具有二阶连续偏导数)：

①$z=f(x,\dfrac{x}{y})$；　②$z=f(xy^2,x^2y)$.

(8)设 $u=f(x,y)$的所有二阶偏导数连续,而 $x=\dfrac{s-\sqrt{3}t}{2}$,$y=\dfrac{\sqrt{3}s+t}{2}$,证明：

①$(\dfrac{\partial u}{\partial x})^2+(\dfrac{\partial u}{\partial y})^2=(\dfrac{\partial u}{\partial s})^2+(\dfrac{\partial u}{\partial t})^2$；

②$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

五、计算下列偏导数

(1)设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(2)设$\dfrac{x}{z}=ln\dfrac{z}{y}$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(3)设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，则$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

(4)设 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$都是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的具有连续偏导数的函数，则$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

(5)设 $\Phi(u,v)$具有连续偏导数，$z=f(x,y)$由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定，则 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

(6)设 $e^z-xyz=0$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$________.

(7)设 $z^3-3xyz=a^3$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

(8)设 $y=f(x,t)$，而 $t=t(x,y)$是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数，试证明：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}$.

六、求下列函数的极值与条件极值

微信公众号【顶尖考研】

(1)求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

(2)求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$的极值.

(ID：djky66)

(3)求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

(4)求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

(5)从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

(6)在平面 xOy 上求一点，使它到 $x=0$，$y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

(7)将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体，问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体的体积为最大？

(8)抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

巩固习题 10 答案速查

一、求下列各二重极限，不存的说明理由：

(1) -2；　　(2) 0；　　(3) 不存在；

(4) 不存在，取 $y=x$ 和 $y=-x$；　　(5) 0.

二、计算下列偏导数

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$

(4) 0　　(5) $2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$　　(6) 1

(7) $f_{xx}(0,0,1)=2$，$f_{xz}(1,0,2)=2$，$f_{yz}(0,-1,0)=0$，$f_{zzx}(2,0,1)=0$.

(8) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、求下列函数的全微分

(1) $z=-\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(ydx-xdy)$

(2) $du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$

(3) $dz|_{(1,2)}=\dfrac{1}{3}dx+\dfrac{2}{3}dy$ (4) $\Delta z=-0.119$，$dz=-0.125$ (5) (A)

四、计算下列偏导数

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\dfrac{3x^2}{(3x-2y)y^2}$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x}{y^3}\ln(3x-2y)-\dfrac{2x^2}{(3x-2y)y^2}$

(2) $\dfrac{du}{dx}=e^{ax}\sin x$. (3) $\dfrac{u-v}{u^2+v^2}$

(4) ① $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xf'_1+ye^{xy}f'_2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2yf'_1+xe^{xy}f'_2$；

② $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}f'_1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}f'_1+\dfrac{1}{z}f'_2$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}f'_2$；

③$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3,\frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3,\frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3.$

(5)$2xy+xF(u)$.　　　　　　(6)$\frac{1}{yf(x^2-y^2)}$.

(7)求下列函数的二阶偏导数(其中 f 具有二阶连续偏导数)：

① $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{11}+\frac{2}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}$； $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2}f'_2-\frac{x}{y^2}f''_{12}-\frac{x}{y^3}f''_{22}$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'_2+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}$；

②$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2yf'_2+y^4f''_{11}+4xy^3f''_{12}+4x^2y^2f''_{22}$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2yf'_1+2xf'_2+2xy^3f''_{11}+5x^2y^2f''_{12}+2x^3yf''_{22}$；

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2xf'_1+4x^2y^2f''_{11}+4x^3yf''_{12}+x^4f''_{22}$.

(8)证明略

五、计算下列偏导数

微信公众号【顶尖考研】

(1)$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$.

(ID:djky66)

(2)$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

(3)1　　　　　　(4)-1　　　　　　(5)c

(6)$\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$

(7)$\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$

(8)$\frac{dy}{dx}=\frac{f_xF_t-f_tF_x}{F_t+f_tF_y}$.

六、求下列函数的极值与条件极值

(1)在点$(2,-2)$处,函数取极大值 $f(2,-2)=8$.

(2)在点$(3,2)$处,函数取极大值 $f(3,2)=36$.

(3)在点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$处,函数取极小值 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$.

(4)极大值为$\frac{1}{4}$.

(5)有最大周长的直角三角形为等腰直角三角形.

(6) $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$.

(7)矩形边长为$\dfrac{2p}{3}$和$\dfrac{p}{3}$时,绕短边旋转所得圆柱体体积最大.

(8)最大值为$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$,最小值为$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第 11 讲　二重积分

一、概念

1. 几何意义

2. 物理意义

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

二、性质

1. $\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma = \alpha\iint\limits_D f(x,y)d\sigma + \beta\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

2. $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

其中：$D_1 \cup D_2 = D$，D_1 与 D_2 最多只有边界重合.

3. 若 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$，则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

4. $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$，则：$mS_D \leqslant \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leqslant MS_D$.

5. $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot S_D$，$(\xi,\eta)\in D$.

6. $\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$

7. 对称性

(1)普通对称性.(偶倍奇零)

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(2)轮换对称性

【例 1】$f(x)$在$[0,1]$上连续且恒正,$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,则

$$I=\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=\_\_\_\_\_\_.$$

三、计算

1. 直角坐标系.

(1)X 型

(2)Y 型

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 2】$I=\iint\limits_{D} y\sqrt{1+x^2=y^2}\,dxdy$，其中 D 由直线 $y=x, x=-1, y=1$ 所围成.

2. 极坐标系

(1)θ 型

(2)r 型(了解)

【例 3】计算 $I=\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(3)6 个常见的圆.

【例 4】$I=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$

【例 5】$I=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$,其中 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant k^2\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 11

一、二重积分的定义与性质

1. 试确定积分区域 D，使二重积分 $\iint\limits_D 1-2x^2-y^2dxdy$ 达到最大值.

2. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3d\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3d\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2d\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$；

微信公众号【顶尖考研】

(4) $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 3\leqslant x\leqslant 5,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

3. 计算下列二重积分：

(ID: djky66)

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$；

(2) $\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$，其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域；

(3) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$；

(4) $\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma$，其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$，$(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形闭区域.

(5) $\iint\limits_D x\sqrt{y}d\sigma$. 其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$，$y=x^2$ 所围成的闭区域；

(6) $\iint\limits_D xy^2d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域；

(7) $\iint\limits_D e^{x+y}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(8) $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=2$，$y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

4. 化二重积分 $I=\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma$ 为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分),其中积分区域 D 是:

(1)由直线 $y=x$ 及抛物线 $y^2=4x$ 所围成的闭区域;

(2)由 x 轴及半圆周 $x^2+y^2=r^2(y\geqslant 0)$ 所围成的闭区域;

(3)由直线 $y=x,x=2$ 及双曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 所围成的闭区域;

(4)环形闭区域 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$.

5. 二重积分的应用

(1)(仅数一、二)设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2,y=x$ 和 x 轴所围成,它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$,求该薄片的质量.

(2)计算由四个平面 $x=0,y=0,x=1,y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

(3)求由平面 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体的体积.

6. 把下列积分化为极坐标形式,并计算被积函数为具体表达式的积分值:

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$;　　(2) $\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$;

(3) $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;　　(4) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$;

(5) $\int_0^{2a} dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)dy$;　　(6) $\int_0^a dx\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dy$;

(7) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$;　　(8) $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dx$.

7. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_{D}e^{x^2+y^2}d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域;

(2) $\iint\limits_{D}\ln(1+x^2+y^2)d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域;

(3) $\iint\limits_{D}\arctan\dfrac{y}{x}d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4,x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0,y=x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

(4) $\iint\limits_{D}\dfrac{x^2}{y^2}d\sigma$,其中 D 是由直线 $x=2,y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域;

(5) $\iint\limits_{D}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域；

(6) $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x,y=x+a,y=a,y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域；

(7) $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$，其中 D 是圆环形闭区域 $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 11 答案速查

一、二重积分的定义与性质

1. $D=\{(x,y)\mid 1-2x^2-y^2>0\}$.

2. 根据二重积分的性质,比较下列积分的大小:

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma > \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma < \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma > \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$

(4) $\iint\limits_D \ln(x+y) d\sigma < \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$

3. 计算下列二重积分:

(1) $\frac{8}{3}$　(2) $\frac{20}{3}$　(3) 1　(4) $-\frac{3}{2}\pi$　(5) $\frac{6}{55}$　(6) $\frac{64}{15}$　(7) $e-e^{-1}$　(8) $\frac{13}{6}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

4. 化二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 为二次积分(分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分),其中积分区域 D 是:

(1) $I=\int_0^4 dx\int_x^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy=\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)dx$

(2) $I=\int_{-r}^{r} dx\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)dy=\int_0^r dy\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)dx$

(3) $I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

(4) $I=\int_0^{2\pi} d\theta\int_1^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=\int_1^2 rdr\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$

5. 二重积分的应用

(1)(仅数一、二) $\frac{4}{3}$　　(2) $\frac{7}{2}$　　(3) $\frac{17}{6}$

6. 把下列积分化为极坐标形式,并计算被积函数为具体表达式的积分值:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\sec\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_0^{2\sec\theta} f(r)rdr$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\tan\theta\sec\theta}^{\sec\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

(5) $\frac{3}{4}\pi a^4$

(6) $\frac{a^3}{6}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$

(7) $\sqrt{2}-1$ (8) $\frac{1}{8}\pi a^4$

7. 计算下列二重积分：

(1) $\pi(e^4-1)$ (2) $\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$ (3) $\frac{3}{64}\pi^2$ (4) $\frac{9}{4}$

(5) $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$ (6) $14a^4$ (7) $\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3)$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第12讲 数项级数（数一、三）

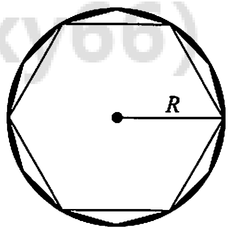
一、概念

人们认识事物在数量方面的特性，往往有一个由近似到精确的过程．在这种认识过程中，会遇到由有限个数量相加到无穷多个数量相加的问题．

例如计算半径为 R 的圆面积 A，具体做法如下：作圆的内接正六边形，算出这六边形的面积 a_1，它是圆面积 A 的一个粗糙的近似值．为了比较准确地计算出 A 的值，我们以这个正六边形的每一边为底分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这六个等腰三角形的面积之和 a_2．那么 a_1+a_2（即内接正十二边形的面积）就是 A 的一个较好的近似值同样地，在这正十二边形的每边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这十二个等腰三角形的面积之和 a_3．那么 $a_1+a_2+a_3$（即内接正二十四边形的面积）是 A 的一个更好的近似值．如此继续下去，内接正 3×2^n 边形的面积就逐步逼近圆面积：

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

$$A\approx a_1, A\approx a_1+a_2, A\approx a_1+a_2+a_3, \cdots, A\approx a_1+a_2+\cdots+a_n.$$



如果内接正多边形的边数无限增多，即 n 无限增大，那么和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的极限就是所要求的圆面积 A．这时和式中的项数无限增多，于是出现了无穷多个数量依次相加的数学式子．

定义 如果级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_i$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s，即

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

那么称无穷级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_i$ 收敛，这时极限 s 叫做这级数的和，并写成

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_i+\cdots;$$

如果 $\{s_n\}$ 没有极限，那么称无穷级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_i$ 发散．

【例 1】判断下列级数的敛散性.

(1)无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

(2)等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^n, a \neq 0$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(3)调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

二、性质

性质 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 ks.

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于和 s 与 σ，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $s \pm \sigma$.

性质 2 也说成：两个收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

性质 3 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性.

性质 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，那么对这级数的项任意加括号后所成的级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots \quad (1-4)$$

仍收敛，且其和不变.

根据性质 4 可得如下推论：如果加括号后所成的级数发散，那么原来级数也发散.

性质 5 （级数收敛的必要条件）如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，那么它的一般项 u_n 趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、正项级数敛散性的判定

1. 参照级数

(1)比较审敛法

定理 1 （比较审敛法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant v_n (n=1,2,\cdots)$. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；反之，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

注意到级数的每一项同乘不为零的常数 k 以及去掉级数前面部分的有限项不会影响级数的收敛性，我们可得如下推论：

推论 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，且存在正整数 N，使当 $n \geqslant N$ 时有 $u_n \leqslant kv_n (k>0)$ 成立，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，且当 $n \geqslant N$ 时有 $u_n \geqslant kv_n (k>0)$ 成立，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理 2 （比较审敛法的极限形式）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，

(1)如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l(0\leqslant l<+\infty)$,且函数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(2)如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l>0$或$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散,那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

【例 2】判断下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

2. 自身比较

定理 3（比值审敛法，达朗贝尔（d'Alembert）判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

那么当 $\rho<1$ 时级数收敛，$\rho>1$（或 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$）时级数发散，$\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

【例 3】判断下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

定理 4（根值审敛法，柯西判别法）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho,$$

那么当 $\rho<1$ 时级数收敛，$\rho>1$（或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=+\infty$）时级数发散，$\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散.

【例 4】判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

定理 5(极限审敛法)设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

(1)如果$\lim_{n\to\infty} nu_n = l > 0$(或$\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$),那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

(2)如果 $p>1$,而$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l\ (0 \leqslant l < +\infty)$,那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

四、交错级数敛散性的判定

定理 6(莱布尼茨定理) 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件:

(1)$u_n \geqslant u_{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$;

(2)$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

那么级数收敛,且其和 $s \leqslant u_1$,其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

【例 5】判断交错 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

五、一般级数的敛散性

定理 7 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛.

【例 6】判断下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 12

一、判断下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}(a>0)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$;　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$;　　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;　　(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4}{n!}$;　　(16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$;

(17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$;　　(18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{na+b}(a>0,b>0)$;

(19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$,其中 $a_n\to a(n\to\infty)$,a_n,b,a 均为正数.

二、判定下列级数是否收敛?如果是收敛的,是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^4}+\cdots$;

(4) $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

巩固习题 12 答案速查

一、判断下列级数的敛散性

(1)发散；　(2)收敛；　(3)收敛；

(4)发散；　(5)收敛；　(6)收敛；

(7)发散；　(8)收敛；　(9)收敛；

(10)收敛；　(11)收敛；　(12)收敛；

(13)收敛；　(14)收敛；　(15)收敛；

(16)发散；　(17)收敛；　(18)发散；

(19)$b<a$ 时，收敛；$b>a$ 时，发散；$b=a$ 时，敛散性不确定(例如：当 $b=1,a_n=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 发散；当 $b=1,a_n=n^{\frac{2}{n}}\to 1(n\to\infty)$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛).

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

二、判定下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1)条件收敛；　(2)绝对收敛；　(3)绝对收敛；

(4)条件收敛；　(5)发散.

第 13 讲 幂级数(数一、三)

一、函数项级数

1. 概念

(1)通项为 $u_n(x)$

如果给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \cdots, u_n(x), \cdots,$$

那么由这函数列构成的表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{13-1}$$

称为定义在区间 I 上的(函数项)无穷级数,简称(函数项)级数.

(2)收敛域、发散域

对于每一个确定的值 $x_0 \in I$,函数项级数(13-1)成为常数项级数

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots. \tag{13-2}$$

这个级数(13-2)可能收敛也可能发散.如果级数(13-2)收敛,就称点 x_0 是函数项级数(13-1)的收敛点;如果级数(13-2)发散,就称点 x_0 是函数项级数(13-1)的发散点.函数项级数(13-1)的收敛点的全体称为它的收敛域,发散点的全体称为它的发散域.

(3)和函数

对应于收敛域内的任意一个数 x,函数项级数成为一收敛的常数项级数,因而有一确定的和 s.这样,在收敛域上,函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$,通常称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数,这函数的定义域就是级数的收敛域,并写成

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

2. 重要级数

(1)幂级数(数学一、三)(2)傅里叶级数(三角级数)(仅数学一)

二、幂级数

1. 概念

函数项级数中简单而常见的一类级数就是各项都是常数乘幂函数的函数项级数,即所谓幂级数,它的形式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

其中常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 叫做幂级数的系数.

2. 收敛区间与收敛域

(1)比值法、根值法

【例 1】求下列级数的收敛域

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{4^n \cdot n}$

(2)阿贝尔定理

定理 1 (阿贝尔(Abel)定理) 如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0\,(x_0\neq 0)$ 时收敛,那么适合不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 使这幂级数绝对收敛. 反之,如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0$ 时发散,那么适合不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 使这幂级数发散.

(3)收敛半径

推论 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛,也不是在整个数轴上都收敛,那么必有一个确定的正数 R 存在,使得

当 $|x|<R$ 时,幂级数绝对收敛;

当 $|x|>R$ 时,幂级数发散;

当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时,幂级数可能收敛也可能发散.

定理 2 如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho,$$

其中 a_n、a_{n+1} 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的相邻两项的系数,那么这幂级数的收敛半径

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

【例 2】求下列级数的收敛半径

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n \cdot n}$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$

3. 幂级数求和函数

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ (x \in I),$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\ (|x|<R),$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

【例3】求下列幂级数的和函数

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n$

4. 函数展开成幂级数

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 4】将下列函数展开为幂级数

(1) $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$

(2) $f(x)=\arctan x$

(3) $f(x)=x^2\ln\frac{1+x}{1-x}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(4) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

(5) $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$,展开成$(x-1)$的幂级数.

巩固练习 13

一、求下列幂级数的收敛区间：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2}$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2\cdot 4\cdots(2n)}$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 3^n}$；　(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}x^n$；　(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$；

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

二、求下列级数的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1}$　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^{n+3}$

微信公众号【顶尖考研】

三、将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(ID：djky66)

(1) $\sin^2 x$；　(2) $(1+x)\ln(1+x)$；　(3) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(4)将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

(5)将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

巩固习题 13 答案速查

一、求下列幂级数的收敛区间:

(1)$(-1,1)$　　(2)$(-1,1)$　　(3)$(-\infty,+\infty)$

(4)$(-3,3)$　　(5)$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　(6)$(-1,1)$

(7)$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　(8)$(4,6)$.

二、求下列级数的和函数:

(1)$S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}(-1<x<1)$

(2)$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{4x}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2x}\arctan x-1, & x\in(-1,0)\cup(0,1), \\ 0, & x=0.\end{cases}$

(3)$S(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,1)$

(4)$S(x)=\frac{3x^4-2x^5}{(1-x)^2}(-1<x<1)$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、将下列函数展开成 x 的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1) $\sin^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)$

(2) $(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)},x\in(-1,1]$

(3) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1},x\in[-1,1]$

(4) $\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-3)^n,x\in(0,6)$

(5) $\frac{1}{x^2+3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n,x\in(-6,-2)$

第 14 讲　向量代数与空间几何（数一）

一、向量的积运算

1. 数量积

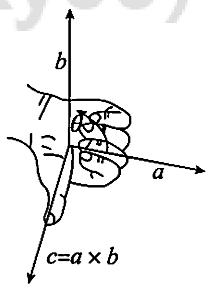
2. 向量积

设向量 $\boldsymbol{c}$ 由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出：

$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 间的夹角；$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面（即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$）$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定（图 8－24），向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

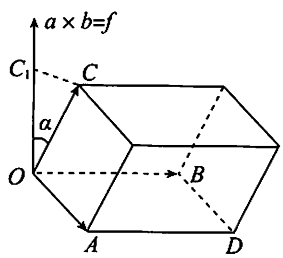
$$c=a\times b.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)



3. 混合积

设已知三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$。先作两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，把所得到的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 再作数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，这样得到的数量叫做三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作 $[\boldsymbol{abc}]$.

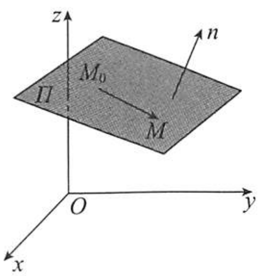


向量的混合积 $[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 是这样一个数,它的绝对值表示以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 如果向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 组成右手系(即 $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定),那么混合积的符号是正的;如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 组成左手系(即 $\boldsymbol{c}$ 的指向按左手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定),那么混合积的符号是负的.

二、平面与直线

1. 平面

(1)点法式

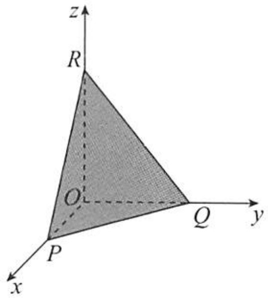


【例 1】求过三点 $M_1(2,-1,4)$,$M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$ 的平面的方程.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2)一般式

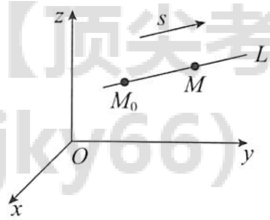
(3)截距式



2. 直线

(1)一般式

(2)点向式



微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(3)参数式

【例 2】求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程.

3. 平面束

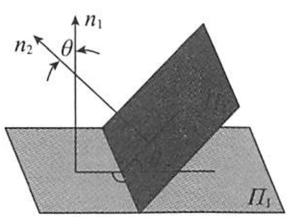
【例 3】求过直线$\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-y+z+1=0\end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

4. 夹角

(1)平面与平面

两平面的法线向量的夹角(通常指锐角或直角)称为两平面的夹角.

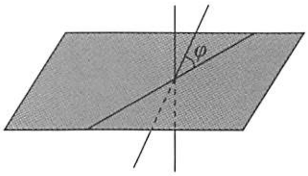


(2)直线与直线

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角或直角)叫做两直线的夹角.

(3)直线与平面

当直线与平面不垂直时,直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$称为直线与平面的夹角,当直线与平面垂直时,规定直线与平面的夹角为$\frac{\pi}{2}$.



5. 距离

(1)点到平面

(2)点到直线

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

三、曲面与曲线

1. 曲面

(1)曲面方程 $F(x,y,z)=0$

(2)旋转曲面

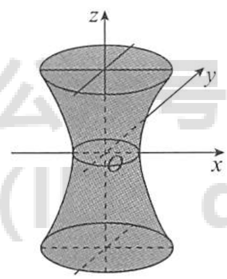
以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面,旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴.

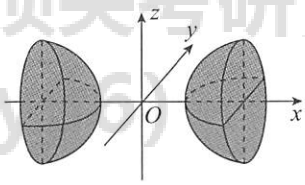
【例 4】求下列旋转曲面方程：

①曲线 $z=y$ 绕 z 轴旋转.

②曲线 $z=y^2$ 绕 z 轴旋转.

③曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴和 x 轴旋转.





微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(3)柱面

一般地,直线 L 沿定曲线 C 平行移动形成的轨迹叫做柱面,定曲线 C 叫做柱面的准线,动直线 L 叫做柱面的母线.

(4)二次曲面

二次曲面有九种,适当选取空间直角坐标系,可得它们的标准方程.下面就九种二次曲面的标准方程来讨论二次曲面的形状.

①椭圆锥面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

②椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

③单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

④双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

⑤椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

⑥双曲抛物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

2. 曲线

(1)一般式

(2)参数式

微信公众号【顶尖考研】

(ID：djky66)

(3)投影

【例 5】设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $y=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成，求它在 xOy 面上的投影.

四、空间曲线的切线与法平面

1. 参数式曲线

2. 一般式曲线(切平面交线)

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 6】求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

五、空间曲面的切平面与法法

1. $F(x,y,z)=0$

2. $z=f(x,y)$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 7】求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.

巩固习题 14

一、平面与直线

1. 求过点$(3,0,-1)$且与平面$3x-7y+5z-12=0$平行的平面方程.

2. 求过点$M_0(2,9,-6)$且与连接坐标原点及点M_0的线段OM_0垂直的平面方程.

3. 一平面过点$(1,0,-1)$且平行于向量$\boldsymbol{a}=(2,1,1)$和$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$,试求这平面方程.

4. 一平面平行于x轴且经过两点$(4,0,-2)$和$(5,1,7)$,试求这平面方程.

5. 求点$(1,2,1)$到平面$x+2y+2z-10=0$的距离.

6. 求过点$(2,0,-3)$且与直线$\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x-5y-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程.

7. 求过点$(0,2,4)$且与两平面$x+2z=1$和$y-3z=2$平行的直线方程.

8. 求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

9. 求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0,\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.

二、曲面与曲线

1. 将xOz坐标面上的抛物线$z^2=5x$绕x轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

2. 将xOz坐标面上的圆$x^2+z^2=9$绕x轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

3. 将xOy坐标面上的双曲线$4x^2-9y^2=36$分别绕x轴及y轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

4. 将空间直线$\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

5. 求球面$x^2+y^2+z^2=9$与平面$x+z=1$的交线在xOy面上的投影的方程.

6. 求上半球$0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$与圆柱体$x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$的公共部分在$xOy$面和$xOz$面上的投影.

7. 求旋转抛物面$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$在三坐标面上的投影.

三、切线、法平面与切平面、法线

1. 求曲线$x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1+t}{t},z=t^2$在对应于$t_0=1$的点处的切线及法平面方程.

2.求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$在点(1,1,1)处的切线及法平面方程.

3.求出曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上的点,使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

4.求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点$(2,1,O)$处的切平面及法线方程.

5.求曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面及法线方程.

6.求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

7.求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点$(-1,-2,3)$处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

巩固习题14答案速查

一、平面与直线

1. $3x-7y+5z-4=0$.

2. $2x+9y-6z-121=0$.

3. $x+y-3z-4=0$.

4. $9y-z-2=0$.

5. $d=1$,

6. $24x+14y+z-45=0$.

7. $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

8. $d=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

9. $\begin{cases}17x+31y-37z-117=0,\\4x-y+z=0.\end{cases}$

二、曲面与曲线

1. $y^2+z^2=5x$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

2. $x^2+y^2+z^2=9$.

3. 绕 x 轴:$4x^2-9y^2-9z^2=36$;绕 y 轴:$4x^2-9y^2+4z^2=36$.

4. $x^2+y^2=1+(z-2)^2$. 5. $\begin{cases}2x^2-2x+y^2=8,\\z=0\end{cases}$.

6. xOy 面投影:$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant ax,\\z=0.\end{cases}$ xOz 面投影:$\begin{cases}z\leqslant\sqrt{a^2-ax},x\geqslant0,z\geqslant0,\\y=0.\end{cases}$

7. xOy 面投影:$\begin{cases}x^2+y^2\leqslant4,\\z=0.\end{cases}$;$yOz$ 面投影:$\begin{cases}y^2\leqslant z\leqslant4,\\x=0.\end{cases}$;$xOz$ 面投影:$\begin{cases}x^2\leqslant z\leqslant4,\\y=0.\end{cases}$

三、切线、法平面与切平面、法线

1. 切线:$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}$;法平面:$2x-8y+16z-1=0$.

2. 切线:$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$或$\begin{cases}-x+2y+2z=3,\\2x-3y+5z=4.\end{cases}$法平面:$16x+9y-z-24=0$.

3. $(-1,1,-1)$或$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$.

4. 切平面：$x+2y-4=0$；法线：$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$.

5. 切平面：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$；法线：$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$.

6. $x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}$.

7. $\frac{3}{\sqrt{22}}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第 15 讲 三重积分与傅里叶级数(数一)

一、三重积分的概念

二、三重积分的性质(与二重积分一致)

1. 普通对称性

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 轮换对称性

【例 1】设空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$，$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则有

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$

三、三重积分的计算

1. 截面法

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 2】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

【例 3】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega_1} dV$，其中 $\Omega = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\}$.

【例 4】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega_1} dV$，其中 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 投影法

【例 2】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x dv$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

【例 3】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} dV$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\}$.

【例 4】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} dV$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

3. 柱面坐标

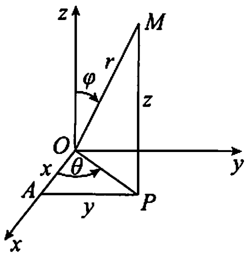
【例 2】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x dv$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

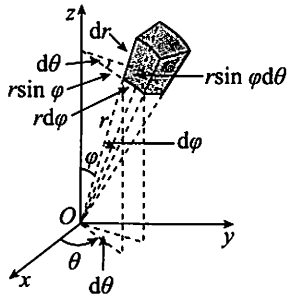
【例 3】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} dV$，其中 $\Omega=\{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 4】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} dV$，其中 $\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}\}$.

4. 球面坐标





【例 3】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} dV$,其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid \sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2}\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 4】计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} dV$,其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2}\}$.

四、三重积分的应用

1. 形心与质心

(1)薄片的质心的坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_{D}x\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{D}\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma},\ \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_{D}y\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{D}\mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}.$$

(2)类似地,占有空间有界闭区域 Ω、在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$(假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续)的物体的质心坐标是

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

其中 $M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$.

【例 5】求均匀半球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0$ 的质心.

2. 转动惯量

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 6】求密度为 ρ 的均匀球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 对于 z 轴的转动惯量.

五、傅里叶级数(三角级数)

1. 三角函数系

所谓三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots \tag{15-4}$$

在区间$[-\pi,\pi]$上正交,就是指在三角函数系(15-4)中任何不同的两个函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分等于零,即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n).$$

在三角函数系(15-4)中,两个相同函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分不等于零,即

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,\mathrm{d}x=2\pi,\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi,\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

2. 傅里叶级数

3. 狄利克雷收敛定理

定理(收敛定理,狄利克雷(*Dirichlet*)充分条件)设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数,如果它满足:

(1)在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点,

(2)在一个周期内至多只有有限个极值点,

那么 $f(x)$的傅里叶级数收敛,并且

当 x 是 $f(x)$的连续点时,级数收敛于 $f(x)$;

当 x 是 $f(x)$的间断点时,级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

【例 1】设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

4. 正弦级数、余弦级数

【例 2】将函数 $f(x)=x,x\in[0,\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 15

一、三重积分的计算

1. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 分别是：

(1)由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0,z=0$ 所围成的闭区域；

(2)由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域；

(3)由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域；

(4)由曲面 $cz=xy(c>0),\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,z=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域.

2. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x,x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域.

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的四面体.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

4. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xyzdxdydz$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xzdxdydz$，其中 Ω 是由平面 $z=0,z=y,y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

6. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$，其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域.

7. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}zdv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域；

8. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域.

9. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+x^2=1$ 所围成的闭区域；

10. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}zdv$，其中闭区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-a)^2\leqslant a^2,x^2+y^2\leqslant z^2$ 所确定.

11. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy\,dv$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域；

12. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域；

13. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dv$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域；

14. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dv$. 其中闭区域 Ω 由不等式 $0<a\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant A$，$z\geqslant 0$ 所确定.

15. 计算由曲面 $z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；所围成的立体的体积.

16. 计算由曲面 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$ 所围成的立体的体积.

二、傅里叶级数

1. 将下列函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{3}\,(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$；

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2) $f(x)=\begin{cases} e^x, -\pi\leqslant x<0, \\ 1, 0\leqslant x\leqslant\pi. \end{cases}$

2. 将函数 $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}\,(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成傅里叶级数.

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & -\pi\leqslant x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ x, & -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi, \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

4. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

5. 将函数 $f(x)=2x^2\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

6. 将下列函数分别展开成正弦级数和余弦级数：

(1) $f(x)=\begin{cases} x, 0\leqslant x<\dfrac{l}{2}, \\ l-x, \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l; \end{cases}$ (2) $f(x)=x^2\,(0\leqslant x\leqslant 2)$.

巩固习题 15 答案速查

一、三重积分的计算

1.(1) $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{xy}f(x,y,z)dz$.

(2) $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)dz$.

(3) $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{2x^2+y^2}^{2-x^2}f(x,y,z)dz$.

(4) $I=\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_0^{\frac{xy}{c}}f(x,y,z)dz$. v

2\. $\frac{1}{364}$.

3\. $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$.

4\. $\frac{1}{48}$.

5\. 0.

6\. $\frac{1}{4}\pi R^2h^2$.

7\. $\frac{7}{12}\pi$.

8\. $\frac{16}{3}\pi$.

9\. $\frac{4}{5}\pi$.

10\. $\frac{7}{6}\pi a^4$.

11\. $\frac{1}{8}$.

12\. $\frac{1}{10}\pi$.

13\. 8π.

14\. $\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5)$.

15\. $\frac{32}{3}\pi$.

16\. $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

二、傅里叶级数

1.(1) $f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx\ x\in(-\pi,\pi)$.

(2) $f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+\left[\frac{-n+(-1)^nne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}\right]\sin nx\right\}, x\in(-\pi,\pi)$

2\. $f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx\ x\in[-\pi,\pi]$.

3\. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx, x\neq(2k+1)\pi(k\in Z)$. v

4\. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx, x\in(0,\pi]$.

5\. (1) $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)-\frac{2}{n^3}\right]\sin nx, x\in[0,\pi)$.

(2) $f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, x\in[0,\pi]$.

6. (1) $f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{l}, x\in[0,l]$;

$f(x)=\frac{l}{4}-\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{2(2k-1)\pi x}{l}, x\in[0,l]$.

(2) $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\right\}\sin\frac{n\pi x}{2}, x\in[0,2)$;

$f(x)=\frac{4}{3}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}, x\in[0,2]$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第 16 讲 曲线积分（数一）

一、第一类曲线积分

1. 概念

2. 性质

(1)基本性质

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

性质 1 设 α、β 为常数，则

$$\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}s=\alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}s+\beta\int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$$

性质 2 若积分弧段 L 可分成两段光滑曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2}f(x,y)\mathrm{d}s.$$

性质 3 设在 L 上 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\leqslant\int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$$

特别地，有

$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_L|f(x,y)|\mathrm{d}s.$$

(2)普通对称性(偶倍奇零)

(3)轮换对称性

3. 计算

定理 设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续,L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

若 $\varphi(t)$,$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数,且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t) \neq 0$,则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在,且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha < \beta).$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 1】计算 $\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$,其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $O(0,0)$ 与点 $B(1,1)$ 之间的一段弧

二、第二类曲线积分

1. 概念

2. 性质

(1)基本性质

性质1 设α与β为常数,则

$$\int_L [\alpha \boldsymbol{F}_1(x,y)+\beta \boldsymbol{F}_2(x,y)]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=\alpha\int_L \boldsymbol{F}_1(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\beta\int_L \boldsymbol{F}_2(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

性质2 若有向曲线弧L可分成两段光滑的有向曲线弧L_1和L_2,则

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{L_1} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{L_2} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

性质2 若L是有向光滑的曲线弧,L^-是L的反向曲线弧,则

$$\int_{L^-} \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

(2)普通对称性

3. 计算

(1)参数法

定理 设 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B，若 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 在以 α 与 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2\neq 0$，则曲线积 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在，且

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)]\mathrm{d}t.$$

【例 2】计算 $\int_L xy\mathrm{d}x$，其中 L 抛物线 $y^2=x$ 上从点 $A(1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 3】计算 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$，其中 L 为

①抛物线 $y=x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧；

②物线 $x=y^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧；

③有向折线 OAB，这里 O,A,B 依次是点 $(0,0)$，$(1,0)$，$(1,1)$.

(2)积分与路径无关

定理 2 设区域 G 是一个单连通域,若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数,则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关(或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零)的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 内恒成立.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 4】计算曲线积分 $\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,其中:$L: y=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}$ 从 $(1,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段弧.

【例 5】求解方程 $(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\mathrm{d}y=0$.

(3)格林公式

定理 1 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，

若函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数,则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

微信公众号【顶尖考研】

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

【例 6】计算曲线积分 $\int_L x^2ydx-xy^2dy$，其中 $L:x^2+y^2=a^2$ 从 $(a,0)$ 到 $(-a,0)$ 的一段弧.

(ID：djky66)

【例 7】计算$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,其中 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的,连续闭曲线,L 的方向为逆时针方向.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

4. 两类曲线积分的关系

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

巩固习题 16

一、第一类曲线积分

1. 计算曲线积分$\oint_L xds$其中L为由直线$y=x$及抛物线$y=x^2$所围成的区域的整个边界；

2. 计算曲线积分$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$及$x$轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

3. 计算曲线积分$\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds$，其中$\Gamma$为曲线$x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$上相应于$t$从0变到2的这段弧；

4. 计算曲线积分$\int_L y^2ds$，其中L为摆线的一拱$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$；

5. 求半径为a中心角为2φ的均匀圆弧线密度($\mu=1$)的质心(参照三重积分质心公式).

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

6. 设螺旋形弹簧一圈的方程为$x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$其中$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，它的密度$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. 求：

(1)它关于z轴的转动惯量I_z(参照三重积分转动惯量公式)；

(2)它的质心(参照三重积分质心公式).

二、第二类曲线积分

1. 计算曲线积分$\int_L ydx+xdy$，其中L为圆周$x=R\cos t, y=R\sin t$上对应t从0到$\frac{\pi}{2}$的一段弧；

2. 计算曲线积分$\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$(按逆时针方向绕行)；

3. 计算曲线积分$\int_L x^2dx+zdy-ydz$，其中Γ为曲线$x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$上对应$\theta$从0到$\pi$的一段弧；

4. 计算曲线积分$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中$L$是抛物线$y=x^2$上从

点$(-1,1)$到点$(1,1)$的一段弧.

5. 计算$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$，其中L是：

(1)抛物线$y^2=x$上从点$(1,1)$到点$(4,2)$的一段弧；

(2)从点$(1,1)$到点$(4,2)$的直线段；

(3)先沿直线从点$(1,1)$到点$(1,2)$，然后再沿直线到点$(4,2)$的折线；

(4)曲线$x=2t^2+t+1, y=t^2+1$上从点$(1,1)$到点$(4,2)$的一段弧.

6. 计算曲线积分$\oint_L \dfrac{ydx-xdy}{2(x^2+y^2)}$，其中$L$为圆周$(x-1)^2+y^2=2$，$L$的方向为逆时针方向.

7. 计算曲线积分$\oint_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x)dx+(x^2\sin x-2ye^x)dy$，其中$L$为正向星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$.

8. 计算曲线积分$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中$L$为在抛物线$2x=\pi y^2$上由点$(0,0)$到$(\frac{\pi}{2},1)$的一段弧；

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

9. 计算曲线积分$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy$，其中$L$是在圆周$y=\sqrt{2x-x^2}$上由点$(0,0)$到点$(1,1)$的一段弧.

10. 判别下列方程中哪些是全微分方程？对于全微分方程，求出它的通解.

(1)$e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$；

(2)$(x\cos y+\cos x)dy+(\sin y-y\sin x)dx=0$；

(3)$y(x-2y)dx-x^2dy=0$；

(4)$(x^2+y^2)dx+xydy=0$.

三、两类曲线积分的关系

把对坐标的曲线积分$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$化成对弧长的曲线积分，其中L为：

(1)在xoy面内沿直线从点$(0,0)$到点$(1,1)$；

(2)沿抛物线$y=x^2$从点$(0,0)$到点$(1,1)$；

(3)沿上半圆周$x^2+y^2=2x$从点$(0,0)$到点$(1,1)$.

巩固习题 16 答案速查

一、第一类曲线积分

1. $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1)$；
2. $e^a\left(2+\frac{\pi a}{4}\right)-2$；
3. $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$；
4. $\frac{256}{15}a^3$；
5. $\left(\frac{a\sin\varphi}{\varphi},0\right)$.
6. (1) $\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$；

(2) $\left(\frac{6ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}\right)$.

二、第二类曲线积分

1. 0；
2. -2π；
3. $\frac{1}{3}k^3\pi^3-a^2\pi$；
4. $-\frac{14}{15}$.
5. (1) $\frac{34}{3}$；(2) 11；(3) 14；(4) $\frac{32}{3}$.
6. $-\pi$.
7. 0.
8. $\frac{\pi^2}{4}$；
9. $-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2$.
10. (1) $xe^y-y^2=C$. (2) $x\sin y+y\cos x=C$.

(3)不是全微分方程.(4)不是全微分方程.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、两类曲线积分的关系

(1) $\int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}ds$；

(2) $\int_L \frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds$；

(3) $\int_L [\sqrt{2x-x^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]ds$.

第 17 讲 曲面积分（数一）

一、第一类曲面积分

1. 概念

2. 性质

(1)基本性质

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

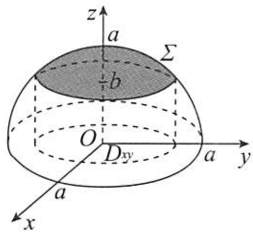
(2)普通对称性(偶倍奇零)

(3)轮换对称性

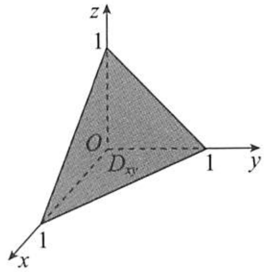
3. 计算

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 1】计算曲线积分 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{z}$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$ 截出的顶部.



【例 2】计算 $\oiint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$[①]，其中 Σ 是由平面 $x=0, y=0, z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.



微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

二、第二类曲面积分

1. 概念

2. 性质

(1)如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2,那么

$$\iint P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2)设 Σ 是有向曲面,Σ^- 表示与 Σ 取相反侧的有向曲面,则

$$\iint_{\Sigma^-} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{\Sigma^-} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

$$\iint_{\Sigma^-} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

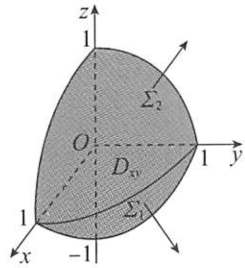
(3)对称性

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 计算

(1)直接法

【例 3】计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 的部分.



(2)轮换投影法(向量点积法)

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 4】计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧.

巩固习题 17

一、第一类曲面积分

1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是：

(1)锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面；

(2)锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

2. 计算下列曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)ds$ 其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)ds$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant h(0<h<a)$ 的部分；

微信公众号【顶尖考研】

(4) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)ds$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

(ID：djky66)

3. 求面密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 对于 z 轴的转动惯量.

二、第二类曲面积分

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2zdxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧；

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}zdxdy+xdydz+ydzdx$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧；

3. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧；

4. 计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}xzdxdy+xydydz+yzdzdx$，其中 Σ 是平面 $x+y+z=1$，$x=0,y=0,z=0$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

巩固习题 17 答案速查

一、第一类曲面积分

1. (1) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$; (2) 9π.

2. (1) $4\sqrt{61}$; (2) $-\frac{27}{4}$; (3) $a\pi(a^2-h^2)$; (4) $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$.

3. $\frac{4}{3}\pi a^4\mu_0$.

二、第二类曲面积分

1. $\frac{2}{105}\pi R^7$; 2. $\frac{3}{2}\pi$; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{1}{8}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第 18 讲　场论初步（数一）

1. 高斯公式

定理 1　设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，若函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (18-1)$$

或

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S, \qquad (18-1')$$

这里 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha$、$\cos\beta$ 与 $\cos\gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦. 公式(18－1) 或(18－1’) 叫做高斯公式.

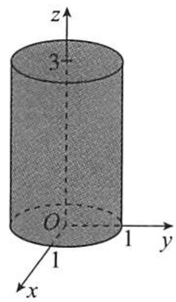
【例 1】计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$$

微信公众号【顶尖考研】

其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0,z=3$ 所围成的空间闭区域 Ω 整个边界曲面的外侧.

(ID：djky66)



【例 1 改】计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$,其中:$\Sigma$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 被 $z=0,z=3$ 所截有限部分的内侧.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【例 2】计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,其中 Σ 为 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

2. 斯托克斯公式

定理 1　设 Γ 为分段光滑的突然间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则，若函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在曲面 Σ(连同边界 Γ)上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

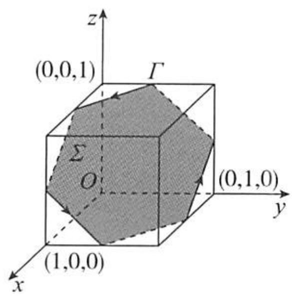
微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位法向量.

【例 3】计算曲线积分

$$I=\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z,$$

其中 Γ 是用平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 截立方体 $\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1\}$ 的表面所得的截痕，若从 Ox 轴的正向看去，取逆时针方向.



3. 通量与散度

(1)通量

设有向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\boldsymbol{P}(x,y,z)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{Q}(x,y,z)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{R}(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中函数 P、Q 与 R 均具有一阶连续偏导数，Σ 是场内的一片有向曲面，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位法向量，则积分

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

称为向量场 A 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量(或流量).

(2)散度

对于一般的向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\boldsymbol{P}(x,y,z)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{Q}(x,y,z)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{R}(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$叫做向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

【例 4】求向量场 $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 的散度.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

4. 环流量与旋度

(1)环流量

设有向量场

$$\boldsymbol{A}W(x,y,z)=\boldsymbol{P}(x,y,z)i+\boldsymbol{Q}(x,y,z)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{R}(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中函数 P、Q 与 R 均具有一阶连续偏导数，$\boldsymbol{\Gamma}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的定义域内的一条分段光滑有向闭曲线，$\boldsymbol{\tau}$ 是 $\boldsymbol{\Gamma}$ 在 (x,y,z) 处的单位法向量，则积分

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲线 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的环流量.

(2)旋度

设有一向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中函数 P、Q 与 R 均具有一阶连续偏导数，则向量

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记作 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

利用向量微分算子∇，向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}$ 可表示为$\nabla\times\boldsymbol{A}$，即

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

【例 5】求向量场 $\boldsymbol{A}=(x^2-y)\boldsymbol{i}+4z\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

5. 方向导数

定理 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分，那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦.

【例6】(1)求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

(2)求 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处沿任意方向的方向导数.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

6. 梯度

【例 7】求 $\mathbf{grad}\,\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

【例 8】设 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，$P_0(1,1)$，求

(1) $f(x,y)$ 在 P_0 处增加最快的方向以及 $f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数；

(2) $f(x,y)$ 在 P_0 处减少最快的方向以及 $f(x,y)$ 沿这个方向的方向导数；

(3) $f(x,y)$ 在 P_0 处的变化率为零的方向.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 9】(1) $z=f(x,y,z)$，$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}z)=$

(2) 向量场：$\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{rot}(\vec{A}))=$________.

巩固习题 18

一、计算下列曲面积分：

1. $\oiint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$，其中 Σ 为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$ 所围成的立体的表面的外侧；

2. $\oiint\limits_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

3. $\oiint\limits_{\Sigma} xz^2 dydz + (x^2 y - z^3) dzdx + (2xy + y^2 z) dxdz$，其中 Σ 为上半球体 $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，$x^2 + y^2 \leqslant a^2$ 的表面的外侧；

4. $\oiint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$，其中 Σ 是界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant 9$ 的整个表面的外侧；

5. $\oiint\limits_{\Sigma} 4xzdydz - y^2 dzdx + yzdxdy$，其中 Σ 是平面 $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

二、计算下列空间曲线积分：

1. $\oint_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$，若从 x 轴的正向看去，这圆周是取逆时针方向；

2. $\oint_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$，其中 Γ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1(a>0,b>0)$，若从 x 轴正向看去，这椭圆是取逆时针方向；

3. $\oint_{\Gamma} 3ydx - xzdy + yz^2 dz$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2=2z, z=2$. 若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向；

4. $\oint_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2 dz$，其中 Γ 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9, z=0$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向.

三、通量、散度;环流量、旋度;方向导数、梯度:

1. 求向量 $\boldsymbol{A}=(2x+3z)\boldsymbol{i}-(xz+y)\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\boldsymbol{k}$ 穿过曲面 Σ 流向外侧的通量,其中 Σ 是以点 $(3,-1,2)$ 为球心,半径 $R=3$ 的球面.

2. 求向量场 $\boldsymbol{A}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$ 的散度.

3. 求向量场 $\boldsymbol{A}=(x-z)\boldsymbol{i}+(x^3+yz)\boldsymbol{j}-3xy^2\boldsymbol{k}$ 沿闭曲线 Γ(从 z 轴正向看 Γ 依逆时针方向)的环流量,其中 Γ 为圆周 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$,$z=0$.

4. 求向量场 $\boldsymbol{A}=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(y-2x)\boldsymbol{k}$ 的旋度.

5. 求函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

6. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$,$\beta=\dfrac{\pi}{4}$,$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数.

7. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$,求 $\mathbf{grad}f(0,0,0)$ 及 $\mathbf{grad}f(1,1,1)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

8. 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处变化最快的方向,并求沿这个方向的方向导数.

巩固习题 18 答案速查

一、计算下列曲面积分:

1. $3a^4$; 2. $\frac{12}{5}\pi a^5$; 3. $\frac{2}{5}\pi a^5$;

4. 81π; 5. $\frac{3}{2}$.

二、计算下列空间曲线积分:

1. $-\sqrt{3}\pi a^2$; 2. $\pi a\sqrt{a^2+b^2}$; 3. -20π; 4. 9π.

三、通量、散度;环流量、旋度;方向导数、梯度:

1. 108π. 2. $2x$. 3. 12π.

4. $(2,4,6)$. 5. $\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$. 6. 5.

7. $\boldsymbol{grad}f(0,0,0)=(3,-2,-6)$, $\boldsymbol{grad}f(1,1,1)=(6,3,0)$.

8. $-\sqrt{21}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

线性代数

微信公众号【顶尖考研】
（ID：djky66）

第1讲 行列式

一、全排列与逆序数

1. 全排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 元素的全排列(也简称排列)把元素次序按从小到大的排列称为原排列.

2. 逆序数

n 个元素的某一排列中，当某一对元素的先后次序出现“大前小后”时，就说它构成1个逆序，排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数，记作 τ.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

若一个排列经过奇数次对换可得到原排列，则该排列的逆序数一定为奇数若一个排列经过偶数次对换可得到原排列，则该排列的逆序数一定为偶数.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例1】求下列逆序数

(1)求排列 32514 的逆序数.

(2)求上述排列对换 1 和 3 得到 12534 的逆序数.

二、n 阶行列式的定义

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{cases} \text{①取数相乘} \\ \text{②冠以符号} \\ \text{③全部相加} \end{cases}$$

【例 2】根据定义计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \quad a_{12}a_{21}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \quad a_{11}a_{23}a_{32} \quad a_{12}a_{21}a_{33} \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad a_{13}a_{21}a_{32}$

$a_{13}a_{22}a_{31}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} =$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(4) $\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} =$

三、行列式的性质

1. 转置

行列式与它的转置行列式相等.

2. 交换

交换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

推论 如果交换行列式行或列 m 次,则新行列式等于原来行列式的 $(-1)^m$ 倍.

【例 3】行列式$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=$________.

3. 倍乘

行列式的某一行(列)中所有的元素都乘同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

推论 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

4. 拆分

若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 行的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5. 倍加

把行列式的某一行(列)的各元素乘同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式不变.

利用行列式的性质化三角形行列式

【例 4】计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 5】记 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{vmatrix}$,证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & \boldsymbol{O} & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

结论：

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$;

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

四、行列式按行(列)展开

1. 展开定理

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【例 6】计算行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & b_1 \\ 1 & -1 & 0 & b_2 \\ -1 & 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix}$.

【例 4】(续)计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 代数余子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k_1A_{i1} + k_2A_{i2} + \cdots + k_nA_{in}$$

推论 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, i \neq j$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j.$$

【例 7】设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 中 (i,j) 元的余子式记作 M_{ij}，代数余子式记作 A_{ij}，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

五、范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

巩固习题 01

一、计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

二、计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} a & & & 1 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a \end{vmatrix}$； (4) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

四、计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(2) $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$；

(3)已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}$，求行列式 D 中 x^2 的系数.

五、求解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda+1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=0$； (2) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}=0$.

六、设 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 中(i,j)元的余子式记作 M_{ij}，代数余子式记作 A_{ij}，求：

(1)$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$；

(2)$M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 01 答案速查

一、计算下列行列式：

(1) -4；　(2) 0；

(3) 0；　(4) 16；

二、计算下列行列式：

(1) $3abc-a^3-b^3-c^3$；　(2) $-2(x^3+y^3)$；

(3) 0；　(4) $(a-b)^3$；

(5) 0.

三、计算下列行列式：

(1) $abcd+ab+cd+ad+1$；　(2) $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$；

(3) $a^{n-2}(a^2-1)$；　(4) $[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$；

(5) $1+a_1+\cdots+a_n$；　(6) $a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

四、计算下列行列式：

(1) $(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$；

(2) $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(j-i)$ 或 $\prod_{k=1}^{n}k!$；

(3) $-(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

五、求解下列方程：

(1) -3 或 $\pm\sqrt{3}$；　(2) 0、2、6.

六、

(1) -64；　(2) 24.

第 2 讲　矩阵及其运算

一、矩阵及分块的概念

1. 数表

2. 来源

(1)线性变换、线性方程组、二次型的系数矩阵

(2)向量组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$

3. 特殊矩阵

(1)行(列)矩阵,行(列)向量

(2)单位矩阵

(3)对角矩阵

4. 分块矩阵:列(行)分块,十字分块

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

二、矩阵及分块矩阵的运算

1. 加(减)法(分块矩阵有类似结论)

矩阵加法满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵):

(i)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(ii)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

2. 数乘(分块矩阵有类似结论)

数乘矩阵满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,λ、μ 为数):

(i)$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;

(ii)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(iii)$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

矩阵加法与数乘矩阵统称为矩阵的线性运算.

3. 乘法（分块矩阵有类似结论）

【例 1】求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix} 与 B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 2】求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix} 与 B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$

的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

【例 3】证明 $AA^*=A^*A=|A|E$,其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

矩阵的乘法虽不满足交换律,但仍满足下列结合律和分配律(假设运算都是可行的):

(i) $(AB)C=A(BC)$;

(ii) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$(其中 λ 为数);

(iii) $A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$.

对于单位矩阵 E,容易验证

$$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}, A_{m\times n}E_n=A_{m\times n},$$

微信公众号【顶尖考研】

或简写成

$$EA=AE=A.$$

(ID: djky66)

可见单位矩阵 E 在矩阵乘法中的作用类似于数 1.

【注意】

(1)可交换的矩阵:$AB=BA$

(2)方阵的幂

【例 4】(1)已知 $A=\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$,求 A^n.

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & d & e\\ 0 & 0 & f\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}^n$.

(3) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & d & e\\ 0 & 1 & f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 5】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

4. 转置

矩阵的转置也是一种运算，满足下述运算规律(假设运算都是可行的)：

(i) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；　　(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(iii) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；　　(iv) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

5. 方阵的行列式

由 $\boldsymbol{A}$ 确定 $|\boldsymbol{A}|$ 的这个运算满足下述运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，λ 为数)：

(i) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$(行列式性质 1)；(ii) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$；

(iii) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

【例 6】证明：伴随矩阵的行列式 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

微信公众号【顶尖考研】

三、逆矩阵

(ID：djky66)

1. 定义

2. 充要条件

【例 6 续】

【例 7】求二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆矩阵.

【例 8】$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} & & a \\ & b & \\ c & & \end{pmatrix}$的逆.(分块矩阵有类似结论)

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 9】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3. 结论

逆矩阵满足下述运算规律：

(i)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$亦可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(ii)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $\lambda\neq0$，则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(iii)若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵且均可逆,则 $\boldsymbol{AB}$ 亦可逆,且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

(iv)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 亦可逆,且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

4. 应用

(1)解矩阵方程

(2)可对角化的矩阵的幂

【例 10】设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$,求 $\boldsymbol{A}^n$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 11】设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$,求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}$.

四、克拉默法则

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

它的解可以用 n 阶行列式表示，即有

克拉默法则 如果线性方程组(1)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不等于零，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么，方程组(1)有惟一解

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},x_2=\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\cdots,x_n=\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|},$$

其中 $\boldsymbol{A}_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶矩阵，即

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\boldsymbol{A}_j=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

巩固习题 02

一、求下列矩阵的运算：

(1)$\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$；　　(2)$(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$；

(3)$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1\quad 2)$；　　(4)$(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

(5)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$，求：$3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

二、判断下列命题是否正确，并给出理由或反例：

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

(2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$

(3)$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$；

(4)若$\boldsymbol{A}^2=O$，则 $\boldsymbol{A}=O$；

(5)若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

(6)若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

三、求下列方阵的幂：

(1)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$设，求$\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$，$\cdots\boldsymbol{A}^k$；

(2)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{50}$和$\boldsymbol{A}^{51}$；

(3)设 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{A}^{100}$；

(4)设$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{11}$；

(5)设 $A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$,求 $|A^8|$、A^4.

四、证明下列结论:

(1)设 A,B 为 n 阶矩阵,且 A 为对称矩阵,证明 B^TAB 也是对称矩阵;

(2)设 A,B 都是 n 阶对称矩阵,证明 AB 是对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$;

(3)设 J 是元素全为 1 的 $n(\geqslant 2)$ 阶方阵,证明 $E-J$ 是可逆方阵,且 $(E-J)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}J$;

(4)设矩阵 A 可逆,证明其伴随矩阵 A^* 也可逆,且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

五、求下列逆矩阵:

(1)设 $A^3=O$,求 $(A-E)^{-1}$,$(A+E)^{-1}$;

(2)设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$,证明 A 及 $A+2E$ 都可逆,并求 A^{-1} 及 $(A+2E)^{-1}$;

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(3) $\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{5}\\2&1&0\\4&3&0\end{pmatrix}$

六、解下列矩阵方程:

(1)设 $\begin{pmatrix}1&4\\-1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}$,求 X;

(2)设 $A=\begin{pmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$,$AB=A+2B$,求 B;

(3)设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,$AB+E=A^2+B$,求 B;

(4)设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$A^*BA=2BA-8E$,求 B.

巩固习题 02 答案速查

一、求下列矩阵的运算：

(1) $\begin{pmatrix}35\\6\\49\end{pmatrix}$;　　(2)10;

(3) $\begin{pmatrix}-2&4\\-1&2\\-3&6\end{pmatrix}$;(4) $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$;

(5) $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{pmatrix}$.

二、判断下列命题是否正确，并给出理由或反例：

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1)不正确，取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$;

(2)不正确，取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$;

(3)不正确，取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$;

(4)取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$;

(5)取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 而 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$;

(6)取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$有 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$ 而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$.

三、求下列方阵的幂：

(1) $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}$, $\cdots\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}^{50}=10^{25}\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}^{51}=10^{25}\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}$;

(3) $A^{100}=-8^{99}\begin{pmatrix}2&4&8\\1&2&4\\-3&-6&-12\end{pmatrix}$;

(4) $A^{11}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2^{13}&4+2^{13}\\-1-2^{11}&-4-2^{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2731&2732\\-683&-684\end{pmatrix}$;

(5) $|A^8|=10^{16}$, $A^4=\begin{pmatrix}5^4&0&0&0\\0&5^4&0&0\\0&0&2^4&0\\0&0&2^6&2^4\end{pmatrix}$.

四、略

五、求下列逆矩阵：

(1) $(A-E)^{-1}=-(E+A+A^2)$, $(A+E)^{-1}=A^2-A+E$;

(2) $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(A-E)$, $(A+2E)^{-1}=\dfrac{1}{4}(3E-A)$;

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(3) $\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{5}\\2&1&0\\4&3&0\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&3&-1\\0&-4&2\\10&0&0\end{pmatrix}$.

六、解下列矩阵方程：

(1) $X=\begin{pmatrix}1&1\\\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}$　　(2) $B=\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{pmatrix}$;

(3) $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$;　　(4) $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

第3讲　矩阵的初等变换与线性方程组

一、初等变换

1. 初等变换、矩阵的行阶梯形、行最简形、标准形

引例　求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+x_4=2,\\x_1+x_2-2x_3+x_4=4,\\4x_1-6x_2+2x_3-2x_4=4,\\3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9.\end{cases}$$

解：方程组的系数矩阵可以化简为：

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

引例中方程组系数矩阵的标准形为：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，记作 $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价，记作 $\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

(i)反身性 $A \sim A$;

(ii)对称性 若 $A \sim B$,则 $B \sim A$;

(iii)传递性 若 $A \sim B$,$B \sim C$,则 $A \sim C$.

2. 初等矩阵及其逆

(1)初等矩阵的定义、作用、性质

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2)初等矩阵的逆

3. 可逆矩阵相当于若干个初等矩阵的乘积

4. 初等变换求逆矩阵，解矩阵方程

【例 1】设 $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$，证明 A 可逆，并求 A^{-1}.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 2】求解矩阵方程 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ -2 & 5\end{pmatrix}$.

二、矩阵的秩

引例 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+x_4=2,\\x_1+x_2-2x_3+x_4=4,\\4x_1-6x_2+2x_3-2x_4=4,\\3x_1+6x_2-9x_3+7x_4=9.\end{cases}$$

解:方程组的系数矩阵可以化简为:

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

1. 秩的定义

定义 设在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个不等于 0 的 r 阶子式 D,且所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全等于 0,那么 D 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式,数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记作 $R(\boldsymbol{A})$. 并规定零矩阵的秩等于 0.

2. 行阶梯形求秩

【例 3】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda & -1\\ 5 & 6 & 3 & \mu\end{pmatrix}$，已知 $R(\boldsymbol{A})=2$，求 λ 与 μ 的值.

3. 秩的结论

①$0\leqslant R(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant \min\{m,n\}$.

②$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$.

③若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

④若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $R(\boldsymbol{PAQ})=R(\boldsymbol{A})$.

⑤$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$，

微信公众号【顶尖考研】

⑥$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

⑦$R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$

⑧若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$

(ID: djky66)

⑨$R(\boldsymbol{A}^{*})=\begin{cases}n, R(\boldsymbol{A})=n;\\ 1, R(\boldsymbol{A})=n-1;\\ 0, R(\boldsymbol{A})\leqslant n-2.\end{cases}$

⑩若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=n$，则 $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$；若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n})=m$，则 $R(\boldsymbol{BA})=R(\boldsymbol{B})$.

【例 4】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，证明 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant n$.

三、线性方程组的解

1. 解的判定

定理 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$

(i)无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$；

(ii)有惟一解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$；

(iii)有无限多解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

2. 具体方程组的求解

【例 5】求解齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4=0,\\2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0,\\x_1-x_2-4x_3-3x_4=0.\end{cases}$$

解：方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

【例 6】求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1,\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4,\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0.\end{cases}$$

解:方程组的增广矩阵

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\\0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

【例 7】设有线性方程组

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda,\end{cases}$$

问 λ 取何值时,此方程组(1)有惟一解;(2)无解;(3)有无限多解？并在有无限多解时求其通解.

巩固习题 03

一、设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}$,求一个可逆矩阵 P,使 PA 为行最简形矩阵.

二、解下列矩阵方程:

(1)设 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$求 X,使 $AX=B$;

(2)设 $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}$求 X,使 $XA=B$;

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(3)设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$,$AX=2X+A$,求 X,

(4)设 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$,$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,求 B.

三、讨论或证明下列秩的结论:

(1)在秩是 r 的矩阵中,有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式?有没有等于 0 的 r 阶子式;

(2)从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B,问 A,B 的秩的关系怎样?

(3)证明 $R(A)=1$ 的充要条件是存在非零列向量 a 及非零行向量b^{T},使 $A=ab^{\mathrm{T}}$;

(4)设 A 为 $m\times n$ 矩阵,证明方程 $AX=E_m$ 有解充要条件是 $R(A)=m$;

(5)设 n 阶矩阵 A 满足$A^2=A$,E 为 n 阶单位矩阵,证明 $R(A)+R(A-E)=n$.

四、求矩阵的秩:

(1)$\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$

(2)$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & -3 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3\\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8\end{pmatrix}$

(3)$\begin{pmatrix}2 & 1 & 8 & 3 & 7\\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5\\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$

(4)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{pmatrix}$,问 k 为何值,可使

a:$R(A)=1$;　　b:$R(A)=2$;　　c:$R(A)=3$;

五、求下列线性方程组:

(1)$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0\\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2)$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}$

(3)$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2\\ 3x_1-x_2+2x_3=10;\\ 11x_1+3x_2=8\end{cases}$

(4)$\begin{cases}2x+3y+z=4\\ x-2y+4z=-5\\ 3x+8y-2z=13\\ 4x-y+9z=-6\end{cases}$.

六、含参方程的求解:

(1)设有线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda-1 & -2\\ 0 & \lambda-2 & \lambda+1\\ 0 & 0 & 2\lambda+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 5\end{pmatrix},$$

问 λ 为何值时 a:有唯一解;b:无解 c:有无限多解?并在有无限多解时求其通解.

(2)问 λ 为何值时,非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases},$$

a:有唯一解;b:无解;c:有无限多解?并在有无限多解时求其通解.

(3)非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2\\x_1-2x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2-2x_3=\lambda^2\end{cases},$$

当 λ 为何值时有解?并求其通解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 03 答案速查

一、$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 7 & -6 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{PA}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

二、解下列矩阵方程：

(1)$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}10 & 2\\ -15 & -3\\ 12 & 4\end{pmatrix}$；　(2)$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -4 & 7 & 4\end{pmatrix}$；

(3)$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$，　(4)$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、讨论或证明下列秩的结论：

(1)都有可能；

(2)$R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B})\geqslant R(\boldsymbol{A})-1$；

(3)、(4)、(5)略

四、求矩阵的秩：

(1)$R=2$　(2)$R=3$　(3)$R=3$

(4)a：$k=1$；　b：$k=-2$；　c：$k\neq1$ 且 $k\neq-2$；

五、求下列线性方程组：

(1)$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ -3\\ \frac{4}{3}\\ 1\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数；(2)$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，$c_1$，$c_2$ 为任意常数；

(3)无解；(4) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数.

六、含参方程的求解：

(1)a: $\lambda\neq-\frac{1}{2}$ 且 $\lambda\neq2$；

b: $\lambda=-\frac{1}{2}$

c: $\lambda=2$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数.

(2)a: $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$；

b: $\lambda=-2$；

c: $\lambda=1$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$ 为任意常数；

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(3) $\lambda=1$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数.

$\lambda=-2$，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数.

第 4 讲　向量组的线性相关性

一、向量及向量空间

1. 向量、向量运算

2. 向量空间、子空间

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

二、线性表示

1. 线性组合

定义　给定向量组 A:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$,对于任何一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,表达式

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合,$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 称为这个线性组合的系数.

2. 线性表示(非齐次线性方程组有解无解的问题)

给定向量组 A:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 和向量 $\boldsymbol{b}$,如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,使

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m,$$

则向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量组 A 的线性组合,这时称向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示.

定理　向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A:$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$的秩等于矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b})$的秩.

【例 1】设

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix},$$

证明向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性表示，并求出表示式.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

3. 向量组等价

定义 设有两个向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 及 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$，若 B 组中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示. 若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称这两个向量组等价.

(1)充要条件

定理 向量组 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能由向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩等于矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$ 的秩，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

推论 向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 与向量组 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 等价的充分必要条件是

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是向量组 A 和 B 所构成的矩阵.

【例 2】设

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix},$$

证明向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 等价.

(2)必要条件

定理 设向量组 $B:\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l$ 能由向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示,则 $R(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)\leqslant R(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三、线性相关性(齐次线性方程组有无非零解的问题)

1. 定义

定义 给定向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$,如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m=0,$$

则称向量组 A 是线性相关的,否则称它线性无关.

2. 与秩的关系

定理 向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$ 的秩小于向量个数 m；向量组 A 线性无关的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=m$.

【例 3】已知

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$$

试讨论向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 及向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 的线性相关性.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 4】已知向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$，试证向量组 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 线性无关.

定理 (1)若向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性相关,则向量组 $B:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{a}_{m+1}$ 也线性相关.反之,若向量组 B 线性无关,则向量组 A 也线性无关.

(2)m 个 n 维向量组成的向量组,当维数 n 小于向量个数 m 时一定线性相关.特别地 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

(3)设向量组 $A:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关,而向量组 $B:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}$ 线性相关,则向量 $\boldsymbol{b}$ 必能由向量组 A 线性表示,且表示式是惟一的.

四、向量组的极大无关组与秩

1. 极大无关组

定义 设有向量组 A,如果在 A 中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$,满足

(i)向量组 $A_0:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关;

(ii)向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量(如果 A 中有 $r+1$ 个向量的话)都线性相关,那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组(简称最大无关组),最大无关组所含向量个数 r 称为向量组 A 的秩,记作 R_A.

只含零向量的向量组没有最大无关组,规定它的秩为 0.

推论 (最大无关组的等价定义) 设向量组 $A_0:\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是向量组 A 的一个部分组,且满足

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(i)向量组 A_0 线性无关;

(ii)向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示,那么向量组 A_0 便是向量组 A 的一个最大无关组.

【例 5】设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大无关组,并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

2. 向量组的秩

定理 矩阵的秩等于它的列向量组的秩,也等于它的行向量组的秩.

五、线性方程组解的结构与解的判定

1. 基础解系

2. 解的结构

【例6】求齐次线性方程组

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的基础解系与通解.

六、向量空间(仅数一)

巩固习题 04

一、向量及向量组线性表示：

(1)设有向量组 A：$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\alpha\\2\\10\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$，及向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\\beta\\-1\end{pmatrix}$，问 a,β 为何值时：

a：向量 $\boldsymbol{b}$ 不能由向量组 A 线性表示；

b：向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式唯一；

c：向量 $\boldsymbol{b}$ 能由向量组 A 线性表示，且表示式不唯一，并求一般表达式.

(2)已知向量组

$$A:\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix};B:\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}4\\4\\1\\3\end{pmatrix},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

证明向量组 B 能由向量组 A 线性表示，但向量组 A 不能由向量组 B 线性表示.

(3)已知向量组

$$A:\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};B:\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$

证明向量组 A 与向量组 B 等价.

二、线性相关性：

(1)讨论向量组的线性相关性

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$$

(2)讨论下列命题是否正确：

a：若向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是线性相关的，则 $\boldsymbol{a}_1$ 可由 $\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性表示；

b：若有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{b}_m=0$$

成立，则$a_1,\cdots,a_m$ 线性相关，$b_1,\cdots,b_m$ 也线性相关；

c：若只有当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 全为 0 时，等式

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m+\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_m b_m=0$$

才成立，则$a_1,\cdots,a_m$ 线性无关，$b_1,\cdots,b_m$ 也线性无关；

d：若$a_1,\cdots,a_m$ 线性相关，$b_1,\cdots,b_m$ 也线性相关，则有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m=0,\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_m b_m=0$$

同时成立.

(3)设

$$b_1=a_1+a_2,b_2=a_2+a_3,b_3=a_3+a_4,b_4=a_4+a_1$$

证明向量组b_1,b_2,b_3,b_4 线性相关

(4)设$b_1=a_1,b_2=a_1+a_2,\cdots,b_r=a_1+a_2+\cdots a_r$，且向量组$a_1,\cdots,a_r$ 线性无关，证明向量组$b_1,\cdots,b_r$ 线性无关；

(5)设向量组 B：$b_1,\cdots,b_r$ 能由向量组 A：$a_1,\cdots,a_s$ 线性表示为

$$(b_1,\cdots b_r)=(a_1,\cdots a_s)K$$

其中 K 为 $s\times r$ 矩阵，且向量组 A 线性无关，证明向量组 B 线性无关的充要条件是矩阵 K 的秩 $R(K)=r$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、向量组的极大线性无关组与秩：

(1)求$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&6&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$的列向量的一个极大线性无关组，并把其余列向量用极大线性无关组线性表示；

(2)设向量组

$$\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

的秩为 2，求 a,b

(3)设向量组 A：a_1,a_2；向量组 B：a_1,a_2,a_3；向量组 C：a_1,a_2,a_4 的秩为 $R_A=R_B=2,R_C=3$，求向量组 D：$a_1,a_2,2a_3-3a_4$ 的秩.

四、基础解系：

(1)分别求方程$\begin{cases}x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0\\2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0\\3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0\end{cases}$及方程 $nx_1+(n-1)x_2+\cdots 2x_{n-1}+$

$x_n=0$ 的基础解系.

(2)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2&1&3\\9&-5&2&8\end{pmatrix}$,求一个 4×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,且 $R(\boldsymbol{B})=2$

(3)求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3\end{cases}$ 的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系.

(4)设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3,已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量,且 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$,求该方程组的通解.

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4)$,其中 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$,向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$,求方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

五、向量空间(仅数一):

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1)已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基为

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\text{及}\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

①求由基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 到基 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

②设向量 $\boldsymbol{x}$ 在前一基的坐标为 $(1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$,求它在后一基中的坐标.

(2)在 $\mathbb{R}^4$ 中取两个基

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{e}_3=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{e}_4=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}},\end{cases}\qquad\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,0)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,2,1)^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\alpha}_4=(6,6,1,3)^{\mathrm{T}},\end{cases}$$

①求由前一个基到后一个基的过渡矩阵;

②求向量 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 在后一个基中的坐标;

③求在两个基中有相同坐标的向量.

巩固习题 04 答案速查

一、向量及向量组线性表示：

(1)a:$\alpha=-4$ 且 $\beta\neq 0$;b:$\alpha\neq -4$　c:$\alpha=-4$ 且 $\beta=0$,$\boldsymbol{b}=c\boldsymbol{\alpha}_1-(2c+1)\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(2)略　(3)略

二、线性相关性：

(1)当 $a=2$ 或 $a=-1$ 时,$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 线性相关

当 $a\neq 2$ 且 $a\neq -1$ 时,$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 线性无关

(2)讨论下列命题是否正确：

a:错;b:错;c:错;d:错.

(3)略;(4)略;(5)略;

三、向量组的极大线性无关组与秩：

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(1)$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ 为最大线性无关组,$\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$,$\boldsymbol{a}_5=-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$;

(2)$a=2,b=5$;

(3)$R_D=3$

四、基础解系：

(1)$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$和$(\xi_1,\quad\xi_2,\quad\cdots\quad\xi_{n-1})=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\-n&-n+1&\cdots&-2\end{pmatrix}$.

(2)$\begin{pmatrix}1&0\\5&2\\8&1\\0&1\end{pmatrix}$　　(3)一个解 $\eta=\begin{pmatrix}-8\\13\\0\\2\end{pmatrix}$,基础解系 $\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

(4)$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$,$c$ 为任意常数.　　(5)$\boldsymbol{x}=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$,$c$ 为任意常数.

五、向量空间(仅数一)：

(1)①$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.　　②$\begin{pmatrix}-8\\-1\\5\end{pmatrix}$.

(2)①$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$;　　②$\begin{pmatrix}x_1{}'\\x_2{}'\\x_3{}'\\x_4{}'\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$;

③$k\,(1,\ 1,\ 1,\ -1)^{\mathrm{T}}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第 5 讲　相似矩阵与相似对角化

一、特征值与特征向量

1. 定义

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 1】求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

2. 性质

(1)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不难证明

(i)$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$;

(ii)$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2)**定理** (i)设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个特征值,$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量,如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相等,则 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 线性无关.

(ii)同一特征值所对应的线性无关的特征向量的个数,不超过该特征值的重数.

【例 2】已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,求 A 的特征值与特征向量

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

3. 与 A 相关矩阵的特征值与特征向量

【例 3】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,2$,则 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=$________.

二、相似矩阵

1. 定义

定义 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,若有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似矩阵,或说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行运算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换,可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵.

2. 性质

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

定理 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同,从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值亦相同.

推论 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

相似,则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 即是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

三、相似对角化

1. 定义

2. 充要条件

定理 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似(即 $\boldsymbol{A}$ 能对角化)的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 4】设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化? 若能,则求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【例 5】设

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&t\\1&0&0\end{pmatrix},$$

问 t 为何值时，矩阵 A 能对角化？

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 05

一、求下列矩阵的特征值、特征向量：

(1)$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}(2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}(3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4)设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$，$a_1\neq 0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

①证明 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征值；

②求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

二、与 $\boldsymbol{A}$ 相关矩阵的特征值、特征向量：

(1)设$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

(2)已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1，2，3，求$|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|$.

(3)已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1，2，−3，求$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、矩阵的相似与相似对角化：

(1)设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似；

(2)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$可相似对角化，求 x；

(3)已知 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$的一个特征向量，

①求参数 a，b 及特征向量 $\boldsymbol{p}$ 所对应的特征值；

②问 $\boldsymbol{A}$ 能不能相似对角化？并说明理由.

四、可相似对角化矩阵的幂：

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^{100}$.

五、利用相似对角化反求矩阵 $\boldsymbol{A}$:

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=1$,对应的特征值向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 05 答案速查

一、求下列矩阵的特征值、特征向量：

(1)$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，所有特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}$，$k\neq0$.

(2)$\lambda_1=-1$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$k_1\neq0$.

$\lambda_2=9$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，所有特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$k_2\neq0$.

$\lambda_3=0$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，所有特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，$k_3\neq0$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(3)$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$k_1,k_2$ 不全为 0.

$\lambda_3=-1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，所有特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，$k_3\neq0$.

(4)①略；

②$\lambda_1=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}a_1&-a_2&\cdots&-a_n\\a_2&a_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&0&\cdots&a_1\end{pmatrix}$.

二、与 $\boldsymbol{A}$ 相关矩阵的特征值、特征向量：

(1)略.

(2)$|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|=18$.

(3)$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=25$.

三、矩阵的相似与相似对角化：

(1)略；(2)$x=3$；(3)①$a=-3,b=0,\lambda=-1$；②不能.

四、可相似对角化矩阵的幂：

$$A^{100}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5^{100}-1\\ 0 & 5^{100} & 0\\ 0 & 0 & 5^{100}\end{pmatrix}$$

五、利用相似对角化反求矩阵 A：

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -3\\ -4 & 5 & -3\\ -4 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第 6 讲　合同对角化与二次型

一、对称矩阵的对角化

1. 实对称矩阵的性质

性质 1　对称矩阵的特征值为实数.

性质 2　设 λ_1,λ_2 是对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的特征向量.

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

【例 1】抽象实对称矩阵求特征向量

(1)若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$,且 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$,求 $\boldsymbol{\alpha}_3$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(2)若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda\boldsymbol{\alpha}_2$,且 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$,求 $\boldsymbol{\alpha}_3$.

(3)若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$,且 $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3$,求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

性质 3 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵.

2. 正交矩阵与合同对角化

(1)正交矩阵(施密特正交化)

(2)合同的定义

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(3)合同对角化的步骤

【例 2】设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求一个正交矩阵 P,使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

二、二次型及其标准形

1. 二次型及其系数矩阵

2. 正交变换法化二次型为标准形

定理 任给二次型 $f=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\ (a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使 f 化为标准形

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值.

推论 任给 n 元二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A})$，总有可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，使 $f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{z})$ 为规范形.

【例 3】求一个正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，把二次型

$$f=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$$

化为标准形.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

3. 配方法化二次型为标准形

【例 4】化二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

成标准形，并求所用的变换矩阵.

三、二次型的正定性

二次型的标准形中正系数的个数称为二次型的正惯性指数,负系数的个数称为负惯性指数.若二次型 f 的正惯性指数为 p,秩为 r,则 f 的规范形便可确定为

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2.$$

定义 设二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,都有 $f(\boldsymbol{x})>0$(显然 $f(\boldsymbol{0})=0$),则称 f 为正定二次型,并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定的;如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 都有 $f(\boldsymbol{x})<0$,则称 f 为负定二次型,并称对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是负定的.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

定理 n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是:它的标准形的 n 个系数全为正,即它的规范形的 n 个系数全为 1,亦即它的正惯性指数等于 n.

推论 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是:$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正.

定理 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充分必要条件是:$\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式都为正,即

$$a_{11}>0,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0,$$

对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是：奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正，即

$$(-1)^r\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}>0\ (r=1,2,\cdots,n).$$

【例 5】判定二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 的正定性.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 06

一、向量的正交性与正交矩阵：

(1)设$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\gamma}$与$\boldsymbol{\alpha}$正交,且$\boldsymbol{\beta}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$,求$\lambda$和$\boldsymbol{\gamma}$.

(2)设$\boldsymbol{x}$为n维列向量,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$,令$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$,证明$\boldsymbol{H}$是对称的正交矩阵.

(3)设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是正交矩阵,证明$\boldsymbol{AB}$也是正交矩阵.

二、实对称矩阵的正交化：

(1)$\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$ (2)$\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$

(3)设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}5&&\\&-4&\\&&y\end{pmatrix}$相似,求 x,y;并求一个正交矩阵$\boldsymbol{P}$,使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、矩阵的合同与合同对角化：

(1)设3阶对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$,$\lambda_1,\lambda_2$对应的特征值向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},$$

求$\boldsymbol{A}$.

(2)设3阶对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$,与特征值$\lambda_1=6$对应的特征值向量依次为$\boldsymbol{p}_1=(1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}}$,求$\boldsymbol{A}$.

四、可合同对角化矩阵的幂：

(1)设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$,求$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^{9}$.

(2)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,求 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^{9}+5\boldsymbol{A}^{8}$.

五、写出下列二次型的系数矩阵:

(1)$f=x^2+4xy+4y^2+2xz+z^2+4yz$.

(2)$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$.

(3)$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

(4)$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$

六、利用正交变换法化二次型为标准型:

(1)$f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$.

(2)$f=x_1^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(3)(仅数一)求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-10yz=1$$

化成标准方程.

七、利用配方法化二次型为规范形并写出所用的变换矩阵:

(1)$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

(2)$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3$.

八、二次型的正定性:

(1)设 $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型,求 a;

(2)$f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

(3)$f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3$

巩固习题06答案速查

一、向量的正交性与正交矩阵：

(1)$\lambda=-2,\gamma=(-2,\ \ 2,\ \ -1)^{\mathrm{T}}$.(2)略.(3)略.

二、实对称矩阵的正交化：

(1)$\boldsymbol{P}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$

(2)$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{4}{3\sqrt{2}}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}10&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(3)$x=4,y=5,\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{4}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

三、矩阵的相似与相似对角化：

(1)$\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$.　　(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$.

四、可合同对角化矩阵的幂：

(1)$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^{9}=-2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

(2)$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-6\boldsymbol{A}^{9}+5\boldsymbol{A}^{8}=2\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}$.

五、写出下列二次型的系数矩阵：

(1)$f=(x,\quad y,\quad z)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

(2)$f=(x_1,\quad x_2,\quad x_3)\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&3\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

(3)$\begin{pmatrix}2&2\\2&1\end{pmatrix}$ (4)$\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix}$

六、利用正交变换法化二次型为标准型：

(1)$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

(2)$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},f=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(3)$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},2v^2+11w^2=1$

七、利用配方法化二次型为标准型并写出所用的变换矩阵及规范形：

(1)$f(\boldsymbol{C}y)=y_1^2-y_2^2+y_3^2,\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}(|\boldsymbol{C}|=1)$.

(2) $f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=y_1^2+y_2^2+y_3^2$, $\boldsymbol{C}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $(|\boldsymbol{C}|=\sqrt{2})$.

八、二次型的正定性:

(1) $-\frac{4}{5}<a<0$;(2)负定;(3)正定.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

概率论与数理统计（数一、三）

微信公众号【顶尖考研】
（ID：djky66）

第1讲　事件与概率

一、基本概念

1. 随机试验

(1)可以在相同条件下重复地进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

例如:(1)掷一次骰子观察点数.(2)抽一只灯泡测试寿命.

2. 样本空间

随机试验的所有可能结果组成的集合.

例如:掷出$\{1,2,3,4,5,6\}$.

3. 样本点

微信公众号【顶尖考研】(ID: dikv66)

样本空间的元素,即随机试验的每个结果.

例如:6个样本点:掷出1,掷出2,……,掷出6.

4. 随机事件

包含随机试验若结果的集合,即样本空间的子集:习惯上记作事件$A,B,C\cdots$

例如:

(1)事件A:"掷出点数大于3"

(2)事件B:"掷出点数为偶数"

(3)事件C:"掷出6点"

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**.

样本空间S包含所有的样本点,它是S自身的子集,在每次试验中它总是发生的,S称为**必然事件**.空集$\varnothing$不包含任何样本点,它也作为样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,$\varnothing$称为**不可能事件**.

5. 事件发生

在某次试验中,随机事件里的某一样本点出现时,称这一事件发生;

例如:(1)某次试验中,掷出6点,则上述事件A,B,C均发生;

(2)某次试验中,掷出4点,则上述事件A,B发生,C不发生.

6. 事件的概率

随机事件里包含的所有样本点出现的可能性大小之和,记作$P(\cdot)$.

【例 1】计算上述事件 A,B,C 均发生的概率：

二、古典概型与几何概型

1. 古典概型

1°试验的样本空间只包含有限个元素；

2°试验中每个基本事件发生的可能性相同

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基础事件数}}{S\text{ 中基本事件的总数}}.$$

【续例 1】

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 2】一个口袋装有 6 只球，其中 4 只白球、2 只红球从袋中取球两次，每次随机地取一只. 考虑两种取球方式：(a)第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球这种取球方式叫做放回抽样. (b)第一次取一球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球. 这种取球方式叫做不放回抽样. 试分别就上面两种情况求：

(1)取到的两只球都是白球的概率；

(2)取到的两只球颜色相同的概率；

(3)取到的两只球中至少有一只是白球的概率.

【例 3】某接待站在某一周曾接待过 12 次来访，已知所有这 12 次接待都是在周二和周四进行的，问是否可以推断接待时间是有规定的？

人们在长期的实践中总结得到“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的”(称之为实际推断原理). 现在概率很小的事件在一次试验中竟然发生了，因此有理由怀疑假设的正确性，从而推断接待站不是每天都接待来访者，即认为其接待时间是有规定的.

2. 几何概型

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 4】从$[0,2]$上取一个随机数 X，则：

①该随机数 $X<1$ 的概率；

②该随机数 $X\leqslant 1$ 的概率；

③该随机数 $X=1$ 的概率

④再取一个随机数 Y，则随机数 X,Y 相差不超过 1 的概率

三、事件关系与概率计算公式

1. 包含关系

2. 积事件与和事件

(1)积事件

(2)和事件

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 5】已知 $P(A)=\frac{2}{3},P(B)=P(C)=\frac{1}{3},P(AB)=P(AC)=\frac{1}{4},P(BC)=0$,求：

①A,B,C 至少有一个发生的概率.

②A,B,C 都不发生的概率.

(3)运算律

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

3. 互斥关系与对立关系

4. 差事件

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【续例 5】已知 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=P(AC)=\frac{1}{4}$，$P(BC)=0$，求：

③$P(A\bar{B}\bar{C})=\frac{1}{6}$

5. 条件概率

定义 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

【例 6】一盒子装有 4 只产品,其中有 3 只一等品,1 只二等品.从中取产品两次,每次任取一只,作不放回抽样.设事件 A 为"第一次取到的是一等品",事件 B 为"第二次取到的是一等品".试求条件概率 $P(B|A)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

6. 乘法公式

乘法定理 设 $P(A)>0$,则有 $P(AB)=P(B|A)\ P(A)$.

【例 7】设某光学仪器厂制造的透镜,第一次落下时打破的概率为 1/2,若第次落下未打破,第二次落下打破的概率为 7/10,若前两次落下未打破,第三次落下打破的概率为 9/10.试求透镜落下三次而未打破的概率.

7. 全概率公式

定义 设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件. 若

(i) $B_iB_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$;

(ii) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$,

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为样本空间 S 的一个划分.

定理 设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n).$$

8. 贝叶斯公式

定理 设试验 E 的样本空间为 S. A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0,P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

【例 8】某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录有以下的数据：

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志(1)在仓库中随机地取一只元件，求它是次品的概率；(2)在仓库中随机地取一只元件，若已知取到的是次品，为分析此次品出自何厂，需求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少. 试求这些概率.

四、独立性

定义 设 A,B 是两事件,如果满足等式

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A,B 相互独立,简称 A,B 独立.

容易知道,若 $P(A)>0,P(B)>0$,则 A,B 相互独立与 A,B 互不相容不能同时成立.

定理一 设 A,B 是两事件,且 $P(A)>0$.若 A,B 相互独立,则 $P(B|A)=P(B)$.反之亦然定理的正确性是显然的.

定理二 若事件 A 与 B 相互独立,则下列各对事件也相互独立:

$$A \text{ 与 } \bar{B},\bar{A} \text{ 与 } B,\bar{A} \text{ 与 } \bar{B}.$$

定义 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式.

$$\left.\begin{aligned}&P(AB)=P(A)P(B),\\&P(BC)=P(B)P(C),\\&P(AC)=P(A)P(C),\\&P(ABC)=P(A)P(B)P(C),\end{aligned}\right\}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

两事件相互独立的含义是它们中一个已发生,不影响另一个发生的概率在实际应用中,对于事件的独立性常常是根据事件的实际意义去判断.一般,若由实际情况分析,A,B 两事件之间没有关联或关联很微弱,那就认为它们是相互独立的.例如 A,B 分别表示甲、乙两人患感冒.如果甲、乙两人的活动范围能认为 A、B 相互独立了

【例 9】从一副不含大小王的扑克牌中任取一张,记 $A=\{$抽到 $K\}$,$B=\{$抽到的牌是黑色的$\}$,问事件 A、B 是否相互独立?

【例 10】随机投掷编号为 1 与 2 的两个色子：

A 表示 1 号色子向上一面出现奇数；

B 表示 2 号色子向上一面出现奇数；

C 表示两色子出现的点数之和为奇数.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 11】三人独立地去破译一份密码，已知各人能破译出概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，问三人中至少有一人能将密码破译出的概率是多少？

巩固习题 01

1.(1)设 A,B,C 是三个事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4,P(AB)=P(BC)=0,$ $P(AC)=1/8$,求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

(2)已知 $P(A)=1/2,P(B)=1/3,P(C)=1/5,P(AB)=1/10,P(AC)=1/15,$ $P(BC)=1/20,P(ABC)=1/30$,求 $A\cup B,\bar{A}\bar{B},A\cup B\cup C,\bar{A}\bar{B}\bar{C},\bar{A}\bar{B}C,\bar{A}\bar{B}\cup C$ 的概率.

(3)已知 $P(A)=1/2$,(i)若 A,B 互不相容,求 $P(A\bar{B})$,(ii)若 $P(AB)=1/8$,求 $P(A\bar{B})$.

2.在 1500 件产品中有 400 件次品、1100 件正品.任取 200 件.

(1)求恰有 90 件次品的概率.

(2)求至少有 2 件次品的概率.

3.(1)已知 $P(\bar{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\bar{B})=0.5$,求条件概率 $P(B|A\cup B)$.

(2)已知 $P(A)=1/4,P(B|A)=1/3,P(A|B)=1/2$,求 $P(A\cup B)$.

微信公众号【向尘考研】(ID: djky66)

4.已知在 10 件产品中有 2 件次品,在其中取两次,每次任取一件,作不放回抽样.求下列事件的概率:

(1)两件都是正品.

(2)两件都是次品.

(3)一件是正品,一件是次品.

(4)第二次取出的是次品.

5.(1)设甲袋中装有 n 只白球、m 只红球;乙袋中装有 N 只白球、M 只红球.今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中,再从乙袋中任意取一只球.问取到白球的概率是多少?

(2)第一只盒子装有 5 只红球,4 只白球;第二只盒子装有 4 只红球,5 只白球.先从第一盒中任取 2 只球放入第二盒中去,然后从第二盒中任取一只球,求取到白球的概率.

6.有两箱同种类的零件,第一箱装 50 只,其中 10 只一等品;第二箱装 30 只,其中 18 只一等品.今从两箱中任挑出一箱,然后从该箱中取零件两次,每次任取一只,作不放回抽样,求

(1)第一次取到的零件是一等品的概率,

(2)在第一次取到的零件是一等品的条件下,第二次取到的也是一等品的概率.

7.设事件 A,B 的概率均大于零,说明以下的叙述(1)必然对.(2)必然错.(3)可能

对.并说明理由.

(1)若 A 与 B 互不相容,则它们相互独立.

(2)若 A 与 B 相互独立,则它们互不相容.

(3)$P(A)=P(B)=0.6$,且 A,B 互不相容.

(4)$P(A)=P(B)=0.6$,且 A,B 相互独立.

8.设第一只盒子中装有3只蓝球,2只绿球,2只白球;第二只盒子中装有2只蓝球,3只绿球,4只白球.独立地分别在两只盒子中各取一只球.

(1)求至少有一只蓝球的概率.

(2)求有一只蓝球一只白球的概率.

(3)已知至少有一只蓝球,求有一只蓝球一只白球的概率.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

巩固习题 01 答案速查

1. (1) $\frac{5}{8}$.

(2) $P(A\cup B)=\frac{11}{15}, P(\bar{A}\bar{B})=\frac{4}{15}, P(A\cup B\cup C)=\frac{17}{20}, P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=\frac{3}{20}, P(\bar{A}\bar{B}C)=\frac{7}{60}, P(\bar{A}\bar{B}\cup C)=\frac{7}{20}$.

(3) (i) $\frac{1}{2}$. (ii) $\frac{3}{8}$.

2. (1) $\frac{C_{400}^{90}C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$. (2) $1-\frac{C_{1100}^{200}+C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}$.

3. (1) $\frac{1}{4}$. (2) $\frac{1}{3}$.

4. (1) $\frac{28}{45}$. (2) $\frac{1}{45}$. (3) $\frac{16}{45}$. (4) $\frac{1}{5}$.

5. (1) $\frac{n}{m+n}\cdot\frac{N+1}{M+N+1}+\frac{m}{m+n}\cdot\frac{N}{M+N+1}$. (2) $\frac{53}{99}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

6. (1) $\frac{2}{5}$. (2) $\frac{690}{1421}$.

7. (1)必然错. (2)必然错. (3)必然错. (4)可能对.

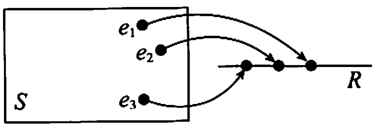
8. (1) $\frac{5}{9}$. (2) $\frac{16}{63}$. (3) $\frac{16}{35}$.

第 2 讲　一维随机变量及其分布

一、随机变量

1. 定义

定义　设随机试验的样本空间为 $S=\{e\}\cdot X=X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实值单值函数. 称 $X=X(e)$ 为随机变量.



2. 分类

(1)离散型　　　　(2)连续型　　　　(3)混合型

二、离散型随机变量及其分布

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

1. 分布律

设离散型随机变量 X 所可能取的值为 $x_k(k=1,2,\cdots)$, X 取各个可能值的概率，即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率，为

$$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots. \tag{2.1}$$

由概率的定义，p_k 满足如下两个条件：

$$1^\circ\ p_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots; \tag{2.2}$$

$$2^\circ\ \sum_{k=1}^{\infty}p_k=1. \tag{2.3}$$

条件(2.3)是由于 $\{X=x_1\}\cup\{X=x_2\}\cup\cdots$ 是必然事件，且 $\{X=x_j\}\cap\{X=x_k\}=\varnothing,k\neq j$，故 $1=P[\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{X=x_k\}]=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X=x_k\}$，即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$.

我们称(2.1)式为离散型随机变量 X 的分布律. 分布律也可以用表格的形式来表示

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

(2.4)

(2.4)直观地表示了随机变量 X 取各个值的概率的规律. X 取各个值各占一些概率，这些概率合起来是 1. 可以想像成：概率 1 以一定的规律分布在各个可能值上这就是(2.4)称为分布律的缘故.

2. 常见离散型分布

(一)(0—1)分布

设随机变量 X 只可能取 0 与 1 两个值，它的分布律是

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1\qquad(0<p<1),$$

则称 X 服从以 p 为参数的(0—1)分布或两点分布.

(0—1)分布的分布律也可写成

X	0	1
p_k	$1-p$	p

(二)伯努利试验、二项分布

设试验 E 只有两个可能结果：A 及 $\bar{A}$，则称 E 为**伯努利(Bernoulli)试验** $P(A)=p(0<p<1)$，此时 $P(\bar{A})=1-p$. 将 E 独立重复地进行 n 次，则称这串重复的独立试验为 n 重伯努利试验.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 1】某人进行射击，设每次射击的命中率为 0.02，独立射击 400 次，试求至少击中两次的概率.

【例 2】进行重复独立试验,设每次试验的成功概率为失败概率为 $q=1-p(0<p<1)$.

(1)将试验进行到出现一次成功为止,以 X 表示所需的试验次数,求 X 的分布律.(此时称 X 服从以 p 为参数的几何分布.)

(2)将试验进行到出现 r 次成功为止,以 Y 表示所需的试验次数,求 Y 的分布律.(此时称 Y 服从以 r,p 为参数的巴斯卡分布或负二项分布.)

(3)一篮球运动员的投篮命中率为 45%.以 X 表示他首次投中时累计已投篮的次数,写出 X 的分布律,并计算 X 取偶数的概率.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(三)泊松分布

设随机变量 X 所有可能取的值为 $0,1,2,\cdots$,而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots$$

其中 $\lambda>0$ 是常数.则称 X 服从参数为入的泊松分布,记为 $X\sim\pi(\lambda)$.

【例 3】某人家中在时间间隔 t(小时)内接到电话的次数 X 服从参数为 $2t$ 的泊松分布

(1)若他外出计划用时 10 分钟,问其间有电话铃响一次的概率是多少?

(2)若他希望外出时没有电话的概率至少为 0.5,问他外出应控制最长时间是多少?

3. 分布函数

定义 设 X 是一个随机变量,x 是任意实数,函数

微信公众号【顶尖考研】

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},-\infty<x<\infty$$

称为 X 的**分布函数**.

(ID: djky66)

分布函数 $F(x)$ 具有以下的基本性质:

1° $F(x)$是一个不减函数.

2° $0\leqslant F(x)\leqslant 1$,且 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,$F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$.

3° $F(x+0)=F(x)$,即 $F(x)$是右连续的.

【例 4】设随机变量 X 的分布律为

X	-2	2	3
P_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 X 的分布函数,并求 $P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$,$P\left\{\frac{3}{2}<X\leqslant\frac{5}{2}\right\}$,$P\{2\leqslant X\leqslant 3\}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、连续型随机变量及其分布

1. 概率密度

【例 5】设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}kx, & 0\leqslant x<3\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\leqslant x\leqslant 4\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数 k;(2)求 X 的分布函数 $F(x)$;(3)求 $P\{1<X\leqslant\frac{7}{2}\}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

2. 常见分布

(一)均匀分布

若连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布. 记为 $X\sim U(a,b)$.

【例 6】设 K 在(0,5)上服从均匀分布,求方程 $4x^2+4xK+K+2=0$ 有实根的概率.

(二)指数分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为常数,则称 X 服从参数为 θ 的指数分布.

【例 7】某人乘车或步行上班,他等车的时间 X(单位:分钟)服从参数为 0.2 的指数分布,如果等车时间超过 10 分钟,他就步行上班若以 Y 表示他一周(五个工作日)步行上班的天数,求:他一周内至少有一天步行上班的概率.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(三)正态分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty,$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数,则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布或高斯(Gauss)分布,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

引理 若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

四、随机变量函数的分布

1. 离散型

【例 8】设随机变量 X 具有以下的分布律，试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律.

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 连续型

【例 9】设随机变量 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0<x<4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度.

定理　设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，$-\infty<x<\infty$，又设函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$（或恒有 $g'(x)<0$），则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta \\ 0 & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\alpha=\min\{g(-\infty),g(\infty)\}$，$\beta=\max\{g(-\infty),g(\infty)\}$，$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

【例 10】设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 试证明 X 的线性函数 $Y=aX+b(a\neq 0)$ 也服从正态分布.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 02

1. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，作不放回抽样. 以 X 表示取出的次品的只数.

(1)求 X 的分布律.

(2)画出分布律的图形.

2. 某一公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为 $\frac{1}{2}t$ 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关(时间以小时计).

(1)求某一天中午 12 时至下午 3 时未收到紧急呼救的概率.

(2)求某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次紧急呼救的概率.

3. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \ln x, & 1\leqslant x<e,\\ 1, & x\geqslant e.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1)求 $P\{X<2\}$，$P\{0<X\leqslant 3\}$，$P\{2<X<\frac{5}{2}\}$.

(2)求概率密度 $f_X(x)$.

4. 某种型号器件的寿命 X(以小时计)具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

现有一大批此种器件(设各器件损坏与否相互独立)，任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率是多少?

5. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(min)服从指数分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}e^{-x/5}, & x>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，若超过 10 min，他就离开. 他一个月要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数. 写出 Y 的分布律，并求 $P\{Y\geqslant 1\}$.

6. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布律.

7. 设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 服从均匀分布.

(1)求 $Y=e^X$ 的概率密度.

(2)求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度.

8. 设 $X\sim N(0,1)$.

(1)求 $Y=e^X$ 的概率密度.

(2)求 $Y=2X^2+1$ 的概率密度.

(3)求 $Y=|X|$ 的概率密度.

9. (1)设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, 求 $Y=X^3$ 的概率密度.

(2)设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 的概率密度.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

10. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

巩固习题 02 答案速查

1.(1)

X	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(2)略.

2.(1)$e^{-\frac{3}{2}}$.　　(2)$1-e^{-\frac{5}{2}}$.

3.(1)$P\{X<2\}=\ln 2, P\{0<X\leqslant 3\}=1, P\{2<X<\frac{5}{2}\}=\ln\frac{5}{4}$.

(2)$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, 1<x<e,\\ 0, 其他\end{cases}$

4.$\frac{232}{243}$

5.Y 的分布律 $P\{Y=k\}=C_5^k e^{-2k}(1-e^{-2})^{5-k}, k=0,1,2,\cdots, P\{Y\geqslant 1\}=1-(1-e^{-2})^5$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

6.

Y	0	1	4	9
P_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

7.(1)$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, 1<y<e,\\ 0, 其他\end{cases}$　　(2)$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, y>0,\\ 0, 其他\end{cases}$

8.(1)$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}, y>0,\\ 0, 其他\end{cases}$　　(2)$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, y>1,\\ 0, 其他\end{cases}$

(3)$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, y>0,\\ 0, 其他\end{cases}$

9.(1)$f_Y(y)=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}f(\sqrt[3]{y}), y\neq 0$.　　(2)$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, y>0,\\ 0, 其他\end{cases}$.

10.$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, 0<y<1,\\ 0, 其他\end{cases}$.

第 3 讲　二维随机变量及其分布

一、二维随机变量

1. 定义

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 离散型

(1)分布律

【例 1】设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值. 试求 (X,Y) 的分布律.

(2)分布函数

分布函数 $F(x,y)$具有以下的基本性质：

$1°F(x,y)$是变量 x 和 y 的不减函数，即对于任意固定的 y，当 $x_2>x_1$ 时$F(x_2,y)\geqslant F(x_1,y)$；对于任意固定的 x，当 $y_2>y_1$ 时 $F(x,y_2)\geqslant F(x,y_1)$.

$2°0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且对于任意的固定的 y，$F(-\infty,y)=0$；对于任意固定的 x，$F(x,-\infty)=0$；$F(-\infty,-\infty)=0$，$F(\infty,\infty)=1$.

$3°F(x+0,y)=F(x,y)$，$F(x,y+0)=F(x,y)$，即 $F(x,y)$关于 x 右连续，关于 y 也右连续.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

4°对于任意(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$x_1<x_2$，$y_1<y_2$，下述不等式成立：

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geqslant 0.$$

3. 连续型

(1)概率密度

(2)分布函数

【例 2】设二维随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1)求分布函数 $F(x,y)$；

(2)求概率 $P\{Y\leqslant X\}$.

(3)均匀分布

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 3】二维随机变量(X,Y)在 $D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant x\}$上服从均匀分布，求$(X,Y)$的概率密度

二、边缘分布

1. 离散型

【续例 1】设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值试求 (X,Y) 的分布律.

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	0	$\frac{1}{16}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 连续型

【续例 3】二维随机变量 (X,Y) 在 $D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant x\}$ 上服从均匀分布，求 (X,Y) 的概率密度.

(2)求边缘概率密度

3. 二维正态分布维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$，我们称 (X,Y) 为服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布(这五个参数的意义将在下一章说明)，记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

1°n 维正态随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的每一个分量 $X_i,i=1,2,\cdots,n$ 都是正态随机变量；反之，若 $X_1,X_2,\cdots,X_nn$ 都是正态随机变量，且相互独立，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维正态随机变量.

2°n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的任意的线性组合

$$l_1X_1+l_2X_2+\cdots+l_nX_n$$

服从一维正态分布(其中 $l_1,l_z,\cdots,l_n$ 不全为零).

3°若 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布，设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 是 $X_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的线性函数，则 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)$ 也服从多维正态分布.

这一性质称为正态变量的线性变换不变性.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

三、条件分布

1. 离散型

定义 设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若 $P\{Y=y_i\}>0$. 则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,\cdots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

同样，对于固定的 i，若 $P\{X=x_i\}>0$，则称

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_i},j=1,2,\cdots$$

为在 $X=x_i$，条件下随机变量 Y 的条件分布律.

【续例 1】设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值. 试求(X,Y)的分布律.

(3)求在 $X-2$ 的条件下，Y 的条件分布.

2. 连续型

定义 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，(X,Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$. 若对于固定的y，$f_Y(y)>0$，则$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度，记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

【续例 3】二维随机变量(X,X)在$D=\{(x,y)|x^2\leqslant y\leqslant x\}$上服从均匀分布，求$(X,Y)$的概率密度.

(3)求条件概率密度$f_{YX}(y|x)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 4】设数X在区间$(0,1)$上随机地取值，当观察到$X=x(0<x<1)$时，数Y在区间$(x,1)$上随机地取值. 求Y的概率密度$f_Y(y)$.

四、独立性

定义 设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数若对于所有 x,y 有

$$P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\} \tag{3.1}$$

即

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y), \tag{3.2}$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

设 (X,Y) 是连续型随机变量，$f(x,y)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别为 (X,Y) 的概率密度和边缘概率密度，则 X 和 Y 相互独立的条件(3.2)等价于：等式

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{3.3}$$

在平面上几乎处处成立.

当 (X,Y) 是离散型随机变量时，X 和 Y 相互独立的条件(3.2)式等价于：对于 (X,Y) 的所有可能取的值 (x_i,y_i) 有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\} \tag{3.4}$$

在实际中使用(3.3)式或(3.4)式要比使用(3.2)式方便

【例 5】一负责人到达办公室的时间均匀分布在 8～12 时，他的秘书到达办公室的时间均匀分布在 7～9 时，设他们两人到达的时间相互独立，求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟(1/12 小时)的概率.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

五、随机变量函数的分布

1. 离散型

【续例 1】设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值试求 (X,Y) 的分布律.

(4)求 $Z=X-Y$ 的分布律.

2. 连续型

【续例 3】二维随机变量 (X,Y) 在 $D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant x\}$ 上服从均匀分布，求 (X,Y) 的概率密度.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(4)求 $Z=XY$ 的概率密度.

3. 最值函数

巩固习题 03

1. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数 k.

(2)求 $P\{X<1,Y<3\}$.

(3)求 $P\{X<1.5\}$.

(4)求 $P\{X+Y\leqslant 4\}$.

2. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度.

3. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度.

4. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)确定常数 c.

(2)求边缘概率密度.

(3)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$,特别,写出当 $Y=\frac{1}{2}$时 X 的条件概率密度.

(4)求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$,特别,分别写出当 $X=\frac{1}{3}$,$X=\frac{1}{2}$时 Y 的条件概率密度.

(5)求条件概率

$$P\{Y\geqslant\frac{1}{4}|X=\frac{1}{2}\},P\{Y>\frac{3}{4}|X=\frac{1}{2}\}.$$

5. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：(1)条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$.

(2)随机变量 X 和 Y 是否相互独立(需说明理由)?

6. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，当给定 $X=x$ 时，随机变量 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x, & 0<y<\dfrac{1}{x},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$.

(2)求边缘密度 $f_Y(y)$，并画出它的图形.

(3)求 $P\{X>Y\}$.

7. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在区间(0,1)上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2} & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

(1)求 X 和 Y 的联合概率密度.

(2)设有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率.

微信公众号 (ID：djky66)

8. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$，$\mu>0$ 是常数. 引入随机变量

$$Z=\begin{cases}1, & \text{当}\ X\leqslant Y,\\ 0, & \text{当}\ X>Y.\end{cases}$$

(1)求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

(2)求 Z 的分布律和分布函数.

9. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分别求：(1)$Z=X+Y$，(2)$Z=XY$ 的概率密度.

10. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

11. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)问 X 和 Y 是否相互独立?

(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

12. 设随机变量 X,Y 相互独立,且具有相同的分布,它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}e^{1-x}, & x>1,\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

13. 设随机变量 X,Y 相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=Y/X$ 的概率密度,

14. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}be^{-(x+y)} & 0<x<1,0<y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(1)试确定常数 b.

(2)求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$.

(3)求函数 $U=max\{X,Y\}$的分布函数.

巩固习题03答案速查

1. (1) $\frac{1}{8}$.　(2) $\frac{3}{8}$.　(3) $\frac{27}{32}$.　(4) $\frac{2}{3}$.

2. $f_X(x)=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(y^2-4y+3), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

3. $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4. (1) $\frac{21}{4}$. (2) $f_X(x)=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3) $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}}, & -\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{y}, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2})=\begin{cases}3\sqrt{2}x^2, & -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(4) $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{2y}{1-x^4}, & x^2\leqslant y\leqslant 1, -1<x<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$f_{Y|X}(y|\frac{1}{3})=\begin{cases}\frac{81}{40}y, & \frac{1}{9}\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$f_{Y|X}(y|\frac{1}{2})=\begin{cases}\frac{32}{15}y, & \frac{1}{4}\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(5) $P\{Y\geqslant\frac{1}{4}|X=\frac{1}{2}\}=1, P\{Y>\frac{3}{4}|X=\frac{1}{2}\}=\frac{7}{15}$.

5. (1) $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & -x\leqslant y\leqslant x, 0<x<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{1+y}, & -y<x<1, -1<y<0,\\ \frac{1}{1-y}, & y<x<1, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2)不独立.

6.(1) $f(x,y)=\begin{cases} x, & 0<x<1,0<y<\dfrac{1}{x}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0<y<1, \\ \dfrac{1}{2y^2}, & y\geqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(3)$\dfrac{1}{3}$.

7.(1)$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1,y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(2)$1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\dfrac{1}{2}]$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

8.(1)$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$

(2)

z	0	1
P	$\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$

,$F_z(z)=\begin{cases} 0, & Z<0, \\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, & 0\leqslant z\leqslant 1,. \\ 1, & z\geqslant 1 \end{cases}$

9.(1)$f_Z(z)=\begin{cases} z^2, & 0<z\leqslant 1, \\ 2z-z^2, & 1<z<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ (2)$f_Z(z)=\begin{cases} 2(1-z), & 0<z<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

10. $f_Z(z)=\begin{cases} 1-e^{-z}, & 0<z<1, \\ (e-1)e^{-z}, & z\geqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

11.(1)不独立.(2)$f_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}z^2e^{-z}, & z>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

12. $f_Z(z)=\begin{cases} (z-2)e^{2-z}, & z>2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

13. $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(z+1)^2}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

14. (1) $b=\dfrac{1}{1-e^{-1}}$. (2) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3) $F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ \dfrac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}, & 0\leqslant u<1\\ 1-e^{-u}, & u\geqslant 1.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第 4 讲　数字特征

一、期望

1. 维随机变量的期望

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 1】常见分布的期望

2. 二维随机变量的期望

3. 期望的性质

1°设 C 是常数，则有 $E(C)=C$.

2°设 X 是一个随机变量，C 是一个常数，则有 $E(CX)=CE(X)$.

3°设 X,Y 是两个随机变量，则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

这一性质可以推广到任意有限个随机变量之和的情况

4°设 X,Y 是相互独立的随机变量，则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

这一性质可以推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 2】有两个相互独立工作的电子装置，它们的寿命(以小时计) $X_k\ (k=1,2)$ 服从同一指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}\quad \theta>0.$$

若将这两个电子装置串联连接组成整机，求整机寿命(以小时计) N 的数学期望.

【例3】一民航送客车载有20位旅客自机场开出，旅客有10个车站可以下车. 如到达一个车站没有旅客下车就不停车. 以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各位旅客是否下车相互独立）

二、方差

1. 定义

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 性质

1°设 C 是常数，则 $D(C)=0$.

2°设 X 是随机变量，C 是常数，则有

$$D(CX)=C^2D(X),D(X+C)=D(X).$$

3°设 X,Y 是两个随机变量，则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}.$$

特别，若 X,Y 相互独立，则有

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

这一性质可以推广到任意有限多个相互独立的随机变量之和的情况.

4°$D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率1取常数 $E(X)$，即

$$P\{X=E(X)\}=1.$$

【例 4】常见分布的方差

三、协方差

1. 定义

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

2. 性质

1°$\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$，$a$，$b$ 是常数.

2°$\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

3°若随机变量 X，Y 相互独立，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，反之不一定成立.

4°设 X 是随机变量，C 是常数，则有 $\mathrm{Cov}(X,C)=0$.

5°设 X 是随机变量，则有 $\mathrm{Cov}(X,X)=DX$.

【例 5】设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且同分布，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $\mathrm{Cov}(X_1,\bar{X})=$________.

【例 6】设 X,Y 是随机变量，计算 $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)$.

四、相关系数

1. 定义

2. 性质

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

定理 1° $|\rho_{XY}|\leqslant 1$

2° $|\rho_{xy}|=1$ 的充要条件是，存在常数 a,b 使

$$P\{Y=a+bX\}=1.$$

3°若随机变量 X,Y 相互独立，则 $\rho_{XY}=0$.

【例 7】设(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	-2	-1	1	2	$P\{Y=i\}$
1	0	1/4	1/4	0	1/2
4	1/4	0	0	1/4	1/2
$P\{X=i\}$	1/4	1/4	1/4	1/4	1

【例 8】设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$,$E(Y)$,$\mathrm{Cov}(X,Y)$,ρ_{XY},$D(X+Y)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

五、矩

定义 设 X 和 Y 是随机变量,若

$$E(X^k),k=1,2,\cdots$$

存在,称它为 X 的 k 阶原点矩,简称 k 阶矩.

若
$$E\{[X-E(X)]^k\},k=2,3,\cdots$$
存在,称它为 X 的 k 阶中心矩

若
$$E(X^kY^l),k,l=1,2,\cdots$$
存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩

若
$$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\},k,l=1,2,\cdots$$
存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

巩固习题 04

1. 有 3 只球，4 个盒子，盒子的编号为 1，2，3，4. 将球逐个独立地，随机地放入 4 个盒子中去，以 X 表示其中至少有一只球的盒子的最小号码（例如 $X=3$ 表示第 1 号，第 2 号盒子是空的，第 3 个盒子至少有一只球）. 试求 $E(X)$.

2. (1) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求 $E(X)$，$E(X^2)$，$E(3X^2+5)$.

(2) 设 $X\sim\pi(\lambda)$，求 $E[1/(X+1)]$.

3. (1) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

求 (i) $Y=2X$；(ii) $Y=e^{-2X}$ 的数学期望.

(2) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布.

(i) 求 $U=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的数学期望，

(ii) 求 $V=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的数学期望.

4. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X)$，$E(Y)$.

(2) 设 $Z=Y/X$，求 $E(Z)$.

(3) 设 $Z=(X-Y)^2$，求 $E(Z)$.

5. 设随机变量 X_1,X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases} \quad f_2(x)=\begin{cases} 4e^{-4x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

(1)求 $E(X_1+X_2)$,$E(2X_1-3X_2^2)$.

(2)又设 X_1,X_2 相互独立,求 $E(X_1X_2)$.

6.设随机变量 X 服从瑞利分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\sigma>0$ 是常数,求 $E(X)$,$D(X)$.

7.设随机变量 X 服从几何分布,其分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\cdots,$$

其中 $0<p<1$ 是常数.求 $E(X)$,$D(X)$.

8.(1)设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,且有 $X_1\sim B(4,\frac{1}{2})$,$X_2\sim B(6,\frac{1}{3})$,$X_3\sim B(6,\frac{1}{3})$,求 $P\{X_1=2,X_2=2,X_3=5\}$,$E(X_1X_2X_3)$,$E(X_1-X_2)$,$E(X_1-2X_2)$.

(2)设 X,Y 是随机变量,且有 $E(X)=3$,$E(Y)=1$,$D(X)=4$,$D(Y)=9$,令 $Z=5X-Y+15$,分别在下列 3 种情况下求 $E(X)$,$D(X)$.

(i)X,Y 相互独立,(ii)X,Y 不相关,(iii)X,Y 的相关系数为 0.25.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

9.(1)设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$,$E(Y)$,$E(XY)$,$E(X^2+Y^2)$.

(2)设随机变量 X,Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$,$E(Y)$,$E(XY)$.

10.设随机变量 X,Y 相互独立,且都服从$(0,1)$上的均匀分布.

(1)求 $E(XY)$,$E(X/Y)$,$E[ln(XY)]$,$E[|Y-X|]$.

(2)以 X,Y 为边长作一长方形,以 A,C 分别表示长方形的面积和周长,求 A,C 的相关系数.

11.设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$,$E(Y)$,$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

12. 设随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(Y)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)$，ρ_{XY}，$D(X+Y)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

巩固习题 04 答案速查

1. $\frac{25}{16}$.

2. (1) $E(X)=-0.2, E(X^2)=2.8, E(3X^2+5)=13.4$　　(2) $\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$

3. (1)(i) 2, (ii) $\frac{1}{3}$.　　(2)(i) $\frac{n}{n+1}$, (ii) $\frac{1}{n+1}$.

4. (1) 2, 0.　　(2) $-\frac{1}{15}$.　　(3) 5.

5. (1) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$.　　(2) $\frac{1}{8}$

6. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$.

7. $\frac{1}{p}, \frac{1-p}{p^2}$.

8. (1) $\frac{40}{3^9}, 8, 0, -2$.

(2)(i) $E(Z)=29, D(Z)=109$, (ii) $E(Z)=29, D(Z)=109$, (iii) $E(Z)=29$, $D(Z)=94$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

9. (1) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{16}{15}$.　　(2) 1, 1, 2.

10. (1) $\frac{1}{4}$, 不存在, $-2, \frac{1}{3}$.　　(2) $\rho_{XY}=\sqrt{\frac{6}{7}}$.

11. $\frac{2}{3}, 0, 0$.

12. $E(X)=E(Y)=\frac{7}{6}, \mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{1}{36}, \rho_{XY}=-\frac{1}{11}, D(X+Y)=\frac{5}{9}$.

第 5 讲　大数定律和抽样分布

一、切比雪夫不等式

定理　设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma$，则对于任意正数 ε，不等式

$$P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立

这一不等式称为切比雪夫(Chebyshev)不等式

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

二、大数定律

1. 依概率收敛

(1)设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,\cdots$ 是一个随机变量序列，a 是一个常数. 若对于任意正数 ε，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y_n-a|<\varepsilon\}=1,$$

则称序列 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,\cdots\cdots$ 依概率收敛于 a，记为 $Y_n\xrightarrow{P}a$.

(2)依概率收敛的序列有以下的性质.

设 $X_n \xrightarrow{P} a, Y_n \xrightarrow{P} b$，又设函数 $g(x,y)$ 在点 (a,b) 连续，则

$$g(X_n,Y_n) \xrightarrow{P} g(a,b).\text{（证略）}$$

2. 大数定律

弱大数定理（辛钦大数定理） 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k)=\mu(k=1,2,\cdots)$，则序列 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$ 依概率收敛于 μ，即 $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$.

伯努利大数定理 设 f_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数，p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则对于任意正数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{f_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$$

三、中心极限定理

定理 （独立同分布的中心极限定理）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差：$E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2>0(k=1,2,\cdots)$，则随机变量之和 $\sum_{i=1}^{n}x_k$ 的标准化变量

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

定理（棣莫弗—拉普拉斯（*De Moivre* — *Laplace*）定理）设随机变量 η_n $(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $n,p(0<p<1)$ 的二项分布，则对于任意 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\Phi(x)$$

四、统计量

定义 设 X 是具有分布函数 F 的随机变量，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是具有同分布函数 F 的、相互独立的随机变量，则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从分布函数 F（或总体 F、或总体 X）得到的容量为 n 的简单随机样本，简称样本，它们的观察值 $x_1 \cdot x_2,\cdots,x_n$ 称为样本值，又称为 X 的 n 个独立的观察值.

定义 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数，若 g 中不含未知参数，则称 $g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是一统计量.

样本平均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2)$；

样本标准差 $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$；

样本 k 阶(原点)矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k, k=1,2,\cdots$；

样本 k 阶中心矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k, k=1,2,\cdots$.

五、抽样分布

统计量的分布称为抽样分布. 在使用统计量进行统计推断时常需知道它的分布

(一) χ^2 分布

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则称统计量

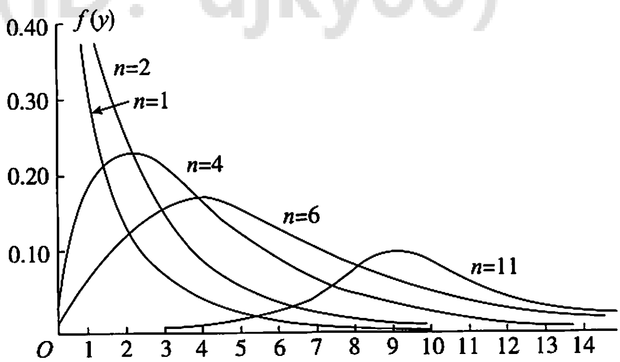
$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $\chi^2\sim\chi^2(n)$.

$\chi^2(n)$ 分布的概率密度为

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}y^{n/2-1}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$



χ^2 分布的可加性　设 $\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，并且 χ_1^2，χ_2^2 相互独立，则有

$$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2).$$

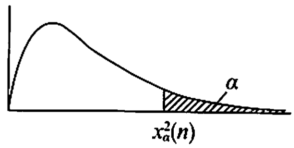
χ^2 分布的数学期望和方差　若 $x^2\sim x^2(n)$，则有

$$E(\chi^2)=n,\quad D(\chi^2)=2n.$$

χ^2 分布的分位点　对于给定的正数 α，$0<\alpha<1$，称满足条件

$$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty}f(y)dy=\alpha$$

的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点



【例 2】设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 来自总体 $N(0,1)$，$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，试确定常数 C 使 CY 服从 χ^2 分布.

【例 3】设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 来自总体 $N(2,3)$，试确定常数 C 使 $P\left\{\sum_{i=1}^{6}(X_i-2)^2 \leqslant C\right\}=0.95$. $\chi_{0.05}^2(6)=12.592$，$\chi_{095}^2(6)=1.635$.

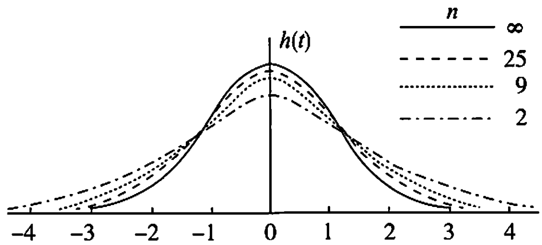
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(二) t 分布

设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X, Y 相互独立，则称随机变量

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

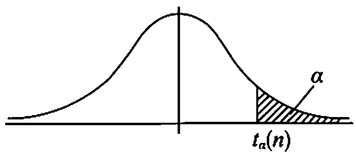
服从自由度为 n 的 t 分布. 记为 $t \sim t(n)$.



t 分布的分位点　对于给定的 α,$0<\alpha<1$,称满足条件

$$P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{\infty}h(t)\,\mathrm{d}t=\alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上 α 分位点



【例 4】设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 来自总体 $N(0,1)$,$Y=\dfrac{C(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$,试确定常数 C 使 Y 服从 t 分布.

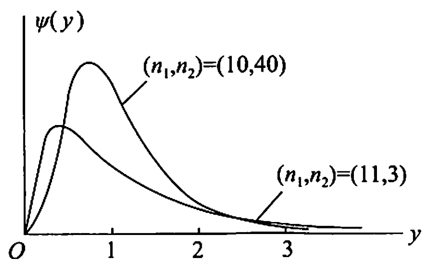
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(三)**F 分布**

设 $U\sim\chi^2(n_1)$,$V\sim\chi^2(n_2)$,且 U,V 相互独立,则称随机变量.

$$F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$$

服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布,记为 $F\sim F(n_1,n_2)$.



由定义可知,若 $F\sim F(n_1,n_2)$,则 $\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

F 分布的分位点对于给定的 α，$0<\alpha<1$，称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty}\psi(y)\mathrm{d}y=\alpha$$

的点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 分布的上 α 分位点.

（四）正态总体的样本均值与样本方差的分布

定理一 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则有

$$\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2/n).$$

对于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2，有以下两个重要定理.

定理二 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$，S^2，分别是样本均值和样本方差，则有

1° $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$；

2° $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立.

定理三 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\bar{X}$，S^2 分别是样本均值和样本方差，则有 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【例 5】设样木 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 来自总体 $N(0,1)$，则

(A) $\bar{X}\sim N(0,1)$　　(B) $n\bar{X}\sim N(0,1)$

(C) $\dfrac{\bar{X}}{S}\sim t(n-1)$　　(D) $\dfrac{\bar{X}}{S}\sim t(n-1)$

巩固习题 05

1. 求总体 $N(20,3)$ 的容量分别为 10，15 的两独立样本均值差的绝对值大于 0.3 的概率.

2. (1) 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 来自总体 $N(0,1)$，$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，试确定常数 C 使 CY 服从 χ^2 分布.

(2) 设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 来自总体 $N(0,1)$，$Y=\dfrac{C(X_1+X_2)}{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)^{1/2}}$，试确定常数 C 使 Y 服从 t 分布.

(3) 已知 $X \sim t(n)$，求证 $X^2 \sim F(1,n)$.

3. 设总体 $X \sim B(1,p)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$，是来自 X 的样本.

(1) 求 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布律.

(2) 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 的分布律.

(3) 求 $E(\bar{X})$，$D(\bar{X})$，$E(S^2)$.

4. 设总体 $X \sim \chi^2(n)$，$X_1, X_2, \cdots X_{10}$ 是来自 X 的样本，求 $E(\bar{X})$，$D(\bar{X})$，$E(S^2)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

5. 设在总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽得一容量为 16 的样本，这里 μ,σ^2 均未知.

(1) 求 $P\{S^2/\sigma^2 \leqslant 2.041\}$，其中 S^2 为样本方差.(需要查附录，考试不要求)

(2) 求 $D(S^2)$.

巩固习题 05 答案速查

1. $2-2\Phi(\frac{3\sqrt{2}}{10})$.　　2. (1) $C=\frac{1}{3}$.　　(2) $C=\sqrt{\frac{3}{2}}$.　　(3)略.

3. (1) $P\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$.

(2) $p\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$.

(3) $E(\bar{X})=p,D(\bar{X})=\frac{p(1-p)}{n},E(S^2)=p(1-p)$.

4. $E(\bar{X})=n,D(\bar{X})=\frac{n}{5},E(S^2)=2n$.

5. (1)0.99(需要查附录,考试不要求).　　(2) $D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{15}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第 6 讲 参数估计与假设检验

一、点估计

设总体 X 的分布函数的形式已知,但它的一个或多个参数未知,借助于总体 X 的一个样本来估计总体未知参数的值的问题称为参数的点估计问题.

1. 矩估计

【例 1】设总体 X 在 $[0,b]$ 上服从均匀分布,b 未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样木,试求 b 的矩估计量.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 2】设总体 X 的均值 μ 及方差 σ^2 都存在,且有 $\sigma^2>0$,但 μ,σ^2 均未知. 又设 X_1, $X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样木试求 μ,σ^2 的矩估计量.

2. 最大似然估计

(1)离散型

【例 3】设总体 $X\sim b(1,p)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本,试求参数 p 的最大似然估计量.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(2)连续型

【例4】设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， $\sigma^2>0$， μ,σ^2 均未知，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本试求 μ,σ^2 的最大似然估计量.

【例5】设总体 X 在 $[0,b]$ 上服从均匀分布，b 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，试求 b 的最大似然估计量.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

3. 最大似然估计的形式不变性

若 $g(x)$存在单值反函数,且$\hat{\theta}$是θ的最大似然估计,则 $g(\hat{\theta})$是 $g(\theta)$的最大似然估计.

二、估计量的评选标准(数学一)

1. 无偏性(数学三了解)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本,$\theta\in\Theta$ 是包含在总体 X 的分布中的待估参数,这里 Θ 是 θ 的取值范围.

无偏性　若估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的数学期望$E(\hat{\theta})$存在,且对于任意$\theta\in\Theta$有

$$E(\hat{\theta})=\theta,$$

则称$\hat{\theta}$是θ 的**无偏估计量**.

估计量的无偏性是说对于某些样本值,由这一估计量得到的估计值相对于真值来说偏大,有些则偏小.反复将这一估计量使用多次,就“平均”来说其偏差为零.在科学技术中 $E(\hat{\theta})-\theta$ 称为以$\hat{\theta}$ 作为θ 的估计的系统误差.无偏估计的实际意义就是无系统误差.

微信公众号【调研考研】
(ID：djky66)

【例 6】设总体 X 服从参数为$\dfrac{1}{\theta}$的指数分布,其中θ未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$,是来自 X 的样本,试证 $\bar{X}$ 和 $nZ=n(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\})$都是$\theta$ 的无偏估计量.

2. 有效性

现在来比较参数 θ 的两个无偏估计量 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$，如果在样本容量 n 相同的情况下，$\hat{\theta}_1$ 的观察值较 $\hat{\theta}_2$ 更密集在真值 θ 的附近，我们就认为 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 为理想. 由于方差是随机变量取值与其数学期望（此时数学期望 $E(\hat{\theta}_1)=E(\hat{\theta}_2)=\theta$）的偏离程度的度量，所以无偏估计以方差小者为好. 这就引出了估计量的有效性这一概念.

有效性 设 $\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，有

$$D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$$

且至少对于某一个 $\theta\in\Theta$ 上式中的不等号成立，则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ **有效**.

【例 7】设总体 X 服从参数为 $\frac{1}{\theta}$ 的指数分布，其中 θ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，当 $n>1$ 时，试证 θ 无偏估计量 $\bar{X}$ 较 $nZ=n(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\})$ 更有效.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

3. 一致性（相合性）

相合性 设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为参数 θ 的估计量，若对于任意 $\theta\in\Theta$，当 $n\to\infty$ 时 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的**相合估计量**.

即，若对于任意 $\theta\in\Theta$ 都满足：对于任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1,$$

则称是 $\hat{\theta}$ 的 θ 相合估计量.

三、区间估计（数学一）

置信区间 设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ，$\theta\in\Theta$（Θ 是 θ 可能取值的范围），对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$，若由来自 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，确定的两个统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$（$\underline{\theta}<\bar{\theta}$），对于任意 $\theta\in\Theta$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\bar{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}\geqslant 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 分别称为置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限，$1-\alpha$ 称为置信水平.

【例 8】设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$ 且已知，μ 未知. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本. 试求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

1°寻求一个样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 θ 的函数 $W=W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$，使得 W 的分布不依赖于 θ 以及其他未知参数，称具有这种性质的函数 W 为**枢轴量**.

2 对于给定的置信水平 $1-\alpha$，定出两个常数 a,b 使得

$$P\{a<W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<b\}=1-\alpha.$$

若能从 $a<W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<b$ 得到与之等价的 θ 的不等式 $\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$，其中 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是统计量. 那么 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 就是 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

微信公众号【顶尖考研】

函数 $W=W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$ 的构造，通常可以从 θ 的点估计着手考虑常用的正态总体的参数的置信区间可以用上述步骤推得.

(ID：djky66)

【例 9】设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$，μ,σ^2 均未知. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本试求的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

四、假设检验

(1)步骤

1°根据实际问题的要求,提出原假设 H_0 及备择假设 H_1;

2°给定显著性水平 α 以及样本容量 n;

3°确定检验统计量以及拒绝域的形式;

4°按 $P\{$当 H_0 为真拒绝 $H_0\}\leqslant\alpha$ 求出拒绝域;

5°取样,根据样本观察值作出决策,是接受 H_0 还是拒绝 H_0

【例 10】某车间用一台包装机包装葡萄糖.袋装糖的净重是一个随机变量,它服从正态分布.当机器正常时,其均值为 05kg,标准差为 0.015kg.某日开工后为检验包装机是否正常,随机地抽取它所包装的糖 9 袋,称得净重为 kg)

0.497 0.506 0.518 0.524 0.498 0.511 0.520 0.515 0.512

问机器是否正常?

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2)两类错误

①弃真:$P\{$拒绝 $H_0 | H_0$ 成立$\}=\alpha$.

②取伪:$P\{$接受 $H_0 | H_0$ 不成立$\}=\alpha$.

巩固习题 06

1.(1)设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数,已知取得了样本值 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$. 试求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

(2)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自参数为 λ 的泊松分布总体的一个样本,试求 λ 的最大似然估计量及矩估计量.

(3)设随机变量 X 服从以 r,p 为参数的负二项分布,其分布律为

$$P\{X=x_k\}=C_{x_k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{x_k-r},x_k=r,r+1,\cdots,$$

其中 r 已知,p 未知. 设有样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,试求 p 的最大似然估计值.

2.设某种电子器件的寿命(以 h 计)T 服从双参数的指数分布,其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-(t-c)/\theta}, & t\geqslant c,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

其中 $c,\theta(c,\theta>0)$ 为未知参数. 自一批这种器件中随机地取 n 件进行寿命试验,设它们的失效时间依次为 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$

(1)求 θ 与 c 的最大似然估计值.

(2)求 θ 与 c 的矩估计量.

3.(1)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

的总体的样本,θ 未知,求 $U=e^{-1/\theta}$ 的最大似然估计值.

(2)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的样本,μ 未知,求 $\theta=P\{X>2\}$ 的最大似然估计值.

(3)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 $B(m,\theta)$ 的样本值,又 $\theta=\frac{1}{3}(1+\beta)$,求 β 的最大似然估计值.

4.设 $X_1,X_2\cdots,X_n$,是来自总体 X 的一个样本,设 $E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$.

(1)确定常数 c,使 $c\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

(2)确定常数 c 使 $(\bar{X})^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计($\bar{X},S^2$ 是样本均值和样本方差).

5. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad 0<\theta<+\infty,$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，

(1)验证 θ 的最大似然估计量是 $\hat{\theta}=\dfrac{-1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i$

(2)证明 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

6. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自均值为 θ 的指数分布总体的样本，其中 θ 未知. 设有估计量

$$T_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2)+\frac{1}{3}(X_3+X_4),$$

$$T_2=(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)/5,$$

$$T_3=(X_1+X_2+X_3+X_4)/4.$$

(1)指出 T_1,T_2,T_3 中哪几个是 θ 的无偏估计量.

(2)在上述 θ 的无偏估计中指出哪一个较为有效.

7. (1)设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计，且有 $D(\hat{\theta})>0$，试证 $\hat{\theta}^2=(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

(2)试证明均匀分布 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 中未知参数 θ 的最大似然估计量不是无偏的.

巩固习题06答案速查

1.(1)θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$，最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$.

(2)λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\bar{X}$ 及矩估计量为 $\hat{\lambda}=\bar{X}$.

(3)p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\frac{r}{\bar{X}}$.

2.(1)θ 与 c 的最大似然估计值为 $\hat{c}=x_1$，$\hat{\theta}=\bar{X}-x_1$.

(2)θ 与 c 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$，$\hat{c}=\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$.

3.(1)$U=e^{-1/\theta}$的最大似然估计值为 $\hat{U}=e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

(2)$\theta=P\{X>2\}$的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=1-2\Phi(2-\bar{X})$.

(3)θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{m}{}$.（本题可继续求 β 的最大似然估计值为 $\hat{\beta}=\frac{3\bar{x}}{m}-1$.）

4.(1)$c=\frac{1}{2(n-1)}$.　　(2)$c=\frac{1}{n}$.

5.(1)验证略.　　(2)证明略.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

6.(1)T_1，T_3 是 θ 的无偏估计量，T_2 不是 θ 的无偏估计量.　　(2)T_3 较 T_1 有效.

7.(1)证明略.

(2)θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，其密度为

$$f_{\hat{\theta}}(t)=\begin{cases}\frac{n}{\theta}(\,)'n-1, & 0\leqslant t\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

仅供内部学习交流

微信公众号【顶尖考研】
（ID：djky66）

有道考神

—更 懂 考 试—

7-15599

有道考神考研