目录

CONTENTS

第1讲 小数的速算与巧算

同学们，你们认识我吗？我的名字叫小数点，即“.”。别看我其貌不扬，我的本领可大呢！你看98756.5和9.87565这两个数挺像的，就是“.”的位置不同，它们就相差了十万八千里呢！细心的同学们，你们在进行小数运算时一定要把“.”看清楚，千万别点错了。

小数的巧算是数学竞赛中的重要内容。要想使计算变得快速、巧妙、正确，就要注意观察，发现算式中数的特点，灵活运用拆、拼的方法进行转化，化繁为简，化难为易。计算时还要注意算式中的运算符号，小数部分的位数和小数四则计算的法则。

下面我们一起来学习这一讲的内容吧！

金牌例题

例题1 **用简便方法计算下面各题。**

（1）$52.8-2.65+47.2-7.35$

（2）$68.3-(24.2-11.7)$

思路分析：

（1）这道混合运算题只有加减法，属于同一级运算。在同一级运算中，任何一个数都可以随意改变位置。但要

注意：数在改变位置时，必须将它前面的符号一起移动，如“ -2.65”。这道题移动“ -2.65”和“ +47.2”后计算就简便了。

解： $52.8-2.65+47.2-7.35$

$=52.8+47.2-2.65-7.35$

$=(52.8+47.2)-(2.65+7.35)$

$=100-10$

$=90$

（2）这道题可以通过去掉小括号使计算简便。括号前是“ - ”号，去括号时，括号里的数前面是“ - ”号（ -11.7）变成“ + ”号（ +11.7）。

解： $68.3-(24.2-11.7)$

$=68.3-24.2+11.7$

$=68.3+11.7-24.2$

$=80-24.2$

$=55.8$

例题 2 **用简便方法计算。**

（1）$1.25\times0.25\times8\times4$

（2）$0.125\times0.25\times0.5\times64$

思路分析：

（1）这道题是 4 个数连乘，从几个数的特点来看，由于 $1.25\times8=10$，$0.25\times4=1$，所以运用乘法交换律和结合律进行简算。

解： $1.25\times0.25\times8\times4$

$=(1.25\times8)\times(0.25\times4)$

$=10\times1$

$=10$

（2）这道题也是4个数连乘，也可以运用乘法交换律和结合律进行简算。先从几个数的特点来看，由于 $0.125\times8=1$，$0.25\times4=1$，$0.5\times2=1$，需要有8，4，2与之相乘，而64正好是8，4，2这三个数的积，因此把64拆开用 $8\times4\times2$ 来表示，再把8，4，2分别与0.125，0.25和0.5相乘，比较简便。

解： $0.125\times0.25\times0.5\times64$

$=0.125\times0.25\times0.5\times8\times4\times2$

$=(0.125\times8)\times(0.25\times4)\times(0.5\times2)$

$=1\times1\times1$

$=1$

例题3 **用简便方法计算。**

（1）0.23×10.2　　　　（2）7.5×99.8

思路分析：

（1）这是一道小数乘法计算题，两个因数中，10.2是个特殊的数，10.2接近10，把10.2看做 $(10+0.2)$，然后应用乘法分配律完成简算。

解： 0.23×10.2

$=0.23\times(10+0.2)$

$=0.23\times10+0.23\times0.2$

$=2.3+0.046$

$=2.346$

（2）因数 99.8 接近 100，即 $99.8=100-0.2$。然后，就可以利用乘法对加法的分配律，完成简算。

解： 7.5×99.8

$=7.5\times(100-0.2)$

$=7.5\times100-7.5\times0.2$

$=750-1.5$

$=748.5$

例题 4 **用简便方法计算。**

（1）$21.3\times0.8+0.2\times21.3$

（2）$3.75\times31+62.5\times3.1$

思路分析：

（1）加号两边的乘式中分别有因数 21.3，可以应用乘法分配律进行简算。

解： $21.3\times0.8+0.2\times21.3$

$=21.3\times(0.8+0.2)$

$=21.3\times1$

$=21.3$

（2）看上去这道题没有什么特别的地方，似乎不简单。可是如果你仔细观察一下，就会发现，相加的两个乘法中，31 与 3.1 很相似。联系乘法中的积不变规律：一个因数扩大几倍，另一个因数缩小相同的倍数，积不变。因此我们可以利用这个规律使 31 变成 3.1，而结果又能保持不变。

解： $3.75\times31+62.5\times3.1$

$=(3.75\times10)\times(31\div10)+62.5\times3.1$

$=37.5\times3.1+62.5\times3.1$

$=3.1\times(37.5+62.5)$

$=3.1\times100$

$=310$

例题 5 **用简便方法计算。**

(1) $7.68\div2.5\div4$

(2) $(9.1\times4.8\times7.5)\div(2.5\times1.3\times1.6)$

思路分析：

(1) 我们可以根据“除法中一个数连续除以几个数，等于用这个数除以后面几个数的乘积”的性质，将原式改为 $7.68\div(2.5\times4)$ 进行简算。

解： $7.68\div2.5\div4$

$=7.68\div(2.5\times4)$

$=7.68\div10$

$=0.768$

(2) 根据除法的性质，将原式变为分别除以几个数，再根据数的特征重新分组计算比较简便。

解： $(9.1\times4.8\times7.5)\div(2.5\times1.3\times1.6)$

$=9.1\times4.8\times7.5\div2.5\div1.3\div1.6$

$=(9.1\div1.3)\times(4.8\div1.6)\times(7.5\div2.5)$

$=7\times3\times3$

$=63$

小结

小数巧算常用的一些计算方法：

（1）小数减（除）法的性质

（2）积（商）不变的规律

（3）交换律和结合律

（4）乘法分配律及其逆应用（分解、变形）

（5）分组法

（6）图解法

金牌训练

一 对应训练

1. 用简便方法计算下面各题。

（1）$38.6-8.3+11.4-1.7$　　（2）$3.28-(1.98-1.72)$

2. 用简便方法计算下面各题。

（1）$12.5\times2.5\times8\times4$

（2）$64\times12.5\times0.25\times0.05$

3. 用简便方法计算下面各题。

（1）0.45×10.2

（2）0.25×99.8

4. 用简便方法计算下面各题。

（1）$5.63\times12+88\times5.63$　　（2）$327\times2.8+17.3\times28$

5. 用简便方法计算下面各题。

（1）$82.3\div12.5\div0.8$

（2）$(3.6\times7.5\times9.5)\div(1.2\times2.5\times1.9)$

二 变式训练

1. 用简便方法计算。

(1) $20.36-7.98-5.02-4.36-2.1$

(2) $7.85-(2.31+2.85+0.69)$

2. 用简便方法计算。

(1) $0.125\times0.25\times0.5\times128$

（2）$0.5\times0.32\times1.25\times0.025\times2$

3. 用简便方法计算下面各题。

（1）$12.2\times201-24.4$　　（2）$0.26\times9.8-0.74\times0.2$

4. 用简便方法计算下面各题。

（1）$14.8\times47-14.8\times19+14.8\times72$

（2）$0.358\times448+0.677\times358-1.25\times35.8$

5. 用简便方法计算下面各题。

（1）$5.75\div1.25\div0.4\div2$

（2）$0.125\div(3.6\div80)\times0.9$

三 拔高训练

1. 速算。

$0.9+9.9+99.9+999.9+9999.9+99999.9+999999.9$

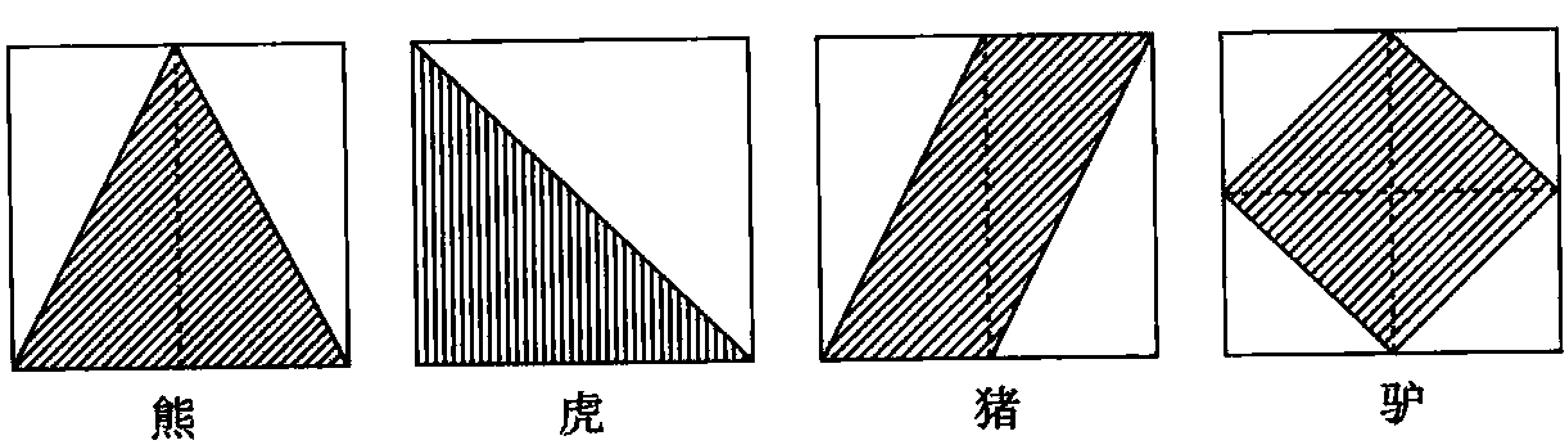
2. 计算。

$0.3+0.6+1.2+2.4+4.8+9.6+19.2$

第2讲 组合图形的面积

组合图形是由两个或两个以上的简单几何图形拼合和重叠组合的。要正确解答组合图形面积的计算问题，必须综合运用各种面积计算公式，仔细观察组合图形的特征和构成，认真思考，看清所求图形是由哪几个基本图形组合而成的，在此基础上选择合理的方法帮助解题。

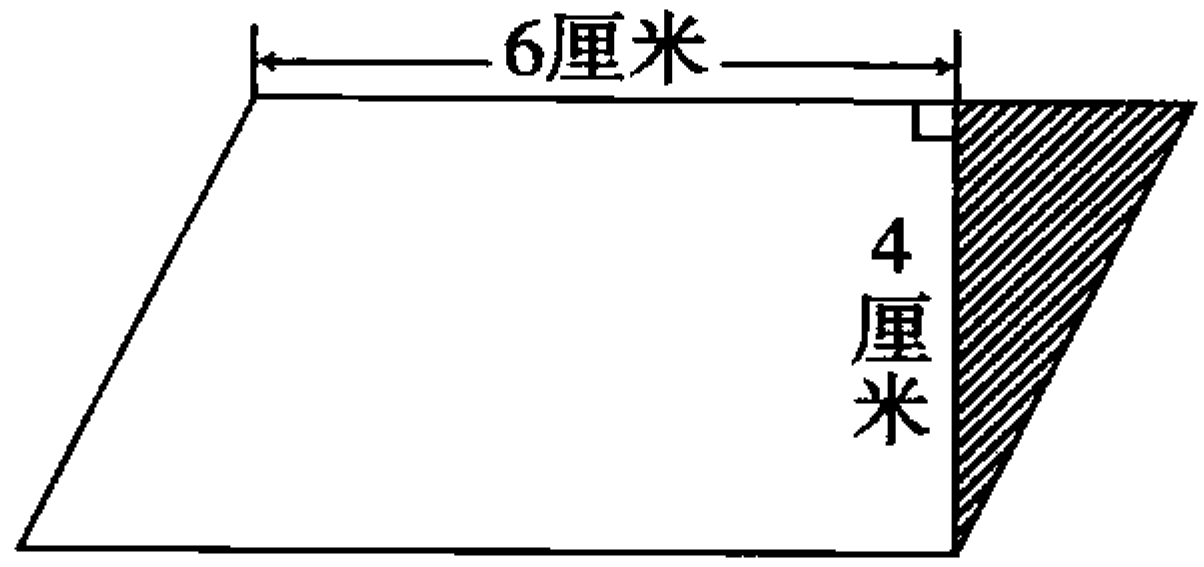
下面是凯莉熊、跳跳虎、小猪哼哼和笨笨驴在一起玩剪纸游戏，他们各拿一张同样大小的正方形纸，并用这张纸剪出不同形状的图形（如下图）。请问谁剪出的图形面积最大？



同学们，你能回答出来吗？其实此题运用割补法或等积变形法，可知这四个小动物剪出的图形面积都等于原来正方形纸的一半，所以他们剪出的图形面积一样大。有意思吧！下面我们一起来学习例题。

金牌例题

例题 1　已知平行四边形的面积是 32 平方厘米，求阴影部分的面积。

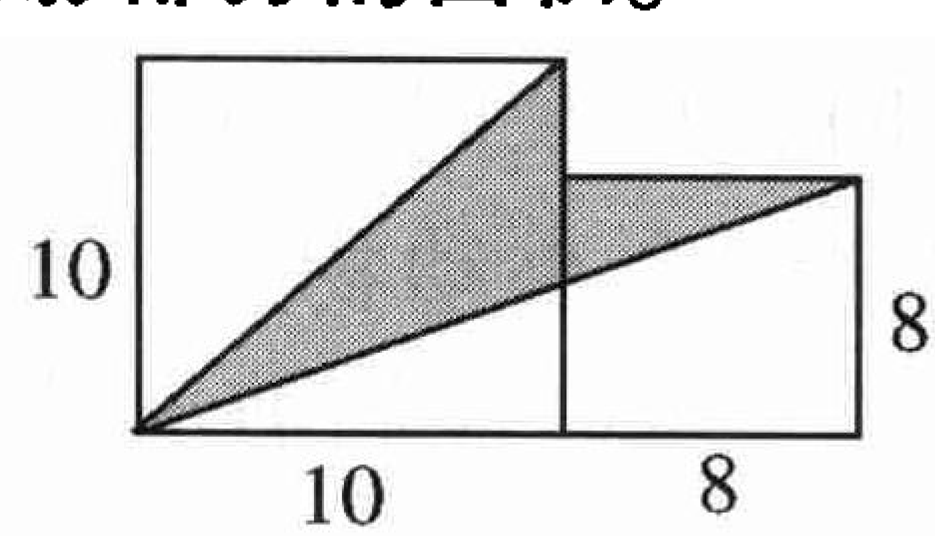


思路分析： 4 厘米既是平行四边形的高，也是阴影三角形的高，平行四边形的面积是 32 平方厘米，它的底为 $32 \div 4 = 8$（厘米），平行四边形的底减去 6 厘米就是三角形的底 $8 - 6 = 2$（厘米）。根据三角形的面积公式可直接求阴影部分的面积。

解： $(32 \div 4 - 6) \times 4 \div 2 = 4$（平方厘米）

答： 阴影部分的面积是 4 平方厘米。

例题 2　下图中，大小正方形的边长分别是 10 厘米、8 厘米，求阴影部分的面积。



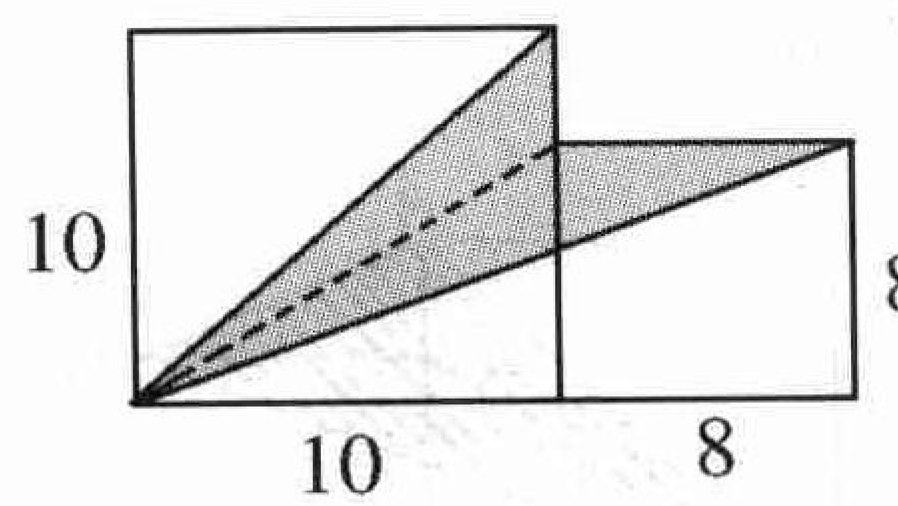
思路一： 阴影部分的面积等于两个正方形的面积之和，减去两个空白部分的三角形面积之和。

解： $10\times10+8\times8-10\times10\div2-(10+8)\times8\div2$

$=100+64-50-72$

$=42$（平方厘米）

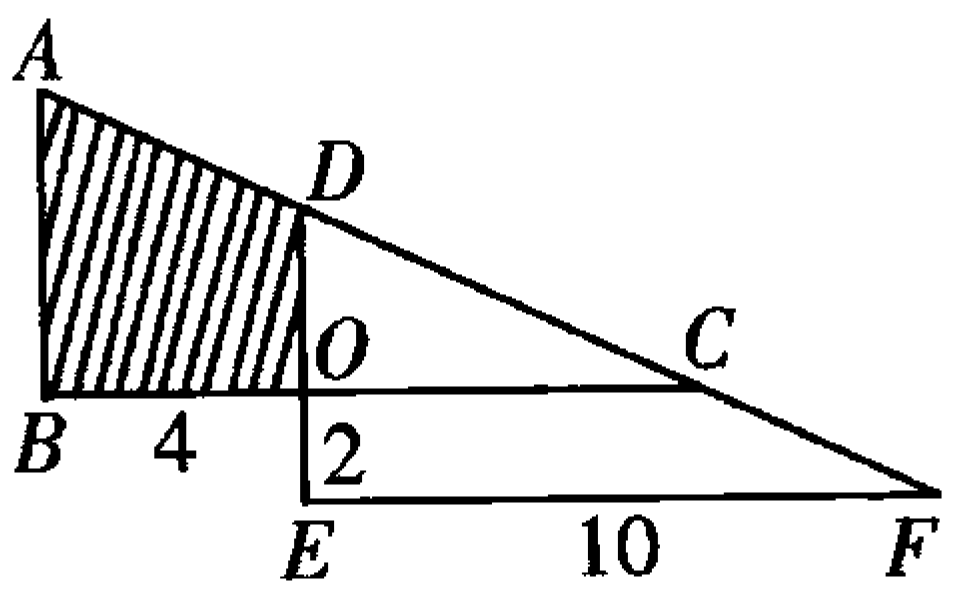
思路二： 也可以如下图那样把阴影部分分割成两个三角形，分别求出两个三角形的面积，再求出它们的面积和。



解： $(10-8)\times10\div2+8\times8\div2=42$（平方厘米）

答： 阴影部分的面积是42平方厘米。

例题3 **两个同样的直角三角形（如下图）重叠在一起，求阴影部分的面积。（单位：厘米）**



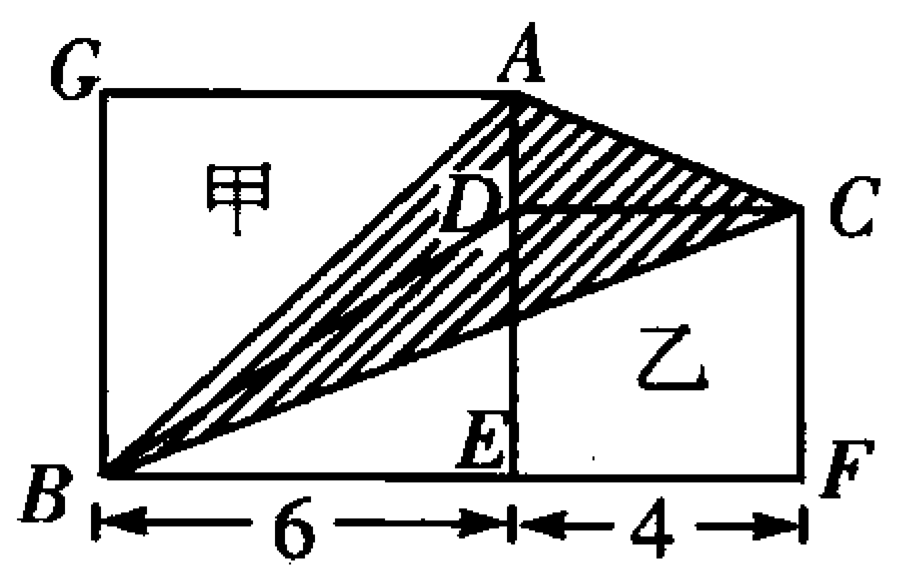
思路分析： 阴影部分是一个直角梯形，高为4厘米，但上、下底都无法知道，因而不能直接求出它的面积。因为$\triangle ABC$与$\triangle DEF$是完全相同的，两个图形都减去$\triangle DOC$后，根据差不变的规律，差应相等，即阴影部分与直角梯形$OEFC$面积相等，所以求阴影部分的面积就转化为求直角梯形$OEFC$的面积。直角梯形的上底为$10-4=6$（厘米），下底和高都知道，可求出其面积。

解： 10－4＝6（厘米）

（6＋10）×2÷2＝16（平方厘米）

答： 阴影部分的面积是16平方厘米。

例题4 **下图中的甲和乙都是正方形，求阴影部分的面积。（单位：厘米）**



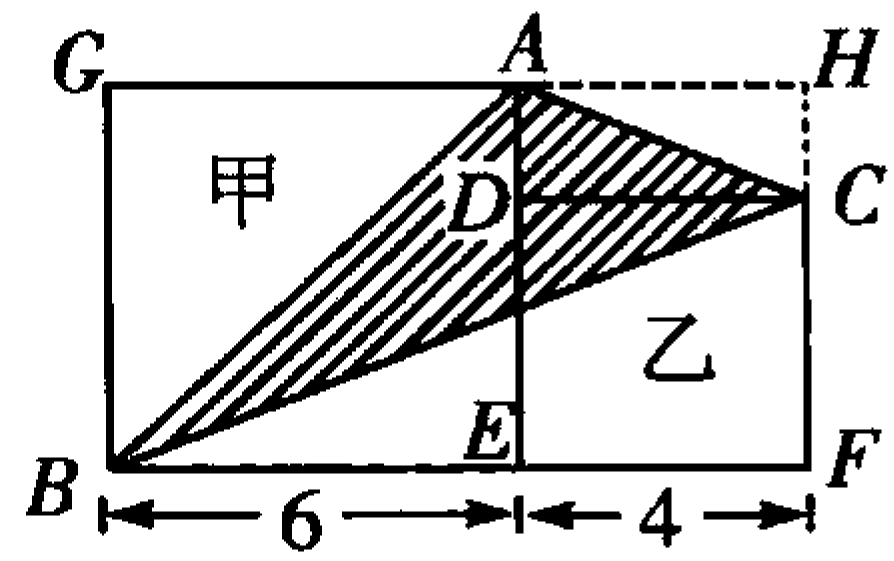
图（1）

思路分析：

思路一： 图（1）：在$\triangle ABD$中，$AD=6-4=2$（厘米），这条边上的高$BE=6$厘米；在$\triangle ACD$中，$AD=2$厘米，这条边上的高$DC=4$厘米；在$\triangle BDC$中，$DC=4$厘米，这条边上的高$DE=4$厘米。这样，可以算出：

$$\begin{aligned}S_{阴影}&=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BDC}\\&=(6-4)\times6\div2+2\times4\div2+4\times4\div2\\&=18(平方厘米)\end{aligned}$$

思路二： 图（2）：通过观察我们还能发现，如果延长GA和FC，它们会相交（设交点为H），这样，就得到长方形$GBFH$（如下页图），它的面积很容易求。而且长方形$GBFH$中除阴影部分之外，其他三部分（$\triangle AGB$、$\triangle BFC$及$\triangle AHC$）的面积都能直接求出。



图（2）

解： $S_{\triangle AGB}=6\times6\div2=18$（平方厘米）

$S_{\triangle BFC}=(6+4)\times4\div2=20$（平方厘米）

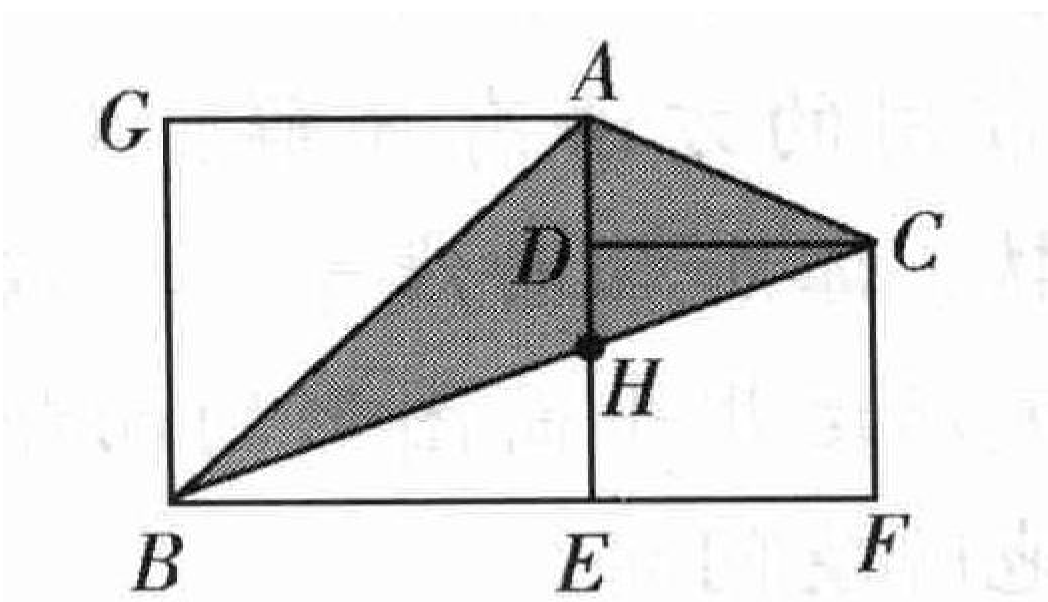
$S_{\triangle AHC}=4\times(6-4)\div2=4$（平方厘米）

$S_{阴影}=S_{\square GBFH}-(18+20+4)$

$=(6+4)\times6-42$

$=18$（平方厘米）

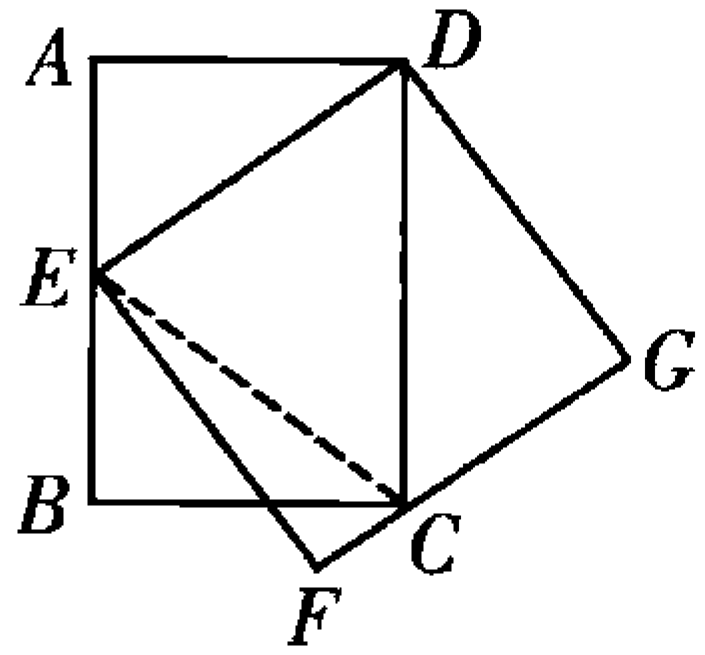
思路三： 图（3）：因为梯形 $AEFC$ 的面积等于三角形 CBF 的面积［都是大小正方形边长之和乘以小正方形的边长再除以2，即（6+4）×4÷2=20（平方厘米）］，都减去公共部分四边形 $CFEH$，剩下的三角形 ACH 和三角形 BEH 的面积相等，所以阴影部分的面积正好是大正方形面积的一半，6×6÷2=18（平方厘米）。



图（3）

答： 阴影部分的面积是18平方厘米。

例题 5 如图，正方形 $EFGD$ 的边长是 10 厘米，长方形 $ABCD$ 的宽 $AD=6$ 厘米，求 AB 的长是多少。



思路分析：连接 EC，三角形 CDE 的面积正好是正方形 $EFGD$ 面积的一半，也是长方形 $ABCD$ 面积的一半，所以正方形 $EFGD$ 的面积与长方形 $ABCD$ 的面积相等。

解：正方形面积：$10\times10=100$（平方厘米）

长方形的长$AB=100\div6=16\frac{2}{3}$（厘米）

答：AB 的长是 $16\frac{2}{3}$厘米。

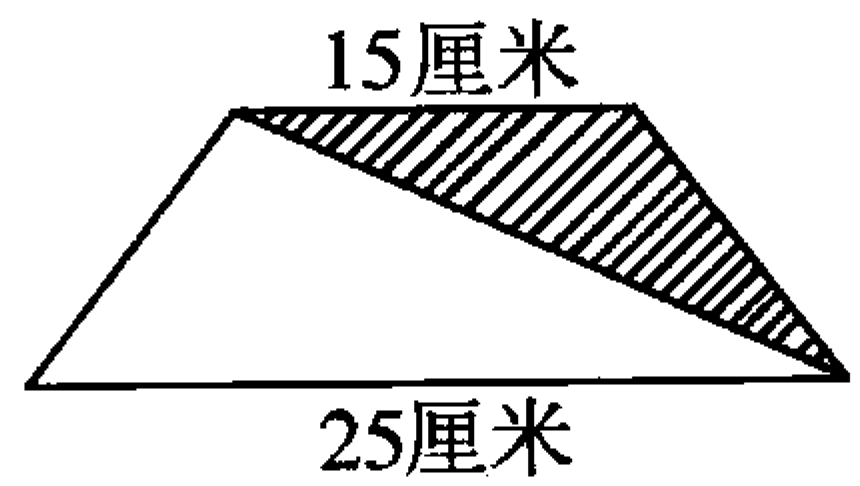
小结

求多边形的面积，可分为：①等底等高求面积；②等积转换求面积；③添加辅助线求面积。常用的方法有分解、割补、剪拼、平移、旋转、添加辅助线等。根据题目的条件和问题灵活运用平面图形的面积公式，就可以巧妙地解决问题。

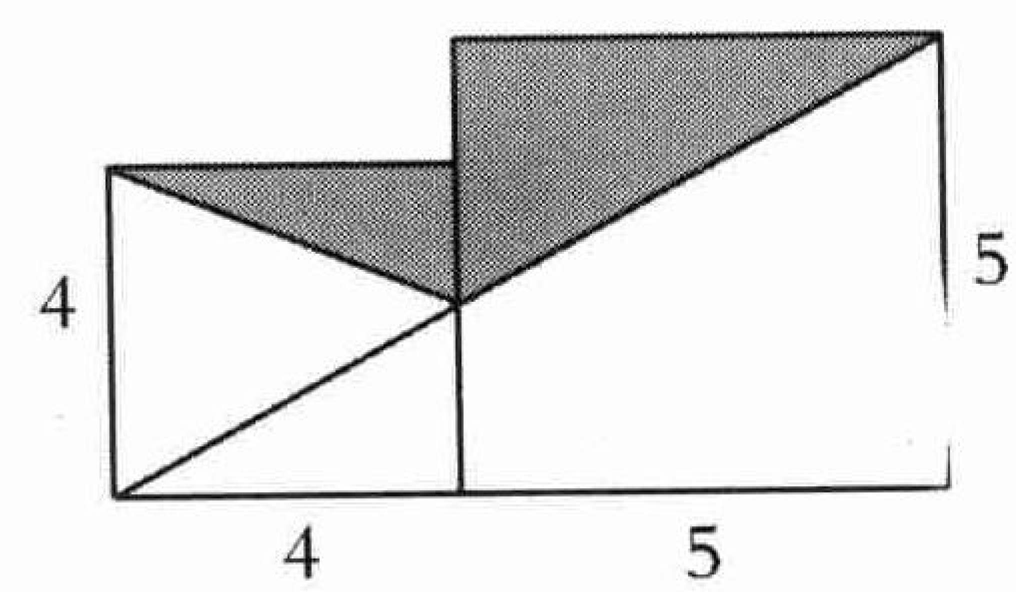
金牌训练

一 对应训练

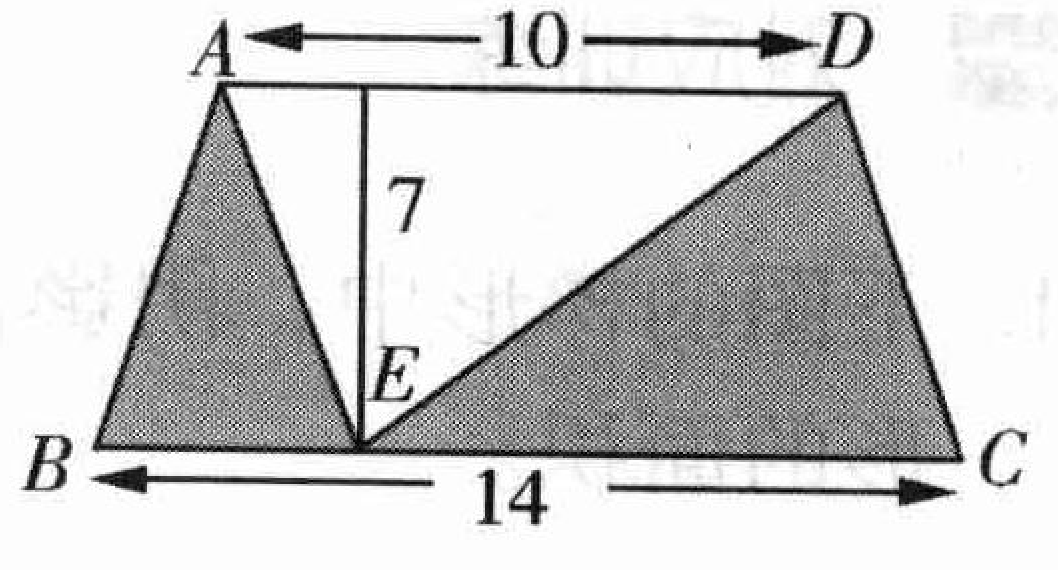
1. 下图的梯形中，阴影部分面积是150平方厘米，求梯形的面积。



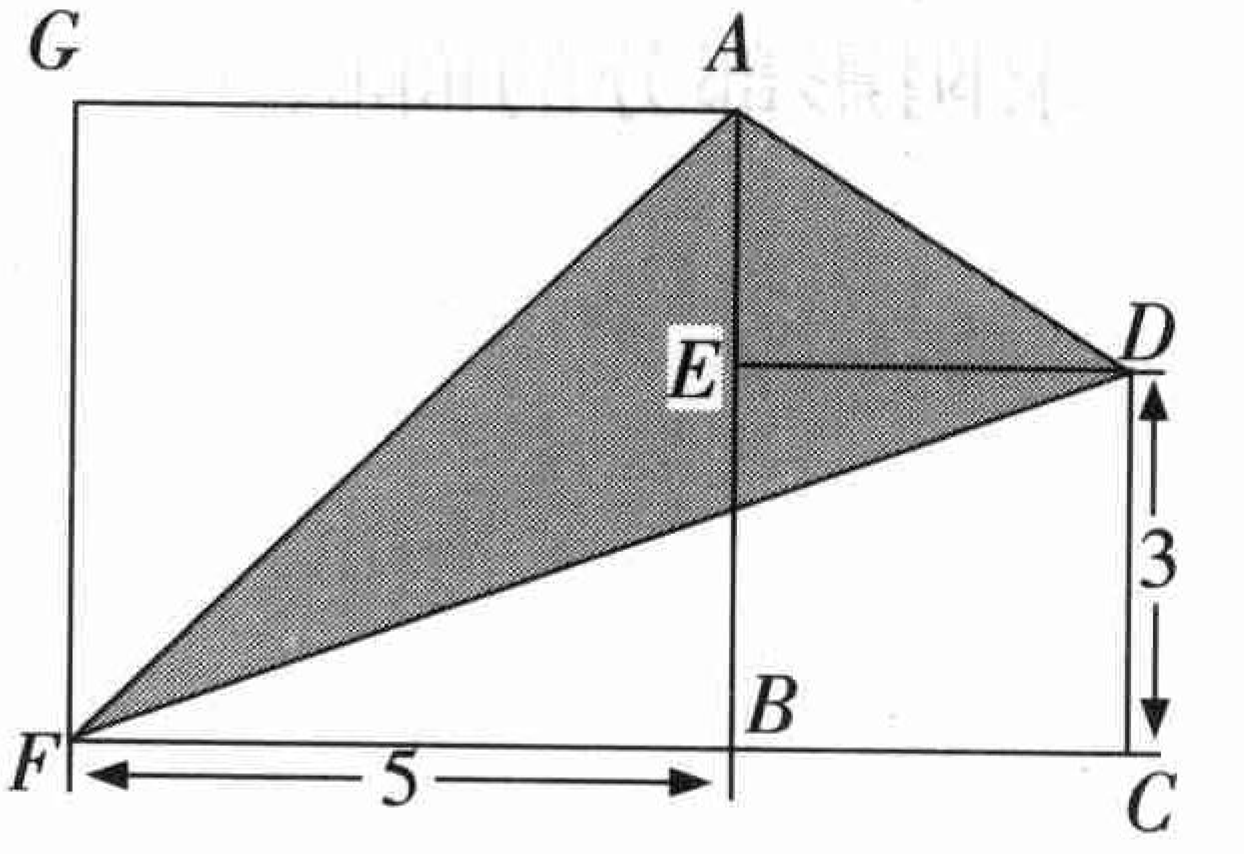
2. 大正方形和小正方形的边长分别是5分米和4分米，求阴影部分的面积。



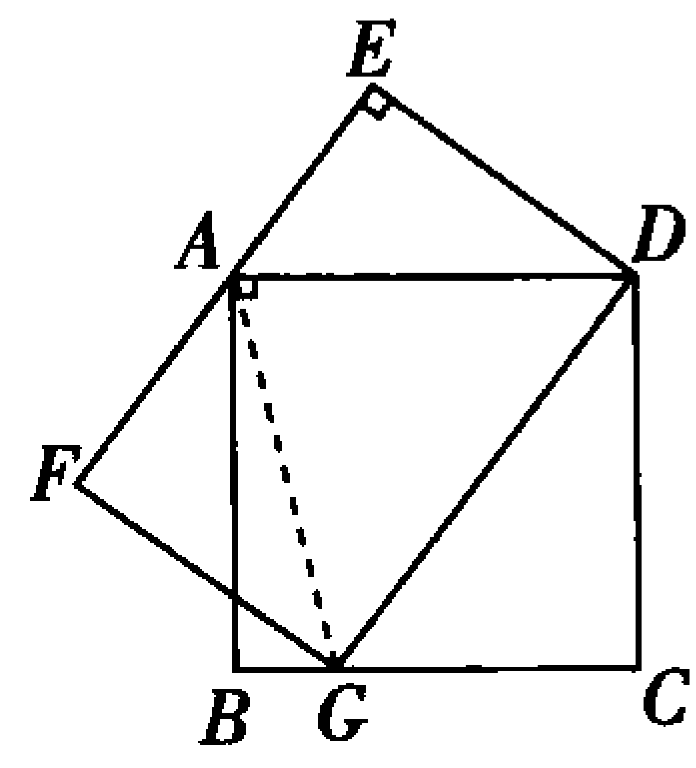
3. 梯形 $ABCD$ 的上底 AD 长 10 分米，下底 BC 长 14 分米，高 7 分米，求阴影部分的面积。



4. 已知大正方形 $ABFG$ 的边长是 5 厘米，小正方形 $BCDE$ 的边长是 3 厘米，求阴影部分的面积。

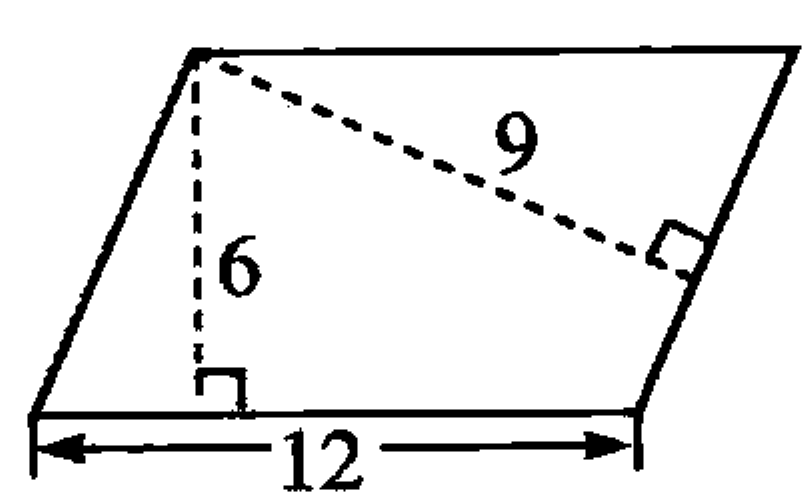


5. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 4 厘米，CG 是 3 厘米，长方形 $DEFG$ 的长 DG 是 5 厘米，那么它的宽 DE 是多少厘米？

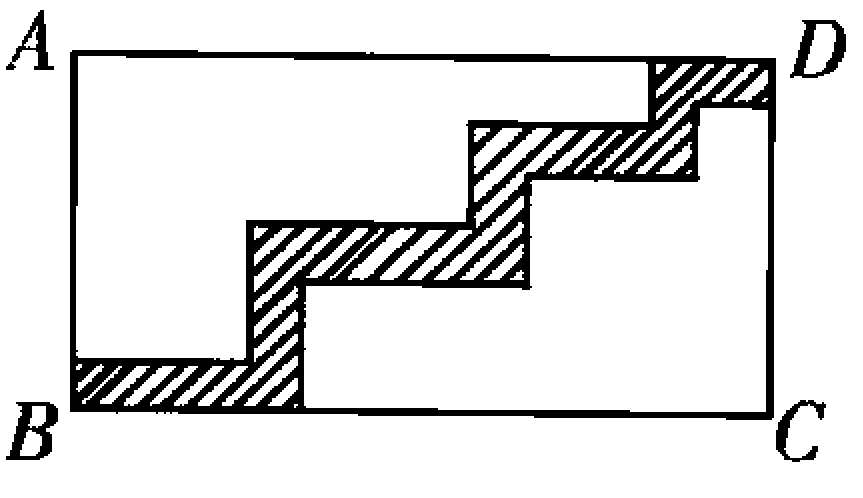


变式训练

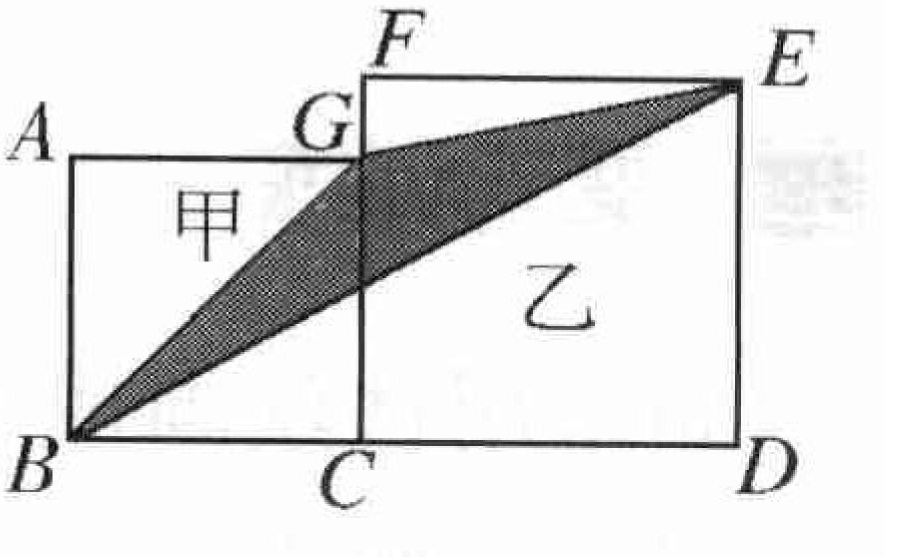
1. 如果用铁丝围成如下图一样的平行四边形，需要用铁丝多少厘米？



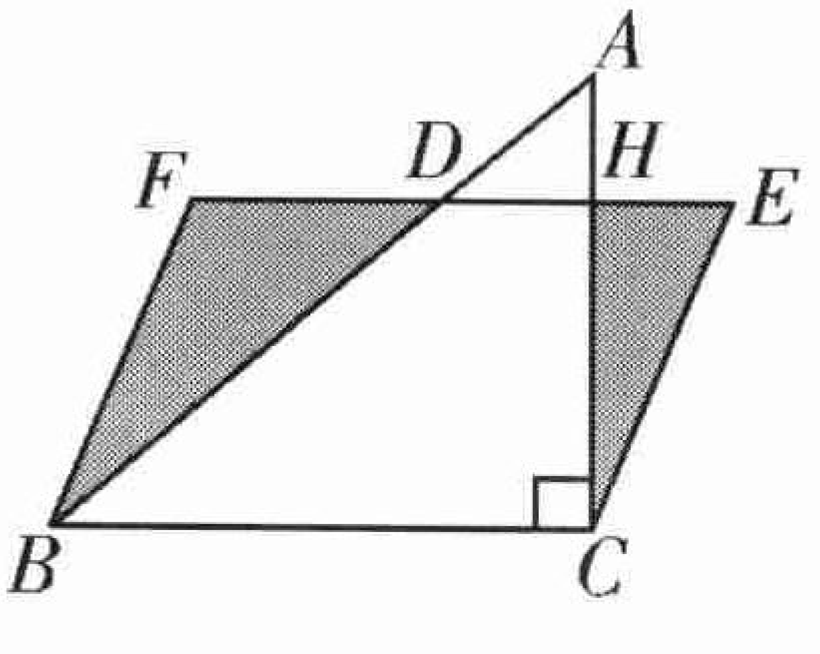
2. 如图所示，四边形 $ABCD$ 是一个长方形草坪，长 20 米，宽 14 米，中间有一条宽 2 米的曲折小路，求路的面积。



3. 在图中，甲、乙两图形都是正方形，它们的边长分别是 10 厘米和 12 厘米，求阴影部分的面积。

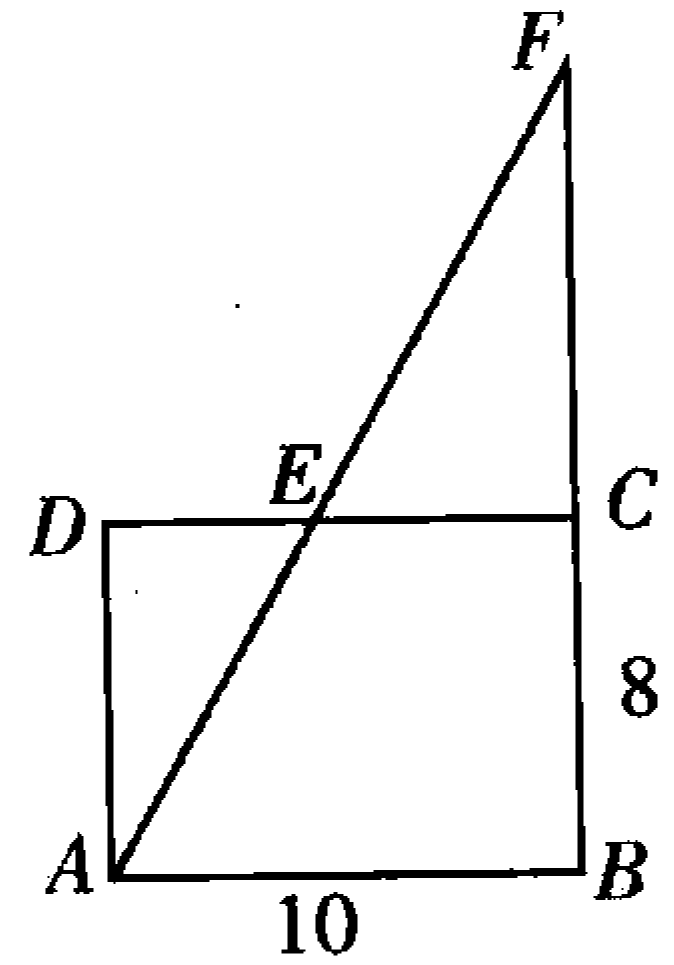


4. 如图，$BCEF$ 是平行四边形，三角形 ABC 是直角三角形，BC 长 8 厘米，AC 长 7 厘米，阴影部分面积比三角形 ADH 的面积大 12 平方厘米，求 HC 的长。

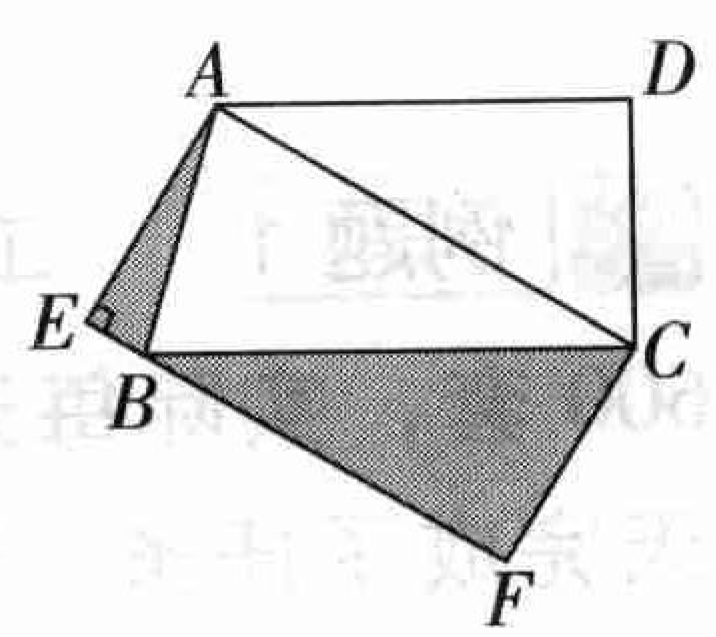


三 拔高训练

1. 如图，长方形 $ABCD$，AB 长 10 厘米，BC 长 8 厘米，又知$\triangle ADE$ 比$\triangle CEF$ 的面积小 10 平方厘米，求 FC 的长。



2. 如图，$ABCD$ 是直角梯形，$AEFC$ 是长方形，已知$BC-AD=4$ 厘米，$CD=8$ 厘米，直角梯形的面积是 72 平方厘米，求阴影部分的面积。



第3讲 一般应用题（一）

一般复合应用题往往是两组或两组以上的数量关系交织在一起的，有的已知条件是间接的，数量关系比较复杂，叙述的方式和顺序也比较多样。因此，一般应用题没有明显的结构特征和解答规律可循。解答一般应用题时，可以借助线段图、示意图、直观演示手段帮助分析。在分析应用题的数量关系时，我们可以从条件出发，逐步推出所求问题（综合法），也可以从问题出发，找出必须的两个条件（分析法）。在实际解题时，可以根据题中的已知条件，灵活运用综合法和分析法。

金牌例题

例题 1 **工人们加工一批服装，原计划每天加工600套，实际每天加工了800套，这样就比原计划提前2天完成了任务。这批服装共有多少套?**

思路分析： 如果按照原计划的天数加工，即再加工2天，就会多加工 $800\times2=1600$（套）。为什么会超产1600套呢？是因为实际每天比原计划每天多加工了 $800-600=200$（套），1600里面有几个200就是原计划生产几天。$1600\div(800-600)=8$（天）就是原计划加

工的天数，这批服装共有：$600\times8=4800$（套）。

解： $800\times2\div(800-600)=8$（天）

$600\times8=4800$（套）

答： 这批服装共有 4800 套。

例题 2 **五年级有 6 个班，每班人数相等。从每班选 16 人参加数学竞赛，剩下的同学相当于原来 4 个班的人数，原来每班有多少人？**

思路分析： 从每班选 16 人参加数学竞赛，6 个班共选 $16\times6=96$（人），剩下的同学相当于原来 4 个班的人，那么，96 人就相当于原来 $(6-4)$ 个班的人数，所以，原来每个班有 $96\div2=48$（人）。

解： $16\times6\div(6-4)=48$（人）

答： 原来每班有 48 人。

例题 3 **一桶油，连桶重 180 千克，用去一半油后，连桶还有 100 千克，问：油和桶各重多少千克？**

思路分析： 原来油和桶共重 180 千克，用去一半油后，连桶还有 100 千克，说明用去的一半油的重量是：$180-100=80$（千克）。一桶油的重量就是 $80\times2=160$（千克），桶的重量就是 $180-160=20$（千克）。

解： $(180-100)\times2=160$（千克）

$180-160=20$（千克）

答： 油重 160 千克，桶重 20 千克。

想一想：算式 $100\times2-180$ 及 $(100-180\div2)\times2$ 的道理。

例题 4 **把一根竹竿插入水底，竹竿湿了 40 厘米。然后将竹竿倒转过来插入水底，这时，竹竿湿的部分比它的一半长 13 厘米。求竹竿的长。**

思路分析： 因为竹竿先插了一次，湿了 40 厘米，倒转过来再插一次又湿了 40 厘米，所以湿了的部分是 $40\times2=80$（厘米）。这时，湿的部分比它的一半长 13 厘米，说明竹竿的长度是 $(80-13)\times2=134$（厘米）。

解： $(40\times2-13)\times2=134$（厘米）

答： 竹竿的长是 134 厘米。

例题 5 **要加工 8400 个零件，原计划每天加工 40 个，派 21 个工人可按期完成任务。实际加工时增加了 4 人，可以提前几天完成任务？**

思路分析： 要求提前几天完成任务，就要知道原计划用的天数和实际用的天数。原计划 21 人每天生产 $21\times40=840$ 个，需要加工的天数为 $8400\div840=10$（天），实际增加了 4 人，每天生产 $(21+4)\times40=1000$（个），实际只用了 $8400\div1000=8.4$（天）。可以提前 $10-8.4=1.6$（天）完成任务。

解：
$$
\begin{aligned}
&8400\div(40\times21)-8400\div[40\times(21+4)]\\
&=8400\div840-8400\div1000\\
&=10-8.4\\
&=1.6\text{（天）}
\end{aligned}
$$

答： 可以提前 1.6 天完成任务。

小结

解答一般应用题时，可以按下面的步骤进行：

1. 弄清题意，找出已知条件和所求问题。

2. 分析已知条件和所求问题之间的关系，找出解题的途径。

3. 拟订解答计划，列出算式，算出得数。

4. 检验解答方法是否合理，结果是否正确，最后写答案。

金牌训练

一 对应训练

1. 工人们加工一批零件，原计划每天加工700个，实际每天加工800个，结果比原计划提前2天完成了任务，这批零件共有多少个？

2. 有 9 筐重量相等的苹果，如果从每筐中取出 25 千克，那么 9 筐里剩下的苹果正好等于原来 4 筐的重量，原来每筐苹果重多少千克？

3. 一筐橘子，连筐重 42 千克，吃去一半后，连筐还有 22 千克，问橘子和筐各重多少千克？

4. 有一根绳子，两头各截去 80 厘米，这时，截去的部分比它的一半长 5 厘米，求这根绳子的长是多少厘米？

5. 某工程队修一条长 2100 米的公路，原计划每人每天修 4 米，派 21 人来完成，实际修路时，增加了 4 人，可以提前几天完成任务？

变式训练

1. 某车间按计划每天应加工 50 个零件，实际每天加工 56 个零件，这样，不仅提前 3 天完成原计划加工零件的任务，而且还多加工了 120 个零件，这个车间实际加工了多少个零件？

2. 五个同学有同样多的存款，每人先拿出 10 元捐给“希望工程”，后又拿出 6 元捐给灾区小朋友，这时五位同学剩下的钱正好等于原来 3 人的存款数，原来每个同学存款多少元？

3. 一筐苹果，连筐共重36千克，先拿一半送给幼儿园小朋友，再拿剩下的一半给一年级小朋友，余下的苹果连筐共重12千克，这筐苹果重多少千克？

4. 有一根铁丝，先截去一半，再截去20厘米，剩下部分正好可以做一个边长为25厘米的正方形框架。这根铁丝原来长多少厘米？

5. 要加工 192 套服装，原计划每人每天加工 2 套，8 个工人可以在规定时间内完成任务。如果每人的工作效率不变，需要提前 4 天完成任务，需要增加多少个工人？

三 拔高训练

1. 甲、乙两人承包了一项工作，共得 1200 元工资，已知甲工作了 10 天，乙工作了 12 天，且甲 5 天的工资和乙 4 天的工资同样多。求甲、乙每天各分得多少元工资。

2. 甲、乙两车共拉了若干筐苹果。若将甲车的苹果搬 12 筐到乙筐上，两车就装得同样多。如果把乙车的苹果搬 7 筐到甲车上，甲车装的就是乙车的 2 倍。甲、乙两车各拉了多少筐苹果?

第4讲　一般应用题（二）

较复杂的一般复合应用题中，往往有两组或两组以上的关系交织在一起，但是，再复杂的应用题都可以通过"转化"向基本的问题靠拢。因此，我们在解答一般应用题时要善于分析，通过对条件进行比较、转化、重新组合等多种手段，把复杂的问题简单化，从而正确解答。

金牌例题

例题 1　**有两筐苹果，甲筐重 42 千克，乙筐重 36 千克，从甲筐中取出多少千克苹果放入乙筐，才能使两筐苹果重量相等？**

思路分析：由条件可知，甲筐比乙筐多 $42-36=6$（千克），要使两筐的重量相等，只要把甲筐比乙筐多的 6 千克平均分成 2 份，取其中的 1 份放入乙筐中就行了。所以从甲筐中取 $6\div2=3$（千克）放入乙筐，才能使两筐苹果重量相等。

解：$(42-36)\div2=6\div2=3$（千克）

答：从甲筐中取出 3 千克苹果放入乙筐，才能使两筐苹果重量相等。

例题2 **有甲、乙、丙三袋面粉，甲、乙两袋共重32千克，乙、丙两袋共重30千克，甲、丙两袋共重22千克。甲、乙、丙三袋各重多少千克?**

思路分析： 根据“甲、乙两袋共重32千克，乙、丙两袋共重30千克，甲、丙两袋共重22千克”可知道 $32+30+22=84$（千克）是甲、乙、丙三袋之和的2倍。那么甲、乙、丙三袋之和是 $84\div2=42$（千克）。甲袋的重量：$42-30=12$（千克），乙袋的重量：$42-22=20$（千克），丙袋的重量：$42-32=10$（千克）。

解： 甲、乙、丙三袋的和：

$(32+30+22)\div2=42$（千克）

甲袋的重量：$42-30=12$（千克）

乙袋的重量：$42-22=20$（千克）

丙袋的重量：$42-32=10$（千克）

答： 甲袋重12千克，乙袋重20千克，丙袋重10千克。

例题3 **加工一批零件，师傅单独加工需用15小时，徒弟单独加工需用20小时。已知徒弟每小时比师傅少加工6个。这批零件一共有多少个?**

思路分析： 因为徒弟每小时比师傅少加工6个零件，那么徒弟也加工15小时，显然不能完成任务，就会有 $15\times6=90$（个）零件来不及加工，而这90个零件就是徒弟 $(20-15)$ 小时的工作量。从而我们可以求出徒弟每小时加工 $90\div(20-15)=18$（个），这批零件共有 $18\times$

20 = 360（个）。

解： 徒弟每小时加工的个数：

$15 \times 6 \div (20 - 15) = 18$（个）

这批零件的总个数：$18 \times 20 = 360$（个）

答： 这批零件一共有 360 个。

例题 4　某工厂计划生产 36500 个零件，前 5 天平均每天生产 2100 个，后来改进操作方法，平均每天可以生产 2600 个。这样完成这批零件共需几天？

思路分析：

思路一： 用分析法思考：

要求出需要几天完成，必须知道，开始生产了几天（5 天）和还需要几天完成？要求还需几天完成，必须知道后来每天生产多少个（2600 个）和还需生产多少个？要求出还需要生产多少个，就必须知道，总个数（36500 个）和已经生产了多少个？要求出已经生产了多少个，必须知道已经生产了几天（5 天）和开始每天生产多少个（2100 个）。

思路二： 用综合法思考：

前 5 天每天生产 2100 个，可以求出前 5 天共生产的个数；已知总个数 36500 个和前 5 天生产的个数，可以求出还需生产的个数；已知还需生产的个数和后来每天生产 2600 个，可以求出还需几天完成；已知前 5 天和还需要的天数，可以求出完成这批零件的天数。

解： $(36500-2100\times5)\div2600+5$

$=(36500-10500)\div2600+5$

$=26000\div2600+5$

$=10+5$

$=15$（天）

答： 这样完成这批零件共需15天。

例题5 **甲、乙、丙三人拿出同样多的钱买一批苹果，分配时，甲、乙都比丙多拿36千克，结账时，甲和乙都要付给丙36元，每千克苹果多少元？**

思路分析： 三人拿同样多的钱买苹果，应该分得同样多的苹果。$36\times2\div3=24$（千克），也就是丙少拿24千克苹果，所以得到$36\times2=72$（元）。每千克苹果的价钱就是$72\div24=3$（元）。

解： $36\times2\div3=24$（千克）

$36\times2\div24=3$（元）

答： 每千克苹果3元。

小结

解答较复杂的一般应用题时，应按解答的四个步骤进行，在分析题意时，灵活运用分析法和综合法。可借助线段图、示意图、直观演示手段帮助分析，从而正确解答。

金牌训练

一 对应训练

1. 有两盒棋子，甲盒有62粒，乙盒有38粒，从甲盒中拿出多少粒放入乙盒，才能使两盒中的棋子相等？

2. 胜利小学五一班和五二班共有100人，五二班和五三班共有97人，五一班和五三班共有93人，五年级三个班各有多少人？

3. 妈妈去买水果，她所带的钱正好能买 18 千克苹果或 25 千克的梨。已知每千克梨比每千克苹果便宜 0.7 元，妈妈一共带了多少钱？

4. 光华机械厂加工 2100 个零件，计划平均每天加工 75 个，6 天后改进了技术，平均每天加工 150 个。这样完成这批零件共需几天？

5. 甲、乙、丙三人拿同样多的钱买同一种笔记本，分配时，甲、乙都比丙多拿 9 本，结账时，甲和乙都要付给丙 12 元，求每个笔记本多少元。

变式训练

1. 有两筐苹果，甲筐有 80 个，乙筐有 32 个，每次从甲筐中拿出 4 个放到乙筐中，拿几次才能使两筐苹果的个数同样多？

2. 城南小学五年级有四个班，平均每班有 44 人，其中五一班和五二班共有 85 人，五二班和五三班共有 88 人，五一班和五三班共有 87 人，求五四班有多少人。

3. 加工一批零件，师傅单独做需要 10 小时，徒弟单独做需 15 小时，已知师傅比徒弟每小时多加工 20 个。问师徒两人共同加工这批零件需几小时。

4. 红星服装厂要加工上衣 1500 件，计划每天加工 150 件。3 天以后，提高了工作效率，每天加工 175 件。这样，比原计划提前几天完成？

5. “六一” 儿童节时同学们做纸花，小华买来 7 张红纸，小英买来了和红纸同样价格的 5 张黄纸，老师把这些纸平均分给了小华、小英和另外两名同学，结果另外两名同学共付给老师 9 元钱。问：老师把 9 元钱怎样分给了小华和小英？

二 拔高训练

1. 一批零件，如果第一天甲做，第二天乙做，这样交替轮流做，恰好用整数天数完成。如果第一天乙做，第二天甲做，这样交替轮流做，做到上次轮流完成时所用的天数后，还剩60个没有完成。已知甲的工作效率是乙的1.5倍。甲、乙每天各做多少个?

2. 甲、乙二人加工零件，甲比乙每天多加工6个零件，乙中途停了15天没有加工，40天后，乙所加工的零件个数正好是甲的一半。这时两人各加工了多少个零件?

第5讲　稍复杂的和差、和倍、差倍问题

稍复杂的和差问题是指两个数的和或差是未知的，要先通过分析找出两数的和与差，再按和差应用题的解题规律来解答。

稍复杂的和（差）倍问题可以通过画线段图、假设、转化等方法找到倍数和（差）与对应两数和（差），然后再按照和（差）倍应用题的解题规律来解答。也可以列方程解答此类问题。

同学们，老师相信你们在学习了下面的例题后，会在原有的基础上掌握得更多，解题能力更强！

金牌例题

例题1　把长224厘米的铁丝围成一个长方形，使长比宽多18厘米，这个长方形的长与宽各是多少？

思路分析： 条件“把长224厘米的铁丝围成一个长方形”告诉我们，长方形的周长是224厘米。已知长方形的周长就可以求出长与宽的和。知道了长与宽的和与差，根据和差问题的基本数量关系式，就可以求出长、宽各是多少厘米。

数量关系式为：（长、宽的和＋长、宽的差）÷2＝长

（长、宽的和－长、宽的差）÷2＝宽

解法一： 长：（224÷2＋18）÷2

＝（112＋18）÷2

＝130÷2

＝65（厘米）

宽：65－18＝47（厘米）

解法二： 宽：（224÷2－18）÷2

＝（112－18）÷2

＝94÷2

＝47（厘米）

长：47＋18＝65（厘米）

答： 长方形长65厘米、宽47厘米。

例题2 **甲组的图书是乙组的3倍，若乙组给甲组6本，则甲组的图书是乙组的5倍。原来甲组有图书多少本？**

思路分析： 甲组的图书是乙组的3倍，若乙组拿出6本，甲组相应地也拿出6×3＝18（本），则甲组仍是乙组的3倍。事实上甲组不但没拿出18本，反而接受了乙组的6本，（18＋6）就正好对应着后来乙组的(5－3)倍。因此，后来乙组有图书(18＋6)÷(5－3)＝12（本），乙组原来有12＋6＝18（本），甲组原来有18×3＝54（本）。

解： (6×3＋6)÷(5－3)＝12（本）

(12＋6)×3＝54（本）

答： 原来甲组有图书54本。

例题 3 **幼儿园买来苹果的个数是梨的 2 倍，大班的同学每 7 人一组，每组领 3 个梨和 4 个苹果，结果梨正好分完，苹果还剩下 16 个。大班共有多少个同学？**

思路分析： 因为苹果是梨的 2 倍，每组分 3 个梨和 $3\times2=6$（个）苹果最后就一起分完。可每组分 4 个苹果，少分 $6-4=2$（个），16 里面有 8 个 2，所以有 8 组同学，全班有 $7\times8=56$（人）。

解： $16\div(3\times2-4)=8$（组）

$7\times8=56$（人）

答： 大班共有 56 人。

例题 4 **一个书架有三层，共有图书 180 本，第一层的本数是第二层的 2 倍，第三层的本数比第一层少 20 本。三层各有书多少本？**

思路分析： 解题时应先确定以哪一层书的本数作为一倍数，再找出其他两层是这一层的几倍。这样就可以求出作为一倍数的这一层的本数，然后再求出其他两层书的本数。通常把比较小的量作为一倍数，根据条件把第二层书的本数作为一倍数，第一层就是它的 2 倍。第三层比第一层少 20 本，也就是说第三层再加上 20 本就和第一层一样多，也是第二层的 2 倍。这样，总本数 180 本加上 20 本就相当于第二层的（$2+2+1$）倍。

解法一： 第二层的本数：（$180+20$）$\div(2+2+1)$

$=200\div5$

$=40$（本）

第一层的本数：$40\times2=80$（本）

第三层的本数：$80-20=60$（本）

解法二： 以总量为等量列方程这样计算。设第二层有书 x 本，则第一层有 $2x$ 本，第三层有 $(2x-20)$ 本。

$$x+2x+(2x-20)=180$$
$$5x-20=180$$
$$5x=180+20$$
$$x=200\div5$$
$$x=40$$

第一层的本数：$2x=40\times2=80$（本）

第三层的本数：$2x-20=40\times2-20=60$（本）

答： 第一层有 80 本，第二层有 40 本，第三层有 60 本。

例题 5 **养鸡场新买来 100 只小鸡，其中母鸡只数的 4 倍比公鸡只数的 3 倍多 120 只。买来母鸡、公鸡各多少只？**

思路分析： 题中已知母鸡只数和公鸡只数一共 100 只，就可推出，母鸡只数的 4 倍和公鸡只数的 4 倍的和是 $100\times4=400$（只），又因为母鸡只数的 4 倍比公鸡只数的 3 倍多 120 只，从 400 只去掉 120 只就是公鸡只数的 $(4+3)$ 倍，则公鸡只数为 $(400-120)\div(4+3)=40$（只）。母鸡只数为 $100-40=60$（只）。

解：公鸡只数：$(100\times4-120)\div(4+3)=40$（只）

母鸡只数：$100-40=60$（只）

答：买来母鸡60只，公鸡40只。

小结

（1）和倍问题的特点是：

两数和÷（倍数+1）=小数（1倍数）

和−小数=大数（n倍数）

小数×倍数=大数

解题的关键是：抓住倍数和与对应两数和。

（2）差倍问题的特点是：

两数差÷（倍数−1）=小数（1倍数）

小数+差=大数（n倍数）

小数×倍数=大数

解题的关键是：抓住倍数差与对应两数差。

（3）和差问题的特点是：

（和+差）÷2=大数

（和−差）÷2=小数

金牌训练

一 对应训练

1. 甲、乙两筐苹果共重90千克，从甲筐取出8千克放入乙筐，甲筐比乙筐还多4千克，甲、乙两筐原来各有苹果多少千克？

2. 张师傅已经生产的零件个数是学徒工小王的6倍，如果两人各自再生产20个，那么张师傅生产的零件个数是小王的4倍。两人原来各生产零件多少个？

3. 高年级同学植树，已知杨树的棵数正好是杉树的 2 倍，高年级的同学每 7 个人一组，如果每小组分到杉树苗 6 棵，杨树苗 8 棵，那么，杉树正好分完，杨树还剩 20 棵。高年级植树的同学有多少人？

4. 有 1800 千克的货物，分装在甲、乙、丙三辆车上。已知甲车装的千克数正好是乙车的 2 倍，乙车比丙车多装 200 千克。甲、乙、丙三辆车各装货物多少千克？

5. 实验小学体育室有排球和篮球共 30 个，篮球个数的 3 倍比排球的 2 倍少 10 个。体育室有排球和篮球各多少个？

二 变式训练

1. 一块长方形菜地周长是 240 米，长比宽多 80 米。这块菜地的面积是多少平方米？

2. 幼儿园买来的苹果的个数是梨的 3 倍，吃掉 10 个梨和 6 个苹果后，剩下的苹果正好是梨的 5 倍。原来买来苹果和梨共多少个?

3. 甲粮库的存粮是乙粮库的 2 倍，甲粮库每天运出粮食 40 吨，乙粮库每天运出 30 吨。若干天后，乙粮库的粮食全部运完，而甲粮库还有 80 吨。甲、乙两粮库原来各有粮食多少吨?

4. 某养殖场养鸡、鸭、鹅共 1462 只，鸡的只数比鸭的 4 倍多 132 只，鹅的只数比鸭的 2 倍少 70 只。这个养殖场养的鸡、鸭、鹅各有多少只？

5. 胜利小学五年级共有学生 200 人，其中男生人数的 3 倍比女生的 2 倍多 50 人，五年级女生比男生多多少人？

三 拔高训练

1. 三个物体平均重 31 千克，甲比乙丙两个物体重量之和轻 1 千克，乙比丙的 2 倍重 2 千克。甲、乙、丙三物各重多少千克？

2. A 站有公共汽车 26 辆，B 站有公共汽车 30 辆。每小时由 A 站向 B 站开出汽车 12 辆，B 站向 A 站开出汽车 8 辆，都是经过 1 小时到达。几小时后 B 站的公共汽车辆数是 A 站的 3 倍？

第6讲 平均数问题

平均数问题在我们的日常生活和学习、生产中经常会遇到。如，计算各班的平均分，来了解学生的学习情况，又如：要看两个班学生的身高情况，就要计算出每个班的平均身高。还有平均速度、平均价格、人均收入等等。同学们，你有兴趣试一试吗？

求平均数就是对若干个不相等的数，在总和不变的前提下，通过移多补少，使它们完全相等，最后求得相等数，就叫做这几个数的平均数。

解答平均数应用题关键是要确定“总数量”“总份数”以及它们与“平均数”的关系，它们之间的基本关系式：

平均数 = 总数量 ÷ 总份数

总份数 = 总数量 ÷ 平均数

总数量 = 平均数 × 总份数

同学们，只要我们认真审题、开动脑筋、创新思维，就一定能找到正确的解题方法。

金牌例题

例题 1 **冬冬第一次和第二次数学测验的平均成绩是 82 分，第三次测验后，计算得三次测验的平均成绩是 85 分，问他第三次测验得了多少分？**

思路分析： 由三次数学测验的平均成绩，可求得三次测验的总分数，又由第一、第二次数学测验的平均成绩，可求出第一次、第二次两次测验的总分数，用三次的总分数减去前两次的总分数，就是所求的第三次测验的成绩。

解： $85\times3-82\times2=255-164=91$（分）

答： 冬冬第三次测验得了 91 分。

例题 2 **小英参加语文考试，前两次的平均分是 92 分，后三次的平均分是 90 分，小英这五次考试的平均分数是多少？**

思路分析： 由“前两次的平均分是 92 分”可知，前两次的总分数是 $92\times2=184$（分），由“后三次的平均分是 90 分”可知，后三次的总分是 $90\times3=270$（分）。然后用 $184+270=454$（分）就是这五次的总分，最后把这个总分除以 5 就得到小英这五次考试的平均分数了。

解： $(92\times2+90\times3)\div5=90.8$（分）

答： 小英这五次考试的平均分数是 90.8 分。

例题 3 **甲乙的平均数是 95.5，甲丙的平均数是 93，乙丙的平均数是 97.5，甲、乙、丙三数各是多少？**

思路分析： 题目告诉我们两数的平均数，通过这个条件我们可以求出两数的总数，甲乙的总数是 $95.5\times2=191$，甲丙的总数是 $93\times2=186$，乙丙的总数是 $97.5\times2=195$，把两数的总数全部加起来就是 2 个甲、2 个乙、2 个丙的总数和，再用这个总数和除以 2，就求出甲、

乙、丙三数的总数，然后用三数的总数分别减去其中两数的总数就得出另一个数。

解： 甲、乙、丙总和：

$(95.5\times2+93\times2+97.5\times2)\div2=286$

丙：$286-95.5\times2=95$

乙：$286-93\times2=100$

甲：$286-97.5\times2=91$

答： 甲数是91，乙数是100，丙数是95。

例题 4 **有六个数排成一排，它们的平均数是27，前四个数的平均数为23，后三个数的平均数为34，那么第四个数是多少？**

思路分析： 题中共有六个数，第四个数既与前四个数有关，也与后三个数有关。前四个数的平均数为23，可求出前四个数的和；后三个数的平均数是34，可求出后三个数的和，把这两个和加起来就得到七个数的总和。题目中还告诉我们六个数的平均数是27，那么就可以求出六个数的和，七个数之和比六个数之和多出的就是第四个数。

解： $23\times4+34\times3=194$　　$194-27\times6=32$

答： 第四个数是32。

例题 5 **一次登山活动中，小明上山每分钟走50米到达山顶后，再按原路下山，下山每分钟走75米。求小明上山、下山往返一次的平均速度。**

思路分析： 这里的平均速度不是指上山速度与下山

速度的平均值，所以不能做成（50＋75）÷2＝62.5（米）。所谓往返一次的平均速度是指在整个运动过程中，所走的总路程与走完全程所用的全部时间的商。

本题的总路程是指上山路程与下山路程的和。但题目中只告诉我们上山速度与下山速度，从这个条件中无法求出总路程，也无法求出上山、下山的总时间。

我们可以假设一个路程，然后根据这个路程分别求出上山、下山需要的时间，再用总路程除以总时间得平均速度。

假设山下到山上的路程是150米。

解： 150×2÷（150÷50＋150÷75）＝60（米）

答： 小明上山、下山往返一次的平均速度是每分钟60米。

小结

解答平均数问题要牢牢记住：总数量÷总份数＝平均数，在解题过程中要认真审题，灵活运用数量关系式。有时候可以用移多补少的方法，还可以采用作图、假设、借助线段图的方法帮助理解题意。

金牌训练

一 对应训练

1. 芳芳先后三次参加数学竞赛，前两次的平均成绩是85分，三次竞赛的平均成绩是87分，芳芳第三次竞赛得了多少分？

2. 五（1）班18位女生的平均身高是151厘米，22位男生的平均身高是152厘米，这个班同学的平均身高是多少厘米？

3. 创新路小学五年级有三个班，其中（1）、（2）两班学生平均50人，（2）、（3）两班学生平均43人，（1）、（3）两班学生平均45人，这三个班学生平均多少人？

4. 有五个数，其平均数为120，前三个数的平均数为100，后三个数的平均数为150，第三个数是多少？

5. 一辆汽车以每小时100千米的速度，从甲地开往乙地，到达乙地后，又以每小时60千米的速度，从原路返回甲地，求这辆汽车往返的平均速度。

二 变式训练

1. 小芳的语文、数学和自然三门功课的平均成绩是92分，语文、自然两门功课的平均成绩比三门功课的平均成绩少2分。请你算一算小芳的数学成绩是多少。

2. 小芳与四名同学一起参加一次数学竞赛，那四名同学的成绩分别为 78 分、91 分、82 分、79 分，小芳的成绩比五人的平均成绩高 6 分。小芳的成绩排在五人中的第几位？

3. A、B、C、D 四个数，每次去掉一个数，将其余三个数相加求平均数，这样计算四次，得到下面几个数，38、74、50、62，求 A、B、C、D 四个数的平均数。

4. 某班有 40 人，一次考试，有 2 名同学缺考，这时全班的平均成绩是 94 分，缺考的同学补考分数是 100 分和 90 分，现在全班的平均成绩是多少？

5. 叔叔从 A 地到 B 地，他先骑自行车走了全程的一半，每小时行 12 千米，剩下的一半路步行，每小时走 4 千米，求叔叔行全程的平均速度。

三 拔高训练

1. 歌手大奖赛上 6 名评委给一位参赛者打分，6 个人打分的平均分为 9.6 分，如果去掉一个最高分，这名参赛者的平均分为 9.4 分；如果去掉一个最低分，这名参赛者的平均分为 9.8 分；如果去掉一个最高分和一个最低分，这名参赛者的平均分是多少？

2. 两地相距 360 千米，一般汽艇顺水行全程需要 10 小时，已知这条河的水流速度为每小时 6 千米，往返两地的平均速度是每小时多少千米？

第 7 讲　列方程解应用题

同学们是否有这样的经历，遇到难题向父母“求救”，爸爸妈妈三下五除二就解决了。可当你怀着羡慕激动的心情接过答案时，却一下傻了眼，原来爸爸妈妈是用方程解的。

的确，在我们学习的数学中，有些数量关系比较复杂的应用题，特别是需要逆向思维的应用题，运用算术方法解答比较困难，如果列方程解答，通过设未知数，把未知数当做已知数来考虑数量关系，抓住数量之间的相等关系，列出方程式解答就比较容易了。

伟大的科学家牛顿曾经说过：“要解决一个问题，如果里面包含着数量间的抽象关系，只要把题目从日常语言译成代数语言就行了。”这其实就是指列方程解应用题。

同学们，通过下面的例题学习，老师相信你一定会掌握列方程解应用题的方法，一定会成为别人羡慕的对象，努力吧！

金牌例题

例题 1 **小新今天看书 198 页，比昨天所看页数的 2 倍多 36 页。昨天看了多少页？**

思路分析： 我们可用算术方法列式：$(198-36)\div2$，请同学们注意的是，算式中用到了减法和除法。解题时我们要先想昨天所看页数的 2 倍是多少，今天看的页数比它多 36。同样，昨天所看页数的 2 倍是 162，则昨天所看页数是 162 的一半，即 $162\div2$。这里都是反过来想的，用到了加法和乘法的逆运算。下面我们来看看用方程如何解决这个问题。题目要求昨天看了多少页，我们就先设昨天所看页数是 x。下面利用数量关系建立方程：因为昨天所看页数是 x 页，那么它的 2 倍就是 $2x$ 页。又因为昨天所看页数的 2 倍加上 36 跟今天看的页数 198 页相等，所以有方程：$2x+36=198$。

解： $2x=198-36$

$2x=162$

$x=162\div2$

$x=81$

答： 昨天看了 81 页。

例题 2 **3 年前爸爸的岁数是小强的 5 倍，今年爸爸 43 岁。小强今年多少岁？**

思路分析： 我们可以设小强的岁数为 x 岁，那么，3

年前小强应该是 $(x-3)$ 岁，爸爸是 $(43-3)$ 岁。然后根据“3 年前爸爸的岁数是小强的 5 倍”，列出方程并解答。

解：设小强今年 x 岁

$$(x-3)\times5=43-3$$
$$5x=40+15$$
$$5x=55$$
$$x=11$$

答：小强今年 11 岁。

例题 3 **甲、乙两数的和是 148，甲数比乙数的 2 倍多 4，求甲乙两个数各是多少？**

思路分析：和倍问题在列方程时，通常设 1 倍数为 x，以两个数的和为等量关系。

解：设乙数为 x，则甲数是 $2x+4$

$$x+2x+4=148$$
$$3x+4=148$$
$$3x=148-4$$
$$3x=144$$
$$x=48$$

甲数：$48\times2+4=100$

答：甲数是 100，乙数是 48。

例题 4 **人民大道小学六（1）班的同学合买一件生日礼物送给班主任。如果每人出 8 元，就多 84 元，如果每人出 6 元，那么就少 12 元，人民大道小学六（1）班有多少名学生？**

思路分析： 从给出的条件分析，用算术方法解答问题有些困难，似乎数量关系不明显，但深入分析可以看出同学们买的是同一件生日礼物，因此价格是一定的，即每人出 8 元，表示的总价与每人出 6 元表示的总价相等，可以列出以下方程解答。

解： 设人民大道小学六（1）班有 x 名学生

$$8x-84=6x+12$$
$$8x-6x=12+84$$
$$2x=96$$
$$x=48$$

答： 人民大道小学六（1）班有 48 名学生。

例题 5 **小华从家走到学校，又从学校原路回到家里，共用了 52 分钟，去时每分钟走 70 米，回来时每分钟走 60 米。他家到学校有多远？**

思路分析：

解法一： 设小华家到学校有 x 米，那么根据“路程÷速度=时间”可知他去时用了$(x\div70)$分钟，回来时用了$(x\div60)$分钟。去、回一共用了 52 分钟，根据这个等量关系，便可列出方程求解。

解：设他家到学校有 x 米，列方程得

$$x \div 70 + x \div 60 = 52$$

$$x = 1680$$

解法二：用上面的设法列出方程在解方程时有些麻烦，我们还可以采用间接设，即设从家到学校用了 x 分钟，那么从学校回到家则用了（$52-x$）分钟。再根据小华家到学校的路程是不变的，可列出方程并解答。

解：设小华从家到学校用了 x 分钟，从学校到家用了（$52-x$）分钟

$$70x = 60 \times (52-x)$$

$$70x = 3120 - 60x$$

$$130x = 3120$$

$$x = 24$$

$70 \times 24 = 1680$（米）

答：他家到学校有 1680 米。

小结

同学们，老师相信你们通过本专题的学习后，会按照自己的理解，灵活采用“直接设”或“间接设”未知数的方法设置未知数，并能熟练地列出方程进行解答。

列方程解应用题的关键是：①抓住关键句，列出等量关系。②抓住关键句，合理解设未知数。

金牌训练

一 对应训练

1. 西安大雁塔高 64 米，比小雁塔的 2 倍少 22 米。小雁塔高多少米？

2. 5 年前哥哥的岁数是弟弟的 5 倍，今年哥哥 15 岁，弟弟今年多少岁？

3. 小芳和小华共有书 47 本，小芳的书比小华的 2 倍还多 5 本，小芳和小华各有多少本书？

4. 老师给同学们发练习本，如果每人 6 本就多出 12 本，如果每人 7 本就少 11 本，问：有多少个学生？多少个本？

5. 小明从甲地到乙地，去时每小时走 6 千米，回来时每小时走 9 千米，来回共用 5 小时，甲乙两地的距离是多少千米?

变式训练

1. 合唱队比舞蹈队多 47 人，合唱队的人数是舞蹈队的 2 倍还多 3 人，问：合唱队和舞蹈队各有几人?

2. 今年小明爸爸的岁数是小明的 5 倍，2 年后是小明的 4 倍。小明今年是多少岁？

3. 两个数相除，商 3 余 10，被除数、除数、商及余数的和是 143，求被除数和除数各是多少？

4. 幼儿园老师给小朋友分饼干和糖，饼干的块数是糖的2倍。糖每人分3块，则多4块；饼干每人分7块，就少5块。有多少个小朋友？有多少块饼干和糖？

5. 某校体育室里的足球个数是排球的3倍。体育活动课上，每班借6个足球和5个排球，排球借完时，还有72个足球。体育室里原来有足球和排球各多少个？

三 拔高训练

1. 修一条公路，未修长度是已修长度的 3 倍，如果再修 300 米，未修的长度就是已修的 2 倍。这条公路长多少米?

2. 小王和师傅共同做一批零件，30 天就完成了任务。已知小王每天比师傅少做 2 个零件，并且小王在中途请假 5 天，于是，小王完成的零件个数恰好是师傅的一半。这批零件有多少个?

第8讲 行程问题（一）

在较复杂的行程问题中，由于运动过程复杂，不少同学在解答时往往束手无策，难以找到解题的突破口。有的同学虽然能解出，但过程冗长，步骤烦琐，究其原因是没有把握住这类题的基本规律和特征。

解决这类问题的要点是：

1. 从整体上把握数量关系，灵活运用数量关系式，在速度、时间、路程三者之间确定好以哪个量为主来考虑问题。

2. 解答两次相遇的行程问题的关键是抓住两次相遇共行三个全程，然后再根据题意抓住两个运动物体从开始出发到第一次相遇行驶的路程与三个全程的关系即可解答。

3. 对于两个运动物体同时做反向运动的往返行程问题，要设法通过画图反映整个连续的运动过程，从而使隐蔽的数量关系变得明显，已知和未知之间的内在联系容易发现。

金牌例题

例题 1　快车和慢车同时从甲、乙两地相向开出，快车每小时行 80 千米，经过 3 小时，快车已驶过中点 40 千米，这时与慢车还相距 34 千米。慢车每小时行多少千米?

思路分析：

思路一：快车 3 小时行驶 $80 \times 3 = 240$（千米），这时快车已过中点 40 千米，说明甲、乙两地间路程的一半是 $240 - 40 = 200$（千米）。此时，慢车行了 $200 - 40 - 34 = 126$（千米），因此慢车每小时行 $126 \div 3 = 42$（千米）。

解：　$(80 \times 3 - 40 \times 2 - 34) \div 3$

$= 126 \div 3$

$= 42$（千米）

思路二：设慢车每小时行 x 千米。根据题意可知：$(80 \times 3 - 40)$千米是全程的一半，$(3x + 40 + 34)$千米也是全程的一半。利用这一关系可列出方程进行解答。

解：设慢车每小时行 x 千米

$3x + 40 + 34 = 80 \times 3 - 40$

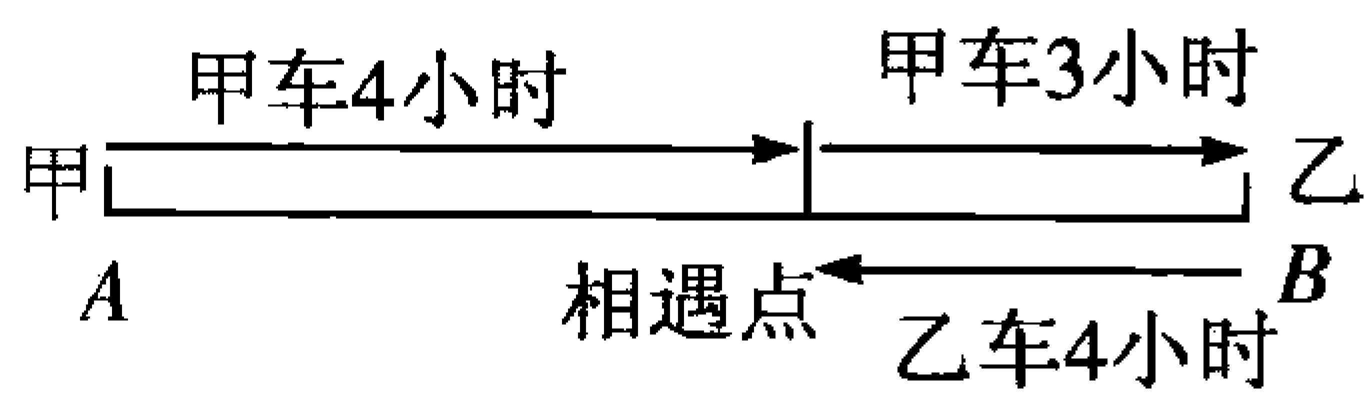
$3x = 126$

$x = 42$

答：慢车每小时行 42 千米。

例题 2 **甲、乙两辆旅游车同时从 A、B 两地出发，相向而行，4 小时相遇，相遇后甲车继续行驶了 3 小时到达 B 地，乙车每小时行 24 千米。问：A、B 两地相距多少千米？**

思路分析： 根据题意画线段图如下：



从图中我们知道，乙车 4 小时行 $4\times24=96$（千米），相当于甲车 3 小时行的路程，所以甲每小时行 $96\div3=32$（千米），那么全长是 $32\times(4+3)=224$（千米）。

解： $24\times4\div3=32$（千米）

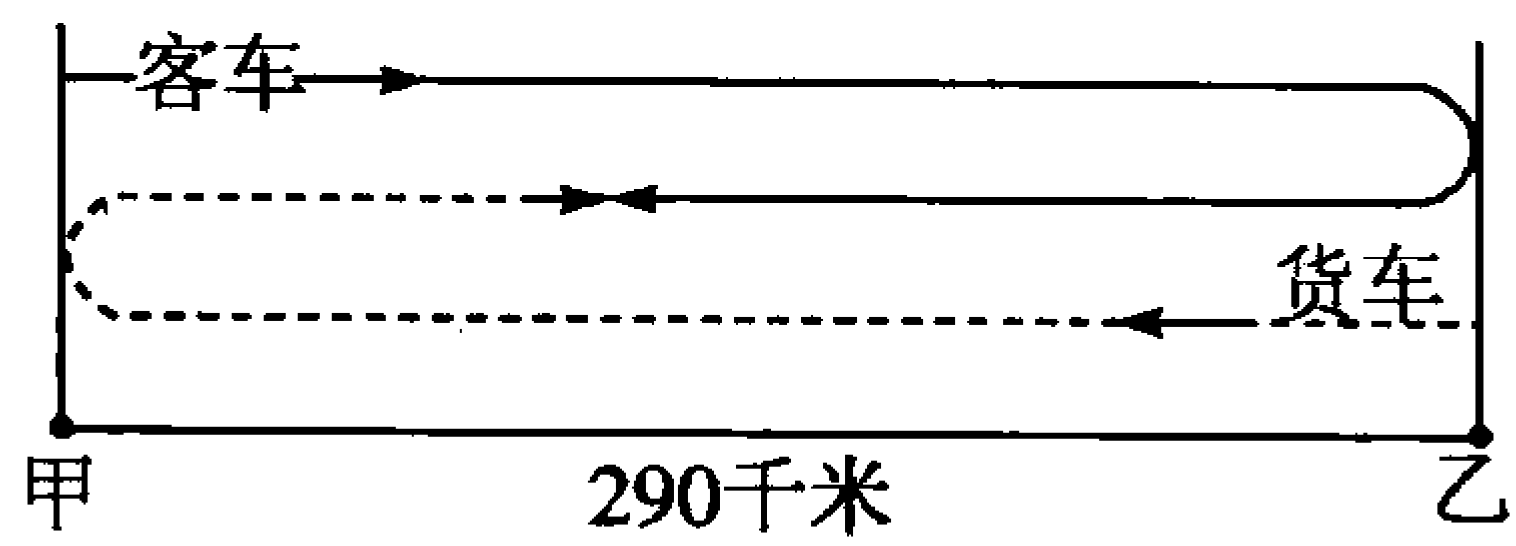
$32\times(4+3)=224$（千米）

答： A、B 两地相距 224 千米。

例题 3 **甲、乙两城相距 290 千米，一辆客车从甲城出发向乙城驶去，每小时行 45 千米；一辆货车从乙城出发驶向甲城，每小时行 42 千米。两车同时出发相向而行，它们各自到达终点后立即返回。从出发时开始到返回再次相遇一共花了多少小时？**

思路分析： 两车在各自到达终点之前就已经“相遇”了一次，它们返回后再次相遇，就成为“两次相遇”问题。假如我们分别考虑两车各自到达终点花费了多少时间，同时推算另一辆汽车行至何处，再来推算第二次相

遇的情况，那的确是非常困难的。我们不妨在桌面上实际演示一下，就能发现：



两车第二次相遇时，它们共行了三倍全程，因此求时间就不困难了。

解： $290\times3\div(45+42)$

$=870\div87$

$=10$（小时）

答： 从出发时开始到返回再次相遇一共花了 10 小时。

例题 4 **甲、乙两车早上 8 时分别从 A、B 两地同时相向出发，到 10 时两车相距 112.5 千米。两车继续行驶到下午 1 时，两车相距还是 112.5 千米。A、B 两地间的距离是多少千米？**

思路分析： 从 10 时到下午 1 时共经过 3 小时，3 小时里，甲乙两车从相距 112.5 千米到又相距 112.5 千米，共行 $112.5\times2=225$（千米）。两车的速度和是每小时行 $225\div3=75$（千米）。从早上 8 时到 10 时共经过 2 小时，2 小时共行 $75\times2=150$（千米），因此，A、B 两地间的距离是 $150+112.5=262.5$（千米）。

解：$112.5\times2\div3\times2=150$（千米）

$150+112.5=262.5$（千米）

答：A、B 两地间的距离是262.5千米。

例题5 **A、B 两地相距21千米，上午8时甲乙分别从 A、B 两地出发，相向而行，甲到达 B 地后立即返回，乙到达 A 地后也立即返回，上午10时他们第二次相遇，此时甲走的路程比乙多9千米。甲每小时行多少千米？**

思路一：由题意可知，甲、乙两车同时行了 $10-8=2$（小时），合走了3个全程，共行 $21\times3=63$（千米），再根据甲走的路程比乙走的路程多9千米，可按和差问题的解题规律求出甲行的路，进而求出甲的速度。

解：甲行的路程：

$(21\times3+9)\div2=36$（千米）

甲的速度：

$36\div(10-8)=18$（千米/小时）

思路二：从出发到第二次相遇，甲、乙共行了3个全程，即路程和是：$21\times3=63$（千米），那么甲、乙的速度和就是：$63\div(10-8)=31.5$（千米/小时）。而甲乙的速度差则是 $9\div(10-8)=4.5$（千米/小时）。根据和差问题的数量关系可求出甲每小时行多少千米。

解：甲乙的速度和：

$21\times3\div(10-8)=31.5$（千米/小时）

甲乙的速度差：

$9\div(10-8)=4.5$（千米/小时）

甲的速度：

(31.5+4.5)÷2=18（千米/小时）

答：甲每小时行18千米。

小结

解答较复杂的相遇问题时，我们要弄清题中已知条件与所求问题之间的关系，再设法画出线段图反映整个连续的运动过程，从而使隐蔽的数量关系变得明显，便于发现已知和未知间的内在联系。特别是解答两次相遇的问题，关键是抓住“两次相遇，三倍路程”，然后再根据题目的具体情况找到解决问题的方法。

金牌训练

一 对应训练

1. 兄弟二人同时从学校和家中出发，相向而行，哥哥每分钟行120米，5分钟后哥哥已超过中点50米，这时兄弟二人还相距30米，弟弟每分钟行多少米？

2. 甲、乙两人同时从 A、B 两地相向而行，6 分钟相遇，相遇后甲继续走 4 分钟到达 B 地，乙每分钟行 40 米。问：A、B 两地相距多少米？

3. 两个城市相距 150 千米，甲、乙两人骑自行车同时从两个城市出发，相向而行。甲每小时行 14 千米，乙每小时行 11 千米，他们各自到达终点后立即返回。从出发时开始到返回再次相遇一共花了多少时间？

4. 快、慢两车早上 6 时同时从甲乙两地相向开出，中午 12 时两车还相距 50 千米，继续行驶到 14 时，两车又相距 170 米。甲乙两地相距多少千米？

5. A、B 两地相距 36 千米，上午 8 时甲、乙分别从 A、B 两地出发，相向而行，甲到达 B 地后立即返回，乙到达 A 地后也立即返回，上午 11 时他们第二次相遇，此时甲走的路程比乙多 12 千米，问甲每小时行多少千米？

变式训练

1. 汽车从甲地开往乙地，每小时行 32 千米，4 小时后，剩下的路程比全程的一半少 8 千米，如果改用每小时 56 千米的速度行驶，再行几小时到达乙地？

2. 甲乙两车分别从 A、B 两地同时相对开出，经过 2 小时相遇。相遇后各自继续前进，又经过 1.5 小时，甲车到达 B 地，这时乙车距 A 地还有 35 千米。求 A、B 两地的距离。

3. 甲、乙两城相距 580 千米，一辆客车从甲城出发向乙城驶去，每小时行 45 千米；一辆货车从乙城出发驶向甲城，每小时行 42 千米。两车同时出发相向而行，它们各自到达终点后休息 1 小时，然后立即返回。从出发开始到返回再次相遇一共花了多少时间？

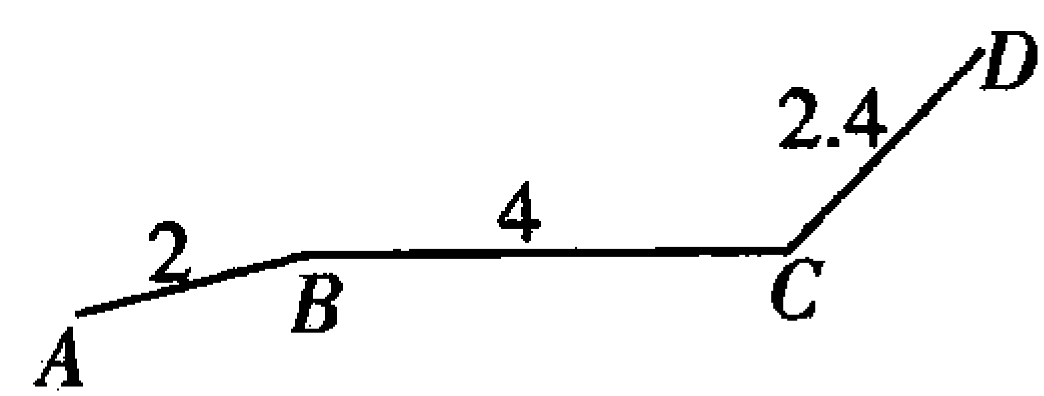
4. 小明和小华两人分别从东西两地同时出发，相向而行，10 小时后可以相遇。如果两人每小时都少行 2 千米，那么 12 小时后相遇，问：两地相距多少千米？

5. 客货两车同时从甲乙两站相对开出，客车每小时行 54 千米，货车每小时行 48 千米，两车相遇后又以原速前进，到达对方站后立即返回，两车再次相遇时客车比货车多行 21.6 千米。甲乙两站间的路程是多少千米?

三 拔高训练

1. 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发，相向而行，甲每分钟行 50 米，乙每分钟行 70 米。两人第一次在离 A 地 500 米的 C 处相遇，相遇后继续前进，分别到达 A、B 两地后立即返回，第二次在 D 处相遇。CD 之间的距离是多少米?

2. 如右下图，有一段山路，从 A 到 B 是 2 千米的上坡路，从 B 到 C 是 4 千米的平路，从 C 到 D 是 2.4 千米的上坡路。小明和小亮分别从 A、D 同时出发，相向而行，他们下坡的速度都是每小时 6 千米，平路速度都是每小时 4 千米，上坡速度都是每小时 2 千米，他们经过多长时间相遇？



第9讲 行程问题（二）

本专题我们将在前面学习的基础上，主要研究行程问题中的追及问题和火车过桥问题。

追及问题的基础关系式是：路程差 = 速度差 × 追及时间。在解答追及问题时要注意以下几点：

1. 弄清题意，紧扣路程差、速度差和追及时间这三个量之间的基本关系来分析。

2. 对某些较复杂的追及问题，可以借助直观图来帮助理解题意，分析题中数量之间的关系。

3. 要注意运动物体的出发点、出发时间、行走方向，善于捕捉速度、时间和路程的对应关系。

4. 要善于联想、转化，使隐蔽的数量关系明朗化，找准解题的突破口。

“火车过桥”问题是以动对静，桥是静的，火车是动的，火车通过大桥，是指从车头上桥到车尾离桥。有些问题不容易一下子看出运动过程中的数量关系，可利用身边的物体，根据题意动手演示，使应用题的内容形象化，从而找到解题的线索。

金牌例题

例题 1　甲乙两个采购员同时从工厂出发向相反方向行进，甲每分钟步行 70 米，乙骑自行车每分钟行 210 米，6 分钟后，乙因有事转过方向去追甲，多少分钟可以追上?

思路分析：由题意知，当乙转过方向去追甲时的路程差正好是甲、乙两个采购员 6 分钟行的路程：

$(210+70)\times6=1680$（米），那么根据追及路程 ÷ 速度差 = 追及时间可得：$1680\div(210-70)=12$（分钟）。

解：　$(210+70)\times6\div(210-70)$

$=1680\div140$

$=12$（分钟）

答：12 分钟可以追上。

例题 2　甲、乙二人练习跑步，若甲让乙先跑 10 米，则甲跑 5 秒可追上乙；若乙比甲先跑 2 秒，则甲跑 4 秒能追上乙。乙每秒跑多少米?

思路分析：若甲让乙先跑 10 米，则路程差为 10 米，于是可求甲乙速度差每秒 $10\div5=2$（米）。若乙比甲先跑 2 秒，追及时间要 4 秒，于是可求路程差 $2\times4=8$（米），这是乙先跑 2 秒跑的路程，所以乙的速度为每秒 $8\div2=4$（米）。

解：$10 \div 5 \times 4 \div 2 = 4$（米）

答：乙每秒跑4米。

例题3 **行军队伍长200米，前进速度是每分钟80米。行进中排尾的通讯员要把一封信交给排头的指挥员，他以每分钟120米的速度跑步，追到排头后再立即返回排尾，求这位通讯员往返一次所用的时间。**

思路分析：通讯员追指挥员时是追及，他们的路程差是队伍的长度200米，用路程除以速度差得到追及时间。从排头返回排尾是相遇，所要走的路程也是队伍的长度，所用时间是用路程除以速度和。

解：
$$\begin{aligned}&200 \div (120-80) + 200 \div (120+80)\\&= 200 \div 40 + 200 \div 200\\&= 5 + 1\\&= 6 \text{（分钟）}\end{aligned}$$

答：往返一次需要6分钟。

例题4 **一列火车通过一座长750米的大桥用了40秒，以同样的速度通过一座长1350米的隧道用了60秒，求这列火车的车长和速度。**

思路分析：仔细分析发现火车的速度始终不变。火车过桥时共行750米+车长，通过隧道时共行1350米+车长，实际前后的路程差为（1350+车长）-（750+车长）=600（米），通过隧道的路程比通过大桥的路程多600米，在车速不变的情况下，通过隧道的时间必然要比

通过大桥的时间多，多 60 - 40 = 20（秒）。根据路程差÷时间差 = 速度，求出火车速度：600 ÷ 20 = 30（米/秒）。求车长就用时间×速度－桥长，即：30×40－750 =450（米）。

解：（1350－750）÷（60－40）=30（米/秒）

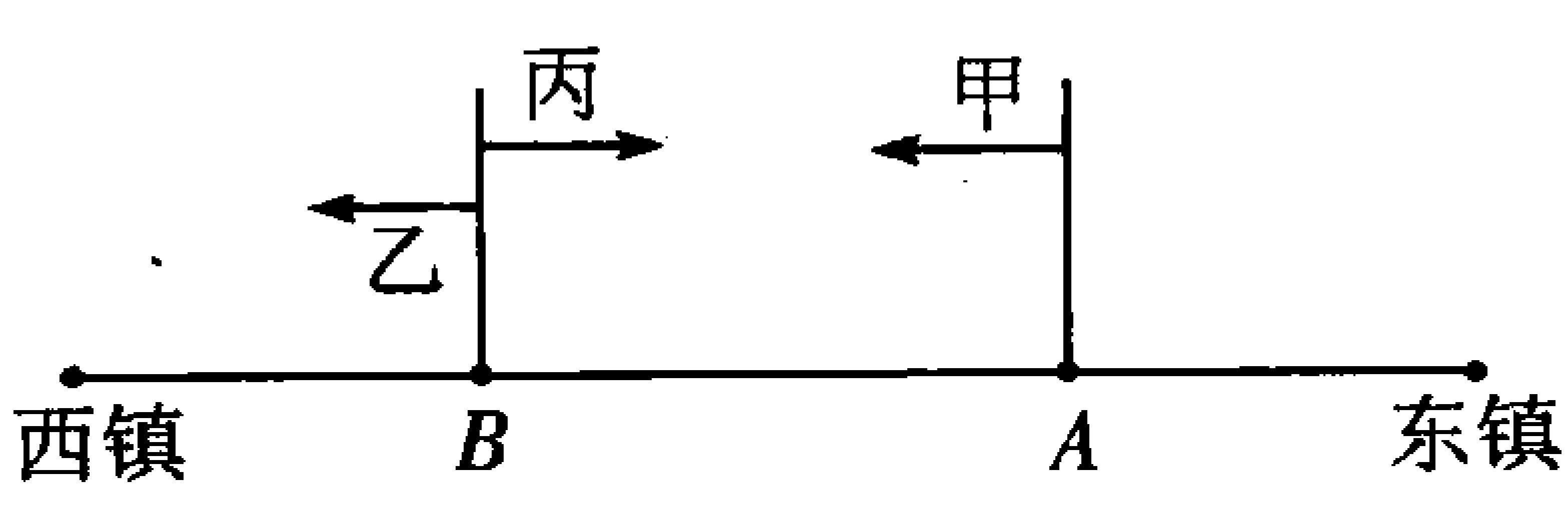
30×40－750=450（米）

答：这列火车的车长是 450 米，速度是每秒行 30 米。

例题 5 **甲、乙、丙三人，甲每分钟走 20 米，乙每分钟走 23 米，丙每分钟走 25 米，甲、乙从东镇，丙从西镇，同时相对出发，丙遇到乙 10 分钟后才遇到甲。东西两镇相距多少米?**

思路分析：这是一个比较复杂的行程问题，它既包含有“相遇”，又包含有“追及”。

我们假定丙在 B 地与乙相遇，同时假定此时甲正走到 A 地。作图如下：



因为丙在与乙相遇之后又过 10 分钟遇到甲，由此求 AB 之间的距离，

列式为：（20＋25）×10＝450（米）

这又表示乙与丙相遇的时候，乙比甲多行了450米。为什么乙能比甲多走450米呢？当然是因为乙的速度比甲快。此时我们运用“追及”问题的解题思路，推算两人各走了多少分钟，

列式为：$450 \div (23-20) = 150$（分钟）

这“150分钟”又恰好是乙、丙相遇时所用的时间。有了他们相遇的时间，又知道他们的速度，再来求总路程（即东、西两镇的距离）就不困难了。

列式为：$(23+25) \times 150 = 7200$（米）

答：东西两镇相距7200米。

小结

解这类问题要认真分析数量关系，在追及中两人的速度差与所用时间相乘就是追及之前两人的距离。

在解题过程中，通过画图会使隐蔽的数量关系变得明显，已知量和未知量之间的内在联系容易被发现。同学们在解题过程中要认真画图分析。

金牌训练

一 对应训练

1. 小强每分钟走 70 米，小亮每分钟走 60 米，两人同时从同一地点背向走了 3 分钟，小强掉头去追小亮，多少分钟可以追上？

2. 甲、乙二人练习跑步，若甲让乙先跑 10 米，则甲跑 5 秒钟可追上乙，若甲让乙先跑 3 秒钟，则甲跑 6 秒钟就追上乙，问：乙的速度是多少？

3. 同学们去春游，排成一列队以每秒 1 米的速度行进，队伍长 300 米，李老师因事以每秒 1.5 米的速度从队伍的排尾追到排头，又立即从队伍的排头回到排尾。问：李老师又回到排尾时一共用了多少分钟？

4. 一列火车通过 987 米长的隧道需要 58 秒钟，它用同样的速度通过 861 米长的桥需要 52 秒钟。这列火车每秒钟行多少米？它的车身长多少米？

5. 甲每分钟走 50 米，乙每分钟走 60 米，丙每分钟走 70 米，甲、乙两人从 A 地，丙从 B 地三人同时相向出发。丙先遇到乙，再经过 2 分钟后遇到甲，A、B 两地相距多远？

二 变式训练

1. 哥哥每分钟走 60 米，弟弟每分钟走 50 米，当两人同时从同一地点背向走了 4 分钟时，哥哥掉头去追弟弟，追上弟弟时哥哥一共走了多少米？

2. 甲、乙二人练习跑步，若甲让乙先跑 14 米，则甲跑 7 秒钟可追上乙；若甲让乙先跑 4 秒钟，则甲跑 8 秒钟就能追上乙。甲、乙二人的速度各是多少？

3. 同学们去秋游，排成一列队以每秒 1 米的速度行进，队伍长 600 米，王老师因事以每秒 1.5 米的速度从队伍的排尾追到排头，又立即从队伍的排头回到排尾。问：王老师一共行了多少米？

4. 已知某铁路桥长 1000 米，一列火车从桥上通过，测得火车从开始上桥到完全下桥共用 120 秒，整列火车完全在桥上的时间为 80 秒。求火车的速度和长度。

5. 甲、乙、丙三人行走的速度分别是每分钟 60 米、80 米、100 米。甲乙两人在 B 地，丙在 A 地与甲乙二人同时相向而行，丙和乙相遇后，又过 2 分钟和甲相遇。求甲行完 AB 两地用多长时间。

三 拔高训练

1. 一列火车车身长 600 米，行驶速度每小时 60 千米，铁路上有两座隧道，火车自车头进入第一隧道到车尾离开第一隧道用了 3 分钟，又从车头进入第二隧道到车尾离开第二隧道用了 4 分钟。火车从车头进入第一隧道到车尾离开第二隧道共用 9 分钟。问：两座隧道之间相距多少米？

2. 小刚和哥哥同时出发步行去离家 6 千米远的少年宫看画展，预计 2 小时可以到达。走了一半路，突然发现展览馆参观券丢在家里，哥哥决定自己回去取，小刚一人继续往前走。哥哥往回走了 27 分钟，迎面碰到爸爸骑摩托车赶来送参观券，哥哥坐上爸爸的车去追赶小刚，摩托车车速每小时 30 千米，当摩托车追上小刚时，离少年宫还有多远？

第10讲　作图法解应用题

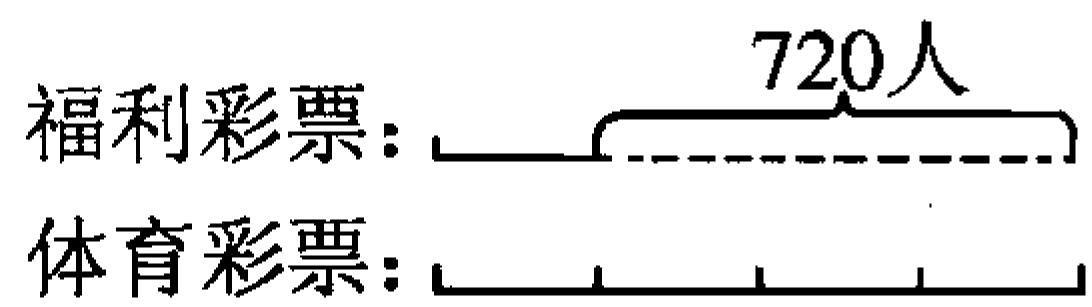
解应用题时，首先要认真读题，理解题意，弄清已知条件和问题，正确分析数量关系。有些应用题的数量关系比较复杂，如果只从题目的条件和问题抽象地分析数量关系，就不容易弄清数量关系。用画线段图或其他示意图的方法把题目中的已知条件和问题表示出来，使隐蔽的、抽象的数量关系具体化、形象化，一目了然，从而找到解题途径，这就是作图法解应用题。

特别是对条件复杂、数量关系不太明显的应用题，同学们可以通过画图来帮助解答，这样，不仅可以高效地解决问题，还会发现新的解题方法，可谓一举两得！

金牌例题

例题 1　某彩票售点既出售福利彩票又出售体育彩票。已知购买体育彩票的人数是购买福利彩票人数的4倍，且比购买福利彩票的人数多720人。求该销售点购买两种彩票的人数各有多少。

思路分析：根据题意作出示意图：



本题是“差倍问题”——已知两数的差和它们的倍数关系，求这两个数。由图可知其差 720 恰为购福利彩票人数的（4－1）倍，由此可求出购福利彩票的人数。

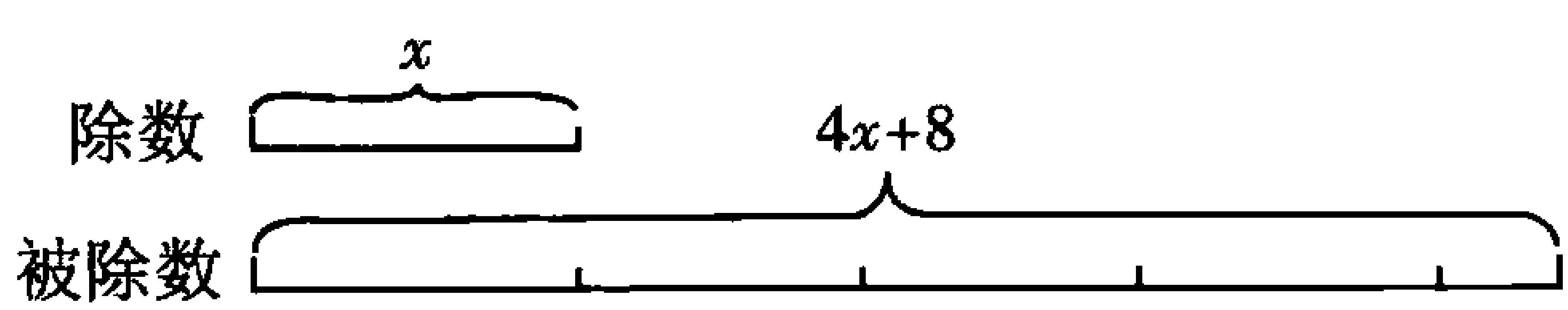
解：$720 \div (4-1) = 240$（人）

$240 + 720 = 960$（人）

答：购福利彩票的有 240 人，购体育彩票的有 960 人。

例题 2 **两数相除，商 4 余 8，被除数、除数、商和余数四数之和等于 415，则除数是多少？**

思路分析：根据题意：被除数 ÷ 除数 $=4\cdots\cdots8$，那么，根据除法各部分之间的关系，被除数 = 除数 $\times 4 + 8$。被除数是除数的 4 倍还多 8，就可以用线段图表示出它们之间的关系，如下图，把除数看做 x，则被除数是 $4x+8$。



解法一：设除数为 x，则被除数是 $4x+8$，列方程得：

$$x + 4x + 8 + 4 + 8 = 415$$

$$5x = 395$$

$$x = 79$$

解法二： 用算术法求解

$(415-8-4-8)\div(1+4)$

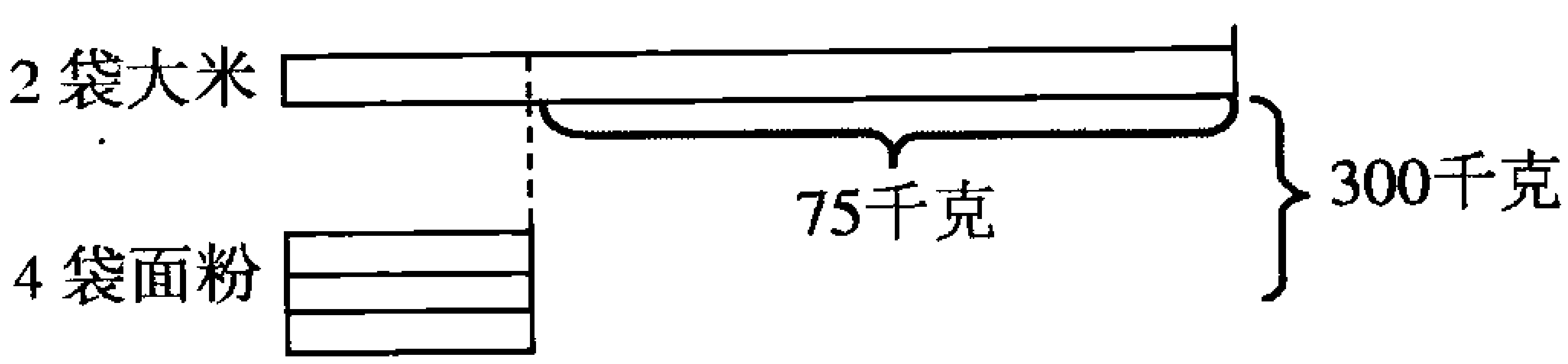
$=395\div5$

$=79$

答： 除数是79。

例题3 **食堂买来2袋大米和4袋面粉，共重300千克。每袋大米比面粉重75千克，大米和面粉每袋各重多少千克？**

思路分析： 如下图，通过画图，明显地展示了题中的数量关系。根据图示，可以得到两种基本解法。



解法一： 从总重量300千克里减去2个75千克，就得到6袋面粉的重量。由此求得每袋面粉的重量：

$(300-75\times2)\div(2+4)$

$=150\div6$

$=25$（千克）

每袋大米的重量：$25+75=100$（千克）

解法二： 从总重量300千克里加上4个75千克，就得到6袋大米的重量。由此可求得每袋大米的重量：

$$(300+75\times4)\div(2+4)$$
$$=600\div6$$
$$=100\text{（千克）}$$

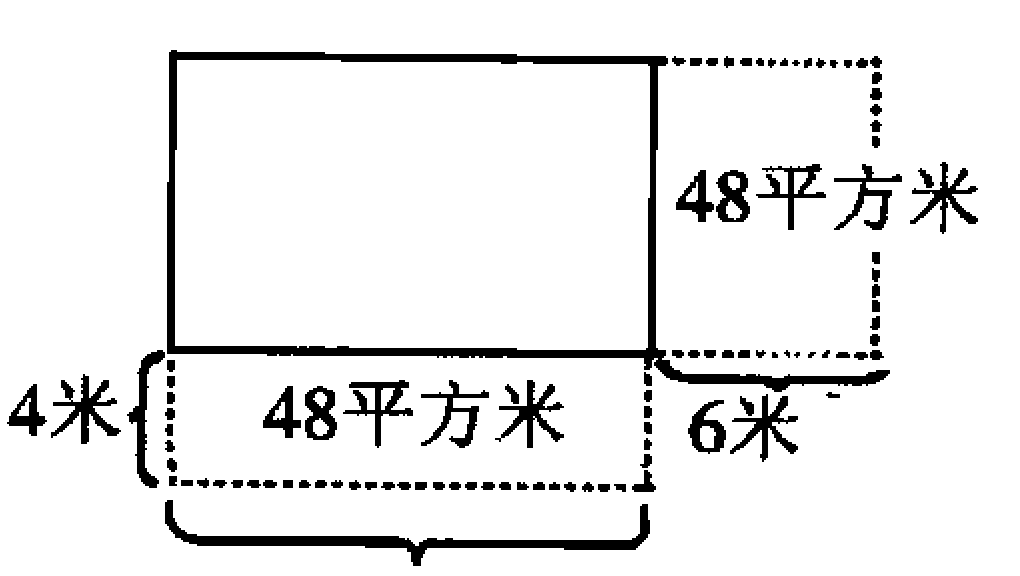
每袋面粉的重量：$100-75=25$（千克）

答：每袋大米重 100 千克，每袋面粉重 25 千克。

例题 4　有一块长方形的空地，如果把这块地的长增加 6 米，新空地面积比原来增加 48 平方米；如果把这块地的宽增加 4 米，新空地的面积比原来也增加 48 平方米，原来这块空地的面积是多少平方米？

思路分析：此题要求长方形空地的面积，那么必须知道这块长方形地的长和宽，根据题中条件，我们画出下图，用实线画一个任意长方形表示原有长方形的空地。

当长增加 6 米后，长方形地的面积增加大小如虚线所示。



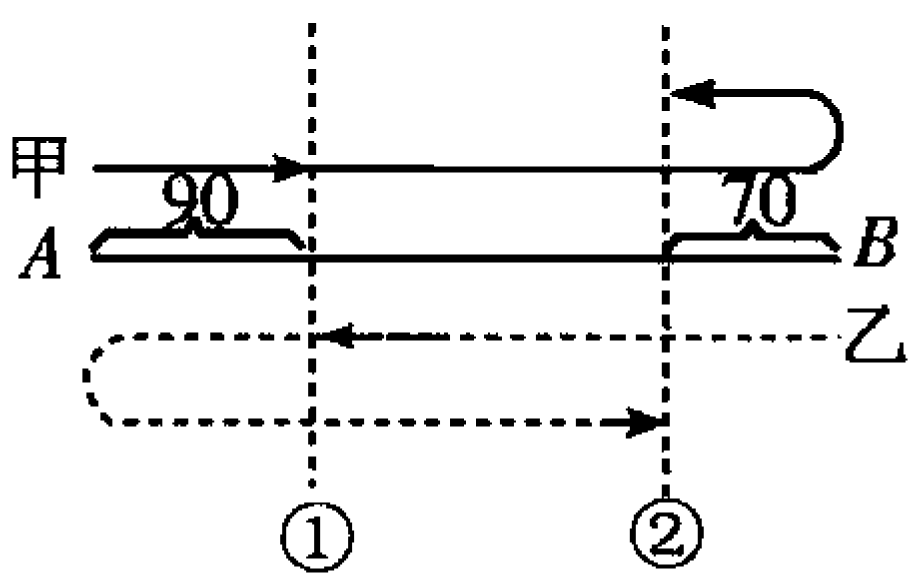
从图中可以清楚地看出：当长增加 6 米，宽不变时，原长方形的面积增加 48 平方米，可求出原长方形的宽是 $48\div6=8$（米），当宽增加 4 米，长不变时，原长方形的面积也增加 48 平方米，可求出原长方形的长是 $48\div4=12$（米）。这时原长方形空地的面积就可以求出。

解：$(48\div6)\times(48\div4)=8\times12=96$（平方米）

答：原来这块空地的面积是96平方米。

例题5 **甲、乙两车同时从A、B两地相向开出，第一次相遇时离A地有90千米，然后各按原速度继续行驶，到达目的地后立即沿原路返回，第二次相遇时离B地70千米，求A、B两地的路程。**

思路分析：求A、B两地的路程，题中既没有给出甲、乙的速度，也没有给出相遇时间，解答比较困难。下面我们借助线段图来帮助分析。



从图中可以看出，甲、乙两车从出发到第一次相遇共行驶了一个全程，当两车共行驶1个全程时，甲车行驶了90千米。从第一次相遇到第二次相遇，甲、乙两车又共行驶了2个全程。因此从出发到第二次相遇甲、乙两车共行驶了3个全程，那么甲车就行驶了3个90千米，即$90\times3=270$（千米），而甲车比全程多行70千米。所以A、B的距离为$270-70=200$（千米）。

解：$90\times3-70=200$（千米）

答：A、B两地的路程是200千米。

小结

在解答稍复杂的应用题时，要根据不同的题目选择不同的方法，可以用线段图解、实物图解、平面图形、表格图解等，从而深刻地理解题意，正确分析数量关系，找到解题方法，经常使用作图法解应用题并养成习惯，对提高解题能力大有裨益。

金牌训练

一 对应训练

1. 一个果园里有桃树和苹果树，苹果树的棵数是桃树的 5 倍，并且苹果树比桃树多 200 棵，这个果园里的苹果树和桃树各有多少棵？

2. 两个数相除，商 4 余 1，被除数、除数、商和余数的和是 156，除数是多少？

3. 学校买了 4 个足球和 3 个排球，共用 117 元，每个足球比每个排球贵 3 元，每个足球和排球各多少元？

4. 一个长方形如果宽不变，长增加 6 米，面积就增加 30 平方米，如果长不变，宽增加 3 米，面积就增加 24 平方米，这个长方形原来有多少平方米？

5. 佳佳从甲地向乙地走，彬彬同时从乙地向甲地走，当他们两人各自到达终点时，又迅速返回。两人行走的过程中，各自速度不变。两人第一次相遇在距甲地 50 米处，第二次相遇在距乙地 19 米处。甲、乙两地相距多少米？

二 变式训练

1. 五（1）班的男生人数和女生人数同样多。选派 18 名男生和 26 名女生参加实践活动，剩下的男生是女生的 3 倍。五（1）班原来有男女生各多少人？

2. 两个数相除，商是 17，余数是 8，被除数、除数、商和余数的和是 501，求被除数、除数各是多少。

3. 用 96 元钱买了同样的 3 件上衣和 4 条裤子，又知 3 件上衣的总价比 3 条裤子的总价贵 33 元，求上衣和裤子的单价。

4. 把一个长方形的长减少 3 分米，宽增加 2 分米，就变成一个正方形，它与原来的长方形的面积相等，那么正方形的面积是多少平方分米？

5. 甲、乙两车同时从 A、B 两地相向而行，在距 B 地 54 千米处相遇。它们各自到达对方车站后立即返回原地，途中，又在距 A 地 42 千米处相遇。两次相距地点相距多少千米？

三 拔高训练

1. 把一条大鱼分成鱼头、鱼身、鱼尾三部分，鱼尾重 4 千克，鱼头的重量等于鱼尾的重量加鱼身一半的重量，而鱼身的重量等于鱼头的重量加上鱼尾的重量。这条大鱼重多少千克？

2. 甲堆煤是乙堆煤的 3 倍，如果甲堆煤增加 8 吨，乙堆煤减少 8 吨，甲堆煤就是乙堆煤的 5 倍。甲、乙两堆煤各多少吨？

第11讲　排列与组合

在实际生活中经常会遇到这样一些问题：把一些事物排在一起成一列，计算有多少种排法，如：1、2、3 这 3 个数字组成的两位数共有多少个？这就是数学中的排列问题。

还有在日常生活中有很多“分组”问题，如参加数学竞赛、足球赛，会把参赛队分为几个组进行，我们研究有多少种分组方法，这就是组合问题。

加法原理和乘法原理是解答排列与组合这两类问题最常用的两个最基本的原理，所以同学们应熟练掌握这两个原理。

加法原理：完成一件事有 k 类方法，第一类方法中有 m 种不同做法，第二类方法中有 m_2 种不同做法……第 k 类方法中有 m_k 种不同的做法，并且 k 类方法是互不影响的，则完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种不同的方法，这就是加法原理。

乘法原理：如果完成一件事情需要几个步骤，其中第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事情一共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法，这就是乘法原理。

金牌例题

例题 1 **有三张数字卡片，分别为 $\boxed{0}$、$\boxed{1}$、$\boxed{2}$。从中挑出两张排成一个两位数，一共可以排成多少个两位数？**

思路分析：排数时要注意“0”不能排在最高位，下面我们进行分类考虑。

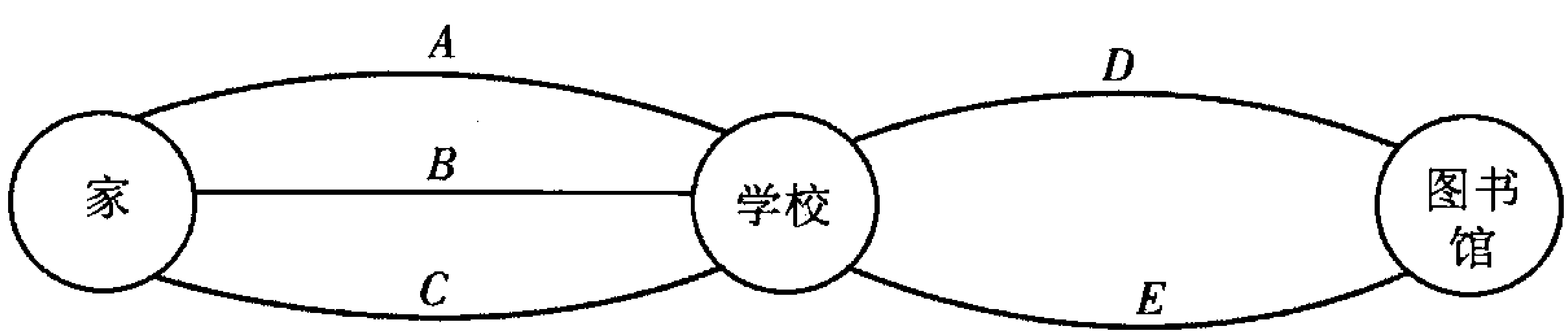
（1）十位上排 1，个位上有两个数字可选，这样的数共有两个，10，12。

（2）十位上排 2，个位上也有两个数字可选，这样的数字也有两个，20，21。

从以上列举容易发现，一共可以排成 $2\times2=4$（个）两位数。

答：一共可以排成 4 个两位数。

例题 2 **小群从家到学校有三条路可走，从学校到图书馆有两条路可走，那么从家经过学校到图书馆共有几条路可走？**



思路分析：由题意可知，从家到学校可走 A、B、C 中任意一条路，从学校到图书馆可走 D、E 中任意一条路。

如果从家出发由 A 路到学校后可走 D、E 任何一条路到图书馆，这样就有两种走法。

如果从家出发由 B 路到学校后可走 D、E 任何一条路到图书馆，这样也有两种走法。

如果从家出发由 C 路到学校后可走 D、E 任何一条路到图书馆，这样就又有两种走法。

所以从家到图书馆共有 $3\times2=6$ 种不同的走法。这六种走法：

①家$\xrightarrow{A}$学校$\xrightarrow{D}$图书馆

②家$\xrightarrow{A}$学校$\xrightarrow{E}$图书馆

③家$\xrightarrow{B}$学校$\xrightarrow{D}$图书馆

④家$\xrightarrow{B}$学校$\xrightarrow{E}$图书馆

⑤家$\xrightarrow{C}$学校$\xrightarrow{D}$图书馆

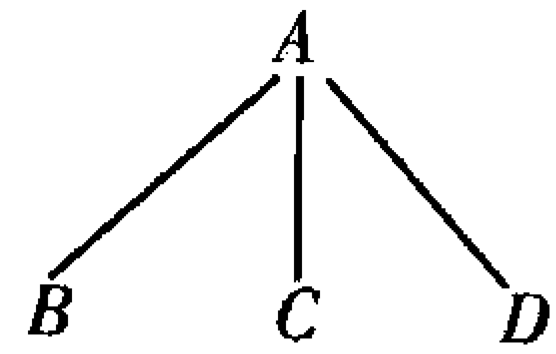
⑥家$\xrightarrow{C}$学校$\xrightarrow{E}$图书馆

答：从家经过学校到图书馆共有 6 条路可走。

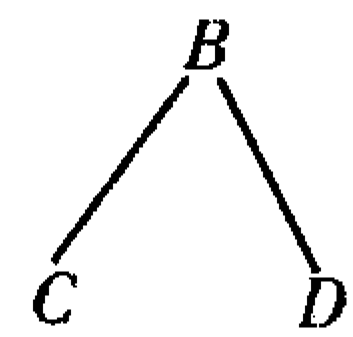
例题 3 **在一次足球比赛中，4 个队进行循环赛，一共需要比赛多少场？（两个队之间比赛一次称为一场）**

思路分析： 4 个队进行循环赛，也就是说 4 个队每两个队都要赛一场，设 4 个队分别为 A、B、C、D，我们可以用图表示 4 个队进行循环赛的情况。

A 队和其他 3 个队各比赛一场，要赛 3 场。



B 和 *C*、*D* 两个队还要各比赛 1 场，要赛 2 场。



C 队还要和 *D* 队比赛 1 场，要赛 1 场。

C——*D*

这样一共需要比赛 $3+2+1=6$（场）

答：一共需要比赛 6 场。

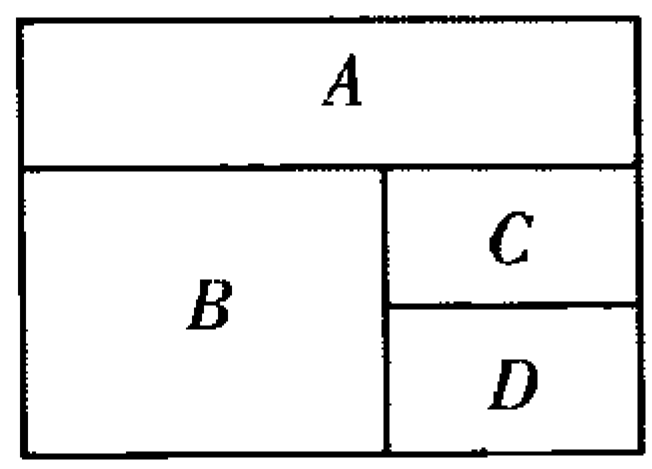
例题 4　有一张 5 元，4 张 2 元和 8 张 1 元的人民币，从中取出 9 元钱，共有多少种不同的取法？

思路分析：如果不按一定的顺序去思考，就可能出现遗漏或重复的取法。因此，我们可以按照从大到小，从少到多的顺序，先排 5 元的，再排 2 元的，最后排 1 元的，把可以组成 9 元的情况一一列举出来。

5 元	2 元	1 元
1	0	4
1	1	2
1	2	0
0	1	7
0	2	5
0	3	3
0	4	1

从上面的列举中可以看出，取 9 元钱共有 7 种不同的取法。

例题5 **地图上有 A、B、C、D 四个国家，如下图，现用红、蓝、黄、绿四种颜料给地图染色，使相邻的颜色不同。问有多少种不同的染色方法？**



思路分析：可以把给地图着色分成四个步骤：第一步给 A 着色有 4 种方法；第二步给 B 着色，因 A、B 相邻，有 3 种方法；第三步给 C 着色，因 C 与 A、B 都相邻，因此有 2 种方法；第四步给 D 着色，因 D 与 B、C 相邻，因此有 2 种方法。

解：共有 $4\times3\times2\times2=48$（种）

答：有 48 种不同的染色方法。

小结

解答排列与组合这两类问题时，同学们要根据题目要求，把问题的解答不重复、不遗漏的有限情况，按某种顺序一一列举出来，不能杂乱无章。但如果需要列举的对象较多时，就必须先进行分析，然后找出一定的规律，利用加法原理和乘法原理，采用计算的方法解决问题。同学们一定要熟练掌握加法原理和乘法原理，根据题目的要求，灵活运用这两个原理来解决问题。

金牌训练

一 对应训练

1. 有三张数字卡片，分别是$\boxed{3}$、$\boxed{6}$、$\boxed{0}$，从中挑出两张排成一个两位数，一共可以排成多少个两位数？

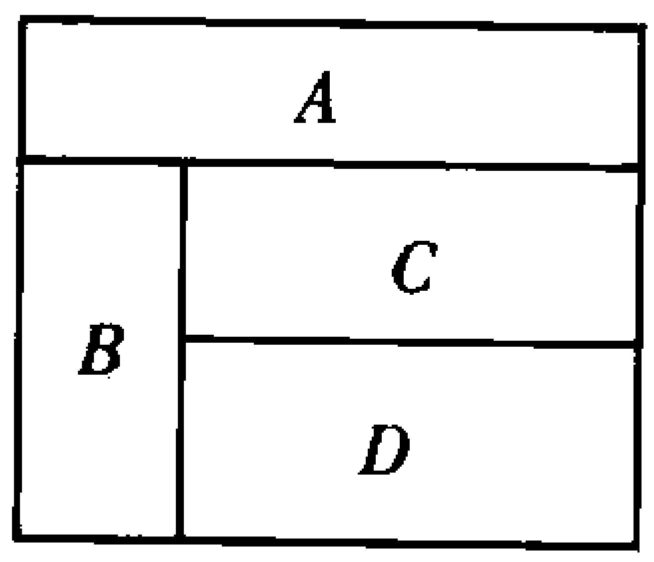
2. 在一次羽毛球比赛中：

（1）5 个队进行单循环赛，需比赛多少场？（每两个队之间比赛 1 次称为 1 场）

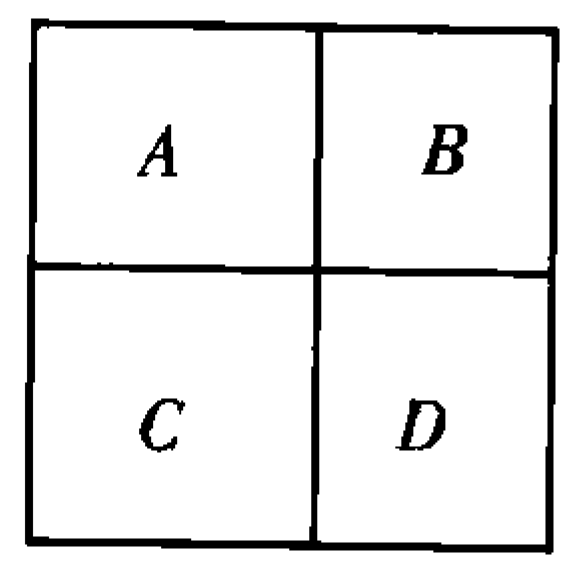
（2）40 名运动员进行淘汰赛，最后决出冠军，共要打几场球？

3. 有 1 张 5 元，4 张 2 元，8 张 1 元的人民币，要支付 8 元钱，共有多少种不同的支付方法？

4. 地图上 A、B、C、D 四个国家，如图（1）、（2），现用红、蓝、黄、绿四种颜料给地图染色，使相邻国家的颜色不同，问有多少种不同的染色方法？



（1）



（2）

变式训练

1. 用数字 0，5，8，9 可以组成多少个没有重复数字的四位数？

2. 书架上有 6 本不同的科技书，4 本不同的童话书，小华从书架上任取一本科技书和一本童话书，一共有多少种不同的取法？

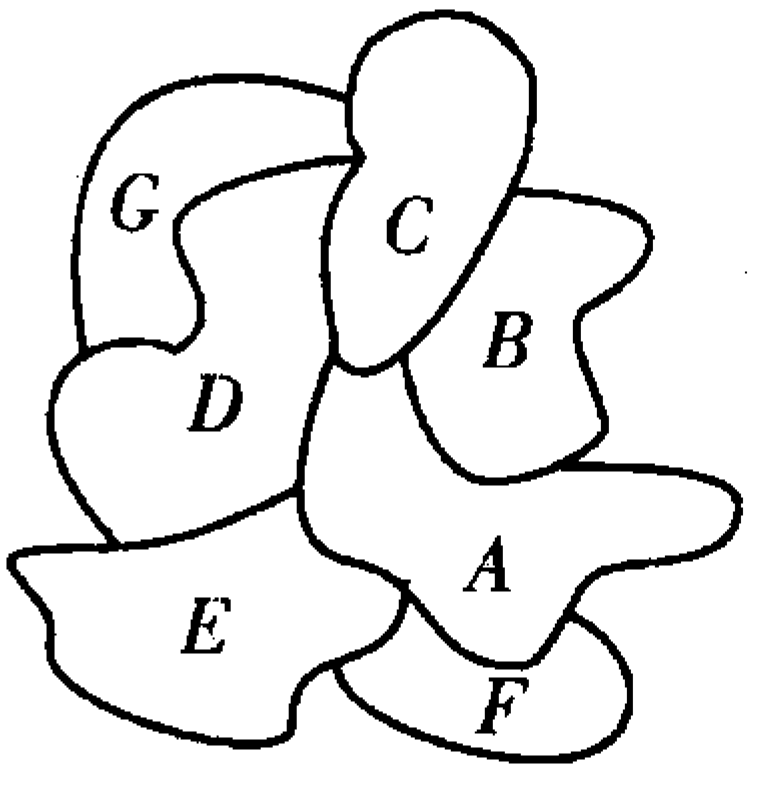
3. 有 15 支足球队参加足球比赛。

(1) 如果每两队比一场（即进行单循环赛），需要比赛多少场？

(2) 如果进行淘汰赛最后决出冠军，共需比赛多少场？

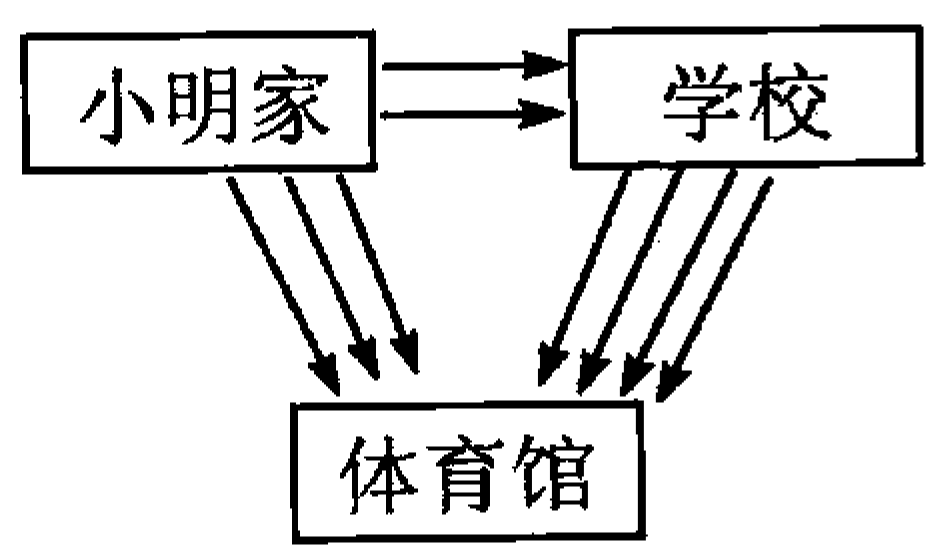
4. 英英有 10 张 1 元的人民币，5 张 2 元的人民币，2 张 5 元的人民币。要拿出 10 元买一本书，可以有多少种拿法？

5. 某沿海城市管辖 7 个县，这 7 个县的位置如图所示。现在用红、黑、绿、蓝、紫五种颜色给下图染色，要求任意相邻的两个县染不同颜色，共有多少种不同的染色方法？



三 拔高训练

1. 小明从家到学校有 2 条路可走，从学校到体育馆有 4 条路可走，从家到体育馆有 3 条路可到走（见下图），那么小明从家到体育馆一共有多少种不同的走法？



2. 课外小组组织 30 人做游戏，按 1～30 号排队报数。每一次报数后，单号全部站出来，以后每次余下的人中第一个人开始站出来，隔一人站出来一个，到第几次这些人全部都站出来了，最后站出来的人应是第几号？

第12讲 数的整除

数的整除既是小学数学中的重要内容之一，也是数学竞赛命题的内容之一。整除问题和其他奥数问题一样，综合性比较强，因此我们要在认真审题的基础上全面、细致地思考，善于抓住问题的实质，灵活、巧妙地解答，解题时应掌握以下整除的特征和性质：

一、数的整除特征

1. 能被 9 整除的数的特征：各个数位数字之和能被 9 整除的整数。

2. 能被 4（或 25）整除的数的特征：末两位数能被 4（或 25）整除的整数。

3. 能被 8（或 125）整除的数的特征：末三位数能被 8（或 125）整除的整数。

4. 能被 11 整除的数的特征：这个整数的奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差（大减小）是 11 的倍数。

5. 能被 7（11 或 13）整除的数的特征：一个整数的末三位数与末三位以前的数字所组成的数之差（大减小）能被 7（11 或 13）整除。

二、数的整除性质

性质1：如果 a、b 都能被 c 整除，那么它们的和与差也能被 c 整除。

性质2：如果 b 与 c 的积能整除 a，那么 b 与 c 都能整除 a。

性质3：如果 b、c 都能整除 a，且 b 与 c 互质，那么 b 与 c 的积也能整除 a。

性质4：如果 c 能整除 b，b 能整除 a，那么 c 也能整除 a。

性质5：a 个连续的自然数中必然有一个数能被 a 整除。

金牌例题

例题1 在□处填入适当的数字使四位数24□1是3的倍数。□处有几种不同的填法？

思路分析：要想使24□1是3的倍数，就要满足各数位数字和是3的倍数。2+4+1=7，7加上几是3的倍数呢？7+2=9，7+5=12，7+8=15。

解：□里可以填2，5，8。

这个四位数是2421，2451，2481。

答：有3种不同的填法。

例题 2 **最高位上的数字是 1，并且能同时被 2，3，5 整除的最小四位数是多少？**

思路分析：能同时被 2，5 整除，个位数字只能为 0；为使这四位数最小，百位数字取 0，进而由 3 的倍数的特征知十位数字为 2，5，8，从而最小四位数是 1020。

解：最小四位数是 1020。

例题 3 **在□内填上适当的数字，使六位数 43217□能被 4 或 25 整除。**

思路分析：43217□的个位数字不知是几，不妨记作 x，那么 43217□ $=432100+70+x$。而 $432100=4321\times100$，$100=4\times25$，所以 4 和 25 都能整除 100。根据整除的性质（2），432100 也能被 4 或 25 整除。依据整除的性质（1），只要 $(70+x)$ 能被 4 或 25 整除，43217□就能被 4 或 25 整除。$(70+x)$ 要能被 4 整除，x 只能是 2 或 6。$(70+x)$ 要能被 25 整除，x 只能是 5。因为 72 和 76 都能被 4 整除，所以 432172 和 432176 能被 4 整除。因为 75 能被 25 整除，所以 432175 能被 25 整除。

通过这个例题，我们可以总结出一个数能被 4 或 25 整除的特征：一个数的十位和个位所组成的数能被 4 或 25 整除，这个数就能被 4 或 25 整除；否则这个数就不能被 4 或 25 整除。

例题 4 **四位数$\overline{3AA1}$能被 9 整除，求 A。**

思路分析：四位数$\overline{3AA1}$要是 9 的倍数，它的各个数位之和就必须是 9 的倍数，$3+A+A+1$ 的和可能是 9 或 18。当 $3+A+A+1=9$ 时，$A=2.5$。2.5 不是自然数，不符合题目要求。当 $3+A+A+1=18$ 时，$A=7$，符合题目要求。

解：$\overline{3AA1}=3771$

例题 5 **判断 25102 能不能被 7，11 或 13 整除。**

思路分析：根据数的整除特征，用末三位数 102 减去末三位前面两个数所组成的数 25，即 $102-25=77$，77 能被 7 整除，也能被 11 整除，但不能被 13 整除。

解：25102 能被 7，11 整除，但不能被 13 整除。

小结

数的整除这部分知识内容丰富，思维技巧性很强。解题时应注意：

1. 判断一个数能否被一个数或几个数整除的方法，可以直接根据数的整除特征去判断，也可以利用数的整除性质来判断。

2. 解答时，要认真审题，分析数的特征，灵活选择方法。

金牌训练

一 对应训练

1. 在□处填入适当的数字，使四位数 203□是 3 的倍数，□里可以填几？

2. 一个四位数 9□2□既有约数 2，又是 3 的倍数，同时又能被 5 整除，这个四位数最大是多少？

3. 在□内填上适当的数，使六位数 32787□能被 4 或 25 整除。

4. 有一个首位数字为 8 的六位数，它能被 9 整除，并且各位数字都不相等。这样的六位数最小是几？

5. 判断2206525321能否被7，11，13整除。

变式训练

1. 小红买了6支铅笔、2支圆珠笔、3个笔记本，售货员要小红付25元。已知圆珠笔3元9角1支，售货员算错账了吗？

2. 从0，3，5，7这4个数字中任选3个数排成能同时被2，3，5整除的三位数，这样的三位数有多少？

3. 一个七位数“2004□□□”能同时被4，9和25整除，“□”里各应填什么数？

4. 在□内填上适当的数字，使五位数4□32□能被9整除。

5. 写一个三位数，在它后面再写一遍，所得的六位数能同时被7，11和13整除。

三 拔高训练

1. 三个数的和是555，这三个数分别能被3，5，7整除，而且商都相同，这三个数分别是多少？

2. 超市里有6箱货物，分别是16，19，20，18，15，31千克，两顾客买走其中5箱货物，其中一个顾客买的货物重量是另一个顾客的2倍，超市里剩下的那箱货物是多少千克？

第13讲 奇数与偶数

国庆节放了7天长假，小聪和爸爸一起到南京旅游。他们来到南京雨花台，买了两袋雨花石，爸爸把两袋雨花石分别数了一下告诉小聪：一袋里面有56颗，另一袋里面有59颗，让小聪猜猜左右两袋分别有多少颗雨花石。

小聪低头想了想说："你把左边口袋里的雨花石颗数乘以2，右边口袋里面的颗数乘以3，再把两次的积加起来，只要告诉我最后的和是奇数还是偶数就行了。"爸爸算了一下，告诉小聪最后的和是奇数，小聪很快就报出了正确答案。同学们，你知道正确的结果吗？你想和小聪一样聪明吗？

其实，小聪是利用数的奇偶性质解决问题的。在日常生活中一些有趣的数学问题，用一般方法很难解答，但巧妙地运用数的奇偶性，对其中的一些数进行奇偶分析，就能使问题很快得到解决。下面我们一起来看例题。

金牌例题

例题 1 **$1+2+3+\cdots+1993$ 的和是奇数还是偶数？**

思路分析：此题可以用高斯求和公式直接求出和，再判别和是奇数，还是偶数。但是如果从加数的奇、偶个数考虑，利用奇数偶数的性质，同样可判断和的奇偶性。

解法一：$1+2+3+\cdots+1993=(1+1993)\times1993\div2=997\times1993$。很明显，997 和 1993 都是奇数，由奇偶性质得知 997×1993 的结果是奇数，即原数的和是奇数。

解法二：$1993\div2=996\cdots\cdots1$，所以 1 至 1993 的自然数中，偶数有 996 个，奇数有 997 个。而 996 个偶数的和是偶数，997 个奇数的和是奇数，根据奇偶性质 1，996 个偶数加上 997 个奇数，结果是奇数。

例题 2 **有一列数：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55……从第三个数开始，每个数都是前两个数的和。那么在前 1000 个数中，有多少个奇数？**

思路分析：观察已知条件中的这列数的奇偶性可发现这样的规律，各数奇、偶性依次为：奇，奇，偶，奇，奇，偶，奇，奇，偶……

即每三个数为一个周期，由于 $1000\div3=333\cdots\cdots1$

所以在前 1000 个数中，奇数有 $333\times2+1=667$（个）。

答： 在前 1000 个数中，有 667 个奇数。

例题 3 **五个连续奇数的和是 2005，求这五个奇数。**

思路分析： 五个连续奇数中间的一个数是这五个连续奇数的平均数，可先求出中间的这个数，再求其他奇数。

解： 中间的一个奇数是 $2005\div5=401$，所以这五个连续奇数是 397，399，401，403，405。

例题 4 **3 只杯子口朝上放在桌子上，每次翻转其中的 2 只杯子，能否经过若干次翻转，使 3 只杯子全部口朝下？**

思路分析： 每只杯子只有经过 1 次、3 次……翻转才能使杯口向下，即每只杯子只有经过奇数次翻转，才能使杯口朝下。要使 3 只杯子都杯口朝下，每次杯子都要翻转奇数次，奇数个奇数的和是奇数，所以 3 只杯子翻转的总次数一定是奇数。而“每次翻转其中的 2 只杯子”翻转的总次数一定是 2 的倍数，是偶数，所以无论经过多少次翻转，都不可能使 3 只杯子全部杯口朝下。

解： 每次杯子要翻转奇数次，3 只杯子翻转的总次数也是奇数次。

每次翻转其中的 2 只杯子，则翻转总次数是偶数次。

答：所以不能经过若干次翻转，使得3只杯子全部杯口朝下。

例题5 **人民大道小学41名同学参加智力竞赛，每张试卷上有20道题。评分方法是：答对一题给5分，不答给1分，答错一题倒扣1分。这些同学得分的总和是奇数还是偶数？**

思路分析：一张试卷得满分是 $20\times5=100$（分），未答题比答对题每题少得 $5-1=4$（分）。答错题比答对题每题少得 $5+1=6$（分），从满分100中扣除若干个4分，6分（都是偶数），每人得分必定是偶数。因此，41名同学的总分是：奇数×偶数=偶数。

小结

我们必须熟记奇偶数的一些特性，才能灵活解决现实生活中遇到的有关奇偶数的实际问题。

奇数±奇数=偶数

偶数±偶数=偶数

奇数±偶数=奇数

奇数×奇数=奇数

偶数×偶数=偶数

奇数×偶数=偶数

金牌训练

一 对应训练

1. $1+2+3+4+\cdots+2004+2005$ 是奇数还是偶数？

2. 7 个连续奇数的和是 2009，求这 7 个奇数。

3. 现在有 7 只杯子杯口朝上摆在桌子上，每次可以同时翻动其中的两个不同的杯子朝向同样的方向。问：最后能不能使所有的杯口都朝下？

4. 某学校举办健康知识竞赛，有 21 名同学参加，每张试卷上有 20 道题。评分方法是：答对一题给 3 分，不答给 1 分，答错一题扣 1 分。所有参赛同学得分的总和是奇数还是偶数？

三 变式训练

1. 判断 $1-2+3-4+5-6+\cdots+2001-2002+2003$ 的结果是奇数还是偶数?

2. 数列1，3，4，7，11，18，……是这样构成的，从第3个数起，每个数都是它前面两数之和。

(1) 第1000个数是奇数吗？为什么?

（2）任取 3 个相邻数，它们的总和是偶数，为什么？

3. 如果在 7 个连续奇数中，第二个数与第六个数的和是 38，那么第五个数是多少？

4. 有九只杯口向上的杯子放在桌子上，每次将其中四只杯子同时翻动，使其杯口向下。问能不能经过这样有限次的“翻动”后，使九只杯子杯口全部向下，为什么?

5. 某次竞赛，共 30 道题，评分标准是：基础分 15 分（即每人都得分），答对一题加 5 分，不答一题加 1 分，答错一题减 1 分。如果有 121 人参赛，参赛同学得分总和是奇数还是偶数?

二 拔高训练

1. 教室里有男女同学若干人，男生衣服上有 5 个扣子，女生衣服上有 4 个扣子。如果学生人数是奇数，扣子总数是偶数，那么女生的人数是奇数还是偶数？

2. 用 0，1，2，3，…，9 这 10 个数字组成 5 个两位数，每个数字只用一次，要求它们的和是奇数，并且尽可能的大，这 5 个两位数的和是多少？

第14讲 最大公因数和最小公倍数

有这样一个故事：

一天，乡亲们给相国寺送来 3 只纸箱，是送给一休和他的师兄弟们的。大纸箱里有 74 个橘子，中等大小的纸箱里有 200 块饼干，小纸箱里有 120 颗糖，平均分发完毕。每种食品剩下这些零头：纸箱里还有 2 个橘子，12 颗糖和 20 块饼干。这时，有人问一休："一休大师，你们相国寺里有多少个和尚？"一休闭着眼睛想了一会儿，就说出了答案。小朋友们，你们知道相国寺里有多少个和尚吗？

别急，等你们认真学习完下面例题后，你们会和一休大师一样聪明，下面我们就来学习有关最大公因数和最小公倍数的应用题，但它又不同于一般应用题的解法。学习这类问题的规律，可以使我们的视野更开阔，思维更灵活。

金牌例题

例题 1

(1) 用一个数去除 30、60、75，都能整除，这个数最大是多少？

（2）一个数用 9、15、20 除都能整除，这个数最小是多少？

思路分析：

（1）一个数去除 30、60、75 都能整除，这个数就是 30、60、75 的公因数，要求符合条件的最大的数就是求 30、60、75 的最大公因数。

解：

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 30 & 60 & 75 \\ \hline 3 & 6 & 12 & 15 \\ \hline & 2 & 4 & 5 \end{array}$$

30、60、75 的最大公因数为 $3\times5=15$，所以这个数最大是 15。

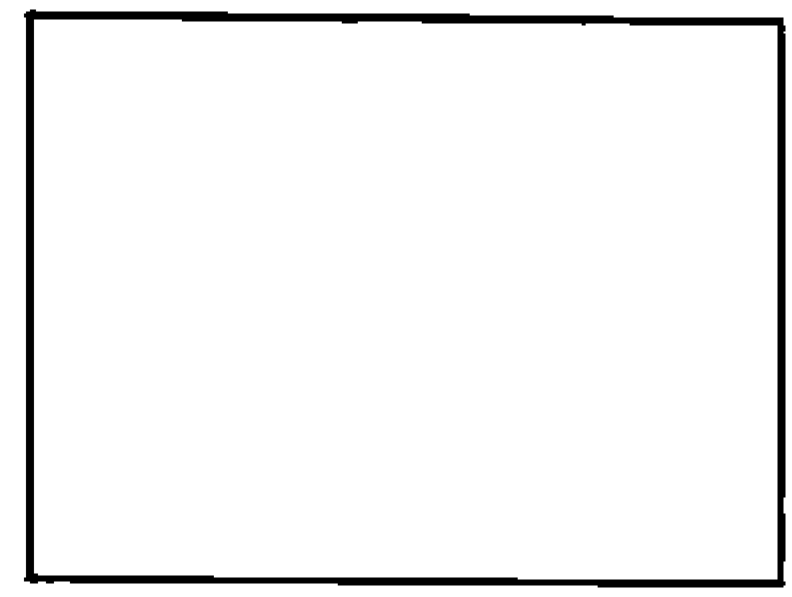
（2）一个数用 9、15、20 除都能整除，这个数就是 9、15、20 的公倍数，要求符合条件的最小数就是求 9、15、20 的最小公倍数。

解：

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 9 & 15 & 20 \\ \hline 5 & 3 & 5 & 20 \\ \hline & 3 & 1 & 4 \end{array}$$

9、15、20 的最小公倍数为 $3\times5\times3\times1\times4=180$，所以这个数是 180。

例题 2 **把一张长 20 厘米，宽 12 厘米的长方形纸（如下页图）裁成同样大小，面积尽可能大的正方形，纸没有剩余，至少可以裁多少个？**



思路分析：根据裁成同样大小的正方形，而且没有剩余，可以知道，裁成的正方形的边长是20和12的公因数，面积尽可能大意味着要求的是20和12的最大公因数。

解：因为20和12的最大公因数是4，所以剪成的正方形的边长是4厘米。

每排的小正方形的个数：$20 \div 4 = 5$（个）

排数：$12 \div 4 = 3$（排）

一共的个数：$5 \times 3 = 15$（个）

例题3 **有一个电子程控打铃器，每隔25分钟打铃一次，每隔整点灯亮一次，上午10点钟，电子程控打铃器既打铃又亮了灯。下一次电子程控打铃器既打铃又亮灯是几点钟？**

思路分析：打铃时间间隔25分钟，亮灯时间间隔1小时=60分钟，要求下一次既打铃又亮灯是什么时间，实际就是求25和60的最小公倍数的问题。所以，只要求出了25和60的最小公倍数就求出了要求的问题。

解：$25 = 5 \times 5 \quad 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$[25, 60] = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$

300分=5小时，上午10时+5时=15时

因此下一次既打铃又亮灯的时间是15时（即下午3时）。

例题 4 **有 3 根铁丝，长度分别是 12 厘米、18 厘米和 24 厘米。现在要把它们截成相等的小段，每根都不许剩余。每小段最长是多少厘米？**

思路分析： 要截成相等的小段，且无剩余，所以每段长度必须是 12、18、24 的公因数。又因为每段尽可能长，所以要求每段长度是 12、18、24 的最大公因数。

解：

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 12 & 18 & 24 \\ \hline 2 & 4 & 6 & 8 \\ \hline & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$(12, 18, 24) = 2 \times 3 = 6$

答： 每段最长为 6 厘米。

例题 5 **甲、乙、丙三个人是好朋友，他们每隔不同的天数就要到图书馆去一次。甲 3 天去一次，乙 4 天去一次，丙 5 天去一次。有一天，他们三人恰好在图书馆相会。至少再过多少天他们三人又在图书馆相会？**

思路分析： 从第一天三人在图书馆相会到下一次相会，相隔的天数应该是 3、4、5 的最小公倍数。而 3、4、5 两两互质。

解： $[3, 4, 5] = 3 \times 4 \times 5 = 60$

即 60 天以后，三个人会再次相会。

小结

求 n 个数的最大公因数和最小公倍数通常有：分解质因数法、短除法、辗转相除法等。

解答求最大公因数和最小公倍数的竞赛题时，关键要根据题目中的条件，对问题作全面分析。分清楚是求 n 个数的最大公因数，还是求 n 个数的最小公倍数，避免二者混淆。

金牌训练

一 对应训练

1. （1）用一个数去除 35、98、112 都能整除，这个数最大是多少？

（2）一个数用 12、18、30 除都能整除，这个数最小是多少？

2. 一张长方形纸长 60 厘米，宽 45 厘米，把它剪成若干个同样大的正方形，使边长是整厘米数且不能有剩余，最少能剪多少个？

3. 有一个电子钟，每走 9 分钟亮一次灯，每到整点响一次铃。中午 12 点整，电子钟响铃又亮灯。问：下次既响铃又亮灯是几点钟？

4. 某单位买来 140 个苹果，175 个梨，280 个香蕉，把这些水果分成相同的包，最多可以分成多少包？

5. 三位小朋友每人隔不同的天数去图书馆一次。甲隔 2 天去一次，乙隔 3 天去一次，丙隔 4 天去一次，上次他们星期五在图书馆相遇，还要多少天他们再次在图书馆相遇？相遇时是星期几？

三 变式训练

1. 一个两位数，被 9 除余 7，被 7 除余 5，被 3 除余 1，求这个两位数。

2. 把长 132 厘米，宽 60 厘米，厚 36 厘米的木料锯成尽可能多的同样大小的正方体木块，锯后不许有剩余（损耗不计）。能锯成多少块？

3. 公路上一排电线杆，共 25 根，每相邻两根间的距离原来都是 45 米，现在要改成 60 米，可以有几根不需要移动？

4. 有三堆货，甲堆重 150 吨，乙堆重 180 吨，丙堆重 420 吨，现在要把它们分成同样多的吨数（整数吨）的小堆，而不准有剩余，最少可以分成几小堆？

5. 一次会餐，每两人合用一只饭碗，三人合用一只菜碗，四人合用一只汤碗，会餐共用了 65 只碗。问：参加会餐的有多少人？

三 拔高训练

1. 两个自然数的最大公约数是 7，最小公倍数是 210，这两个数的和为 77，这两个数各是多少？

2. 某学校五年级同学会餐，共用了 100 个碗，平均每人用 1 个饭碗，每 2 人用 1 个菜碗，每 3 人用 1 个汤碗，每 4 人用 1 个肉碗。该年级参加会餐的学生一共有多少人？

第 15 讲　尾数和余数

自然数末位的数字称为自然数的尾数，在除法中，被除数减去商与除数积的差叫做余数。

我国古代的《孙子算经》里有一道闻名中外的题目：今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何？这就是一道余数问题，人们称解决这类问题的方法为“孙子定理”或“中国剩余定理”。对于我们小学生来说“剩余定理”当然太深奥了。但尾数和余数在运算时是有规律可循的，利用这种规律和倍数、余数的知识，能解决一些看起来无从下手的问题。

同学们，你是否想试一试，下面我们一起来学习例题吧！

金牌例题

例题 1

（1）$\underbrace{115\times115\times115\times\cdots\times115}_{100个115}$积的尾数是几？

（2）$\underbrace{(11\times36)\times(11\times36)\times(11\times36)\times\cdots\times(11\times36)}_{100个(11\times36)}$积的尾数是几？

思路分析：

（1）因为 115 的个位 5 乘以 5，积的个位仍然是 5，所以不管多少个 115 相乘，个位还是 5。

答：积的尾数是 5。

（2）因为每个括号里 11 乘以 36 积的个位是 6，我们只要分析 100 个 6 相乘，积的尾数是几就行了。因为个位 6 乘以 6，积的个位仍然是 6，所以不管多少个（11×36）相乘，积的个位还是 6。

答：积的尾数是 6。

例题 2

（1）$\underbrace{4\times4\times4\times\cdots\times4}_{50个4}$，积的尾数是几？

（2）$\underbrace{9\times9\times9\times\cdots\times9}_{51个9}$，积的个位数是几？

思路分析：

（1）我们先列举前几个 4 的积，看看个位数在怎样变化。1 个 4 个位就是 4；4×4 的个位是 6，$4\times4\times4$ 的个位是 4；$4\times4\times4\times4$ 的个位是 6……由此可见，积的尾数以“4，6”两个数字在不断重复出现。$50\div2=25$ 没有余数，说明 50 个 4 相乘，积的个位是 6。

（2）用上面的方法可以发现，51 个 9 相乘时，积的个位是以“9，1”两个数字不断重复地出现，$51\div2=25$……1，余数是 1，说明 51 个 9 相乘积的个位是 9。

例题 3 **一个大于 1 的自然数去除 300、243、205 时，得到相同的余数，则这个自然数是多少？**

思路分析：本题要求的是除数，已知条件说的是这 3 个数对于该除数是同余的，所以根据同余的性质，此 3 数中任何两数之差都应是除数的倍数，即除数应是此 3 数中任两数的差的公约数，根据上面所给的规律。我们将其两两相减，并将所得的差一一分解，找出相同的因数即可。

$300-243=57=3\times19$

$243-205=38=2\times19$

这两个差的公约数为 19，19 又大于 1，因此所求的自然数为 19。

例题 4 **某数被 4 除余 3，被 5 除少 2，被 7 除少 4。这个数最小是多少？**

思路分析：这道题目的条件比较零乱，猛一看去仿佛无从入手。要分析解答这道题目，首先必须把题目的条件加以整理，把“被 5 除少 2，被 7 除少 4”改述为：被 5 除余 3，被 7 除余 3。这样一来，就变成了一个“同余”的问题了。不难想象，题目要求的那个数就是 4、5、7 的最小公倍数再加上 3 的和。

4、5、7 的最小公倍数是 140，题目要求的那个数即为 $140+3=143$。

检验：$143\div4=35\cdots\cdots3$；

$(143+2)\div5=29$；

$(143+4)\div7=21$。

例题 5 **把$\frac{5}{7}$化成小数，那么小数点后面第 100 位上的数字是多少？**

思路分析：因为$\frac{5}{7}\approx 0.714285714285\cdots\cdots$化成的小数是一个无限循环小数，循环节的“714285”共有 6 个数字。由于 $100\div 6=16\cdots\cdots 4$。所以，小数点后面的第 100 位是第 17 个循环节的第 4 个数字，是 2。

小结

解答有关尾数问题时，同学们要仔细观察，多动脑筋，发现规律，灵活运用自然数尾数性质，解决问题。

解答有关余数问题时，一般都是经过“转化”条件，使之变成同余问题，利用同余的性质化繁为简、巧妙解题，或根据发现的规律利用倍数和余数的知识，也能巧妙地解决此类问题。

金牌训练

一 对应训练

1. (1) $\underbrace{31\times31\times31\times31\times\cdots\times31}_{100个31}$积的尾数是几?

(2) $\underbrace{(22\times53)\times(22\times53)\times(22\times53)\times\cdots\times(22\times53)}_{100个(22\times53)}$积的尾数是几?

2. (1) $\underbrace{14\times14\times14\times\cdots\times14}_{101个14}$，积的个位数是几?

（2）$\underbrace{29\times29\times29\times\cdots\times29}_{100个29}$，积的个位数是几？

3. 有一个不等于 1 的整数，它除 319，262，186 时，得到相同的余数，则这个整数是几？

4. 某数被 3 除余 2，被 5 除少 3，被 7 除少 5，这个数最小是多少？

5. 把$\frac{1}{7}$化成小数，那么小数点后面第 50 位上的数字是多少？

二 变式训练

1. $\underbrace{26\times26\times26\times\cdots\times26}_{100个26}\times\underbrace{15\times15\times15\times\cdots\times15}_{1000个15}$的个位数字是几？

2. $\underbrace{74\times74\times74\times74\times\cdots74}_{102个74}-\underbrace{39\times39\times39\times\cdots\times39}_{101个39}$差的个位数字是多少？

3. 当 990 和 768 除以某一个自然数 n，余数分别为 2 和 1，那么，n 最小是多少？

4. 某数被 5 除余 2，被 6 除少 2，被 7 除少 3。这个数最小是多少？

5. $\underbrace{5555\cdots55}_{2001个5}\div 13$，当商是整数时，余数是几？

二 拔高训练

1. 求一个最大的三位数，使得：

 （1）它被 2 整除所得余数是 1；

 （2）它被 3 整除所得余数是 2；

 （3）它被 4 整除所得余数是 3；

 （4）它被 5 整除所得余数是 4。

2. 有一列数，前两个数是 3 与 4，从第 3 个数开始，每一个数都是前两个数的和。这一列数中第 2001 个数除以 4，余数是多少？

第 16 讲　长方体和正方体（一）

同学们，在数学竞赛中，有许多问题涉及到长方体和正方体表面积的计算，这些知识不仅有趣而且具有一定的实用性和思考价值。在解答长方体和正方体表面积的问题时，一定要注意以下几点：

1. 以长方体和正方体的基本概念和基本方法为基础，把构成图形的诸多条件联系起来进行思考。

2. 解题时要根据具体情况弄清要求几个面的面积和。

3. 不管是长方体或正方体的“切割”问题还是“拼合”问题，要认真观察经过割补变化后的物体的表面积所发生的变化。有时还要画出示意图，再进行分析。

解答这类问题，不仅需要我们具备较扎实的基础知识和观察能力、作图能力和空间想象能力，还要掌握一些解题的方法和技巧。

金牌例题

例题 1　有一种无盖的玻璃鱼缸，长 25 厘米，宽 20 厘米，高 15 厘米，做这样一个鱼缸需要多少平方厘米的玻璃？

思路分析：这道题“做这样一个鱼缸需要多少平方

厘米的玻璃”和求面积有关，解题时要看清楚这是一个“无盖的玻璃鱼缸”，没有上面，只要求下面、前面、后面、左面、右面 5 个面的面积。

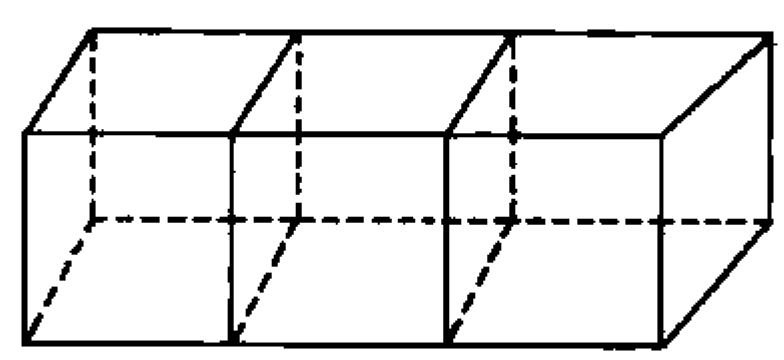
解： $25\times20+(25\times15+20\times15)\times2$

$=500+675\times2$

$=1850$（平方厘米）

答： 做这样一个鱼缸需要 1850 平方厘米的玻璃。

例题 2 **如图，将 3 个表面积都是 24 平方厘米的正方体木块粘成一个长方体，求这个长方体的表面积。**

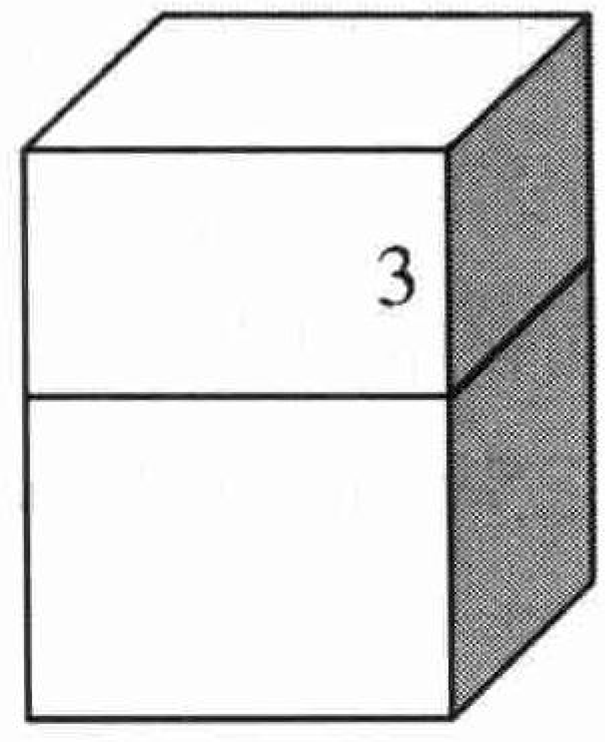


思路分析： 仔细观察图形，不难看出 3 个正方体木块粘成一个长方体，共有 2 个粘接处，每一处都有 2 个面粘在一起，两处共粘去 4 个面，因此粘成的长方体表面积等于$(6\times3-4)$个面的面积，即 $24\div6\times(6\times3-4)=56$（平方厘米）。

解： $24\div6\times(6\times3-4)=4\times14=56$（平方厘米）

答： 这个长方体的表面积是 56 平方厘米。

例题 3 **若一个长方体的高减少 3 厘米，正好得到一个正方体，这个正方体比原来这个长方体的表面积减少了 60 平方厘米。求原来这个长方体的表面积。**



思路分析：高减少了 3 厘米，上下底面积没有改变，减少的是高为 3 厘米的 4 个侧面面积。用 60 ÷ 4 = 15（平方厘米），求出一个侧面面积，再用 15 ÷ 3 = 5（厘米），求出所剩下正方体的棱长，也就是长方体的长和宽，从而求出这个长方体的表面积。

解：长、宽：60 ÷ 4 ÷ 3 = 5（厘米）

高：5 + 3 = 8（厘米）

(5 × 5 + 5 × 8 + 8 × 5) × 2

= (25 + 40 + 40) × 2

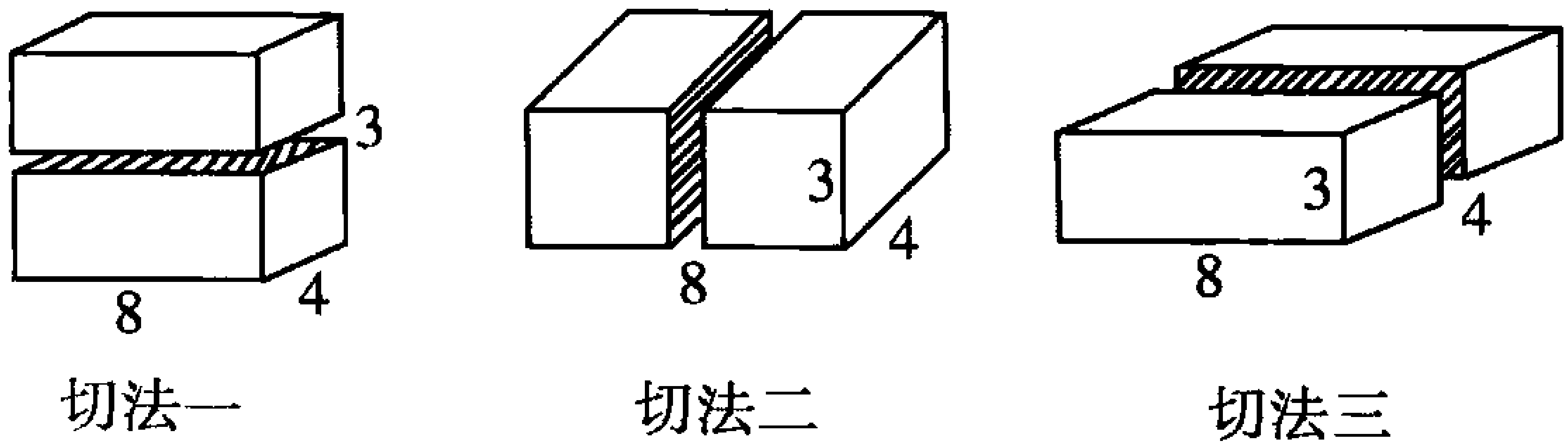
= 105 × 2

= 210（平方厘米）

答：原来这个长方体的表面积是 210 平方厘米。

例题 4 **一个长方体的长是 8 分米，宽是 4 分米，高是 3 分米。如果把它切割成两个完全一样的长方体，切割后的两个长方体表面积之和比原长方体增加了多少平方分米？**

思路分析：考虑到要将这个长方体切割成两个完全一样的长方体，有三种不同的切法（如图），因此，这题的答案不唯一，阴影部分即为增加的表面积。



解： 第一种切法，表面积增加了：

$4\times8\times2=64$（平方分米）

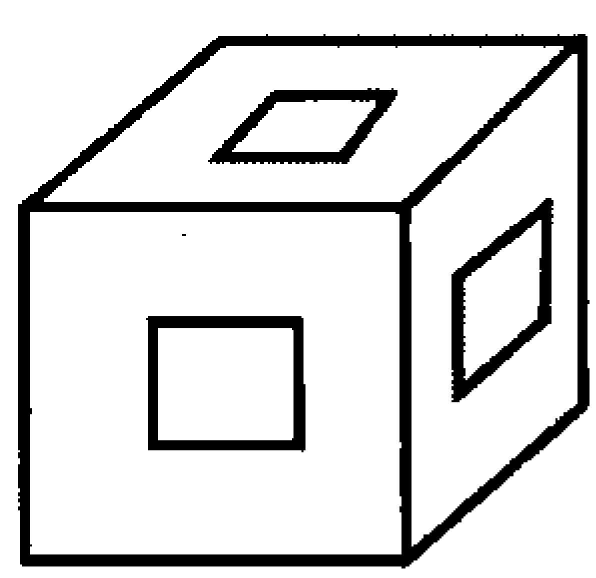
第二种切法，表面积增加了：

$3\times4\times2=24$（平方分米）

第三种切法，表面积增加了：

$3\times8\times2=48$（平方分米）

例题 5 **有一个正方体（如下图），它的棱长为 4 厘米，在它的上下、前后、左右的正中位置各挖去一个棱长为 1 厘米的正方体，问此图的表面积是多少？**



思路分析： 大正方体每个面的面积为 $4\times4-1\times1=15$（平方厘米），6 个面的面积和为 $15\times6=90$（平方厘米）；小正方体的每个面的面积为 $1\times1=1$（平方厘米），5 个面的面积和为 $1\times5=5$（平方厘米），6 个小正方体孔的表面积之和为 $5\times6=30$（平方厘米），因此所求的表面积为 $90+30=120$（平方厘米）。

解： $(4\times4-1\times1)\times6+1\times1\times5\times6$

$=15\times6+30$

$=90+30$

$=120$（平方厘米）

答： 此图的表面积是 120 平方厘米。

小结

计算长方体和正方体的表面积，要灵活运用表面积计算公式，对于一些组合立体图体和稍复杂的应根据具体情况进行分析，要善于发现图形的规律和特征，充分发挥空间想象力，灵活解决问题。

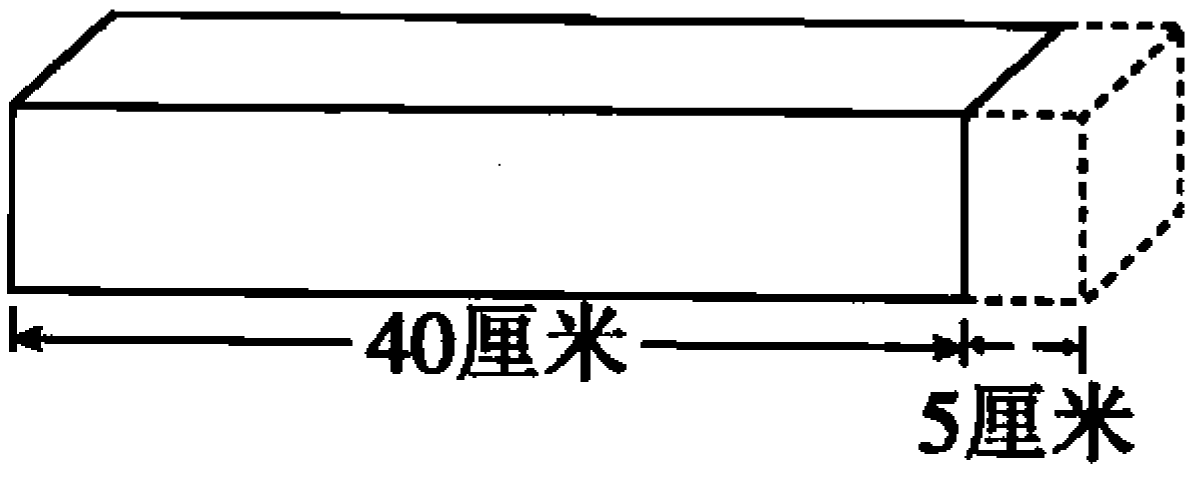
金牌训练

一 对应训练

1. 一个无盖的长方体木箱长 30 厘米、宽 20 厘米、高 10 厘米。做这个木箱至少要用多少平方分米的木板？

2. 把两个底面积都是 10 平方厘米的正方体拼成一个长方体。求这个长方体的表面积是多少。

3. 一个长 40 厘米，横截面是正方形的长方体，如果长增加 5 厘米，表面积就增加 80 平方厘米，求原长方体的表面积。



4. 一个长方体的长 9 厘米、宽 6 厘米、高 4 厘米。如果把它切割成两个完全一样的长方体，切割后的两个长方体表面积之和比原来长方体增加了多少平方厘米？

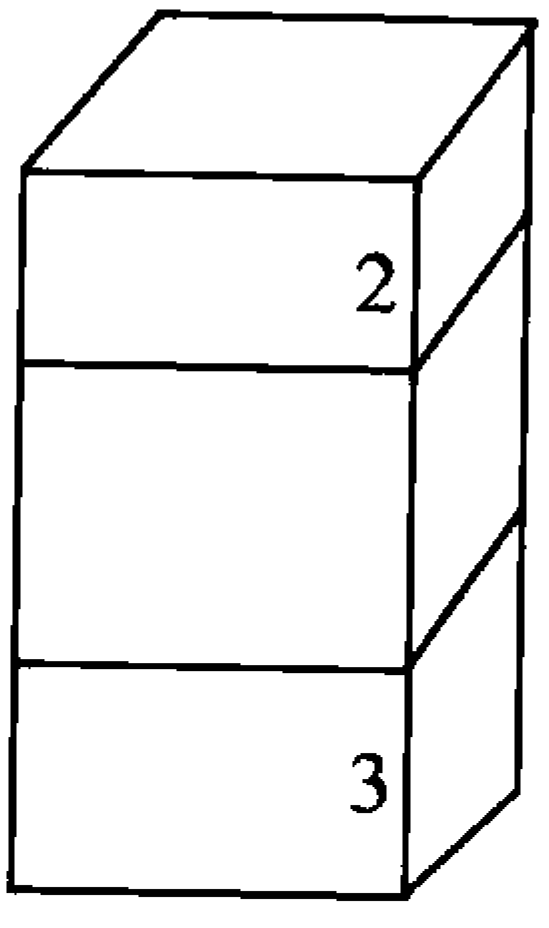
5. 一个棱长是 8 厘米的正方体，分别在它的前、后、左、右、上、下六个面的中心位置挖去一个棱长是 2 厘米的正方体，剩下部分的表面积是多少平方厘米？

三 变式训练

1. 教室长 8.5 米，宽 6 米，高 4.2 米。门窗和黑板的面积一共有 35.8 平方米。要粉刷教室的顶面和四周的墙壁，粉刷的面积有多少平方米?

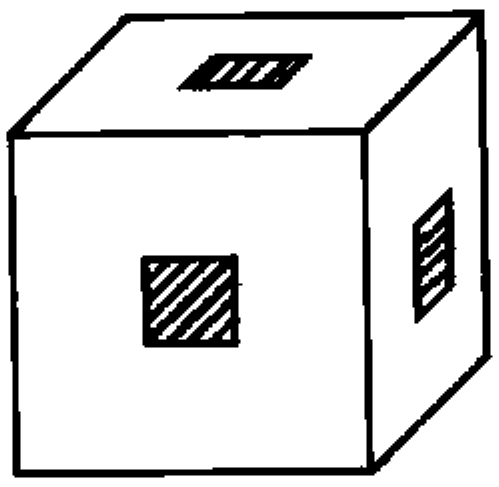
2. 将 12 个棱长 1 厘米的小正方体拼成一个大长方体，这个大长方体的表面积最小是多少平方厘米?

3. 如图，一个长方体木块，从上部和下部分别截去高 2 厘米和 3 厘米的长方体后，便成为一个正方体，表面积减少了 100 平方厘米，原来长方体的表面积是多少平方厘米？



4. 一个长方体，它的长、宽、高分别是 6 厘米、5 厘米、4 厘米，沿长边垂直切 2 刀，沿宽边垂直切 2 刀，再沿高水平切一刀后，将大长方体分成了不同大小的小长方体，求所有小长方体的表面积之和是多少。

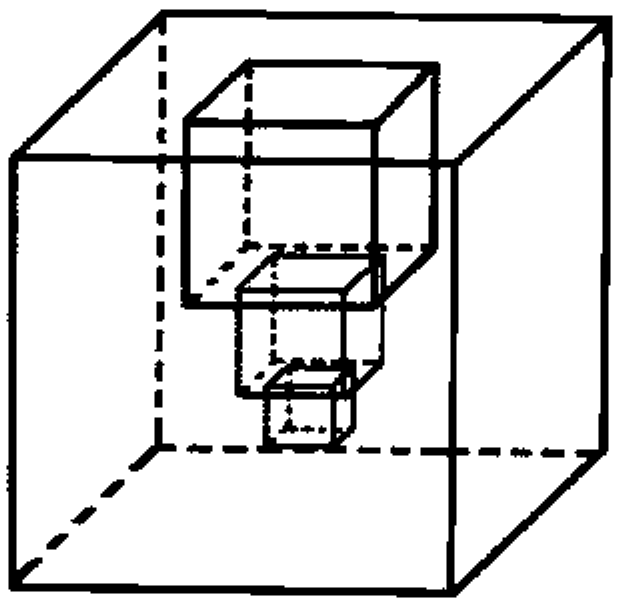
5. 如图，一个棱长 4 厘米的正方体，在它的上下、前后、左右的正中位置各打一个对穿的洞，洞口的边长是 1 厘米，那么所得图形的表面积是多少？



三 拔高训练

1. 一个正方体木块，棱长是 15 厘米，从它的八个顶点处各截去棱长分别为 1、2、3、4、5、6、7、8 厘米的小正方体，这个木块剩下部分的表面积最少是多少平方厘米？

2. 在一个边长是4厘米的正方体上面的正中间挖一个边长是2厘米的正方体小洞（如图），接着在小洞底面的正中再向下挖一个边长为1厘米的正方体小洞，第三个小洞的挖法与前两个相同，边长为$\frac{1}{2}$厘米，那么，最后得到的立体图形的表面积是多少平方厘米？



第17讲 长方体和正方体（二）

关于乌鸦喝水的故事，同学们一定已经听说过了。现在有一个长10厘米、宽5厘米、高50厘米的长方体玻璃瓶，但是水只有25厘米高，乌鸦要想喝到水，必须使水面升高到45厘米。请同学们想一想，乌鸦要往水里扔多少个小石头（假设石头是小正方体，棱长1厘米），才能喝到水？

同学们，要想解决这个问题，就要用到有关长方体和正方体的体积知识。要使水面升高到45厘米，也就是要增加$5\times10\times(45-25)=1000$（立方厘米）的体积，即小石头的总体积，每个小石头的体积是1立方厘米，所以乌鸦要往水里面扔1000个小石头才能喝到水。

计算长方体和正方体的体积，同学们不仅要熟练掌握体积计算公式，而且需要对稍复杂的题进行分析，展开空间想象力。如：表面积变化求体积、水面高度的变化、将正方体容器中的水倒进长方体容器中等，解答时应根据实际问题进行认真分析，发现其中体积变化的规律，从而找到解决问题的方法。

金牌例题

例题 1 **在一个现代化的体育馆内，铺设了 20 块长 30 米、宽 3.5 米、厚 0.3 米的木质地板，铺设这个体育馆至少需要多少立方米的木材？**

思路分析： 先求出一块木质地板的体积：$30\times3.5\times0.3=31.5$（立方米），再求 20 块体积：$31.5\times20=630$（立方米）。

解： $30\times3.5\times0.3\times20$

$=31.5\times20$

$=630$（立方米）

答： 铺设这个体育馆至少需要 630 立方米的木材。

例题 2 **如图所示，一个长方体的底面是边长为 7 厘米的正方形，它的侧面积是 500 平方厘米，它的体积是多少立方厘米？**

思路分析： 此题首先要根据侧面积求出长方体的高是多少，再求它的体积。

解： $500\div4\div7\times7\times7=875$（立方厘米）

答： 它的体积是 875 立方厘米。

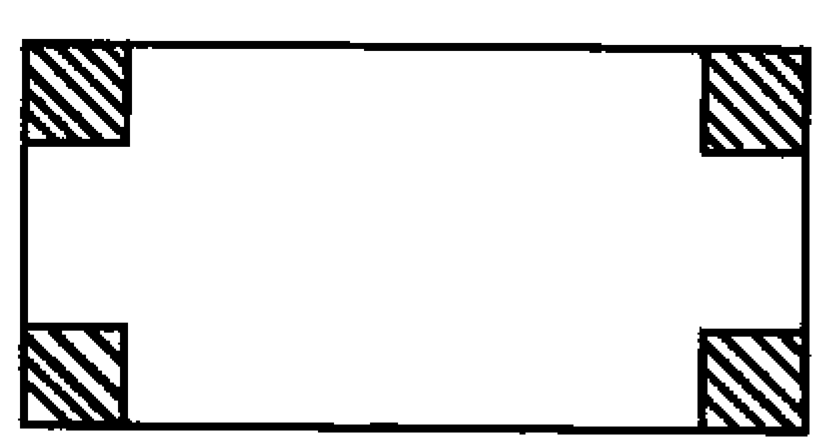
例题 3 **有甲、乙两个长方体容器，甲长 10 厘米，宽 8 厘米，高 5 厘米；乙长 5 厘米，宽 4 厘米，高 6 厘米。现在甲容器中装满了水，而乙容器是空的。要将甲容器中的一部分水倒入乙容器中，使得甲、乙两容器中的水一样深，这时，两容器中的水深多少厘米？**

思路分析：原来甲容器中的水一共是 $10 \times 8 \times 5 = 400$（立方厘米），而此时两容器的底面积和是 $10 \times 8 + 5 \times 4 = 100$（平方厘米），我们用体积除以底面积和就可得到此时的水深。

解：$10 \times 8 \times 5 \div (10 \times 8 + 5 \times 4) = 4$（厘米）

答：这时，两容器中的水深 4 厘米。

例题 4 **有一块长方形的铁皮，长 32 厘米，在这块铁皮的四个角剪下一个边长 4 厘米的小正方形，然后通过折叠、焊接，做成一个无盖的长方体盒子。已知这个盒子的容积是 768 立方厘米，求原来长方形铁皮的面积。**



思路分析：解答这道题的关键是要求原来长方形铁皮的宽。通过空间想象可知，做成的长方体盒子的长等于原来的长减去两个小正方形的边长，高是小正方形的边长 4 厘米。而根据长方体盒子的容积是 768 立方厘米，可求出长方体盒子的宽，再加上两个小正方形的边长就是原长方形铁皮的宽。用长方形铁皮的长乘以宽，就求

得了它的面积。详解如下：

解： 长方体盒子的长：32 − 4 × 2 = 24（厘米）

长方体盒子的宽：768 ÷ (24 × 4) = 8（厘米）

长方形铁皮的宽：8 + 4 × 2 = 16（厘米）

长方形铁皮的面积：32 × 16 = 512（平方厘米）

答： 原来长方形铁皮的面积是 512 平方厘米。

这道题也可以在求出长方体盒子的宽后，去算无盖的长方体的 5 个面的面积，再加上减去的 4 个小正方形的面积。但这样做计算会复杂一些，有兴趣的同学可以试一试！

例题 5　**一个长方体水箱，底面是一个边长为 50 厘米的正方形。水箱里直立着一个高 10 分米，底面边长是 25 厘米的长方体铁块，这时水箱里的水深 6 分米。现在把铁块轻轻地向上提起 20 厘米，那么露出水面的铁块上被水浸湿的部分长多少厘米？**

思路分析： 露出水面的铁块上被水浸湿的部分包括向上提起的 20 厘米和铁块提起后水面下降的高度两部分。而下降部分水的体积就等于提起的 20 厘米的铁块的体积，因此水面下降的高度就可以用高 20 厘米的铁块体积除以水箱的底面积求得。

解： 25 × 25 × 20 ÷ (50 × 50) + 20

= 5 + 20

= 25（厘米）

答： 露出水面的铁块上被水浸湿的部分长 25 厘米。

小结

同学们在计算有关长方体、正方体表面积和体积时记住：

1. 将一个物体变形为另一种形状的物体（不计损耗）体积不变。

2. 把一个物体浸泡在水中，物体会占据水的一部分体积，排开水的体积等于物体浸入部分的体积。

3. 将甲容器中的水倒入乙容器中，应抓住体积不变这一突破口，找到解决问题的方法。

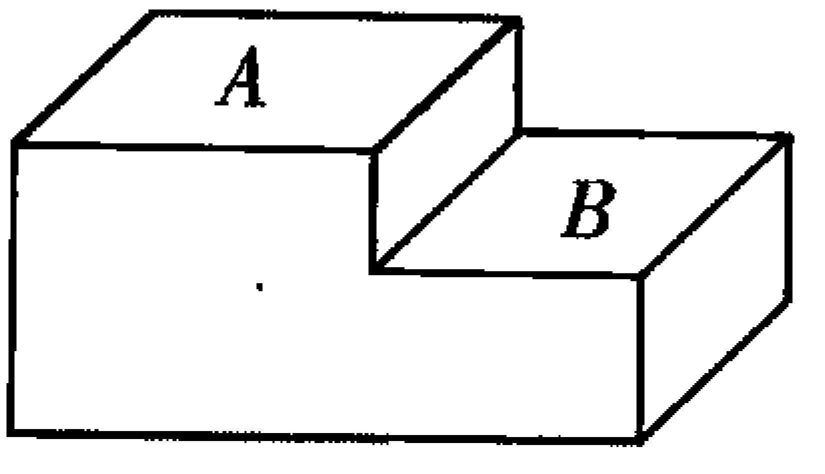
金牌训练

一 对应训练

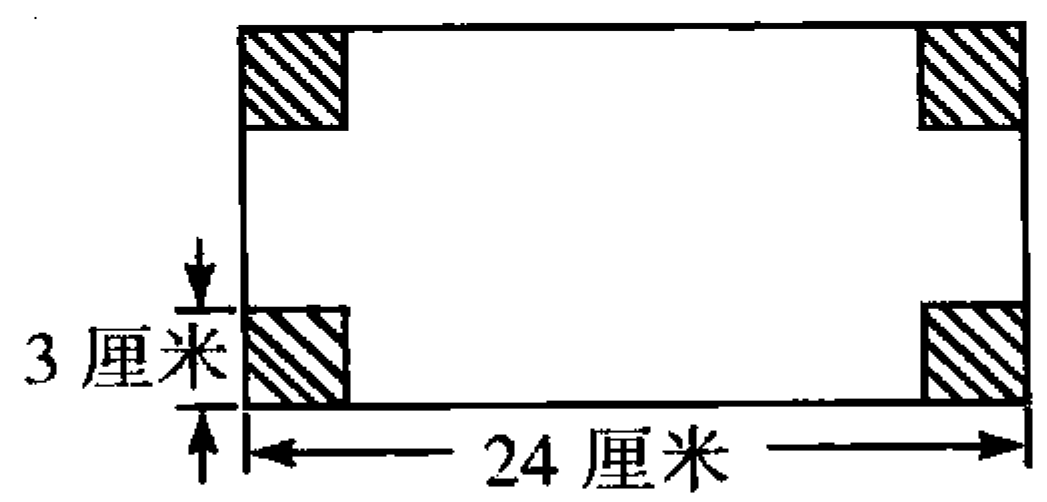
1. 一根长方体的木料，长 5 米，横截面是一个边长 0.4 米的正方形。6 根这样木料的体积是多少立方米？

2. 一个长方体的底面是边长为 5 厘米的正方形，它的侧面积是 160 平方厘米，它的体积是多少立方厘米？

3. 如下图，有一块土地，*A* 处的面积是 25 平方米，*B* 处的面积是 15 平方米，*A* 处比 *B* 处高 4 米。现要把 *A* 地的土推到 *B* 地，使 *A*、*B* 两地同样高，这样 *B* 地可升高多少米？



4. 一块长方形铁皮长 24 厘米，四角剪去边长 3 厘米的正方形后，然后通过折叠焊接，做成一个无盖的长方体铁盒，铁盒的容积是 486 立方厘米。求原来长方形铁皮的面积。

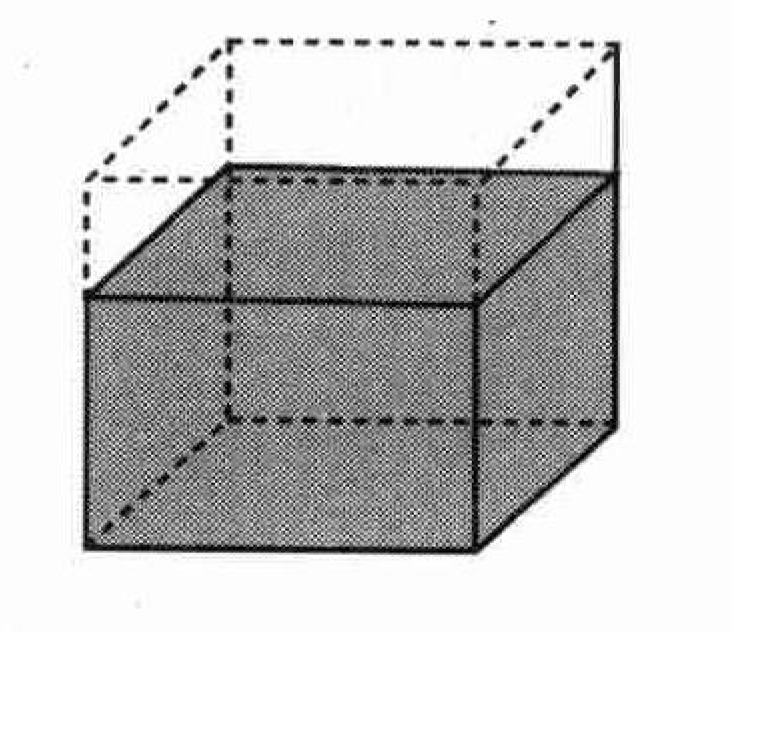


5. 一个长方体容器，长 90 厘米，宽 40 厘米。容器里直立着一个高 1 米，底面边长是 15 厘米的长方体铁块，这时容器里的水深 0.5 米。现在把铁块轻轻向上提起 24 厘米，那么露出水面的铁块上被水浸湿的部分长多少厘米？

变式训练

1. 一块长方形的铁皮，长 40 厘米，宽 30 厘米，在它的四角剪掉边长 5 厘米的正方形，做成一个无盖的长方体铁盒，求这个铁盒的容积。（铁皮的厚度不计）

2. 一个长方体，如果高增加 2 厘米，就变成一个正方体。这时表面积比原来增加 56 平方厘米。原来长方体的体积是多少立方厘米？



3. 有一个长方体水箱，从里面量长 40 厘米，宽 30 厘米，深 35 厘米，箱中的水高 10 厘米。放进一个棱长 20 厘米的正方体铁块后，铁块顶面仍高于水面。这时水面高多少厘米?

4. 一块长方形铁皮，长 20 厘米，宽 15 厘米。从四角剪去边长为 5 厘米的正方形，然后做成一个盒子。这个盒子的容积是多少毫升?

5. 有大、中、小三个正方形水池，它们的边长分别是 3 米、4 米和 6 米，把两堆沙沉没在小、中水池的水里，两个水池的水面分别升高了 4 厘米和 9 厘米。如果把这两堆沙都沉没在大水池的水里，大水池的水面会升高多少厘米？

三 拔高训练

1. 一个长方体，如果长增加 2 厘米，宽和高都不变，它的体积就增加 48 立方厘米；如果宽减少 3 厘米，长和高都不变，它的体积就减少 99 立方厘米；如果高增加 4 厘米，长、宽都不变，它的体积增加 340 立方厘米。原长方体的表面积是多少平方厘米？

2. 一个长、宽和高分别为25厘米、16厘米和13厘米的长方体，现从它的上面尽可能大地切下一个正方体，然后从剩余的部分再尽可能大地切下一个正方体，最后再从第二次剩余的部分尽可能大地切下一个正方体，剩下的体积是多少立方厘米？

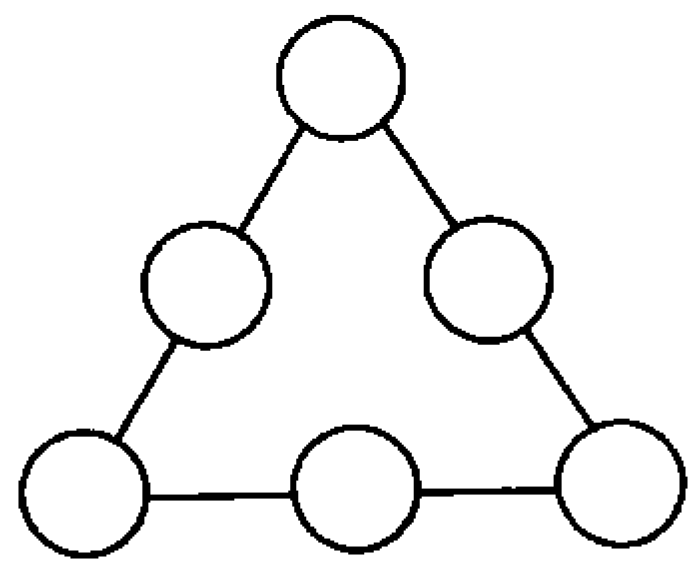
第18讲　最大与最小

在日常生活中，人们常常会遇到“路程最近”“费用最省”“面积最大”“次数最少”“损耗最少”等问题。这些寻求极端结果或讨论怎样实现这些极端情形的问题，最终都可以归结成为：在一定范围内求最大值或最小值的问题，我们称这些问题为“最大最小问题”。

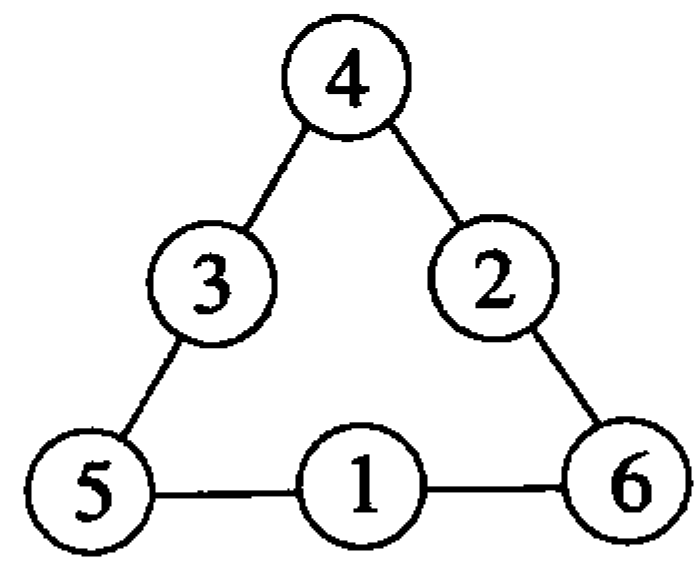
求解最大与最小问题，也就是通过比较来寻求极端结果，没有固定的方法，要根据题目的特点灵活地选择。有时可用列举比较的方法，比如：把20这个数拆分成两个自然数相加的形式，求其中哪两个数的乘积最大。可以把20拆分成 $19+1$，$18+2$，$17+3$，$16+4$，… $11+9$，$10+10$ 十种情况，其中拆分成（$10+10$）两个数时的乘积 $10\times10=100$ 最大；又比如用钥匙开锁，我们从最不凑巧的极端入手，n 把钥匙开一把锁，最多要试几次，有时还可以运用一些最极端值的结论。下面我们来看看例题和训练题中各是用什么方法求解的。通过学习，你一定会成为一个最棒的解题高手！

金牌例题

例题1　**将1，2，3，4，5，6六个数填入圆圈内，使三角形每条边的和相等，并且最大。这个和是多少？**



思路分析：根据题意，要使三角形每条边的和相等且最大，而图形三个角上的圆圈中的数都被用过两次，所以要尽可能填大数，即填4，5，6，然后根据使三角形每条边的和相等这一条件，就可以计算出这个和的最大值了。



解：$(4+5+6)\times 2+1+2+3=36$

$36\div 3=12$

答：这个和是12。

例题2 **如果四个人的平均年龄是30岁，且在四个人中没有小于21岁的，那么年龄最大的人可能是多少岁？**

思路分析：因为四个人的平均年龄是30岁，那么四个人的年龄总和是 $30\times 4=120$（岁），四人中没有小于21岁的，那当某人年龄最大时，另外三人年龄最小都是21岁，所以年龄最大的人可能是：

解：$30\times 4-21\times 3=57$（岁）

答：年龄最大的人可能是57岁。

例题3 **一把钥匙只能开一把锁，现在有三把钥匙，三把锁，但不知道哪把钥匙开哪把锁。问：最多要**

试多少次才能知道哪把钥匙开哪把锁？

思路分析：开第一把锁，从最坏的情况考虑，试了 2 把钥匙还未成功，则第 3 把不用再试了，它一定能打开这把锁，同样的道理，开第二把锁最多试 1 次，最后剩下的一把钥匙一定能打开剩下的第三把锁，用不着再试。

解：最多（也就是按最不凑巧的情况考虑）要试的次数为：$2+1=3$（次）

答：最多要试 3 次才能知道哪把钥匙开哪把锁。

例题 4 **把 12 分解为两个自然数的和，使它们的积最大，求这个最大值。**

思路分析：我们先进行一些试验，从中观察规律：

$12=1+11\longrightarrow1\times11=11$　$12=2+10\longrightarrow2\times10=20$

$12=3+9\longrightarrow3\times9=27$　$12=4+8\longrightarrow4\times8=32$

$12=5+7\longrightarrow5\times7=35$　$12=6+6\longrightarrow6\times6=36$

由此可知，随着拆成的两个数越来越接近，积越来越大，所以把 12 拆成两个相等的数（即 6）时，乘积最大。即：$12=6+6$，$6\times6=36$。

例题 5 **在一个十位数 6566671870 中划去 5 个数字，使剩下的 5 个数字（先后顺序不改变）组成一个五位数。这个五位数最小是多少？最大是多少？**

思路分析：在 10 个数字中划去 5 个数字，还剩 5 个数字组成五位数。要使这个五位数最小，应当用最小的数去占最高位（万位），第二小的数去占千位，……但

是，这10个数字中最小的1和0都不能放在万位上（想一想为什么）。这样，万位上的数只能在剩下的第三小的数中选，应选5。万位确定后，千位在剩下的数中选最小的1，而题目要求剩下的5个数字的先后顺序不变，所以，百位上、十位上、个位上的数字只能是最后三个数字8、7、0。

解： 最小的五位数是51870，最大的五位数是71870。

小结

数学中的最大值、最小值问题涉及的知识面很广，题目也比较复杂。大部分题没有固定的解题模式，要根据题中给出的条件去分析、判断、推理，最后才能得出正确的结果。解答此专题常用的方法有：

1. 几个数量求得的和中，要让某个数量最大，则其余几个数量要尽可能小。几个数量积的问题可以转化为平均数问题。

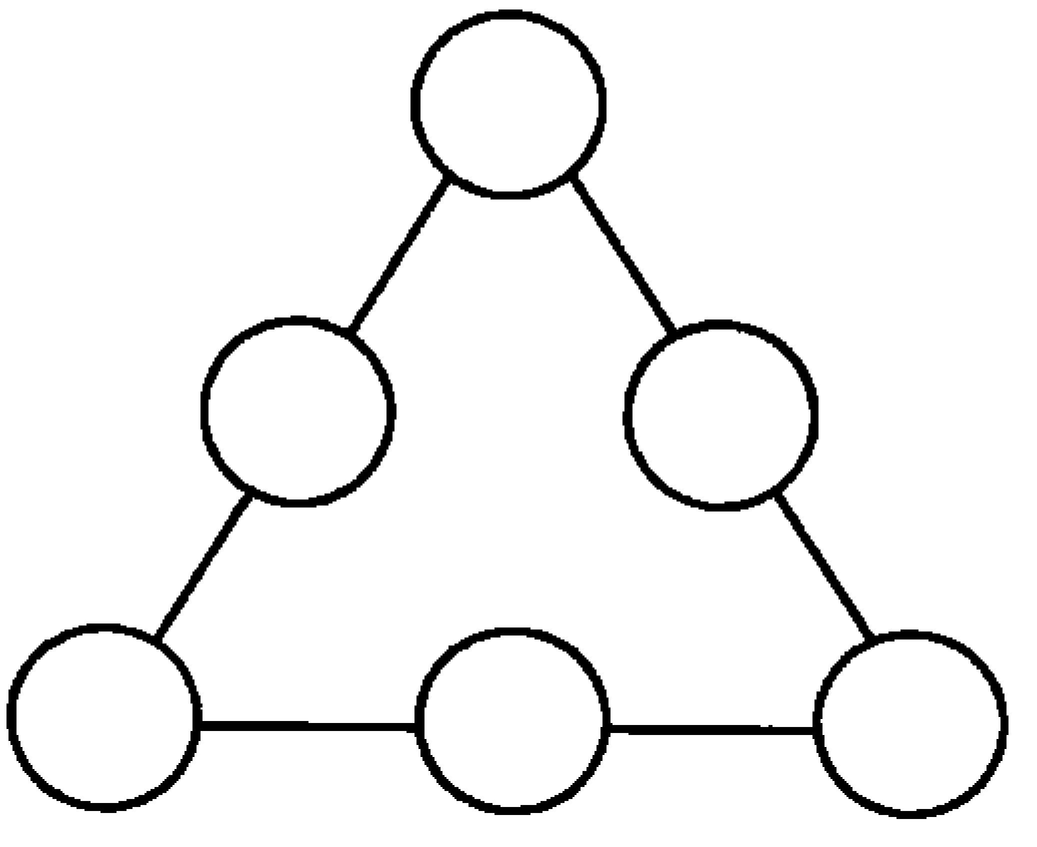
2. 着眼于极端情形，即充分运用已有知识和生活常识，一下子从“极端”情形入手，缩短解题过程。

3. 掌握拆数时的方法。

金牌训练

一 对应训练

1. 将 4、5、6、7、8、9 六个数分别填入圆圈内，使三角形每条边上的和相等，这个和最大是多少？



2. 如果四个人的平均年龄是 25 岁，且在四个人中没有小于 17 岁的，那么年龄最大的最多是几岁？

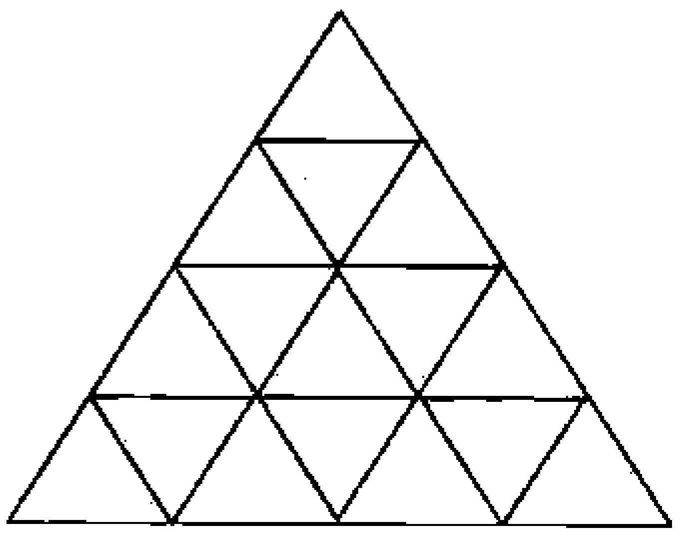
3. 一把钥匙只能打开一把锁，现在有 5 把钥匙 5 把锁，但不知哪把钥匙开哪把锁，最多要试多少次才能配好全部的钥匙和锁？

4. 把 17 分成两个自然数的和，使得它们的乘积最大，求这个最大值。

5. 从十位数 7677782980 中划去 5 个数字，使剩下的 5 个数字（先后顺序不改变）组成一个五位数。这个五位数最小是多少？这个五位数最大是多少？

三 变式训练

1. 把 1，2，3，…，16 分别填进图中 16 个三角形里，使每边上 7 个小三角形内数的和相等。问：这个和最大值是多少？



2. 有四个小朋友，他们的年龄恰好是一个比另一个大一岁，他们的年龄相乘的积是360，其中年龄最大的一个是几岁？

3. 现在有10对钥匙和锁混在一起，不知道哪把钥匙配哪把锁，至少要试开多少次，可把它们全部配成对？

4. 周长为 20 厘米，长和宽都是整数厘米的长方形，长、宽各是多少厘米时面积最大？

5. 在多位数 456678597071 中划去 6 个数字，使剩下的数字（先后顺序不改变）组成的六位数中，这个最大的六位数是多少？

二 拔高训练

1. 现在要用 10 米长的铁条若干根来截出 3 米长的铁条 83 根和 4 米长的铁条 32 根，那么最少需要 10 米长的铁条多少根？

2. A、B 两地各有 140 吨和 200 吨大米可供外运，现在北京需要 180 吨大米，天津需要 160 吨大米。A 地大米运到天津和北京的运费分别是每吨 2 元和 5 元，B 地大米运到天津和北京的运费分别是 3 元和 4 元。问：怎样调动才能使运费最省？最省是多少运费？（运费情况见下列表格）

运费(元) 运达城市 起点	北京	天津
A	5	2
B	4	3

第19讲　容斥原理

我们先来看一道数学趣题：

在一个客厅里，坐着2个爷爷，3个父亲，3个儿子，2个孙子，请问这个客厅里最少有多少人？

可能有的同学说："一共有10个人，这也太简单了吧"，而且还说："10个人就是10个人，怎么能说最少呀、最多呀？"——这个答案是不对的。

正确答案是最少有4个人：曾爷爷、爷爷、父亲、儿子。

同学们，这道题挺有趣吧！这就是包含与排除问题的典型例子。

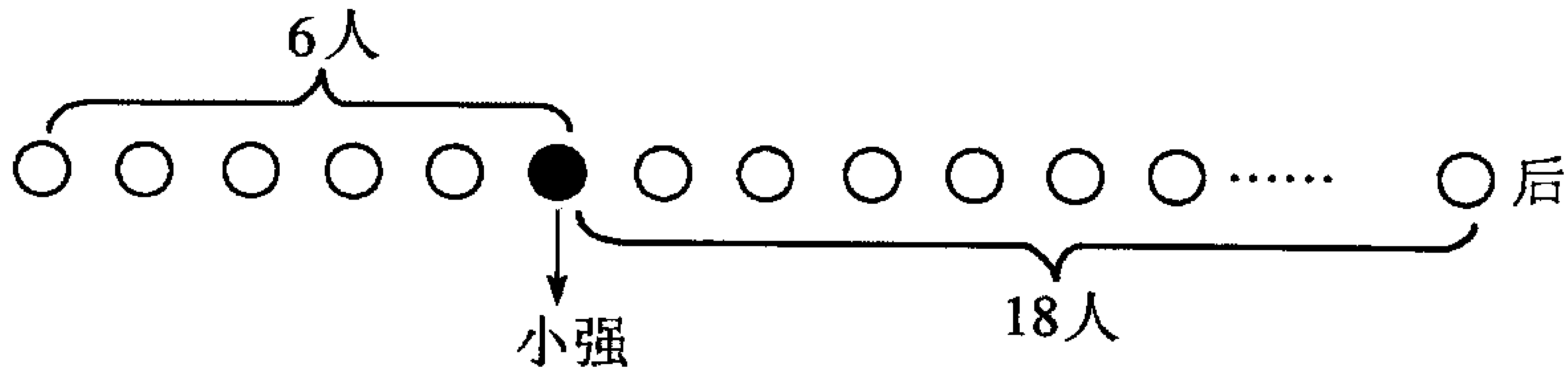
像这样有重复包含的情况，在解题时排除这些由于重复、相互包含而引起多加的部分，这种数学题就叫包含与排除问题。

容斥原理就是通常所说的包含与排除，下面我们来一起学习例题，掌握容斥原理的一般解法。

金牌例题

例题1　**同学们站队做操，从前向后数，小强是第6个，从后向前数，小强是第18个。这一队一共有多少人？**

思路分析：根据题意画图如下：



这道题有三种思考方法。

（1）根据图意，从前向后数，小强是第 6 个，说明他前边有 5 个人，所以这队共有 5 + 18 = 23（人）。

（2）若从后面向前数，小强是第 18 个，说明小强后面有 17 人，所以这一队共有 6 + 17 = 23（人）。

（3）由图所示：小强属于重叠部分，前后各加了 1 次，所以将前后的人数相加，最终再减去 1，也是这队的人数。

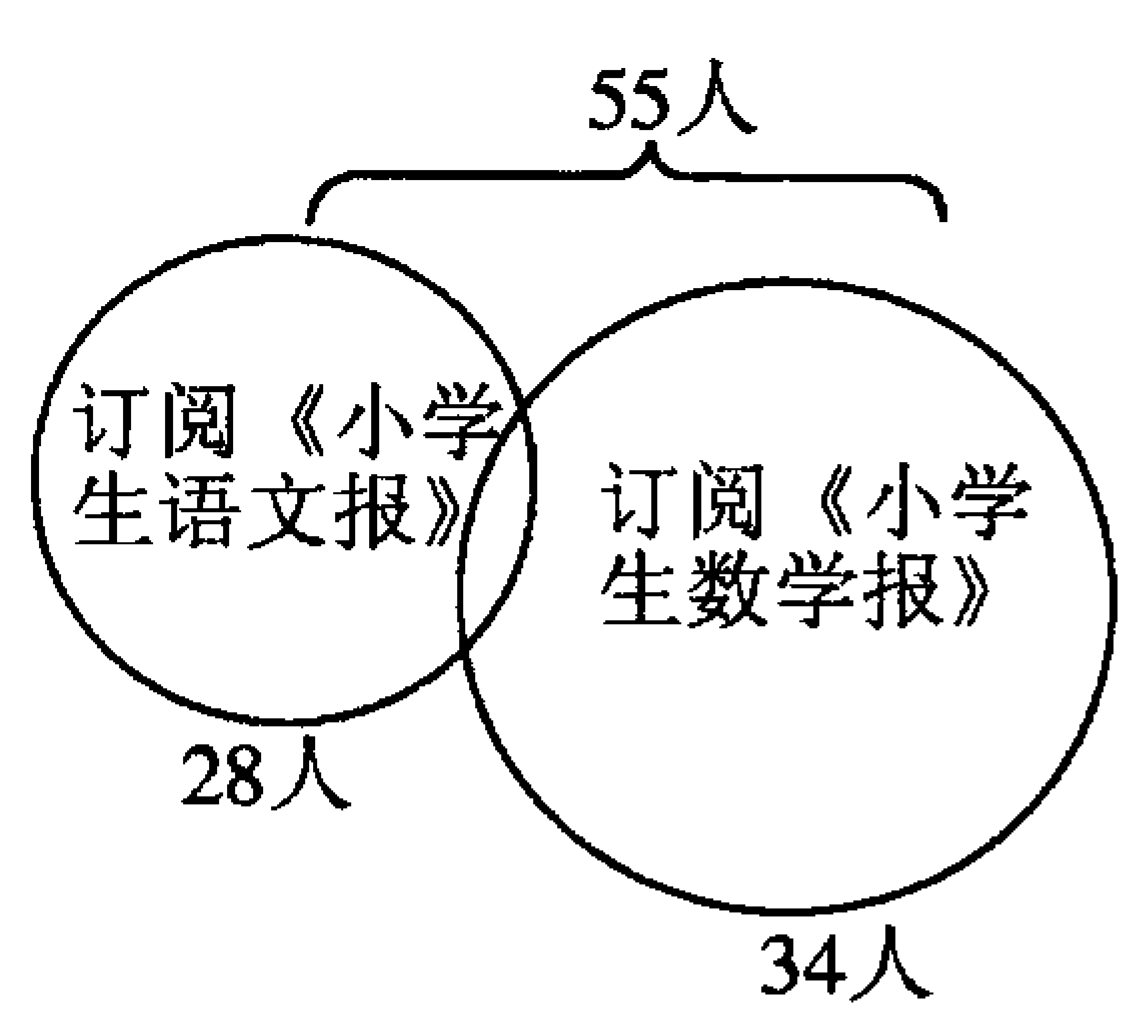
解：（1）（6 − 1）+ 18 = 23（人）

（2）6 +（18 − 1）= 23（人）

（3）6 + 18 − 1 = 23（人）

答：这一队有 23 人。

例题 2 **五年级（1）班有 55 人，订阅《小学生语文报》的有 28 人，订阅《小学生数学报》的有 34 人。每人至少订阅一种报。问两种报都订阅的有多少人？**



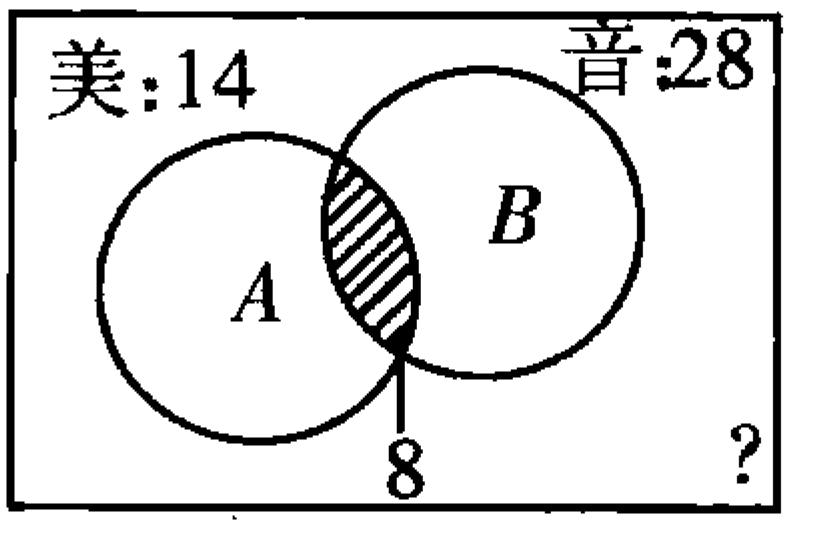
思路分析：根据题意画出右图：

图中重叠部分表示两种报纸都订阅的人数。订阅《小学生语文报》和《小学生数学报》的一共有 28 + 34 = 62（人），多于全班人数，这是因为两种杂志都订阅的人数在统计订阅《小学生语文报》的人数时算过一次，在统计订阅《小学生数学报》的人数时又算了一次，这样就多算了一次，所以，两种报纸都订阅的人数是：

解：(28 + 34) − 55 = 7（人）

答：两种报纸都订阅的有 7 人。

例题 3 **某班有 52 人，参加美术小组的有 14 人，参加音乐小组的有 28 人，有 8 人两个小组都参加了，这个班既没有参加美术小组，也没有参加音乐小组的有多少人？**



思路分析：如图所示，A 圆表示参加美术小组的 14 人，B 圆表示参加音乐小组的 28 人，A 与 B 重合的部分（阴影部分）表示同时参加两个小组的 8 个人，长方形内除圆以外的空白部分表示这个班既没参加美术又没参加音乐小组的人。A 圆不含阴影的部分表示只参加美术小组未参加音乐小组的人有 14 − 8 = 6（人），B 圆中不含阴影的部分表示只参加音乐小组未参加美术小组的人有 28 − 8 = 20（人），由此可得到参加美术或音乐小组的人有 6 + 20 + 8 = 34（人），根据包含排除法直接可得 28 + 14 − 8 = 34（人）。该班未参加美术或音乐小组的人数是 52 − 34 = 18（人）。

解： $52-(28+14-8)$
$=52-34$
$=18$（人）

答： 该班未参加美术或音乐小组的人数是 18 人。

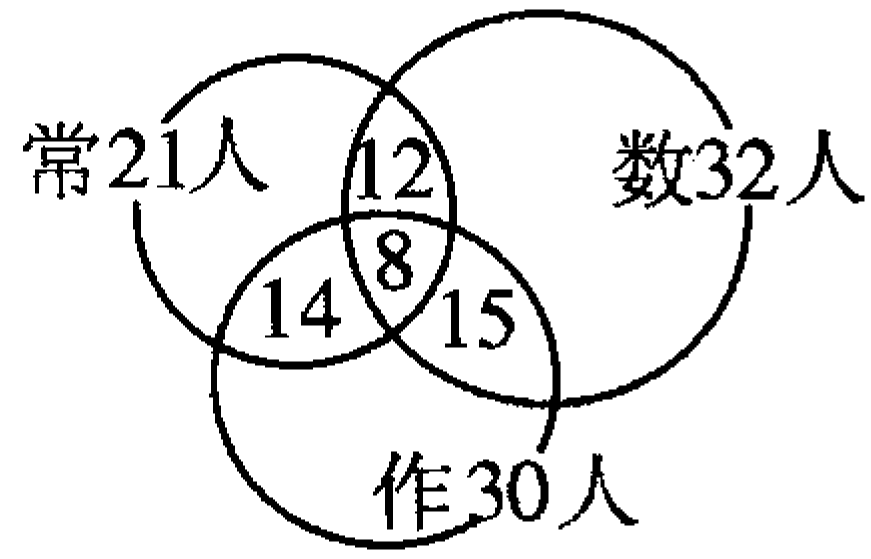
例题 4 **实验小学各年级都参加的一次书法比赛中，四年级与五年级共有 20 人获奖，在获奖者中有 16 人不是四年级的，有 12 人不是五年级的。该校书法比赛获奖的总人数是多少人？**

思路分析： 由“16 人不是四年级的”可知：16 人是五年级和其他年级的，由“12 人不是五年级的”可知：12 人是四年级和其他年级的。用 $16+12$ 可算出四年级加五年级以及两个其他年级的人数和，再减去 20 就得出两个其他年级的人数，这样其他年级的人数是 $(16+12-20)\div 2=4$（人），该校参加书法比赛获奖的总人数是 $4+20=24$（人）。

解： $(16+12-20)\div 2+20$
$=8\div 2+20$
$=24$（人）

答： 该校书法比赛获奖的总人数是 24 人。

例题 5 **全班同学对作文、数学、常识三科中至少有一门感兴趣。其中 30 人喜欢作文，32 人喜欢数学，21 人喜欢常识。既喜欢数学又喜欢作文的 15 人，既喜欢数学又喜欢常识的 12 人，既喜欢作文又喜欢常识的 14 人，三门都喜欢的有 8 人。全班总人数有多少人？**



思路分析：

（1）将喜欢作文、数学、常识的人数加起来，有：

30 +32 +21 =83（人）

（2）对两门学科感兴趣的已在上面重复统计了一次，应排除，即：83 -（15 +12 +14）=42（人）

（3）对三门感兴趣的，第一次统计了三次，第二次又排除了三次，也就是对三门同时感兴趣的也减去了，必须补回来，即：42 +8 =50（人）

综合算式：

（30 +32 +21）-（15 +12 +14）+8

=83 -41 +8

=50（人）

答：全班总人数有 50 人。

小结

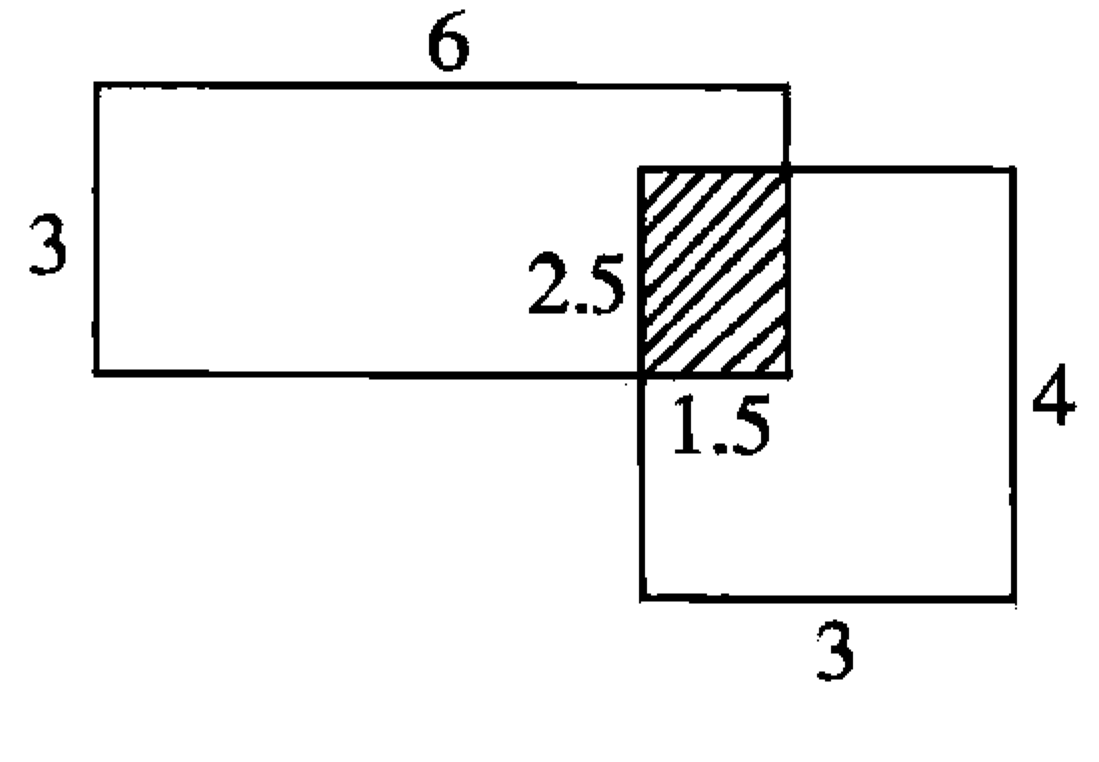
在解答包含与排除问题时，要善于使用形象的图示帮助理解题意，搞清数量关系和逻辑关系。有些语言不易表达清楚的关系，用了适当的图形就显得很直观、很清楚，因而容易进行计算。

金牌训练

一 对应训练

1. 一批小朋友参加舞蹈表演，当他们排成一队时，小红站在从右向左数的第 7 位，从左向右数的第 6 位。跳舞的小朋友共有多少人？

2. 如图所示，两个长方形重叠放在桌面上，求它们所盖住的面积是多少。（单位：厘米）



3. 五年级五班有 50 名学生，有 16 人参加英语兴趣班，有 20 人参加自然科技班，有 10 人两班都参加。那么有多少人两个班都没有参加？

4. 五一小学举行小学生田径运动会，其中 24 名运动员不是六年级的，28 名运动员不是五年级的，已知五、六年级运动员共有 32 名，求五、六年级和中低年级运动员各有几名。

5. 某班全体学生进行了短跑、游泳、篮球三个项目的测试，有4名学生在这三个项目中都没达到优秀，其余学生每人至少有一项达到优秀，这部分学生达到优秀的项目及人数如表所示，求这个班的学生数。

短　跑	游　泳	篮　球	短跑和游泳
17	18	15	6

游泳和篮球	篮球和短跑	短跑、游泳和篮球
6	5	2

三 变式训练

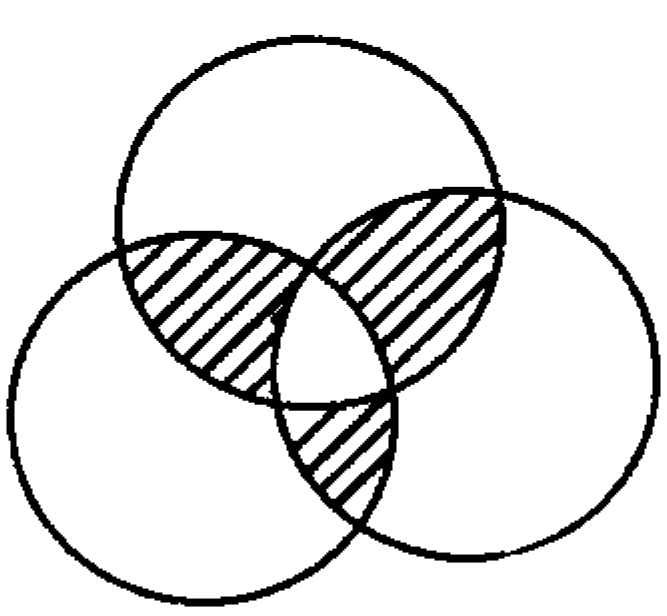
1. 五一班上体育课做操，正好排成人数相等的四列。李军站在第二列中，从前数他是第5，从后数他是第9，这个班共有学生多少人？

2. 一次数学测试中全班每人至少做对一道思考题，其中做对第一题的有 35 人，做对第二题的有 18 人，两题都做对的有 9 人，该班有学生多少人？

3. 有若干名旅客，其中有 10 人既不懂英语又不懂俄语，有 75 人懂英语，83 人懂俄语，既懂英语又懂俄语的人有 68 人，问：一共有多少名旅客？

4. 科技节那天，学校的科技室里展出了每个年级学生的科技作品，其中有 64 件不是三年级的，有 58 件不是四年级的，三、四年级参展的作品共有 32 幅，一、二年级参展的作品总数比五、六年级参展的作品总数少 5 幅，五、六年级参展的科技作品共有多少幅？

5. 在桌面上放置三个两两重叠、形状大小相同的圆形纸片，如图。它们的面积都是 100 平方厘米。盖住桌面的总面积是 144 平方厘米，三张纸片共同重叠的面积是 42 平方厘米，那么图中三个阴影部分面积的和是多少平方厘米？



三 拔高训练

1. 某校参加数学竞赛有 120 名男生、80 名女生，参加语文竞赛有 120 名女生、80 名男生。已知该校总共有 260 名学生参加了竞赛，其中 75 名男生两种竞赛都参加了。那么只参加数学竞赛而没有参加语文竞赛的女生人数是多少？

2. 全班有 25 个学生，其中 17 人会骑自行车，13 人会游泳，8 人会滑冰，这三个运动项目没有人全会。至少会这三项运动之一的学生数学成绩都及格了，但又都不是优秀。如果全班有 6 个人数学不及格，那么：
   （1）全班数学成绩优秀的有几名？
   （2）全班有几个人既会游泳又会滑冰？

第20讲 抽屉原理

三个苹果放进两个抽屉里，放的方法有以下几种：

甲抽屉	乙抽屉	
3	0	$3=3+0$
0	3	$3=0+3$
2	1	$3=2+1$
1	2	$3=1+2$

从以上四种情况可以发现：至少有1抽屉放了两个或两个以上的苹果，这就是著名的“抽屉原理1”的简单实例。什么是抽屉原理呢？

抽屉原理1：把多于 n 个的物体（苹果）以任意方式全部放入 n 个抽屉中，那么至少有一个抽屉里有2个或2个以上的物体。

抽屉原理2：①有 m 个物体和 n 个抽屉，当 n 能整除 m，即 $\frac{m}{n}=k$ 时，必有一个抽屉里有 k 个物体。

②有 m 个物体和 n 个抽屉，当 n 不能整除 m，即 $\frac{m}{n}=k\cdots\cdots a$ 时，必有一个抽屉至少有 $k+1$ 个物体。

金牌例题

例题 1 **航模小组有 13 名同学，求证：这 13 名同学中至少有 2 名同学在同一月份中过生日。**

思路分析：我们把一年的 12 个月看做 12 个“抽屉”，把 13 名同学的生日看成 13 只“苹果”。把这 13 只苹果放进 12 个抽屉里，先在每个抽屉里放进 1 只，最后剩下 1 只，因此，必定有一个抽屉要至少放进 2 只苹果。也就是说，至少有 2 名同学在同一个月份里过生日。

答：至少有 2 名同学在同一月份过生日。

例题 2 **有红黄蓝的小球各 6 个，混合放在一个盒子里，一次摸出 10 个球，问：至少有几个小球的颜色是相同的。**

思路分析：把一次摸出的 10 个球看做 10 个苹果，小球的颜色共有 3 种，抽屉就是 3，根据抽屉原理列式。

解：$10 \div 3 = 3$（个）……（1 个）

$3 + 1 = 4$（个）

答：至少有 4 个小球的颜色是相同的。

例题 3 **某班有小图书库，有童话书、科技书、连环画三种课外读物，规定每位同学最多可以借阅两种不同类型的书，问：至少有几位同学来借阅图书，才一定有两位同学借阅的书的类型相同？**

思路分析：将同学借阅的书的类型看成抽屉，要使

两位同学借阅的书的类型相同，那就是要使一个抽屉中有两个苹果，苹果的个数至少等于抽屉数加1。

解： 同学们借阅书的类型有6种。

①童话书　②科技书　③连环画　④童话书和科技书　⑤童话书和连环画　⑥科技书和连环画

学生人数为：$6+1=7$（人）

答： 至少有7个同学来借阅图书，才一定有两位同学借阅的书的类型相同。

例题4　**把135块饼干分给16个小朋友，若每个小朋友至少要分到一块饼干，那么不管怎样分，一定会有两个小朋友得到的饼干数目相同。为什么？**

思路分析： 16个小朋友⟶16个抽屉；135块饼干⟶135个物体。

如果16个小朋友所分到的饼干数都不相同，至少要有$1+2+3+\cdots+16=(1+16)\times16\div2=136$（块），而现在只有135块饼干，我们把16个小朋友看做16个抽屉，把135块饼干看做是135个物体，当我们把物体放进16个抽屉，如果每个抽屉的物体不同，一定有一个抽屉没有物体，如果要使每个抽屉里都有物体，至少有两个抽屉的物体相同。所以一定有两个小朋友所得的饼干数相同。

例题 5 **证明：从 1，3，5，…，27，29 这 15 个奇数中任取 9 个数，其中一定有两个数的和为 32。**

思路分析：如下方法构造 8 个抽屉：

（1），（3，29），（5，27），（7，25），（9，23），（11，21），（13，19），（15，17）。

这 8 个抽屉包含了所有这 15 个奇数。从这 8 个抽屉中任取 9 个数，则至少有两个数来自同一抽屉，而在同一抽屉中的两个数的和即为 32。因此，从中任取出 9 个数，其中一定有两个数的和为 32。

小结

运用抽屉原理可以解决一些奇妙而有趣的数学问题，运用抽屉原理解题时，要从最不利的情况去考察，所以抽屉原理也叫最不利原理。解答抽屉问题时，同学们要先找准哪些是“抽屉”，哪些是“物体”，当题目中的“抽屉”不明显时，我们要学会制造“抽屉”，然后再根据抽屉原理来解答。

金牌训练

一 对应训练

1. 在任意15个人中至少有几个人属同一属相?

2. 有红、黄、绿、白的小球若干个，混合放在一个布袋里，一次摸出13个，至少有几个小球的颜色是相同的?

3. 学校组织去游览玄武湖、中山陵、总统府。规定每个班最少去一处，最多去两处游览，那么至少有几个班才能保证有两个班游览的地方相同？

4. 把 152 本书分给 17 个同学，如果每个同学至少要拿一本书。那么不管怎样分，一定会有两个小朋友得到的本数相同，为什么？

5. 新年晚会上，全体教师分成了五个小组，每个小组的桌子上都有苹果和香蕉，求证：一定可以从中选出两个小组，这两个小组的苹果个数之和为偶数，并且这两个组的香蕉个数之和也是偶数。

二 变式训练

1. 幼儿园小班有 18 个小朋友，老师至少要拿多少个苹果分给小朋友，才能保证至少有一个小朋友能得到两个或两个以上的苹果？

2. 一个布袋里装有尺码相同但颜色不同的袜子，颜色有白、黑、红、黄四种，问最少要摸出多少只袜子才能保证有3双同色的？

3. 五（1）班有40名学生，他们订阅了《儿童文学》《少年报》《小学生天地》三种报刊中的一、二或三种，问：他们当中至少有多少名学生订阅的报刊种类相同？

4. 幼儿园大班有 40 个小朋友，老师领来 125 个水果，把这些水果分给小朋友，是否有人会得到 4 个或 4 个以上的水果？

5. 从 1 ~ 10 这十个自然数中，任意取 6 个自然数，那么其中必有两个数是互质数，为什么？

三 拔高训练

1. 下面的图形中，正好有 $3\times9=27$ 个方格，现在用红、蓝两种颜色之一涂色。小方格中涂的颜色完全相同的至少有几列？

第一行									
第二行									
第三行									

2. 有一个面积为 8 的长方形，在这个长方形内任意加 9 个点，那么，其中必定有 3 个点所构成的三角形的面积不大于 1。为什么？

参考答案

第 1 讲　小数的速算与巧算

一、对应训练

1. (1) $38.6-8.3+11.4-1.7$
$=(38.6+11.4)-(8.3+1.7)$
$=50-10$
$=40$

(2) $3.28-(1.98-1.72)$
$=3.28-1.98+1.72$
$=3.28+1.72-1.98$
$=5-1.98$
$=3.02$

2. (1) $12.5\times2.5\times8\times4$
$=(12.5\times8)\times(2.5\times4)$
$=100\times10$
$=1000$

(2) $64\times12.5\times0.25\times0.05$
$=8\times4\times2\times12.5\times0.25\times0.05$
$=(8\times12.5)\times(4\times0.25)\times(2\times0.05)$
$=100\times1\times0.1$
$=10$

3. (1) 0.45×10.2
$=0.45\times(10+0.2)$
$=0.45\times10+0.45\times0.2$
$=4.5+0.09$
$=4.59$

(2) 0.25×99.8
$=0.25\times(100-0.2)$
$=0.25\times100-0.25\times0.2$
$=25-0.05$
$=24.95$

4. (1) $5.63\times12+88\times5.63$
$=5.63\times(12+88)$
$=5.63\times100$
$=563$

(2) $327\times2.8+17.3\times28$
$=327\times2.8+(17.3\times10)\times(28\div10)$
$=327\times2.8+173\times2.8$
$=(327+173)\times2.8$
$=500\times2.8$
$=1400$

5. (1) $82.3\div12.5\div0.8$
$=82.3\div(12.5\times0.8)$
$=82.3\div10$
$=8.23$

(2) $(3.6\times7.5\times9.5)\div(1.2\times2.5\times1.9)$
$=3.6\times7.5\times9.5\div1.2\div2.5\div1.9$
$=(3.6\div1.2)\times(7.5\div2.5)\times(9.5\div1.9)$
$=3\times3\times5$
$=45$

二、变式训练

1. 提示：在进行简便运算时改变运算顺序，必须把数字连同数字前面的运算符号一起移动。增减括号时，要注意观察括号前面的运算符号。

(1) $20.36-7.98-5.02-4.36-2.1$
$=20.36-4.36-(7.98+5.02)-2.1$
$=16-13-2.1$
$=0.9$

(2) $7.85-(2.31+2.85+0.69)$
$=7.85-2.31-2.85-0.69$
$=(7.85-2.85)-(2.31+0.69)$
$=5-3$
$=2$

2.（1）将题中 128 分解成 $8\times4\times2\times2$，再根据乘法交换律和结合律改变运算顺序使计算简便。

$0.125\times0.25\times0.5\times128$
$=(0.125\times8)\times(0.25\times4)\times(0.5\times2)\times2$
$=1\times1\times1\times2$
$=2$

（2）可以将 0.32分解成 0.4×0.8后，再根据乘法运算定律使计算简便。

$0.5\times0.32\times1.25\times0.025\times2$
$=(0.5\times2)\times(1.25\times0.8)\times(0.025\times0.4)$
$=1\times1\times0.01$
$=0.01$

3.（1）将题中的 201 看做（200 + 1），根据乘法分配律可以使我们的计算简便。

$12.2\times201-24.4$
$=12.2\times(200+1)-24.4$
$=12.2\times200+12.2-12.2\times2$
$=2440-12.2$
$=2427.8$

（2）将题中的9.8 看做（10 − 0.2），利用乘法分配律使计算简便。

$0.26\times9.8-0.74\times0.2$
$=0.26\times(10-0.2)-0.74\times0.2$
$=0.26\times10-(0.26\times0.2+0.74\times0.2)$
$=2.6-(0.26+0.74)\times0.2$
$=2.6-0.2$
$=2.4$

4.（1）观察算式，先求三个积，再把三个积相加减，但每一个求积的算式中都有一个因数 14.8，可以利用乘法分配律进行简便计算。

$14.8\times47-14.8\times19+14.8\times72$
$=14.8\times(47-19+72)$
$=14.8\times100$
$=1480$

（2）观察算式，可以发现三个求积的算式中都有一个因数含有3，5，8这三个数字，但小数点位置不同，大小不一样，我们将 0.358×448 转化为 35.8×4.48，0.677×358 转化为 6.77×35.8，这样就可以运用乘法分配律进行简便计算了。

$0.358\times448+0.677\times358-1.25\times35.8$
$=35.8\times4.48+6.77\times35.8-1.25\times35.8$
$=35.8\times(4.48+6.77-1.25)$
$=35.8\times10$
$=358$

5.（1）观察算式，根据题中数的特点，我们利用“除法中一个数连续除以几个数，等于用这个数除以后面几个数的乘积”的性质，可以使计算简便。

$5.75\div1.25\div0.4\div2$
$=5.75\div(1.25\times0.4\times2)$
$=5.75\div1$
$=5.75$

（2）这是一道含有小括号的小数乘除混合运算题。可根据除法的运算性质，先去掉括号，再把能够凑整的数凑在一起先算。括号前是“÷”号，括号里的数前是“×”号的变成“÷”号，是“÷”号的变成“×”号。

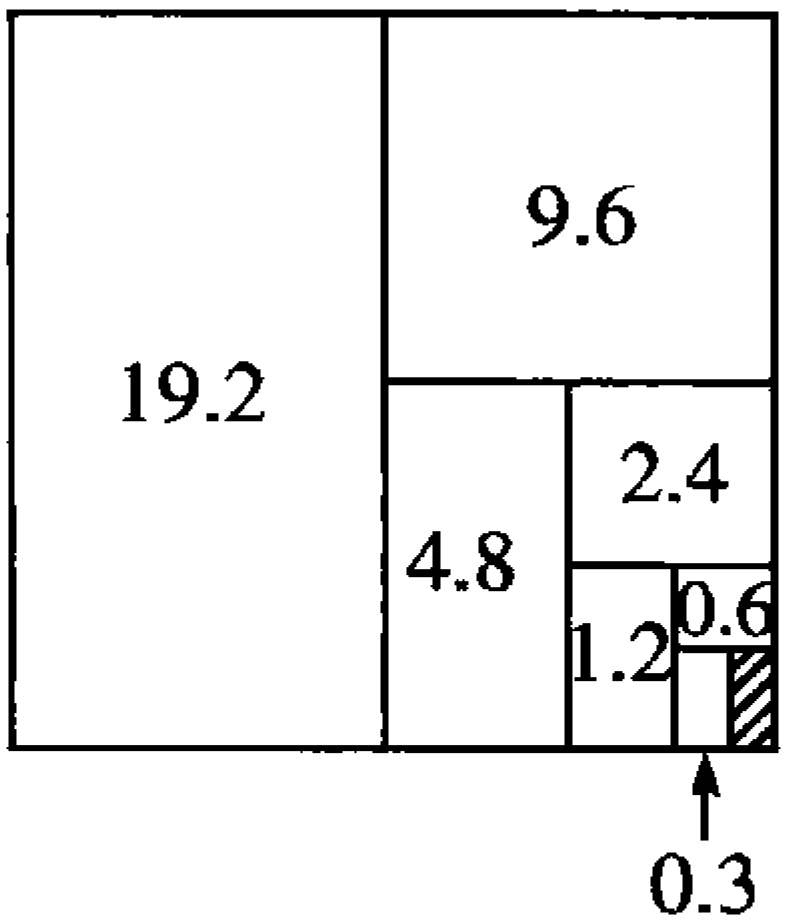
$0.125\div(3.6\div80)\times0.9$
$=0.125\div3.6\times80\times0.9$
$=(0.125\times80)\div3.6\times0.9$
$=10\div3.6\times0.9$
$=10\div(3.6\div0.9)$
$=10\div4$
$=2.5$

三、拔高训练

1. 提示：算式中的每一个数都可以分别看做(1 - 0.1)、(10 - 0.1)、(100 - 0.1)……(1000000 - 0.1)，利用这一特征来进行速算：

   原式 $=1+10+100+1000+10000+100000+1000000-0.1\times7$
   $=1111111-0.7$
   $=1111110.3$

2. 提示：仔细观察后发现这道题中后一个加数总是前一个加数的两倍。用图示表示：



   从右图中不难看出，这些数的和比 19.2 的两倍少 0.3，因此可以这样巧妙计算：

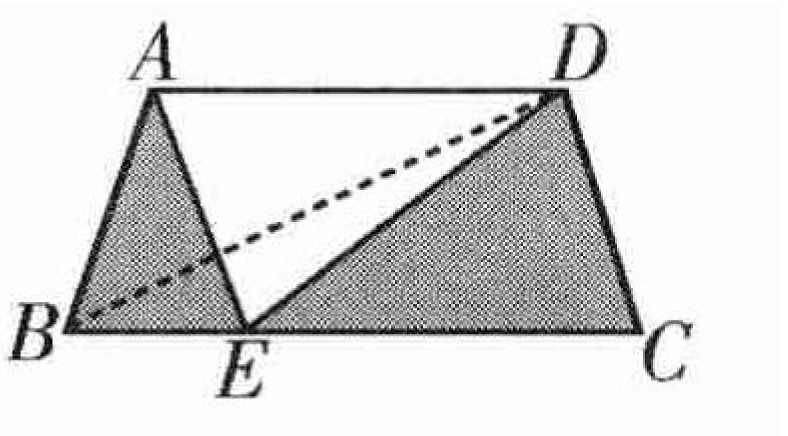
   $0.3+0.6+1.2+2.4+4.8+9.6+19.2$
   $=19.2\times2-0.3$
   $=38.1$

第 2 讲　组合图形的面积

一、对应训练

1. 提示：梯形的高就是阴影三角形的高，高 $=150\times2\div15=20$（厘米），梯形的面积是$(15+25)\times20\div2=400$（平方厘米）。
2. 提示：阴影部分的面积等于两个正方形的面积之和，减去两个空白部分的三角形面积之和。

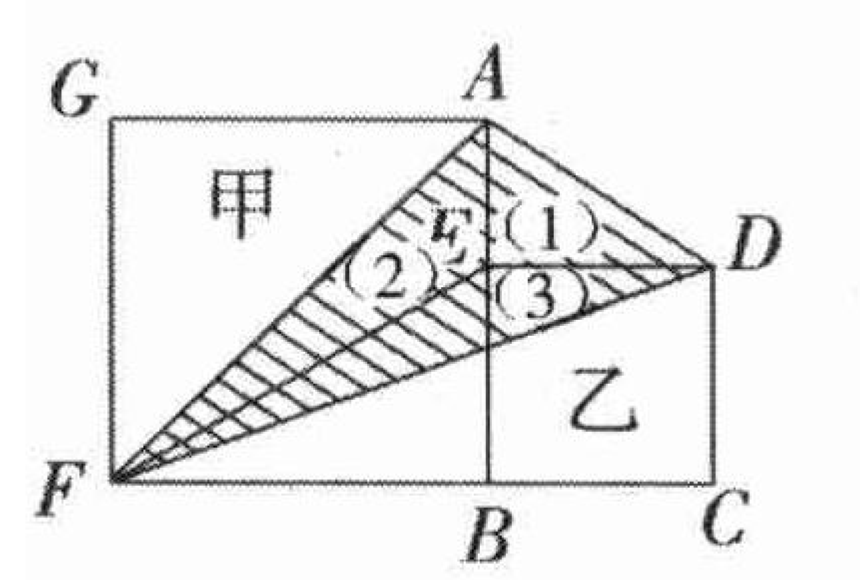
   $4\times4+5\times5-4\times4\div2-(4+5)\times5\div2=10.5$（平方分米）
3. 提示：根据“等底等高的两个三角形面积相等”这一知识，把图中的三角形 *ABE* 进行“等积变形”，变为与之面积相等的三角形 *DBE*，原阴影部分的面积就转变成求右图中三角形 *BCD* 的面积。



$14\times7\div2=49$（平方分米）

答：阴影部分的面积是49平方分米。

4. 解法一：阴影部分的面积可看成是大正方形面积与梯形 $ABCD$ 面积的和，剔除空白部分甲、乙两个三角形之和，即 $5\times5+(5+3)\times3\div2-5\times5\div2-(5+3)\times3\div2=12.5$（平方厘米）。



解法二：用分割法，将阴影部分分割成三个三角形，用（1）（2）（3）表示。

三角形（1）的面积：底长3厘米，高是（$5-3=2$）厘米，面积是：$3\times2\div2=3$（平方厘米）。

三角形（2）的面积：底长是（$5-3=2$）厘米，高是5厘米，面积是：$2\times5\div2=5$（平方厘米）。

三角形（3）的面积：底长是3厘米，高是3厘米，面积是：$3\times3\div2=4.5$（平方厘米）

阴影部分的面积是 $3+5+4.5=12.5$（平方厘米）。

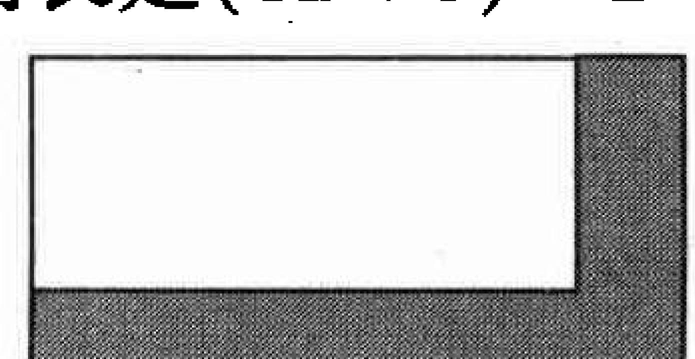
5. 提示：连接 AG，则 AGD 的面积是正方形 $ABCD$ 面积的$\frac{1}{2}$，也是长方形 $DEFG$ 面积的$\frac{1}{2}$，于是长方形 $DEFG$ 的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积。

解：$S_{\square EFGD}=S_{\square ABCD}=4\times4=16$（平方厘米）

所以：$DE=16\div5=3.2$（厘米）

二、变式训练

1. 提示：平行四边形有两组对应的底和高，其中一组是12厘米和6厘米，用面积除以高9就是另一条底。$12\times6\div9=8$（厘米）。平行四边形的周长是$(12+8)\times2=40$（厘米）。

2. 提示：小路可以移成 

$20\times14-(20-2)\times(14-2)=64$（平方米）

3. 解法一：用两个正方形的面积之和减去三个空白三角形的面积，得到阴影部分的面积。

即：$12\times12+10\times10-[S_{\triangle ABG}+S_{\triangle BDE}+S_{\triangle EFG}]$

$=244-[\frac{1}{2}\times10\times10+\frac{1}{2}\times(10+12)\times12+\frac{1}{2}\times(12-10)\times12]$

$=244-(50+132+12)$

$=50$（平方厘米）

解法二：同例4的解法三一样：阴影部分正好是小正方形面积的一半，$10\times10\div2=50$（平方厘米）。

4. 提示：已知阴影部分面积比$\triangle ADH$大12平方厘米，也就是$\square BCEF$的面积比$\triangle ABC$的面积大12平方厘米。已知$\triangle ABC$是直角三角形，BC长8厘米（三角形的底），AC长7厘米（三角形的高），就可以求出$\triangle ABC$的面积。$\triangle ABC$的面积，加上12平方厘米就是$\square BCEF$的面积。求出了平行四边形的面积，又知道平行四边形的底，就可以用平行四边形面积的变形公式：高＝面积÷底，求出HC的长。

解：（1）三角形ABC的面积：$8\times7\div2=28$（平方厘米）

（2）平行四边形$BCEF$的面积：$28+12=40$（平方厘米）

（3）HC的长：$40\div8=5$（厘米）

三、拔高训练

1. 提示：$\triangle ADE$的面积比$\triangle CEF$的面积小10平方厘米，可替换成长方形$ABCD$的面积比$\triangle ABF$的面积小10平方厘米，这样通过长方形$ABCD$的面积就可以求出$\triangle ABF$的面积。FB是$\triangle ABF$中AB边的高。可根据公式求出FB的长度，FC又是FB的一部分，这样FC的长度就可以求出来。

$\triangle FAB$的面积：$10\times8+10=90$（平方厘米）

FC的长为：$90\times2\div10-8=10$（厘米）

2. 提示：已知直角梯形的面积是72平方厘米，高$CD=8$厘米，上下底之和为$72\times2\div8=18$（厘米）。按和差问题可求出梯形下底BC为$(18+4)\div2=11$（厘米）。在长方形$EFCA$中，三

角形 ABC 的面积与阴影部分的面积相等（均为长方形 $EFCA$ 面积的一半）。阴影部分的面积为 $11\times8\div2=44$（平方厘米）。

第3讲　一般应用题（一）

一、对应训练

1. 提示：如果按照原计划的天数加工，即再加工 2 天，就会多加工 $800\times2=1600$（个）。为什么会超产 1600 个呢？是因为实际每天比原计划每天多加工了 $800-700=100$（个），1600 里面有几个 100 就是原计划加工的天数，$1600\div(800-700)=16$（天），就是原计划加工的天数，这批零件一共有：$700\times16=11200$（个）。

   解：$800\times2\div(800-700)=16$（天）

   　　$700\times16=11200$（个）

2. 提示：从每筐中取出 25 千克，那么 9 筐共取出 $25\times9=225$（千克），剩下的苹果正好等于原来 4 筐的重量，那么 225 千克就相当于原来 $(9-4)$ 筐的重量，所以原来每筐苹果重 $225\div(9-4)=45$（千克）。

   解：$25\times9\div(9-4)=45$（千克）

3. 提示：原来橘子和筐共重 42 千克，吃去一半橘子后，连筐还有 22 千克，说明吃去的一半橘子的重量是：$42-22=20$（千克），一筐橘子的重量就是 $20\times2=40$（千克），筐的重量就是 $42-40=2$（千克）。

   解：橘子的重量：$(42-22)\times2=40$（千克）

   　　筐的重量：$42-40=2$（千克）

4. 提示：因为这根绳子两头各截去 80 厘米，所以截去的部分是 $80\times2=160$（厘米）。这时截去的部分比它的一半长 5 厘米，说明这根绳子的长度是：$(160-5)\times2=310$（厘米）。

   解：$(80\times2-5)\times2=310$（厘米）

5. 提示：要求可以提前几天完成任务，就要知道原计划多少天完

成和实际多少天完成，原计划21人每天修$4\times21=84$（米），修2100米就需要$2100\div84=25$（天），实际增加了4人，每天修$4\times(21+4)=100$（米），修同样长的公路需要$2100\div100=21$（天），所以，可以提前$25-21=4$（天）完成任务。

解：$2100\div(4\times21)-2100\div[4\times(21+4)]$

$=25-21$

$=4$（天）

二、变式训练

1. 提示：如果按原计划的天数加工，加工的零件就会比原计划多$56\times3+120=288$（个）。为什么会多加工288个呢？是因为每天多加工了$56-50=6$（个）。因此，原计划加工的天数是$288\div6=48$（天），实际加工了$50\times48+120=2520$（个）零件。

   解：$(56\times3+120)\div(56-50)=48$（天）

   $50\times48+120=2520$（个）

   答：这个车间实际加工了2520个零件。

2. 提示：由题意知，每人先拿出10元捐给“希望工程”，后又拿出6元捐给灾区小朋友，那么每人共捐出$10+6=16$（元），5个同学共捐$16\times5=80$（元）。剩下的钱数正好等于原来3人的存款数，那么80元就相当于原来（$5-3$）个同学的存款数，所以原来每个同学存款$80\div(5-3)=40$（元）。

   解：$(10+6)\times5\div(5-3)=80\div2=40$（元）

3. 提示：根据“连筐共重36千克”和“余下的苹果连筐共重12千克”，可求出送给幼儿园小朋友和送给一年级小朋友的苹果共重$36-12=24$(千克)。由题意知，如果把送给一年级小朋友的苹果看做1份，那么送给幼儿园小朋友的苹果就是这样的2份，这筐苹果就是这样的4份，先求出其中的1份是多少千克苹果，这筐苹果的重量也就容易求出来了。

   解：$(36-12)\div(1+2)\times4=32$（千克）

4. 提示：根据题意“剩下部分正好可以做一个边长为25厘米的正方形框架”，可求出剩下的长度是：$25\times4=100$（厘米），

再根据题意“先截去一半，再截去20厘米”可求出这根铁丝的长度是：(100+20)×2=240（厘米）。

解：(25×4+20)×2=240（厘米）

5. 提示：要求需要增加多少个工人，就要知道实际加工的天数和原计划加工的天数，原计划每人每天加工2套，8个工人每天加工8×2=16（套），原计划加工的天数为192÷16=12（天），可实际提前4天完成，并且每人的工作效率不变。那么，实际加工的人数是：192÷(12-4)÷2=12（人），则需要增加的人数为12-8=4（人）。

解：原计划加工的天数：192÷(8×2)=12（天）

需要增加的人数：192÷(12-4)÷2-8=4（人）

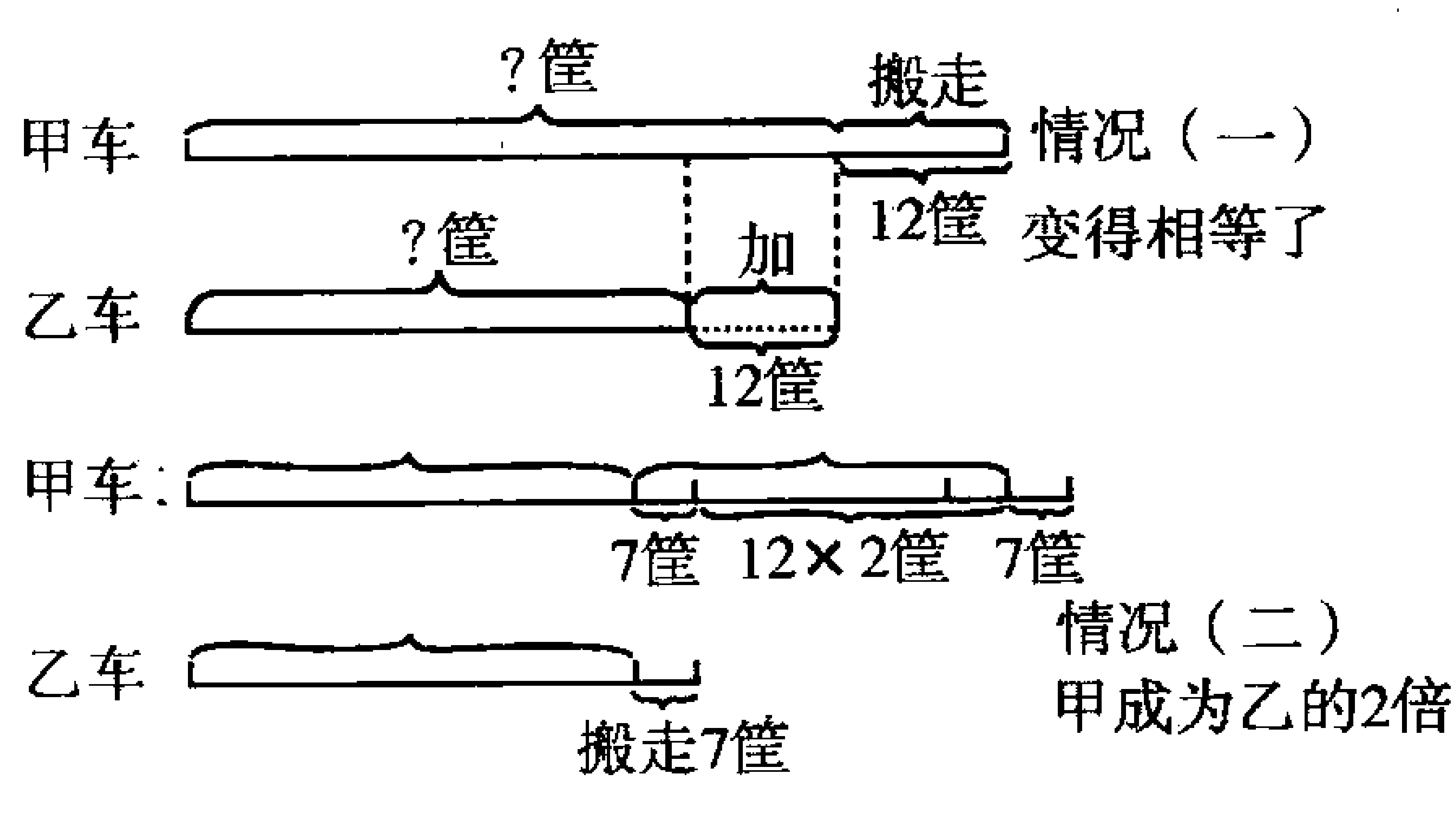
三、拔高训练

1. 提示：因为甲5天的工资和乙4天的工资同样多，所以甲10天的工资就和乙8天的工资同样多。这样，通过转化，1200元就相当于乙（8+12）天的工资了。乙每天的工资是1200÷(8+12)=60（元），甲每天的工资就是60×4÷5=48（元）。

解：乙的工资：1200÷(4×2+12)=60（元）

甲的工资：60×4÷5=48（元）

2. 提示：此题比较复杂，条件与问题间的关系比较隐蔽，让我们依题意一步一步画图分析：



从情况（一）看，甲车拉的比乙车多（12×2）筐，从情况（二）看，如果从乙车搬7筐到甲车，乙车剩下的筐数是

$(12\times2+7\times2)$ 筐。这样问题就可以解决了。

解：$(12\times2+7\times2)\div(2-1)=38$（筐）

乙车拉的：$38+7=45$（筐）

甲车拉的：$45+12\times2=69$（筐）

答：甲车拉了69筐，乙车拉了45筐。

第4讲　一般应用题（二）

一、对应训练

1. 提示：由条件可知，甲盒比乙盒多 $62-38=24$（粒）。要使两盒中的棋子相等，只要把甲盒比乙盒多的24粒棋子平均分成2份，取其中的1份放入乙盒中就行了。所以从甲盒中拿出 $24\div2=12$（粒）放入乙盒，才能使两盒中的棋子相等。

   解：$(62-38)\div2=12$（粒）

2. 提示：根据题意可求出三个班的总人数是 $(100+97+93)\div2=145$（人）。那么，五一班的人数为：$145-97=48$（人），五二班的人数为 $145-93=52$（人），五三班的人数为：$145-100=45$（人）。

   解：三个班的总人数：$(100+97+93)\div2=145$（人）

   五一班的人数：$145-97=48$（人）

   五二班的人数：$145-93=52$（人）

   五三班的人数：$145-100=45$（人）

3. 提示：因为每千克梨比每千克苹果便宜0.7元，那么梨也买18千克时，显然妈妈花不完钱，就剩下 $0.7\times18=12.6$（元）还没有花，而这12.6元就是 $(25-18)$ 千克梨的价钱，从而我们可以求出每千克梨多少元，$12.6\div(25-18)=1.8$（元），妈妈一共带的钱就是 $1.8\times25=45$（元）

   解：每千克梨的价钱：$0.7\times18\div(25-18)=1.8$（元）

   妈妈一共带的钱数：$1.8\times25=45$（元）

4. 提示：本题可用分析法也可用综合法。这批零件已经做了6天，

每天加工75个，已加工了$75\times6=450$（个），提高工作效率后，还需生产$2100-450=1650$（个）。这1650个零件还需$1650\div150=11$（天）才能完成，一共用了$6+11=17$（天）。

解：$(2100-75\times6)\div150+6=17$（天）

5. 提示：三人拿同样多的钱买同一种笔记本，应该分得同样多的笔记本，$9\times2\div3=6$（个），也就是丙少拿6个笔记本，所以得$12\times2=24$（元）。每个笔记本的价钱是$24\div6=4$（元）。

解：$9\times2\div3=6$（个）　$12\times2\div6=4$（元）

二、变式训练

1. 提示：要求拿几次能使两筐苹果的个数同样多，就要知道每次拿的个数和共需要拿的个数，要求共需拿的个数，用$(80-32)\div2=24$（个），那么拿的次数为$24\div4=6$（次）。

解：$(80-32)\div2\div4=6$（次）

2. 提示：要求五四班有多少人，可以先求出五一班、五二班、五三班一共有多少人和五年级四个班的总人数。由题意知：$44\times4=176$（人）是五年级四个班的总人数。$85+88+87=260$（人）是五一班、五二班、五三班这三个班的总人数的2倍。所以，这三个班共有$260\div2=130$（人），因此，五四班有$176-130=46$（人）。

解：$44\times4-(85+88+87)\div2=46$（人）

3. 提示：因为师傅每小时比徒弟多加工20个，如果徒弟也加工10小时，显然不能完成任务，就还有$20\times10=200$（个）零件没有加工，而这200个零件就是徒弟（$15-10$）小时的工作量。这样我们就可以先求出徒弟每小时加工$200\div(15-10)=40$（个）。这批零件的总个数为：$40\times15=600$（个）。那么师徒两人共同加工这批零件所需的时间为：$600\div(40+20+40)=6$（小时）。

解：徒弟每小时加工的个数：$20\times10\div(15-10)=40$（个）

师徒两人共同加工这批零件所需的时间：

$40\times15\div(40+20+40)=6$（小时）

4. 提示：这批服装已经做了3天，完成了$150\times3=450$（件），提高工作效率后，又做了$(1500-450)\div175=6$（天），共做了3+

$6=9$（天）。原计划需要$1500\div150=10$（天），这样比原计划提前$10-9=1$（天）。

解：实际共用的天数：$(1500-150\times3)\div175+3=9$（天）

比原计划提前的天数：$1500\div150-9=1$（天）

5. 提示：因为老师把这些纸平均分给了小华、小英和另外两名同学，所以每人分得同样多的纸，$(7+5)\div4=3$（张），那么9元钱就是另外两名同学$3\times2=6$（张）纸的价钱，那么每张纸的价钱为$9\div6=1.5$（元），小华应分$1.5\times(7-3)=6$（元），小英应分$9-6=3$（元）。

解：平均每人分得的张数：$(7+5)\div4=3$（张）

小华应分得的钱数：$9\div(3\times2)\times(7-3)=6$（元）

小英应分得的钱数：$9-6=3$（元）

三、拔高训练

1. 提示：根据题意可以推出，“甲先做”的轮流方式完成时所用的天数一定为奇数。否则不论是“甲先做”还是“乙先做”，两种轮做方式所用的天数必定相同。根据“甲先做”的轮流方式完成的天数为奇数，两种轮流方式做的情况可表示如下：

甲乙甲乙……甲乙	甲
乙甲乙甲……乙甲	乙剩60个

竖线左边做的天数为偶数，谁先做没关系。从竖线右边可以看出：剩下的60个零件，就是甲、乙工作效率的差。

解：$60\div(1.5-1)=120$（个）

$120\times1.5=180$（个）

答：甲每天做180个，乙每天做120个。

2. 提示：甲工作了40天，而乙停止了15天没有加工，乙只加工了25天，所以他加工的零件正好是甲的一半，也就是甲20天加工的零件和乙25天加工的零件同样多。由于甲每天比乙多加工6个，20天一共多加工$6\times20=120$（个）。这120个零件相当于乙$(25-20)=5$天加工的个数，乙每天加工$120\div(25-$

20）=24（个）。乙一共加工了 $24\times25=600$（个），甲一共加工了 $600\times2=1200$（个）。

解：$6\times(40\div2)\div(25-40\div2)=24$（个）

$24\times25=600$（个）

$600\times2=1200$（个）

答：这时，甲加工了 1200 个，乙加工了 600 个零件。

第 5 讲　稍复杂的和差、和倍、差倍问题

一、对应训练

1. 提示：这是一道和差问题，知道了甲、乙两筐苹果共重 90 千克，但没有直接告诉我们原来两筐苹果的重量差，只是说“从甲筐取出 8 千克放入乙筐，甲筐比乙筐还多 4 千克”。从这个条件，我们可以知道原来甲、乙两筐苹果的重量差。知道了“和”与差，我们可以用和差问题的方法正确解答。

   解：$8\times2+4=20$（千克）

   $(20+90)\div2=55$（千克）

   $(90-20)\div2=35$（千克）

   答：甲筐原有苹果 55 千克，乙筐原有苹果 35 千克。

2. 提示：小王再生产 20 个零件，张师傅必须再生产 $20\times6=120$（个）零件才会继续是小王的 6 倍。现在张师傅是小王的 4 倍，比小王的 6 倍少生产了 $120-20=100$（个）零件，它所对应的倍数差是 $6-4=2$ 倍。

   解：小王原来生产零件个数：$(20\times6-20)\div(6-4)-20$

   $=100\div2-20$

   $=50-20$

   $=30$（个）

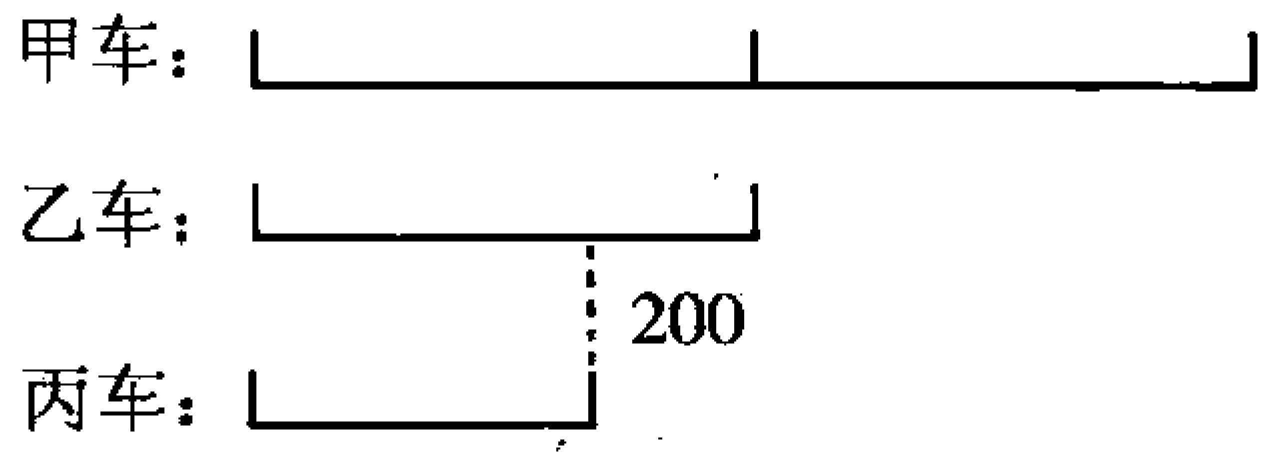
   张师傅原来生产零件个数：$30\times6=180$（个）

3. 提示：已知杨树的棵数是杉树的 2 倍，每组分 6 棵杉树和 $6\times2=12$（棵）杨树最后就一起分完。可每组分 8 棵杨树，少分

12 - 8 = 4（棵），还剩的 20 棵杨树里面有 5 个 4，所以有 5 组同学，高年级植树的同学有 5 × 7 = 35（人）。

解：20 ÷ (6 × 2 - 8) = 5（组）　5 × 7 = 35（人）

4. 提示：



从图中可以看出：如果丙车多装 200 千克，就和乙车装的货物同样多，这样，三辆车装的总重量就是 1800 + 200 = 2000（千克）。再把 2000 千克平均分成 4 份，就得到乙车上装货是 500 千克，甲车上装 500 × 2 = 1000 千克，丙车上装有 500 - 200 = 300（千克）。

解：(1800 + 200) ÷ (1 + 1 + 2) = 500（千克）

500 × 2 = 1000（千克）

500 - 200 = 300（千克）

答：甲车上装 1000 千克货物，乙车上装 500 千克货物，丙车上装 300 千克货物。

5. 提示：题中已知排球和篮球共 30 个，就可推出，篮球个数的 3 倍和排球个数的 3 倍的和是 30 × 3 = 90（个），又因为篮球个数的 3 倍比排球的 2 倍少 10 个，那么 90 个加上 10 个就是排球个数的（3 + 2）倍，则排球个数为 (90 + 10) ÷ (2 + 3) = 20（个），篮球个数为 30 - 20 = 10（个）。

解：排球个数：(30 × 3 + 10) ÷ (2 + 3) = 20（个）

篮球个数：30 - 20 = 10（个）

二、变式训练

1. 提示：根据条件“一块长方形菜地周长是 240 米”，就可以求出长与宽的和，知道了长与宽的和与差，再根据和差问题的基本数量关系式，就可以求出长方形的长、宽各是多少米。再根据长方形的面积公式，用长 × 宽即可求出。

解法一：长：(240 ÷ 2 + 80) ÷ 2 = 200 ÷ 2 = 100（米）

宽：$100-80=20$（米）

面积：$100\times20=2000$（平方米）

解法二：宽：$(240\div2-80)\div2=40\div2=20$（米）

长：$20+80=100$（米）

面积：$100\times20=2000$（平方米）

2. 提示：苹果的个数是梨的 3 倍，如果吃掉 10 个梨，苹果相应地也吃掉 $10\times3=30$（个），则苹果的个数仍是梨的 3 倍，可事实上苹果只吃掉 6 个，$(30-6)$个就正好对应着后来梨的$(5-3)$倍。因此，后来梨有$(30-6)\div(5-3)=12$（个），原来梨有$(12+10)$个，原来苹果和梨共有$(12+10)\times(1+3)=88$（个）。

解：后来梨的个数：$(10\times3-6)\div(5-3)=12$（个）

原来苹果和梨共有的个数：$(12+10)\times(1+3)=88$（个）

3. 提示：因为甲粮库的存粮是乙粮库的 2 倍，如果每天乙粮库运出 30 吨，甲粮库运出 $30\times2=60$（吨），两粮库的粮食就会同时运完。而实际甲粮库每天只运出 40 吨，所以，每天就少运 $60-40=20$（吨）。80 吨里包含有 4 个 20 吨，也就是已经运了 4 天，因此，甲粮库原有粮食 $40\times4+80=240$（吨），乙粮库原有粮食 $240\div2=120$（吨）。

解：$80\div(30\times2-40)=4$（天）

$40\times4+80=240$（吨）

$240\div2=120$（吨）

答：甲粮库原有粮食 240 吨，乙粮库原有粮食 120 吨。

4. 提示：把鸭的只数看做 1 份，鸡的只数是 4 份多一些，鹅的只数是 2 倍少一些。三种约为 $1+4+2=7$（份），总只数约为 $1462-132+70=1400$（只），则鸭：$1400\div7=200$（只）；鸡：$200\times4+132=932$（只）；鹅：$200\times2-70=330$（只）。

5. 提示：根据题意已知五年级男女生共有 200 人，就可推出男生人数的 3 倍和女生人数的 3 倍的和是 $200\times3=600$（人），又因为男生人数的 3 倍比女生的 2 倍多 50 人，从 600 人里去掉 50 人就是女生人数的$(2+3)$倍，那么女生人数是：$(600-50)$

$\div(2+3)=110$（人），男生人数是：$200-110=90$（人）。则女生比男生多 $110-90=20$（人）。

解：女生人数 $(200\times3-50)\div(2+3)=110$（人）

男生人数：$200-110=90$（人）

女生比男生多的人数：$110-90=20$（人）

三、拔高训练

1. 提示：由题意知，三个物体平均重 31 千克，可求出三个物体共重 $31\times3=93$ 千克，又知甲比乙丙两个物体重量之和轻 1 千克，那么 $93+1=94$（千克）就是乙丙两个物体重量之和的 2 倍，则乙丙两个物体共重 $94\div2=47$（千克），甲的重量为 $47-1=46$（千克），再根据乙比丙的 2 倍重 2 千克，则 $47-2=45$（千克）就是丙的 $(1+2)$ 倍，可求出丙的重量是 $45\div(1+2)=15$（千克），乙的重量是：$47-15=32$（千克）。

解：乙丙重量之和：$(31\times3+1)\div2=47$（千克）

甲的重量：$47-1=46$（千克）

丙的重量：$(47-2)\div(1+2)=15$（千克）

乙的重量：$47-15=32$（千克）

2. 提示：每小时由 A 站向 B 站开出汽车 12 辆，而 B 站同时也向 A 站开出 8 辆汽车，实际上就是每隔 1 小时，A 站就减少 $12-8=4$（辆）汽车，而 B 站就增加 4 辆汽车。要使 B 站的汽车是 A 站的 3 倍，A 站只能有 $(26+30)\div(1+3)=14$（辆），必须减少 $26-14=12$（辆）。每小时减少 4 辆，所以要经过 $12\div4=3$（小时）。

解：$(26+30)\div(1+3)=14$（辆）

$(26-14)\div(12-8)=3$（小时）

答：3 小时后 B 站的公共汽车辆数是 A 站的 3 倍。

第 6 讲　平均数问题

一、对应训练

1. 芳芳第三次的成绩：$87\times3-85\times2=91$（分）

2. $(151\times18+152\times22)\div(18+22)=151.55$（厘米）
3. $(50\times2+43\times2+45\times2)\div2\div3=276\div6=46$（人）
4. $(100\times3+150\times3)-120\times5=150$，第三个数是150。
5. 设甲、乙两地相距 s 千米　$2s\div(s\div100+s\div60)=75$（千米）

二、变式训练

1. 解法一：三门功课的总分：$92\times3=276$（分）
   语文和自然的总分：$(92-2)\times2=180$（分）
   数学成绩 $276-180=96$（分）
   解法二：根据题意，语文、自然两门功课的平均成绩比语文、数学、自然三门功课的平均成绩少 2 分，因此，数学成绩要比语文、数学和自然三门功课的平均成绩 92 分高出 2×2 分，即 $92+2\times2=96$（分）。
2. 要想知道小芳的成绩在五人中（从高分到低分）的排名位置，只要求出小芳的成绩就行了。那四名同学的平均成绩是$(78+91+82+79)\div4=82.5$（分），加入小芳后，小芳的成绩比五人的平均成绩高 6 分，这 6 分平均分给这四个同学，$82.5+6\div4=84$（分）是五人的平均分，小芳的数学成绩为 $84+6=90$（分）。
   解：$(78+91+82+79)\div4$
   $=330\div4$
   $=82.5$（分）
   $82.5+6\div4=84$（分）
   $84+6=90$（分）
   答：小芳的成绩排在五人中的第二位。
3. 提示：假设依次去掉的数为 D、C、B、A，则：
   $A+B+C=38\times3$……①
   $A+B+D=74\times3$……②
   $A+C+D=50\times3$……③
   $B+C+D=62\times3$……④
   得　$A+B+C+D=38+74+50+62$
   解：平均数为：$\dfrac{A+B+C+D}{4}=56$

4. $[94\times(40-2)+100+90]\div40=94.05$（分）
5. 提示：求行全程的平均速度，应该用总路程除以行完总路程所用的时间。由于题中没有告诉我们从 A 地到 B 地的路程，更不能求出行全程所需要的时间了。但我们可以设出全程千米数，设全程为 24 千米（也可以设其他数），这样，就可以求出行完全程所用的时间是 $12\div12+12\div4=4$（小时），再求出行全程的平均速度：$24\div4=6$（千米/小时）。

   解：$24\div(12\div12+12\div4)=6$（千米/小时）

   答：叔叔行全程的平均速度是每小时 6 千米。

三、拔高训练

1. 提示：6 名评委所打的总分 $=9.6\times6=57.6$（分）……①

   去掉最高分后 5 名评委打的总分 $=5\times9.4=47$（分）……②

   去掉最低分后 5 名评委打的总分 $=5\times9.8=49$（分）……③

   由①、②得

   最高分：$57.6-47=10.6$（分）

   由①、③得

   最低分：$57.6-49=8.6$（分）

   去掉最高分和最低分后 4 名评委所打的平均分为

   $(57.6-10.6-8.6)\div4=9.6$（分）
2. 提示：用往返的路程除以往返所用的时间就等于往返两地的平均速度。显然，要求往返的平均速度必须先求出逆水行全程时所用的时间。因为 $360\div10=36$（千米）是顺水速度，它是汽艇的静水速度与水流速度的和，所以，此汽艇的静水速度是 $36-6=30$（千米），而逆水速度 = 静水速度 − 水流速度，所以汽艇的逆水速度是 $30-6=24$（千米）。逆水行全程时所用时间是 $360\div24=15$（小时），往返的平均速度是 $360\times2\div(10+15)=28.8$（千米/小时）。

   $360\div10-6\times2=24$（千米）

   $360\div24=15$（小时）

   $360\times2\div(10+15)=28.8$（千米/小时）

第 7 讲　列方程解应用题

一、对应训练

1. 提示：依据大雁塔“比小雁塔的 2 倍少 22 米”，可以确定这样的数量关系：小雁塔的高度 ×2 −22 米 = 大雁塔的高度。

   解：设小雁塔高 x 米

   $2x-22=64$

   $2x=64+22$

   $2x=86$

   $x=43$

2. 提示：我们可以设弟弟的岁数为 x 岁，那么，5 年前弟弟应该是$(x-5)$岁，哥哥是（15 −5）岁，然后根据“5 年前哥哥的岁数是弟弟的 5 倍”列出方程。

   解：设弟弟今年 x 岁

   $(x-5)\times5=15-5$

   $x=7$

3. 提示：和倍问题在列方程时，通常设 1 倍数为 x，以两个数的和为等量关系。

   解：设小华有 x 本书，则小芳的书有 $2x+5$ 本

   $x+2x+5=47$

   $x=14$

   小芳有书 $14\times2+5=33$（本）

4. 提示：深入分析可以看出老师不管怎样给同学们发本，本的总个数是一定的，即每人 6 本就多出 12 本表示的总本数与每人 7 本就少 11 本表示的总本数是相等的，所以可以列出如下方程解答。

   解：设有 x 个学生

   $6x+12=7x-11$

   $7x-6x=12+11$

   $x=23$

   $6\times23+12=150$（个）

答：有23个学生，150个本。

5. 方法1：设甲乙两地的距离是x千米，根据“路程÷速度=时间”可知小明去时用了$(x \div 6)$小时，回来时用了$(x \div 9)$小时。来回共用5小时，根据这个等量关系，便可列出方程求解。

解：设甲乙两地的距离是x千米，列方程得

$$x \div 6 + x \div 9 = 5$$

$$x = 18$$

方法2：用上面的设法列出方程在解方程时有些麻烦，我们可以采用间接设。即：设去时用了x小时，则回来时用了$(5-x)$小时，再根据甲、乙两地的距离是不变的，可列出方程并解答。

解：设去时用了x小时，则回来时用了$(5-x)$小时

$$6x = 9 \times (5 - x)$$

$$6x = 45 - 9x$$

$$15x = 45$$

$$x = 3$$

$6 \times 3 = 18$（千米）

二、变式训练

1. 提示：本题可设舞蹈队有x人，根据“合唱队的人数是舞蹈队的2倍还多3人”，那么合唱队就有$(2x+3)$人，再根据“合唱队比舞蹈队多47人”这一等量关系可列方程。

解：设舞蹈队有x人，则合唱队有$(2x+3)$人

$$2x + 3 - x = 47$$

$$x + 3 = 47$$

$$x = 44$$

$2 \times 44 + 3 = 91$（人）……合唱队的人数

2. 提示：设小明今年的岁数为x岁，则爸爸$5x$岁。然后根据2年后爸爸的岁数是小明的4倍列出方程。

解：设小明今年x岁，则爸爸为$5x$岁

$$(x+2) \times 4 = 5x + 2$$

$$4x + 8 = 5x + 2$$

$$x = 6$$

3. 提示：两个数相除商 3 余 10，表示被除数是除数的 3 倍还多 10，所以要设除数为 x，被除数就是 $3x+10$，列方程时要以被除数、除数、商及余数的和为等量关系列出等式。

解：设除数为 x

$$3x+10+x+3+10=143$$
$$4x+23=143$$
$$4x=143-23$$
$$4x=120$$
$$x=30$$

被除数：$30\times3+10=100$

4. 提示：这是一道盈亏问题，盈亏问题列方程时通常都是设份数为 x，以总数量为等量。这道题设小朋友人数为 x，饼干的数量等于糖的数量乘 2。

解：设有 x 个小朋友

$$7x-5=(3x+4)\times2$$
$$7x-5=6x+8$$
$$7x-6x=8+5$$
$$x=13$$

饼干：$13\times7-5=86$（块）

糖：$13\times3+4=43$（块）

答：有 13 个小朋友，饼干有 86 块，糖有 43 块。

5. 方法 1：直接设原来有排球 x 个，则足球有 $3x$ 个。$(3x-72)$就是借出足球的个数，用借出球的个数除以每班借出球的个数得班级数，即班级数可以用$(x\div5)$表示，也可以用$(3x-72)\div6$表示。

解：设原来有排球 x 个，则足球有 $3x$ 个

$$(3x-72)\div6=x\div5$$
$$x=40$$
$$3x=3\times40=120\text{（个）}$$

方法 2：还可以间接设有 x 个班级，那么，原来有排球 $5x$ 个，足球有$(6x+72)$个，再根据“足球个数是排球的 3 倍”列出方程。

解：设有 x 个班级

$5x\times3=6x+72$

$x=8$

$5x=5\times8=40$（个）

$6x+72=6\times8+72=120$（个）

答：体育室里原来有排球40个，足球120个。

三、拔高训练

1. 提示：这道题如果直接设这条公路长 x 米，列方程有一定难度，如果我们采取间接设法，把原来已修的米数用 x 表示，未修的长度就是 $3x$ 米，列出等量关系式：

（原来未修的米数 -300）$\div$（原来已修米数 $+300$）$=2$，就可以列出方程，求出原来已修的米数，再求这条路的全长就不难了。

解：设原来已修了 x 米，则原来未修的长度是 $3x$ 米，根据题意列方程

$3x-300=2(x+300)$

$x=900$

这条路未修的长度是 $3\times900=2700$（米）

这条路全长 $900+2700=3600$（米）

2. 提示：如果此题直接设问题——这批零件的总个数为 x，那么很难列出方程。可用间接设未知数的方法，设小王每天做零件 x 个，则师傅每天做 $(x+2)$ 个。小王请假5天，故工作时间为 $(30-5)$ 天，他完成的工作量为 $(30-5)x$ 个。师傅每天做 $(x+2)$ 个，30天完成的工作量为 $30(x+2)$ 个。由于小王请了假，完成的工作量只有师傅的一半，所以等量关系可以是：小王完成的工作量 $=$ 师傅完成的工作量 $\div2$。

解：设小王每天做 x 个，可列方程得

$(30-5)x=30\ (x+2)\div2$

$x=3$

师傅每天做 $3+2=5$（个）

零件总个数 $5\times30+3\times(30-5)=225$（个）

第8讲　行程问题（一）

一、对应训练

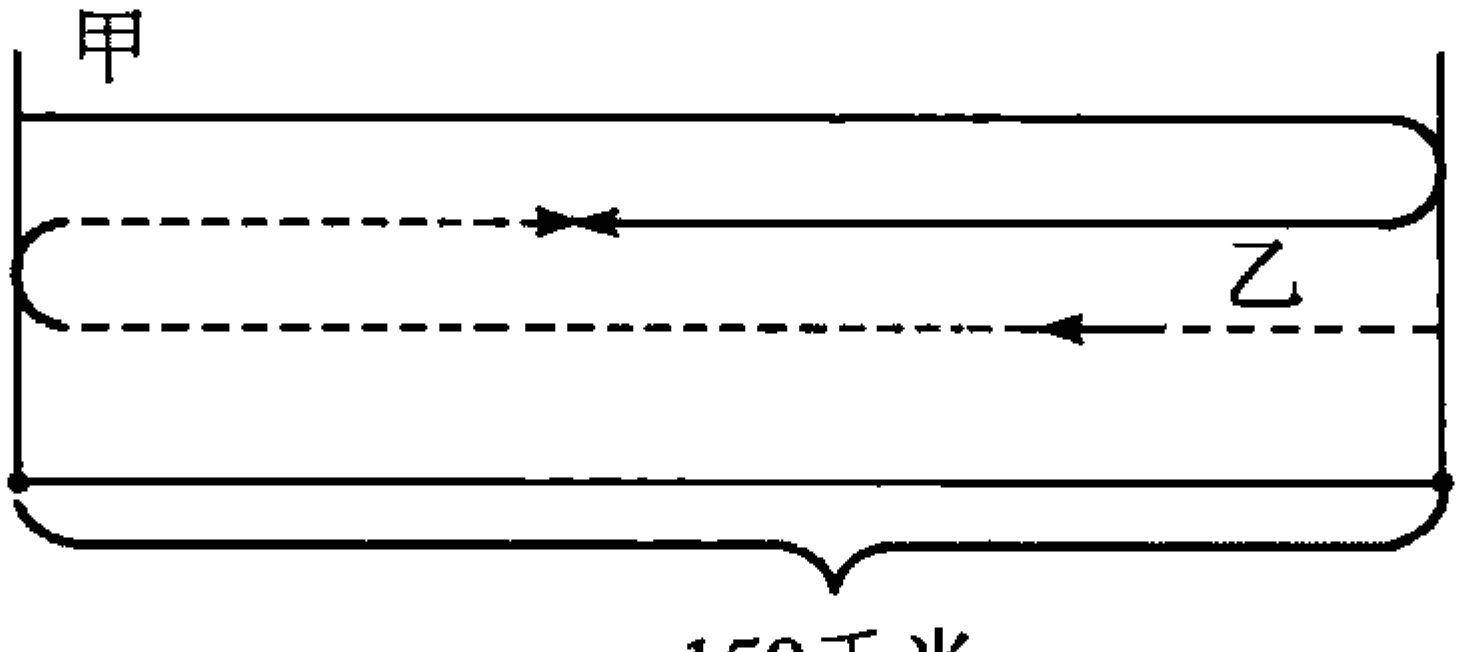
1. 提示：哥哥5分钟行 $120\times5=600$（米），这时哥哥已过中点50米，说明学校到家两地间路程的一半是 $600-50=550$（米），此时，弟弟行了 $550-50-30=470$（米），因此弟弟每分钟行 $470\div5=94$（米）。

   解：$(120\times5-50\times2-30)\div5$
   $=470\div5$
   $=94$（米）

2. 提示：根据题意我们知道，乙6分钟行 $6\times40=240$（米），相当于甲4分钟行的路程，所以甲每分钟行 $240\div4=60$（米），那么全长是：$60\times(6+4)=600$（米）。

   解：$40\times6\div4=60$（米）
   $60\times(6+4)=600$（米）

3. 提示：两车在各自到达终点之前就已经"相遇"了一次，他们返回后再次相遇，就成为"两次相遇"问题。我们不妨在桌面上实际演示一下，就能发现：



   两车第二次相遇时，他们共行了三倍全程，因此求时间就不困难了。

   解：$150\times3\div(14+11)$
   $=450\div25$
   $=18$（小时）

4. 提示：从中午 12 时到下午 14 时共经过 2 小时，2 小时里，快、慢两车从相距 50 千米到又相距 170 千米，共行 $50+170=220$（千米），两车的速度和是每小时 $220\div2=110$（千米）。从早上 6 时到 12 时共经过 6 小时，6 小时共行 $110\times6=660$（千米），因此 A、B 两地的距离是：$660+50=710$（千米）。

   解：$(50+170)\div2\times6=660$（千米）

   $660+50=710$（千米）

5. 提示：由题意可知，甲、乙两车同时行了 $11-8=3$（小时），合走了 3 个全程，共行 $36\times3=108$（千米），再根据甲走的路程比乙走的路程多 12 千米，可按和差问题的解题规律求出甲行的路程，进而求出甲的速度。

   解：甲行的路程：$(36\times3+12)\div2=60$（千米）

   甲的速度：$60\div(11-8)=20$（千米/小时）

二、变式训练

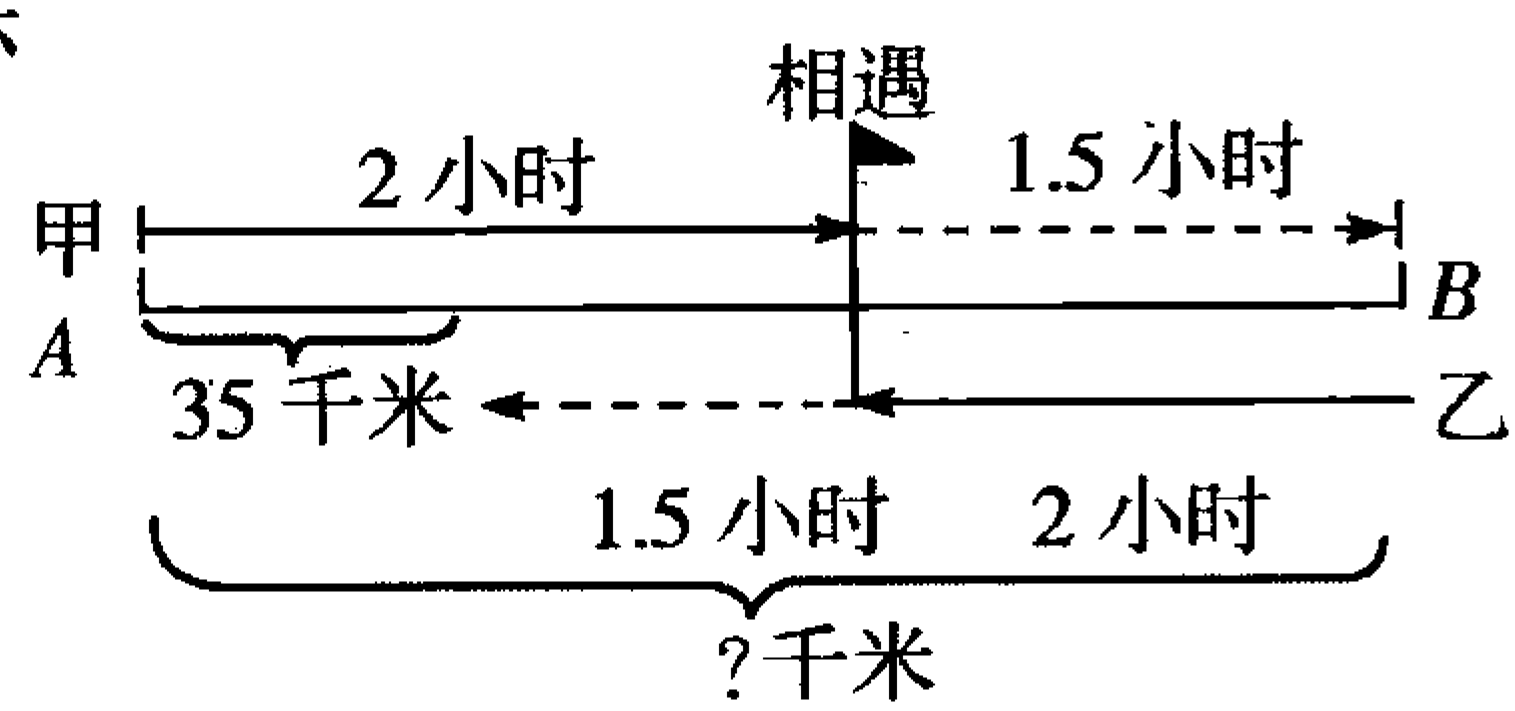
1. 提示：汽车每小时行 32 千米，4 小时行 $32\times4=128$（千米），这时汽车已过中点 8 千米，说明甲地到乙地间的路程的一半是 $128-8=120$（千米）。还剩下的路程为 $120-8=112$（千米），用剩下的路程除以改用每小时 56 千米的速度就得到要求的问题，即再行几小时到达乙地。

   解：$(32\times4-8\times2)\div56$

   $=112\div56$

   $=2$（小时）

2. 提示



从图中可以看出，甲、乙两车 2 小时的路程和比甲、乙两车 1.5 小时的总路程多 35 千米，所以甲、乙两车的速度和是 $35\div(2-1.5)=70$（千米/小时），A、B 两地的距离是 70×2

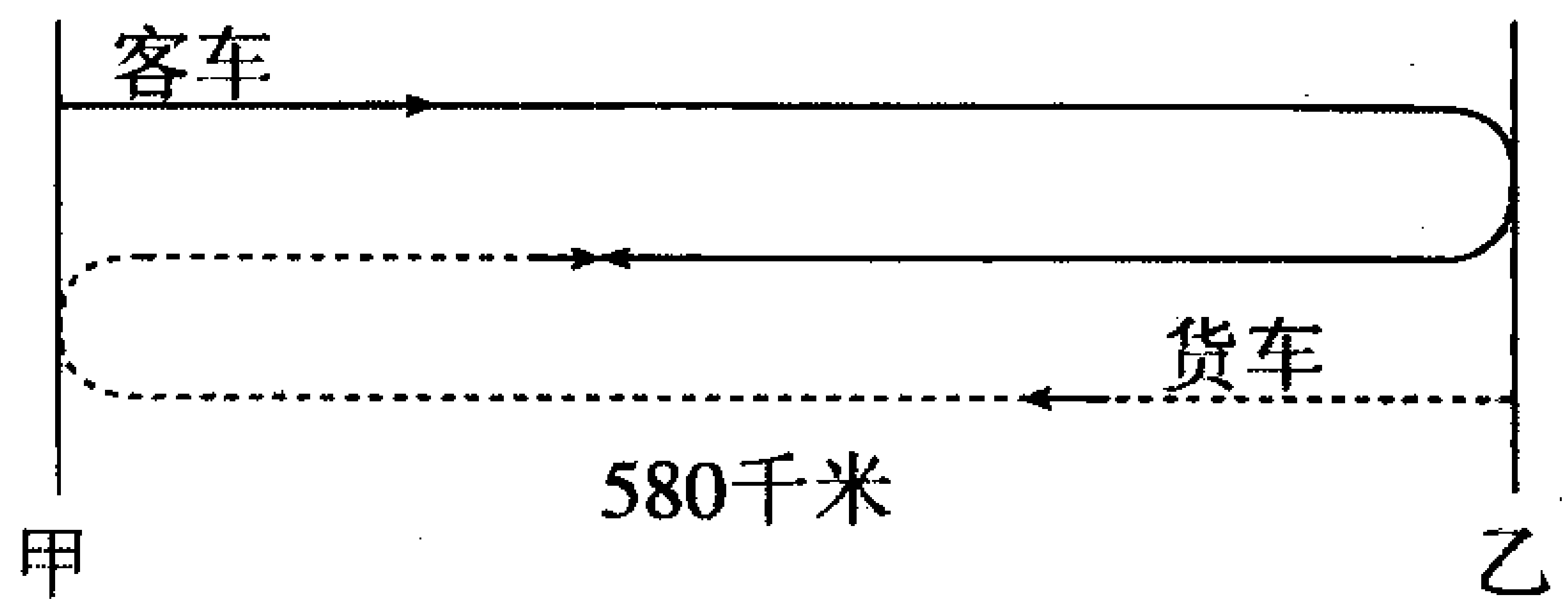
=140（千米）。

解：　35÷(2-1.5)×2

　　=70×2

　　=140（千米）

3. 提示：两车在各自到达终点之前就已经“相遇”了一次，它们返回后再次相遇，就成为“两次相遇”问题。我们不妨在桌面上实际演示一下，就能发现：



两车第二次相遇时，它们共行了三倍全程，因此求时间就不困难了。

解：　580×3÷(45+42)+1

　　=1740÷87+1

　　=20+1

　　=21（小时）

4. 提示：两人每小时都少行了 2 千米，速度和就少了 2×2=4（千米/小时），这样就要 12 小时才能相遇，多用了 2 小时。我们可以看成减速后先行了 10 小时，这时两人并不能相遇，两人之间应相距 2×2×10=40（千米），这段路就是后面 12-10=2（小时）行的。这段路长除以 2 小时求出的是减速后的速度和，再乘以 12 就求出了两地距离。

解：10 小时两人少行的千米数：2×2×10=40（千米）

减速后两人每小时共行的路程：40÷(12-10)=20（千米）

两地距离：20×12=240（千米）

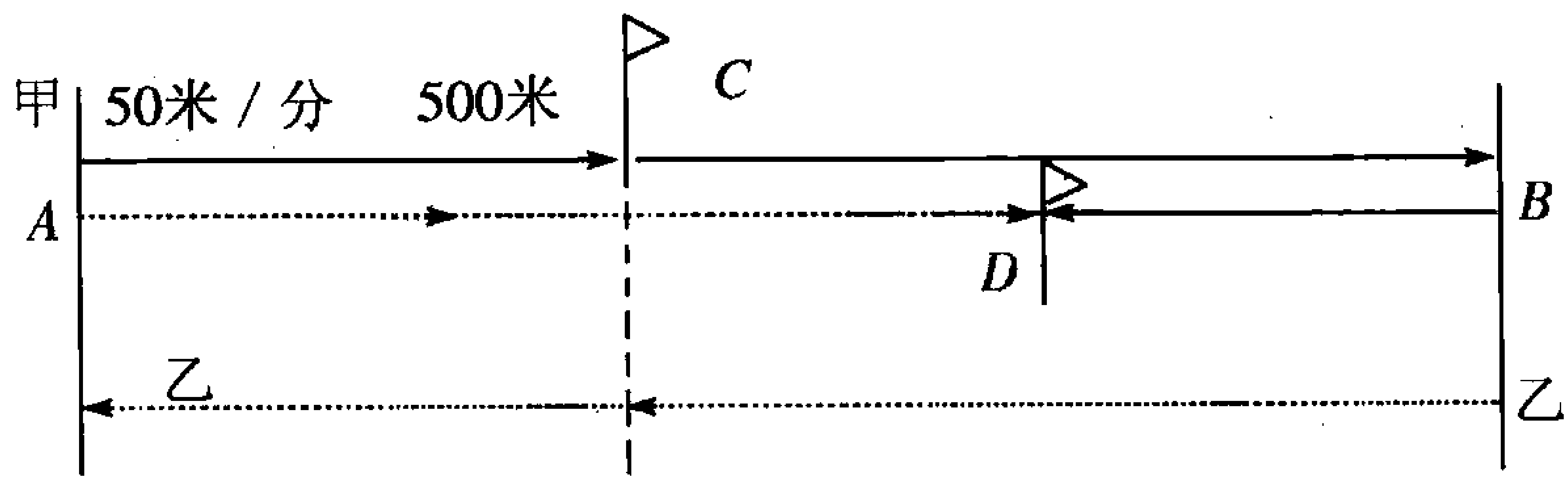
5. 提示：客货两车从出发到第二次相遇，一共行了三个全程。第二次相遇时客车比货车多行了 21.6 千米，说明两车已行了 21.6÷(54-48)=3.6（小时），用速度和乘以所行时间就得到 3 个路程的和，再除以 3 就得到甲、乙两站间的路程。

解：$21.6\div(54-48)=3.6$（小时）

$(54+48)\times3.6\div3=122.4$（千米）

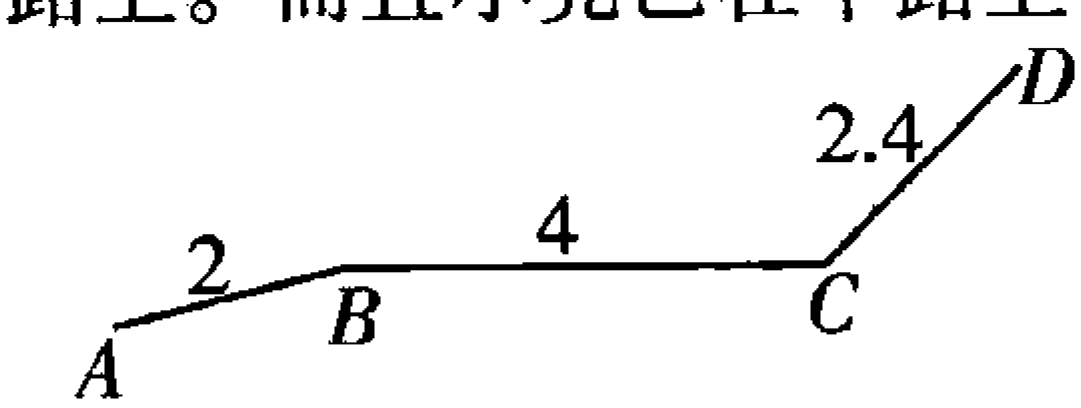
三、拔高训练

1. 提示：根据题意作图如下



甲、乙两人第一次在离 A 地 500 米的 C 处相遇，甲、乙两人所行的路程正好是 AB 两地的距离，也就是说，当两人合行完 AB 两地间的距离时，甲行了 500 米。第二次相遇时，两人合行的路程是 AB 两地距离的 3 倍，因此，这时甲所行的路程是 $500\times3=1500$（米），由甲的速度和甲第一次相遇时行的路程可求出第一次相遇时，甲行的时间是：$500\div50=10$（分），即第一次相遇用的时间，AB 两地间路程为 $(50+70)\times10=1200$（米）。那么，第二次相遇 D 处与 B 地相距 $1500-1200=300$（米），由图上可看出 CD 之间的距离是 $1200-500-300=400$（米）。

2. 提示：首先要判断他们在什么路上相遇。小明上坡要走 $2\div2=1$（小时），小亮下坡要走 $2.4\div6=0.4$（小时），还有 $1-0.4=0.6$ 小时，平路上 0.6 小时可走 $4\times0.6=2.4$（千米）。由此可以判断，他们的相遇点在平路上。而且小亮已在平路上走了 0.6 小时的路程，剩下的路程就是他们在平路上共同行走的路程，根据这个路程再求他们这段路程的相遇时间。



解：$4\times(2\div2-2.4\div6)=2.4$（千米）

$2.4\div(4+4)=0.3$（小时）

$2\div2+0.3=1.3$（小时）

答：他们经过 1.3 小时相遇。

第9讲 行程问题（二）

一、对应训练

1. 提示：由题意知，当小强掉头去追小亮时的路程差正好是小强小亮两人3分钟行的路程：$(60+70)\times3=390$（米），那么根据追及路程÷速度差=追及时间可得：$390\div(70-60)=39$（分）

   解：$(60+70)\times3\div(70-60)$
   $=390\div10$
   $=39$（分）

2. 提示：若甲让乙先跑10米，则路程差为10米，于是可求出甲、乙速度差每秒$10\div5=2$米。若甲让乙先跑3秒追及时间要6秒，于是可求路程差$2\times6=12$（米），这是乙先跑3秒钟的路程，所以乙的速度为每秒$12\div3=4$（米）。

   解：$10\div5\times6\div3=4$（米/秒）

3. 提示：队伍长300米，李老师从排尾追到排头，追上排头第一人是追及问题，追及距离是队伍长度，共300米，速度差是$(1.5-1)$米，这样就可以求出李老师从排尾到排头用了多少秒，李老师从排头到排尾，与排尾最后一人相遇是相遇问题，距离是300米，速度和是$1.5+1=2.5$（米），这样就可以求相遇时间。

   解：李老师从排尾到排头用的时间：
   $300\div(1.5-1)=600$（秒）$=10$（分）
   李老师从排头到排尾用的时间：
   $300\div(1.5+1)=120$（秒）$=2$（分）
   李老师一共用的时间：
   $10+2=12$（分）

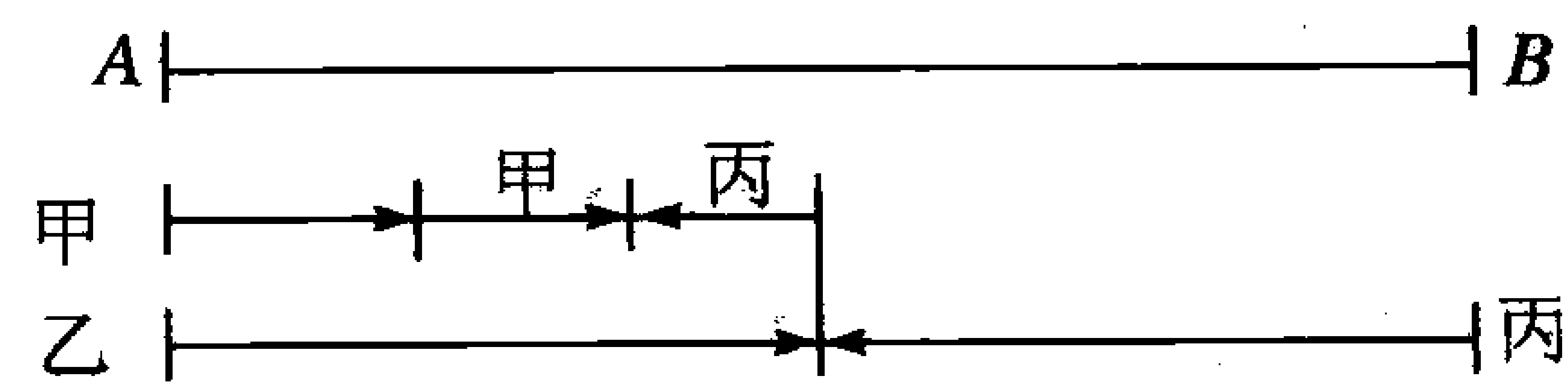
4. 提示：火车通过隧道和大桥所行的路程包括隧道或大桥的长度和它自身的长度。火车通过隧道与大桥的长度差是$987-861=126$（米），时间差是$58-52=6$（秒），用路程差除以时间差，就可以求得火车的速度，即$126\div6=21$（米/秒），用火车的

速度乘通过隧道的时间 $21\times58=1218$（米），求得隧道和车身的总长，减去隧道长就得到车身长 $1218-987=231$（米）。

解：火车速度：$(987-861)\div(58-52)=21$（米/秒）

火车身长：$21\times58-987=231$（米）

5. 提示：



从图中看出，乙、丙相遇时，甲、乙的路程差为 $(50+70)\times2=240$（米），即乙比甲多行了 240 米，而乙速比甲速每分钟快 $60-50=10$（米），那么 240 米是在 $240\div10=24$（分钟）内多行出来的，又知乙超越甲的时间也是乙、丙相遇的时间。所以乙、丙的相遇距离，即 A、B 两地的距离。

解：$(50+70)\times2\div(60-50)$

$=240\div10$

$=24$（分钟）

$(60+70)\times24$

$=130\times24$

$=3120$（米）

答：A、B 两地相距 3120 米。

二、变式训练

1. 提示：两人同时背向走了 4 分钟，两人之间的距离为：$(60+50)\times4=440$（米），这时哥哥掉头追弟弟，就要追 440 米，哥哥每分钟能追弟弟 $60-50=10$（米），所以要追 $440\div10=44$（分钟），这时哥哥一共走了 $44+4=48$（分），追上弟弟时哥哥共走了 $60\times48=2880$（米）。

解：两人同时背相走了 4 分钟，两人之间的距离：

$(60+50)\times4=440$（米）

哥哥追弟弟还要花的时间：

$440\div(60-50)=44$（分钟）

哥哥一共走的路程：

$60\times(44+4)=2880$（米）

2. 提示：若甲让乙先跑 14 米，则路程差为 14 米，于是可求甲乙速度差每秒 $14\div7=2$（米）。若甲让乙先跑 4 秒，追及时间要 8 秒，于是可求路程差：$2\times8=16$（米），这是乙先跑 4 秒跑的路程，所以乙的速度为每秒 $16\div4=4$（米），甲的速度为每秒 $14\div7+4=6$（米）。

解：乙的速度：$14\div7\times8\div4=4$（米/秒）

甲的速度：$14\div7+4=6$（米/秒）

3. 提示：队伍长 600 米，王老师从排尾追到排头，追上排头第一人是追及问题，追及距离是队伍长度，共 600 米，速度差是 $(1.5-1)$米，这样就可以求出王老师从排尾到排头用了多少秒；王老师从排头到排尾，与排尾最后一人相遇是相遇问题，距离是 600 米，速度和是 $1.5+1=2.5$（米），这样就可以求相遇时间，最后用王老师共用的时间乘以速度就得到王老师一共行的路程。

解：王老师从排尾到排头用的时间：

$600\div(1.5-1)=1200$（秒）$=20$（分）

王老师从排头到排尾用的时间：

$600\div(1.5+1)=240$（秒）$=4$（分）

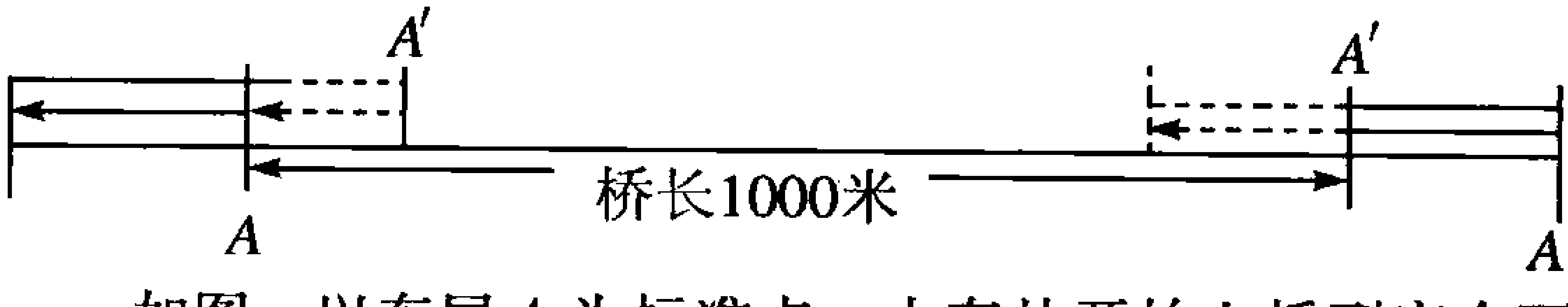
王老师共行的时间：

$20+4=24$（分）

王老师共行的路程：

$1.5\times(24\times60)=2160$（米）

4. 提示：



如图，以车尾 A 为标准点，火车从开始上桥到完全下桥，行的距离是一个桥长与一个车身长的和（$A\longrightarrow A$），用了 120 秒；整列火车完全在桥上，是从车尾刚离开桥的一端的霎那间到火车头到达桥的另一端的刹那间。火车行的距离是一个桥长与一个车身长的差（$A'-A'$），用了 80 秒。把这两组条件列成

如下形式：

桥长 1000 + 车长 $\Longleftrightarrow$ 120 秒

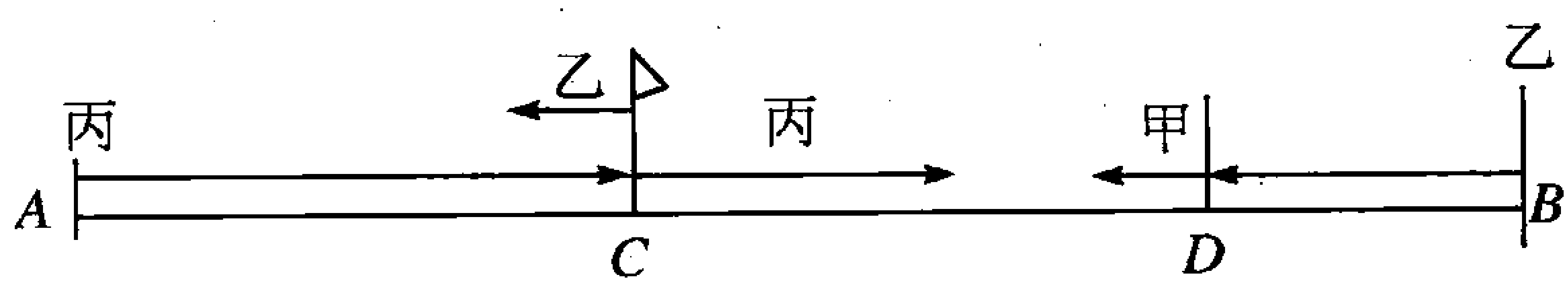
桥长 1000 − 车长 $\Longleftrightarrow$ 80 秒

比较可以得出，火车行的两个车身距离用 $120-80=40$（秒），行一个车身距离用 $40\div2=20$（秒）。那么行一个桥长 1000 米需要用时间 $120-20=100$（秒），可以求出火车的速度 $1000\div100=10$（米/秒）；火车的长度 $10\times20=200$（米）。

解：火车的速度：$1000\div[120-(120-80)\div2]=10$（米/秒）

火车的长度：$10\times20=200$（米）

5. 提示：根据题意，我们假定丙在 C 地与乙相遇，同时假定此时甲正好走到 D 地，作图如下：



因为丙与乙相遇之后又过 2 分钟遇到甲，由此可求 CD 之间的距离，列式为：$(60+100)\times2=320$（米），这又表示乙与丙相遇的时候，乙比甲多行了 320 米。因为乙比甲速度快，运用追及的解题思路，可求出甲、乙各走了多少分钟，列式为：$320\div(80-60)=16$（分），这 16 分钟又恰好是乙、丙相遇的时间，又知道乙、丙各自的速度，再来求 AB 之间的路程，列式为：$(80+100)\times16=2880$（米），用 AB 之间的路程 $2880\div60=48$（分），求出甲用的时间。

解：乙丙相遇时间：$(60+100)\times2\div(80-60)=16$（分）

甲行 AB 用的时间：$(80+100)\times16\div60=48$（分）

三、拔高训练

1. 提示：火车行驶速度为每小时 60 千米，即每分钟 1 千米。火车从车头进入第一隧道到车尾离开第一隧道用了 3 分钟，就是火车以每分钟 1 千米的速度在 3 分钟内行了第一隧道 + 车身长的路程，即 $1\times3=3$ 千米，第一隧道的长度为 3000 米 − 600 米 = 2400 米。同理可求出第二隧道长 3400 米。

又因火车头进入第一隧道至车尾离开第二隧道用了 9 分钟，

可以得出火车在9分钟内行了第一隧道+第二隧道+火车车身长+第一、二隧道间距离那么一段路程。由此，可算出第一、二隧道间的距离。

解答：60千米/小时=1千米/分=1000米/分

$1000 \times 3 = 3000$（米）

第一隧道：$3000 - 600 = 2400$（米）

$1000 \times 4 = 4000$（米）

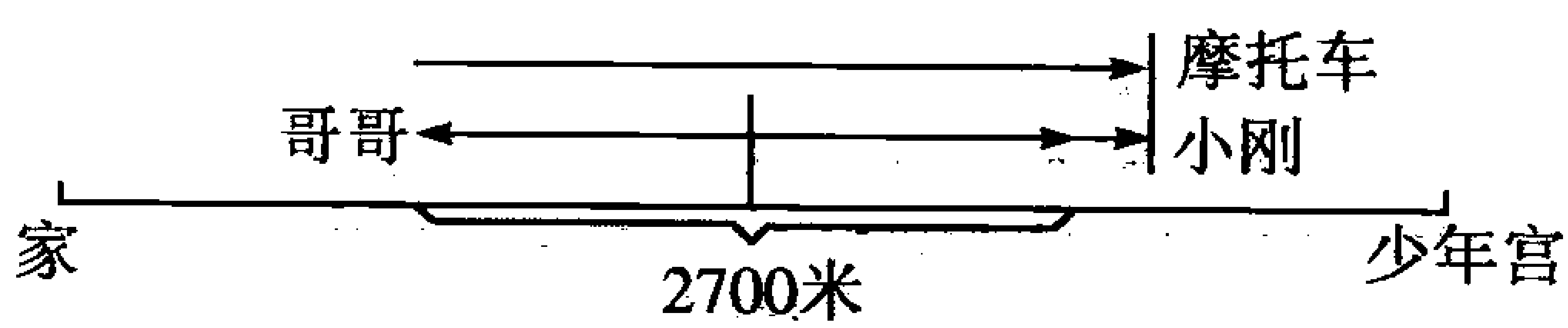
第二隧道：$4000 - 600 = 3400$（米）

$1000 \times 9 = 9000$（米）

$9000 - 2400 - 3400 - 600 = 2600$（米）

答：第一、二隧道之间相距2600米。

2. 提示：如图所示，6千米（即6000米）的路程预计2小时（即120分钟）到达，步行速度为每分钟 $6000 \div 120 = 50$（米），当哥哥往回走了27分钟，弟弟也同时走了27分钟，这时兄弟俩相距 $50 \times 27 \times 2 = 2700$（米）。



这2700米就是摩托车要追赶小刚的路程，因为摩托车的车速每小时30千米，也就是每分钟500米，每1分钟摩托车比步行多行 $500 - 50 = 450$（米），赶上小刚要 $2700 \div 450 = 6$（分钟），这时离少年宫还有的路程：$6000 \div 2 - 50 \times (27 + 6) = 1350$（米）。

解：6千米=6000米　2小时=120分钟

30千米/小时=500米/分钟

步行的速度：$6000 \div 120 = 50$（米/分钟）

摩托车追上小刚用的时间：

$50 \times 27 \times 2 \div (500 - 50) = 6$（分钟）

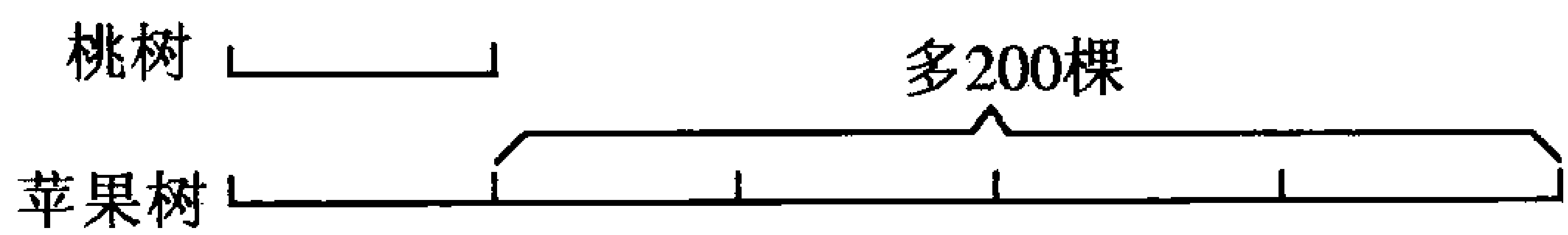
离少年宫还有的路程：

$6000 \div 2 - 50 \times (27 + 6) = 1350$（米）

第 10 讲　作图法解应用题

一、对应训练

1. 提示：根据题意作出示意图：

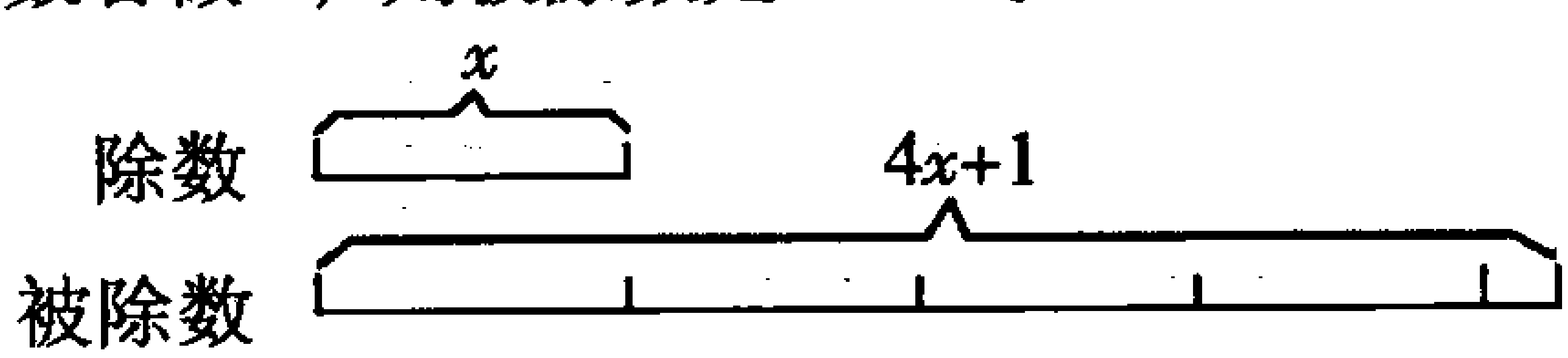


由图可知其差 200 恰为桃树棵树的（5 − 1）倍，由此可以求出桃树的棵树。

桃树：200 ÷（5 − 1）= 50（棵）

苹果树：50 × 5 = 250（棵）或　50 + 200 = 250（棵）

2. 提示：根据题意可知，被除数 = 除数 × 4 + 1。被除数是除数的 4 倍还多 1，就可以用线段图表示出它们之间的关系：如图，把除数看做 x，则被除数是 $4x+1$。



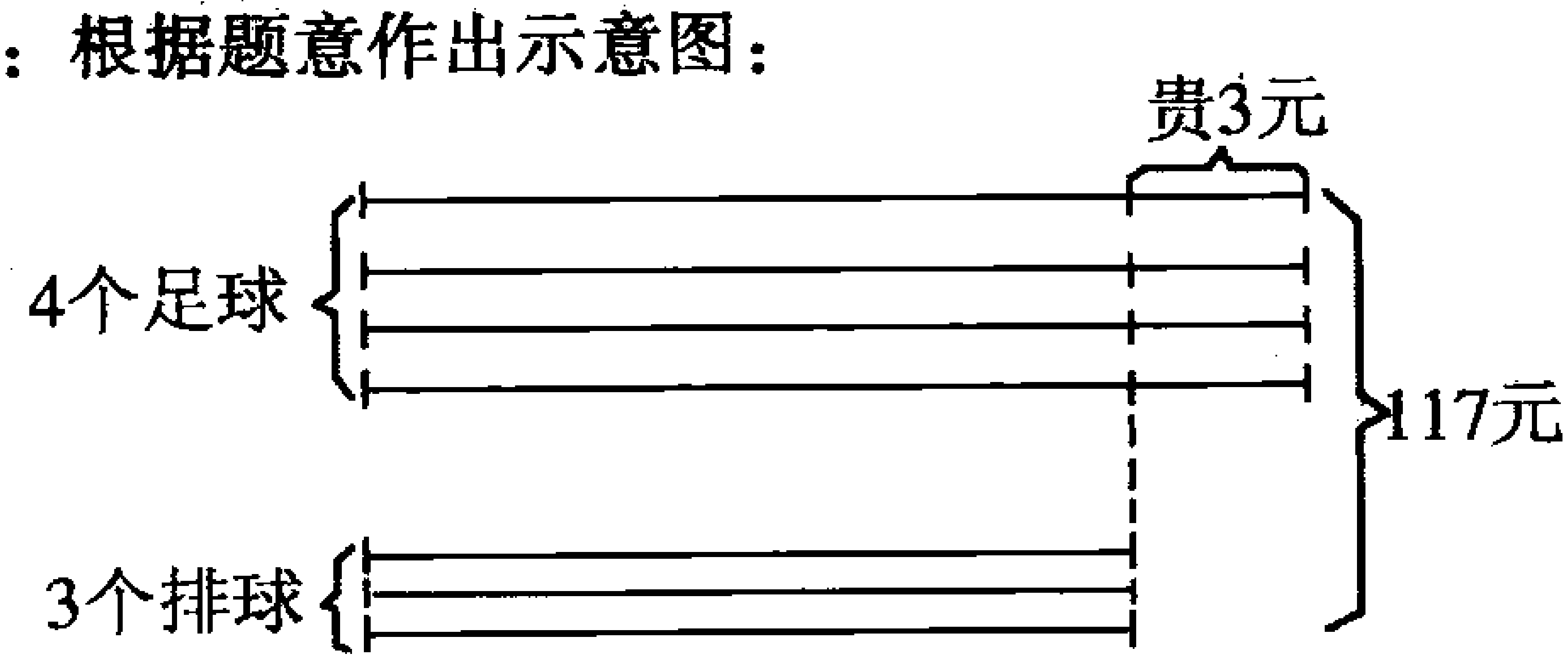
设除数是 x，则被除数是 $4x+1$，列方程得

$$x+4x+1+4+1=156$$

$$x=30$$

算术方法：$(156-4-1\times2)\div(1+4)=30$

3. 提示：根据题意作出示意图：



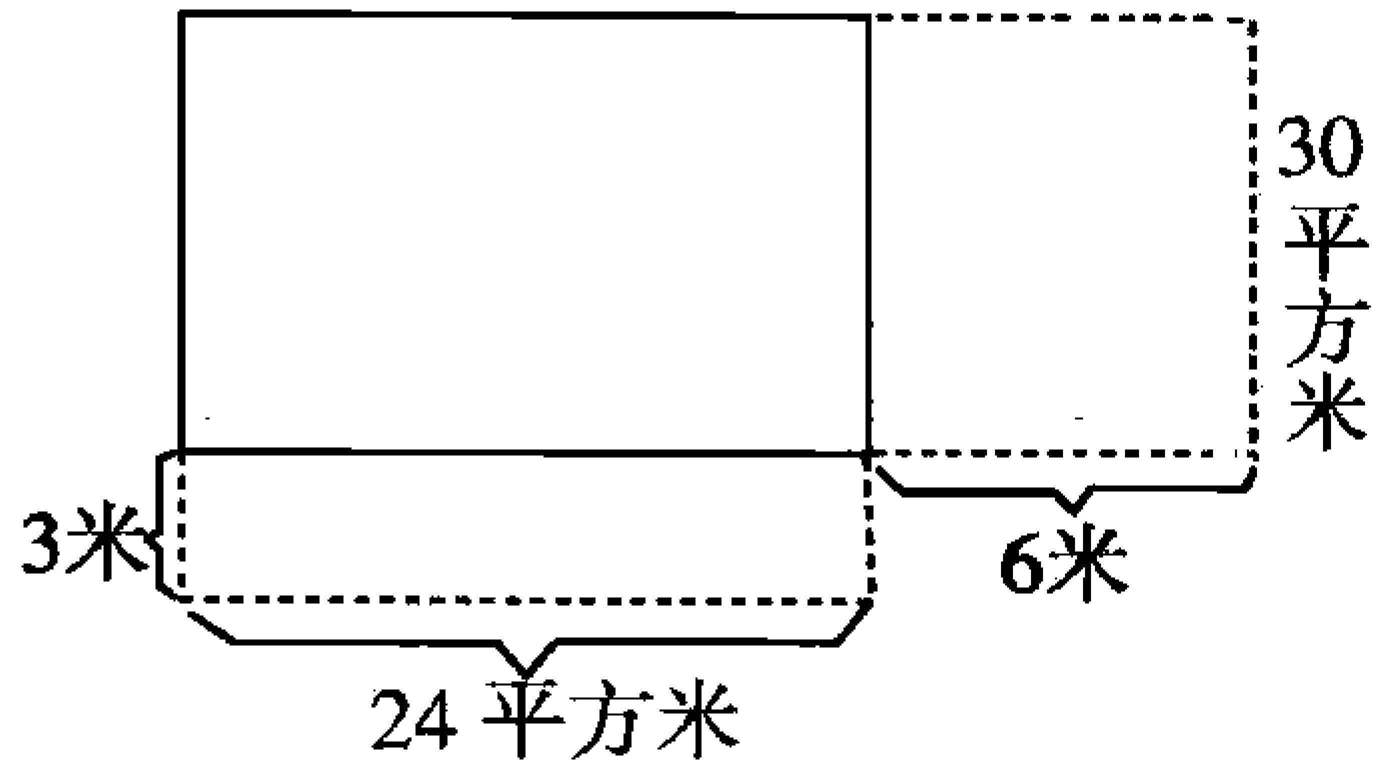
从图中可以看出，如果每个足球便宜 3 元，则和每个排球

的价钱相同，从总共117 元中减去(3 ×4)元，余下的钱刚好买(4 +3)个排球，由此可求得排球的售价，进而求得足球的售价。

每个排球多少元：(117 −3 ×4) ÷(4 +3) =15（元）

每个足球多少元：15 +3 =18（元）

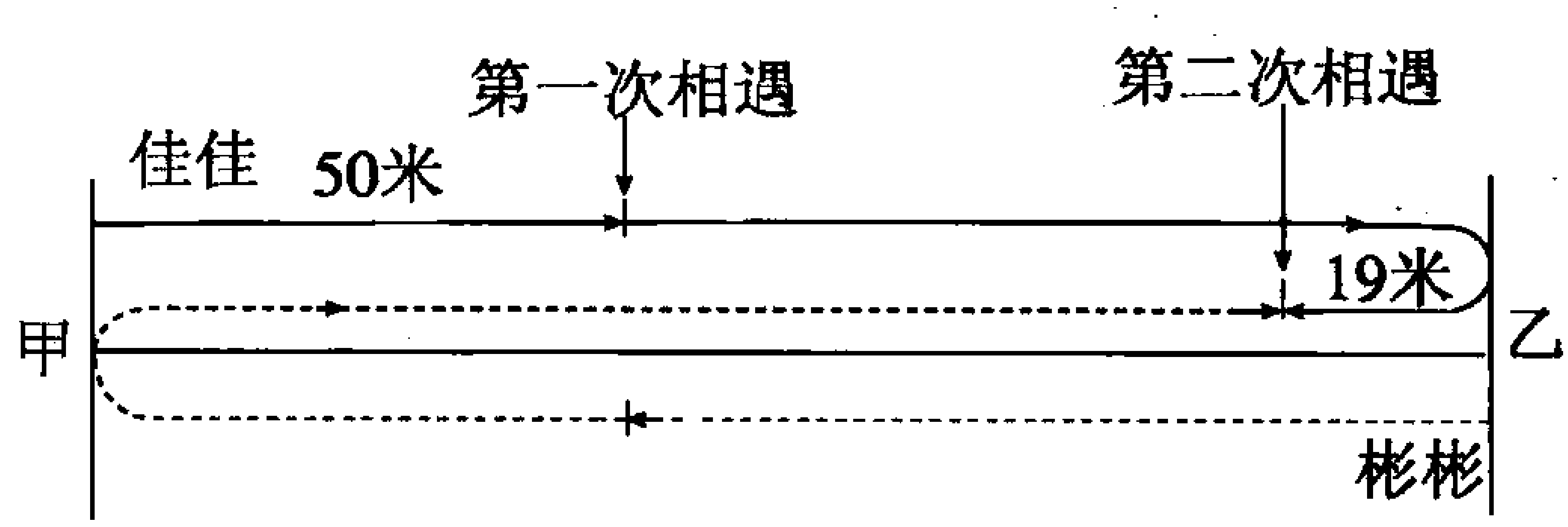
4. 提示：根据题意作出示意图：



根据“宽不变，长增加6 米，面积就增加30 平方米”，可以求出宽是：30 ÷6 =5（米），根据“长不变，宽增加3 米，面积就增加24 平方米”，可求出长是24 ÷3 =8（米）。

原长方形面积是：(30 ÷6) ×(24 ÷3) =40（平方米）

5. 提示：佳佳是从甲地向乙地走的，他们在第一次相遇时“距离甲地50 米”，表示佳佳在第一次相遇时走了50 米。因为“两次相遇，共走三倍路程”，即可知在第二次相遇时，佳佳必定共走了三个“50 米”。这又与此时的“距乙地19 米”有什么联系呢？还是作出示意图来看看吧：

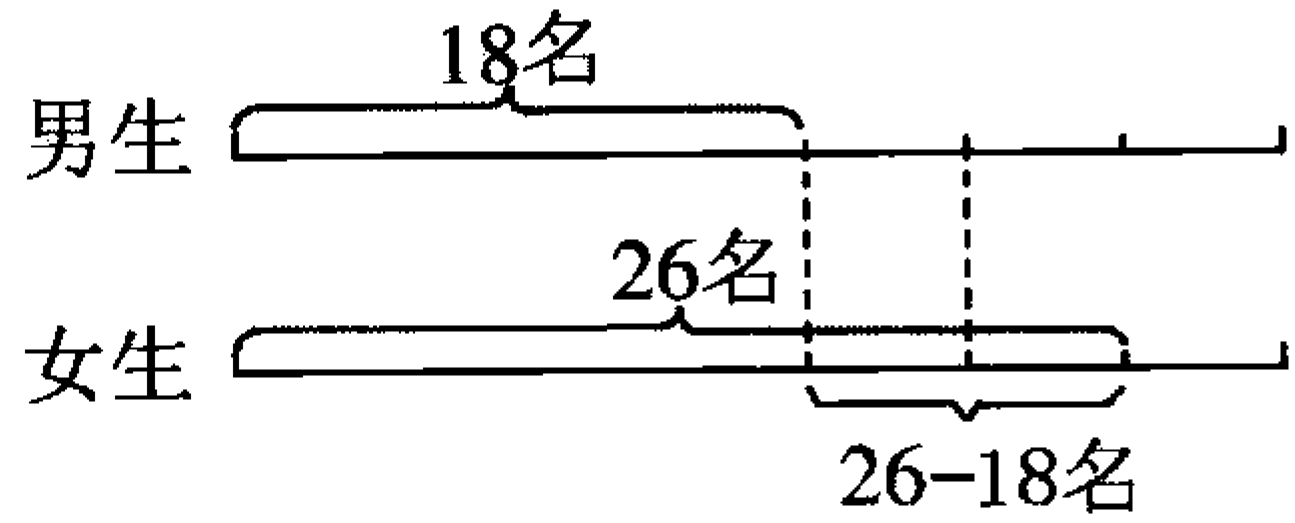


在观察这幅示意图时，我们可以“撇开”彬彬，而只看佳佳，佳佳所走的路程恰好比全程多19 米。由此求全程，列式为：

50 ×3 −19 =150 −19 =131（米）

二、变式训练

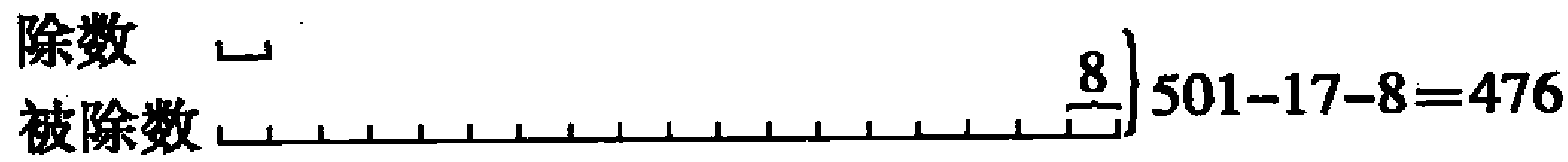
1. 提示：根据“男生人数和女生人数同样多”这个条件，我们可以用相同长度的线段表示这两个量。选派的人数不好确定其长度，我们可以进一步分析——“剩下的男生是女生的 3 倍”，可知男生剩下的线段要平均分成 3 份，而女生剩下的就是 1 份。前面即抽走的人数，如下图所示：



从图中可以看出，由于女生比男生多选了 $26-18=8$（名）学生参加实践活动，若女生少选 8 人，则剩下的男女生人数同样多。根据“剩下的男生人数是女生的 3 倍”，可知剩下的男生人数比女生人数多 2 倍（$3-1=2$）。这 8 名同学就相当于剩下女生人数的 2 倍，剩下的女生是 $8\div2=4$（名），共有女生 $4+26=30$（名）。由于男女生人数相等，即都是 30 名，详解如下：

$(26-18)\div(3-1)+26=30$（名）

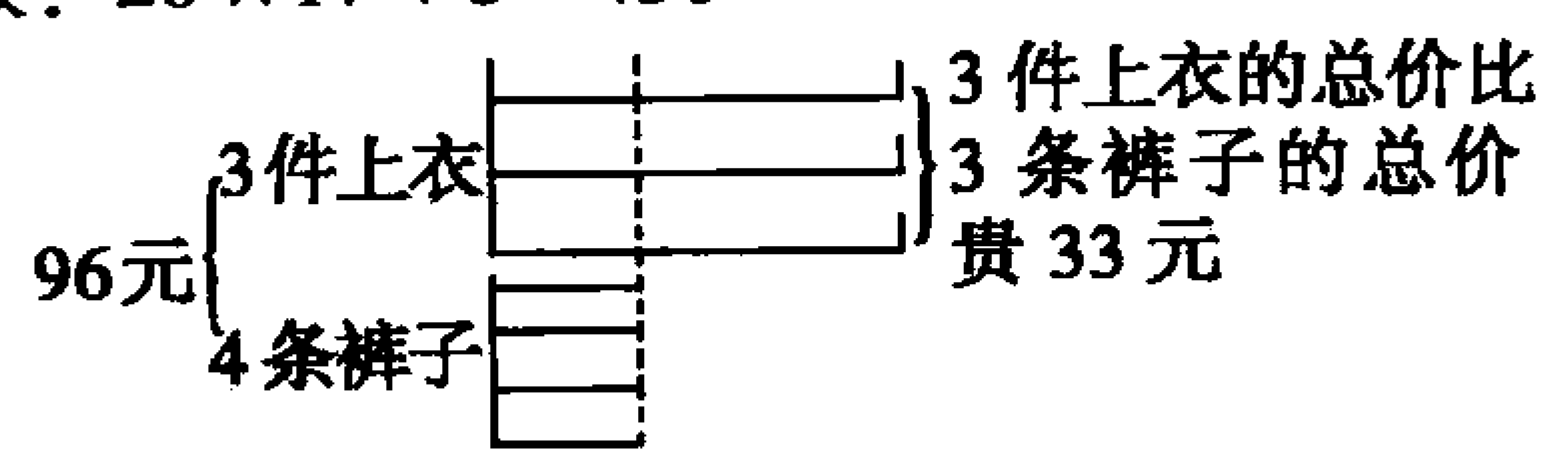
2. 提示：从 501 里去掉商和余数，$501-17-8=476$。它是除数与被除数的和，但此时被除数还有余数 8，去掉 $476-8=468$，才是除数的 $1+17=18$（倍）。



除数：$(501-17-8-8)\div(1+17)=26$

被除数：$26\times17+8=450$

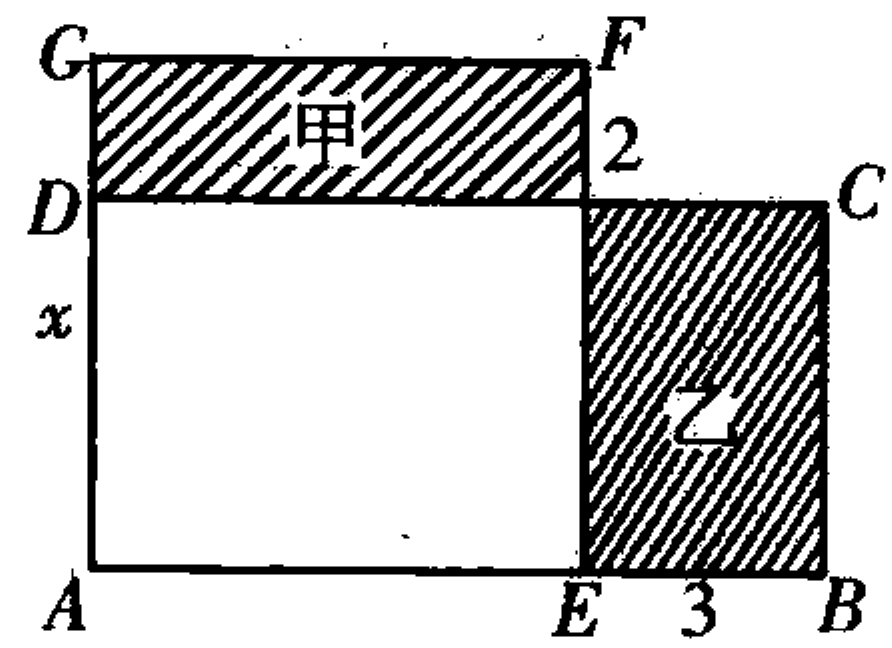
3. 提示：



解：裤子：$(96-33)\div(3+4)=9$（元）

上衣：$9+33\div3=20$（元）

4. 提示：如图 $ABCD$ 为长方形，$AEFG$ 为转换位后的正方形，两个图形的面积相等，可知两个阴影部分甲、乙的面积相等，设新正方形的边长为 x 分米，长方形甲的长也是 x 分米，则长方形乙的长是 $(x-2)$ 分米。



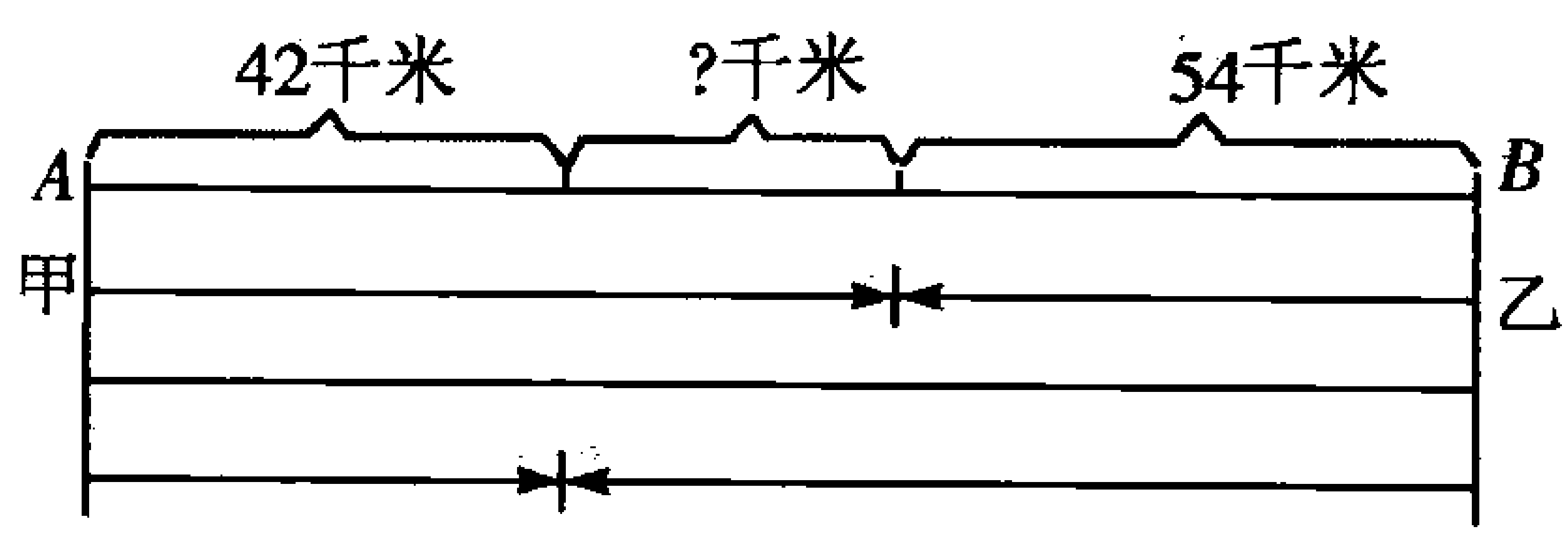
可以列出方程式 $(x-2)\times3=x\times2$，求出 x 的值就可以解出正方形的面积。

解：设正方形的边长为 x 分米，则长方形乙的长是 $(x-2)$ 分米。

$$(x-2)\times3=x\times2$$
$$3x-6=2x$$
$$x=6$$

正方形的面积：$6\times6=36$（平方分米）

5. 提示：如图



从出发到第一次相遇，两车共行了 A、B 间的一个全程，其中乙行了 54 千米；从出发到第二次相遇两车共行了 A、B 间的 3 个全程。乙共行了 $54\times3=162$（千米）。乙行的路程比 A、B 间全程多 42 千米。

所以，A、B 间的距离为 $162-42=120$（千米）

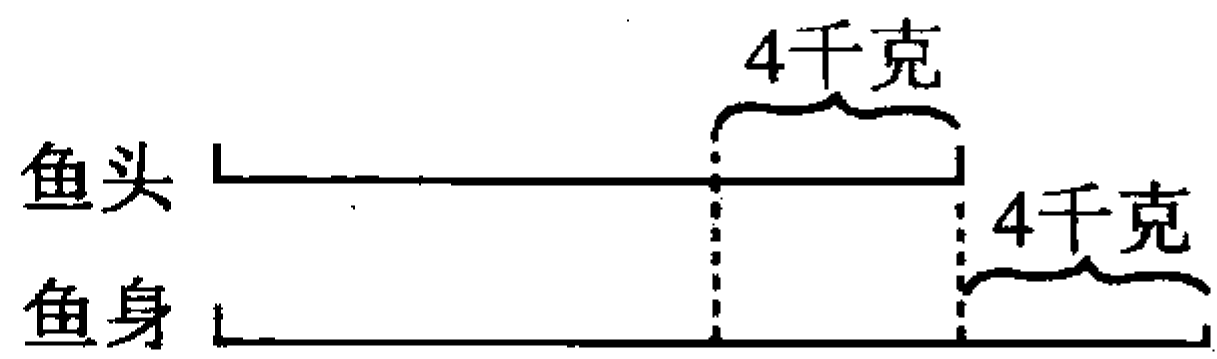
从而可算出两次相遇地点的距离：$120-54-42=24$（千米）

三、拔高训练

1. 提示：由题意可知，鱼身的重量比鱼头的重量多 4 千克，而鱼头的重量等于鱼身重量的一半加上 4 千克。据此，画线段图如下：

从上图中可以看出，鱼身重量的一半是 $4+4=8$（千克）

本题乍看鱼头、鱼身、鱼尾之间的数量关系错综复杂，难



理头绪。这时应将“鱼尾重4千克”这个已知条件代入叙述鱼头、鱼身重量之间的关系的句子中，以便及时理清它们之间的数量关系。

解：（1）鱼身重多少千克？

$(4+4)\times 2=16$（千克）

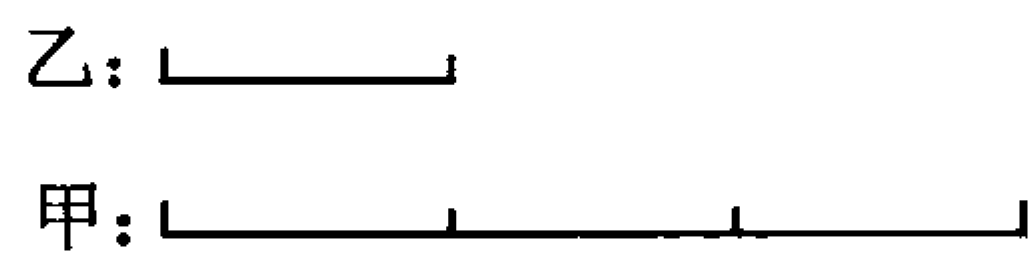
（2）鱼头重多少千克？

$16-4=12$（千克）

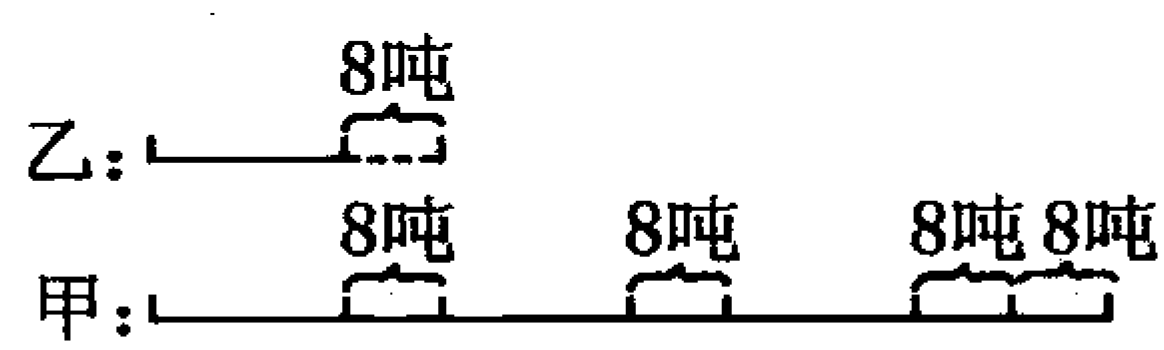
（3）这条鱼重多少千克？

$12+16+4=32$（千克）

2. 提示：根据题意画出甲堆是乙堆3倍的线段图：



甲堆增加8吨，乙堆减少8吨后，线段图是：



从图上可以看出，乙堆煤分成了两个部分：8吨和剩下的。甲堆原来是乙堆的3倍，也就是有3份的乙，那么每一份也可以像乙一样分成两部分，8吨和乙还剩下的。甲现在的重量比乙剩下重量的3倍还多$8\times 3+8=32$（吨），而甲现在是乙的5倍，那么32吨就相当于乙剩下重量的$5-3=2$倍，这样就可以求出乙剩下的重量，再加上8吨就得乙原来的重量，进而求出甲堆的重量。

解：$(8\times 3+8)\div(5-3)+8=24$（吨）

$24\times 3=72$（吨）

第 11 讲　排列与组合

一、对应训练

1. 提示：排数时要注意“0”不能排在最高位，(1) 十位上排 3，个位上有两个数字可选，这样的数共有两个 30，36。(2) 十位上排 6，个位上也有两个数字可选，这样的数字也有两个，60，63。一共可以排成 $2\times2=4$（个）。
2. (1) 5 个队进行单循环赛，也就是 5 个队中每两个队都要赛一场。设 5 个队分别为：A、B、C、D、E 队。A 队要和其他 4 个队分别比赛一场，共赛 4 场；接着 B 队和其他的 C、D、E 队分别赛一场，共赛 3 场；C 队分别和 D、E 队比赛，赛 2 场；D 队只要与 E 队赛 1 场；这时 E 队已经和前面 4 个队都赛过了，所以共赛了 $4+3+2+1=10$（场）。
   (2) 40 名运动员进行淘汰赛，即每淘汰 1 名运动员就要进行一场比赛，到最后决出冠军共要淘汰 $40-1=39$（名）运动员，所以共打了 39 场球。
3. 提示：如果不按一定的顺序去思考，就可能出现遗漏或重复的取法。因此，我们可以按照从大到小、从少到多的顺序，先排 5 元的，再排 2 元的，最后排 1 元的，把可以组成 8 元的情况一一列举出来。

5 元	2 元	1 元
1	1	1
1	0	3
0	4	0
0	3	2
0	2	4
0	1	6
0	0	8

从上面可以看出，要支付 8 元钱，共有 7 种不同的支付方法。

4. 提示：地图着色可以分成四个步骤，在图（1）中，第一步给 A 着色，有 4 种方法，第二步给 B 着色，因 A、B 相邻，B 只有 3 种颜色可选。第三步给 C 着色，C 与 B、A 相邻，只能取 2 种颜色。第四步给 D 着色，D 与 B、C 相邻，因而要去掉两种颜色，只有 2 种颜色可取。

在图（2）中 A 着色后，可将 B、C 的着色分为相同与不同两类去考虑，染色的顺序为 A、B、C、D。

（1）根据乘法原理有：

$4\times3\times2\times2=48$（种）

（2）当 B、C 染的颜色相同时有：

$4\times3\times1\times3=36$（种）

当 B、C 染的颜色不同时有：

$4\times3\times2\times2=48$（种）

因此根据加法原理，共有：

$36+48=84$（种）

答：图（1）中有 48 种不同的染色方法，图（2）中有 84 种不同的染色方法。

二、变式训练

1. 提示：因为任何一个四位数都含有四个数位，即：个位、十位、百位、千位，并且最高位上不能是 0，所以我们可以先从千位开始按从小到大（或从大到小）的顺序依次定位，这样就可得出 5□□□、8□□□、9□□□这三类数，然后依次对每一类数中的三个空的百位、十位、个位用同样的方法定位。

解：先定千位上的数字，排列如下：

5□□□、8□□□、9□□□

再定百位上的数字，排列如下：

$$5\left\{\begin{array}{l}0\square\square\\8\square\square\\9\square\square\end{array}\right.\qquad 8\left\{\begin{array}{l}0\square\square\\5\square\square\\9\square\square\end{array}\right.\qquad 9\left\{\begin{array}{l}0\square\square\\5\square\square\\8\square\square\end{array}\right.$$

由上可知：每一类数中剩下的两个空各有两种排法，因此，共可以组成没有重复数字的四位数有 $2\times3\times3=18$（个）

2. 提示：小华从书架上任取一本科技书和一本童话书要分两步完成，我们可以把取科技书当做第一步，取童话书当做第二步。当小华取了第一本科技书后，再取童话书，可以取 4 本中的任意一本，所以有 4 种不同的取法，取出童话书 4 本中的任意一本后，也都可以取科技书 6 本中的任意一本；所以，一共有 $4\times6=24$（种）不同的取法。

3. （1）这个问题我们可以分两步来进行：第一步确定谁参加比赛，有 15 种情况；第二步确定和谁比赛，可以与其他任意一个球队进行，有 14 种情况，但这里要注意每两队之间的比赛多算了一次，例如 1 号与 2 号球队赛的一场和 2 号与 1 号球队赛的一场是同一场球，所以需要比赛 $15\times14\div2=105$（场）。

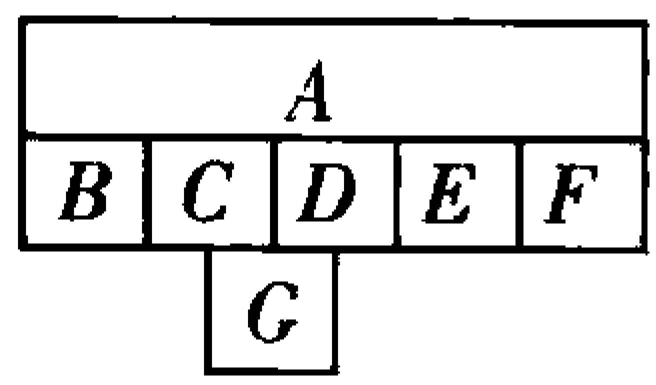
（2）要决出冠军，一共要淘汰 14 支球队，所以共需比赛 $15-1=14$（场）。

4. 提示：如果不按一定的顺序去思考，就可能出现遗漏或重复的取法。因此，我们可以按照从大到小、从少到多的顺序先排 5 元的，再排 2 元的，最后排 1 元的。把可以组成 10 的情况一一列举出来。

5 元	2 元	1 元
2	0	0
1	2	1
1	1	3
1	0	5
0	5	0
0	4	2
0	3	4
0	2	6
0	1	8
0	0	10

从上面的列举中可以看出，要拿出 10 元钱买一本书共有 10 种拿法。

5. 提示：把图中的 7 个县分别编号为 A、B、C、D、E、F、G，为了便于观察，可以把原图改画成如右所示（注意：每一个要染色的色块的相邻关系不能改变）。



我们可先从 A 区域想起，有红、黑、绿、蓝、紫 5 种不同的染色方法；第二步考虑 B 区域，除了 A 区域用过的一种颜色以外，还有 4 种不同的染色方法；第三步考虑 C 区域，除了 A、B 区域用过的两种颜色外，还有 3 种不同的染色方法；第四步考虑 D 区域，因为题中要求任意相邻的两个县染不同颜色，所以 B 区域用过的颜色也可以使用，除了与 D 区域相邻的 A、C 区域使用过的颜色外，也有 3 种不同的染色方法，同理，E、F、G 这三个区域也有 3 种不同的染色方法，根据乘法原理，共有 $5\times4\times3\times3\times3\times3\times3=4860$（种）不同的染色方法。

三、拔高训练

1. 提示：此题可以这样来思考，把小明从家到体育馆的走法分为两类：第一类从小明家经学校再到体育馆，这类走法与例 1 一样共有 $2\times4=8$ 种不同走法，这里我们运用了乘法原理；第二类直接从小明家到体育馆有 3 种走法。要求小明从家到体育馆共有多少种不同的走法，显然应该应用加法原理，即 $8+3=11$（种），这是与例 1 不一样的地方。此题既运用了“乘法原理”又运用了“加法原理”，比较灵活，综合列式：$2\times4+3=8+3=11$（种）

2. 提示：根据这道题的特点，先用排列法把题中的条件、问题排列出来，再用列举法完成题目的要求。

条件：（1）排队编号。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

(2) 第一次报数后单号全部站出来。

(3) 以后每次：从余下的第一人站出来起，隔一人站出来一个。

问题：到第几次站完？最后站出来的是第几号？

次数	排队号码
第一次	1、3、5、7、9、11、13、15、17、19、21、23、25、27、29
第二次	2、6、10、14、18、22、26、30
第三次	4、12、20、28
第四次	8、24
第五次	16

从上表的列举中，我们清楚不漏地排列出了第五次报数的人是最后一人，是第 16 号。

第 12 讲　数的整除

一、对应训练

1. 提示：要想使 203□是 3 的倍数，就要满足各数位数字和是 3 的倍数，2 +0 +3 =5，5 加几是 3 的倍数呢？
5 +1 =6　5 +4 =9　5 +7 =12，所以□里可以填 1、4 或 7。
2. 提示：因为这个四位数有约数 2，所以这个四位数的个位数字可能是 0，2，4，6，8；又因为这个四位数能被 5 整除，所以这个四位数的个位数字只能是 0，即 9□20，再根据这个四位数能被 3 整除的特征可知，9 +□ +2 +0 =11 +□能够被 3 整除，所以□可以是 1，4，7，其中最大的数字是 7。所以符合条件的最大的四位数是 9720。

3. 提示：由数的整除特征，一个数要能被4（或25）整除，其末两位数要能被4（或25）整除，末两位7□，要能被4整除，□内只能填2或6，而要能被25整除，□内只能填5。
4. 提示：能被9整除的数的特征与能被3整除的数的特征相同：就是各位数字的和如果能被9整除，这个数就能被9整除。这个六位数的首位数字是8，并且各位数字均不相同，而且要最小，就应该从最高位找起，满足最小，必须先选最小数字，由于最高位已经确定为8了，因此依次位数应选的数字是0，1，2，3，4。根据能被9整除的数的特征：这个数的各位数字之和 $=8+0+1+2+3+4=18$，刚好能被9整除。（想一想，如果各位数字相加不是9的倍数，你该如何去调整呢）

   解：从整体入手，充分利用所学的整除性质，即能被9整除的数的特征推导满足条件的六位数。

   $8+0+1+2+3+4=18$

   18能被9整除，所以这个最小的六位数是801234。
5. 提示：$2206525-321=2206204$ 还不易判断，可继续做：

   $2206-204=2002$，$2-2=0$，

   因为0能被7，11，13整除，所以2206525321能被7，11，13整除。

二、变式训练

1. 提示：题中没有告诉我们铅笔和笔记本的单价，我们无法计算小红买这些物品到底用去多少元。怎样验证售货员把账算错了呢？我们从数的整除角度来考虑。

   铅笔买了6支，6能被3整除，铅笔的总价也一定能被3整除；圆珠笔的单价是3元9角，能被3整除，所以圆珠笔的单价也能被3整除；笔记本买了3本，3能被3整除，所以笔记本的总价也能被3整除，我们可以得出结论：三种物品总价一定能被3整除。而25不能被3整除，所以售货员一定把账算错了。
2. 提示：首先考虑这个三位数能同时被2和5整除，所以这个三位数的个位数字一定是0。

设这个三位数为$\overline{ab0}$，根据能被 3 整除的数的特征可知：

$a+b+0=a+b$ 一定是 3 的倍数。在 0，3，5，7 中已选用了 0，还剩 3，5，7 三个数字可用，其中只有 5 和 7 的和是 3 的倍数。适当调换 5 与 7 的位置可得到所要求的三位数为 570 和 750。

3. 提示：经过推理我们知道，能被 4（或 25）整除的数的特征是：末两位数能被 4（或 25）整除，这个数就能被 4（或 25）整除。我们由易到难地考虑“能被 25 整除”这一条件，这时这个七位数的末两位必须是 00，25，50 和 75；再考虑“能被 4 整除”的这一条件，也只须看它的末两位，并从上面的 4 种情况中只能挑出“00”这一种。

最后再考虑“能被 9 整除”的这一条件，应该看它各位上的数字的和，因为 $2+0+0+4+0+0=6$，即可知道它的百位上的数字只能是“3”（$6+3=9$，9 能被 9 整除）。

解：由能同时被“4”和“25”整除的数的特征（$4\times25=100$）知道，这个数的末两位必须是“00”；最后两位即个位和十位上必须是“0”。而这个七位数要能被 9 整除，根据能被 9 整除的数的特征：$2+0+0+4+0+0=6$，知道“□”里（百位上）只能是 3，所以本题的答案是：2004300。

4. 提示：根据一个数能被 9 整除的特征：“一个数的各个位上的数字之和能被 9 整除，这个数就能被 9 整除”，否则这个数就不能被 9 整除。

所以符合条件的数为：4$\boxed{0}$32$\boxed{9}$，4$\boxed{1}$32$\boxed{8}$，4$\boxed{2}$32$\boxed{7}$，4$\boxed{3}$32$\boxed{6}$，4$\boxed{4}$32$\boxed{5}$，4$\boxed{5}$32$\boxed{4}$，4$\boxed{6}$32$\boxed{3}$，4$\boxed{7}$32$\boxed{2}$，4$\boxed{8}$32$\boxed{1}$，4$\boxed{9}$2$\boxed{0}$。

5. 提示：同学们可以试一试：例如 134，后面再写一遍得到的六位数是 134134，试着除一下——$134134\div7=17162$，$134134\div11=12194$，$134134\div13=10318$。自己可以再随便写一个三位数，都能做到这一点。

不妨假设这个三位数是$\overline{abc}$，则它连续写两次后得到的新六位数是$\overline{abcabc}$。很明显，$\overline{abcabc}=\overline{abc}\times1001$。而 $1001=7\times$

11×13，根据数的整除性质（2），$\overline{abcabc}$必然能被 7，11 和 13 同时整除。

三、拔高训练

1. 提示：$\triangle\div3=a$　$\triangle=3a$　$\square\div5=a$　$\square=5a$
$\bigcirc\div7=a$　$\bigcirc=7a$　$3a+5a+7a=555$　$a=37$
$\triangle=3\times37=111$　$\square=5\times37=185$　$\bigcirc=7\times37=259$
答：这三个数分别是 111，185，259。
2. 提示：由"一个顾客买的货物重量是另一个顾客的 2 倍"，可知两个顾客买走的 5 箱货物总重量应是 $(1+2)=3$ 的倍数。6 箱的总重量是 $16+19+20+18+15+31=119$（千克），$119\div3=39\cdots\cdots2$，因为卖出的 5 箱货物总重量是 3 的倍数，所以剩下那箱货物的重量除以 3 应余 2，6 箱中只有 20 除以 3 余 2，所以剩下的那箱货物重量是 20 千克。
解：$(16+19+20+18+15+31)\div(1+2)=39\cdots\cdots2$
$20\div3=6\cdots\cdots2$
答：剩下的那箱货物重量是 20 千克。

第 13 讲　奇数与偶数

一、对应训练

1. 提示：因为只要求判断和的奇偶性，所以只需根据加减运算中奇偶性的规律来判断，而不必求和。
　　因为这些加数是一奇一偶排列的，所以其中共有 $2004\div2+1=1003$（个）奇数，有 $2005-1003=1002$（个）偶数。又因为奇数 + 奇数 = 偶数，偶数 + 奇数 = 奇数，由此可知奇数个奇数相加和为奇数，即 1003 个奇数相加，和为奇数，而偶数 + 偶数 = 偶数，所以若干个偶数相加的和还是偶数。因此其和是奇数 + 偶数 = 奇数。
2. 提示：7 个连续奇数中间的一个数是这 7 个连续奇数的平均数，可先求出中间的这个数，再求其他奇数。中间一个奇数是 $2009\div7=287$，所以这 7 个连续奇数是：281，283，285，

287，289，291，293。

3. 提示：我们来统计一下每次操作后，杯口朝上的杯子的数量：开始的时候有 7 只杯子朝上；一次操作后，有 5 只杯子朝上；再一次操作后，杯口朝上的杯子数量就有三种情况了：3 只、5 只或 7 只。通过比较以上结果，我们可以发现：每次操作后杯口朝上的杯子数量要么和操作前的相等，要么相差两个。

总而言之，每次操作过后不变的就是杯口朝上的杯子数量的奇偶性！即如果开始有奇数个杯子杯口向上，那么最后还是奇数个杯子口朝上。而要求是全部的 7 个杯子都朝下，就是最后杯口向上的个数为 0，这是不可能的。因此，如果开始有 7 个杯子口朝上，并且每次翻动其中的 2 个杯子，那么无论如何都不能使全部的杯口都朝下。

4. 提示：一张试卷得满分是 $20\times3=60$ 分，未答题比答对题每题少得 $3-1=2$ 分，答错题比答对题每题少得 $3+1=4$ 分，从满分 60 中扣除若干个 2 分、4 分（都是偶数），因此，参赛同学得分的总分是：

奇数 × 偶数 = 偶数

二、变式训练

1. 提示：$(1+3+5+7+\cdots+2003)-(2+4+6+\cdots+2002)$

假设 $1+3+5+7+\cdots+2003=A$

$2+4+6+8+\cdots+2002=B$

则原式变为 $A-B$

根据奇偶性：任意个偶数相加的和是偶数，知 B 是偶数。$1+3+5+7+\cdots\cdots+2003$ 中共有奇数 $(2003+1)\div2=1002$（个）偶数（1002）个奇数的和是偶数，所以 A 是偶数。

$A-B$ 为偶数 − 偶数 = 偶数。

所以 $A-B$ 是偶数，故原式的结果是偶数。

2. 提示：仔细观察数列，可以发现：每 3 个数为 1 组，每组均是按“奇、奇、偶”的顺序排列的，每组中都有 2 个奇数和 1 个偶数。

解：（1）$1000\div3=333\cdots\cdots1$，第 1000 个数是处于 334 组的第 1 位，所以是奇数。

(2) 总和是偶数。在这个数列中任取三个相邻数，它们的奇偶性有三种：奇、奇、偶，奇、偶、奇，偶、奇、奇，所以不管哪种情况下任取 3 个相邻数的和总是偶数。

3. 提示：$38 \div 2 = 19$……第 4 个奇数
$19 + 2 = 21$……第 5 个奇数
所以第 5 个数是 21。

4. 提示：对每只杯口向上（下）的杯子，只有“翻转”1 次、3 次……后才能使杯口向下（上），即对每只杯子翻动奇数次后，其杯口的朝向才能改变。现在要求九只杯口向上的杯子杯口全部向下，因为奇数与奇数的积是奇数，所以要使九只杯子全部改变朝向，也只有经过奇数次翻转。

另外，每次只能同时翻转四只杯子，这就是说不管如何翻动，最后翻转的总次数一定是 4 的倍数，4 是偶数，所以翻转总次数是偶数。前面要求翻转的总次数是奇数，这里又说一定是偶数，前后矛盾，所以按要求无论怎样翻转，都不能使九只杯子杯口全部向下。

5. 提示：对每个参赛同学来说，每题都答对，可得 165 分，是奇数。

如答错一题，就要从 165 分中减去（$5+1$）分，不管错几道题，6 的倍数都是偶数，165 减去偶数是奇数。如有一题不答，就要减去 4 分，不管有几道题没答，4 的倍数是偶数，165 减去偶数是奇数。

总之，每位同学的得分都是奇数，有 121 人参赛，故其总和是奇数。

三、拔高训练

1. 提示：男生衣服上的总扣子数加上女生衣服上的总扣子数为扣子总数，扣子总数为偶数，那么，男女生扣子总数要么全为奇数，要么全为偶数，因为奇数 + 奇数 = 偶数，偶数 + 偶数 = 偶数。女生每件衣服扣子是 4 个，人数不管是奇数还是偶数，和都为偶数，所以女生扣子总数为偶数。而男生每件衣服扣子数为奇数，要使总数为偶数，则人数一定为偶数。学生总人数为

奇数，男生人数为偶数，女生人数为：奇数－偶数＝奇数，故女生人数是奇数。

2. 提示：10个数字刚好可以组成5个两位数，我们先不考虑“和是奇数”这个条件，而去考虑“5个两位数的和尽可能的大”如何解决。

要使得0~9这10个数字组成的5个两位数的和尽可能大，那么5个两位数的十位上的数字要取较大的9，8，7，6，5，个位上的数取较小的0，1，2，3，4。这时，我们再考虑5个两位数和的奇偶性。看几个数的和是奇数还是偶数，只需要看个位数字之和，如果个位数字之和是奇数（或偶数），那么这几个数的和就是奇数（或偶数）。根据这个原则，我们很容易看出个位是0，1，2，3，4，这5个数字中有2个是奇数，因偶数个奇数的和是偶数，所以这5个两位数的和是偶数，不满足题目的要求。

从已得到的5个两位数出发，尽可能少地调整十位与个位上的数字，调整的两个数字要尽量接近。因此，只有4和5这两个数字位置互换，这样5个两位数的十位上数字分别是4，6，7，8，9，个位上数字分别是0，1，2，3，5，这样个位之和就是一个奇数。

$$(4+6+7+8+9)\times 10+(0+1+2+3+5)=351$$

第14讲 最大公因数和最小公倍数

一、对应训练

1. (1) 一个数去除35、98、112都能整除，这个数就是35、98、112的公约数，要求符合条件的最大的数就是求35、98、112的最大公因数。35、98、112的最大公因数是7。

(2) 一个数用12、18、30除都能整除，这个数就是12、18、30的公倍数，要求符合条件的最小数就是求12、18、30的最小公倍数。12、18、30的最小公倍数是$2\times3\times2\times1\times3\times5=180$。

2. 提示：因为要剪成同样大的正方形且无剩余，就要求正方形的边长必须是长方形纸的长或宽的因数，又因为要求剪的个数最少，那么正方形的边长就得尽量长，所以正方形边长就应是60和45的最大公因数。

列式：(60，45)=15

(60÷15)×(45÷15)=12（个）

3. 提示：亮灯时间间隔9分钟，打铃时间间隔1小时=60分，要求下一次既打铃又亮灯是什么时间，实际就是求9和60的最小公倍数的问题。所以只要求出了9和60的最小公倍数就求出了要求的问题。

解：9=3×3　60=2×2×3×5

[9，60]=2×2×3×5×3=180

180分=3小时　中点12时+3时=15时

因此下一次打铃又亮灯的时间是15时（即下午3时）。

4. 提示：包数应该为140，175，280的公约数，故所求最多的包数为140，175，280的最大公约数，(140，175，280)=35，所以最多可以分为35包。

5. 提示：他们再一次见面相隔的时间，应是他们各自到图书馆间隔时间的公倍数，再根据周期问题来求相遇时是星期几。

[2，3，4]=12（天）

12÷7=1（周）……5（天）

5+5−7=3

答：还要12天他们再次在图书馆相遇，相遇时是星期三。

二、变式训练

1. 提示：仔细分析可知，这个两位数不管被哪个数除，余数都比除数小2，如果将这个两位数加2之后将能被9、7、3同时整除，也就是说原数加2后是9、7、3的公倍数。因为[9，7，3]=63，而这个数是两位数，所以这个两位数是63−2=61。

2. 提示：要求锯成的木料是正方体，木料又不能剩余，这个正方体的棱长应是长方体木料的长、宽、高的公约数，又要求正方体要最大，则正方体的棱长应是长方体的长、宽、高的最大公因数。正方体的棱长确定后，可求出锯成正方体的块数。

解：(132，60，36) = 12

(132 × 60 × 36) ÷ (12 × 12 × 12) = 165（块）

3. 提示：60 和 45 的最小公倍数是 180，则从第一根起每隔 180 米的一根不移动，这条公路长为 45 × (25 − 1) = 1080（米）。

解：45 × (25 − 1) ÷ 180 = 6（根）

最后一根也不必移动，所以是 6 + 1 = 7（根）

4. 提示：要把甲、乙、丙三堆货物分成同样吨数的小堆，而不准有剩余，且分成的小堆数要最小，这实际上是求 150、180、420 三个数的最大公约数，才能保证分成的堆数最少。如果只求它们的公约数，就求小堆数，就不能保证分成的堆数最少。

解：用短除法求出 150，180，420 的最大公约数。

$$\begin{array}{r|lll} 30 & 150 & 180 & 420 \\ \hline & 5 & 6 & 14 \end{array}$$

(150，180，420) = 30

150 ÷ 30 = 5（堆）　　180 ÷ 30 = 6（堆）

420 ÷ 3 = 14（堆）　　5 + 6 + 14 = 25（堆）

5. 提示：会餐的人数应是 2、3、4 的倍数，就要先求 2、3、4 的最小公倍数，[2，3，4] = 12。看每 12 个人里面可以用几只饭碗，几只菜碗，几只汤碗，再用总碗数除以每 12 个人所用的碗数，得到的数就是有多少个 12 个人用餐。

列式：[2，3，4] = 12

12 ÷ 2 = 6　　6 + 4 + 3 = 13

12 ÷ 3 = 4　　65 ÷ 13 = 5

12 ÷ 4 = 3　　5 × 12 = 60（人）

三、拔高训练

1. 提示：假设两个自然数是 a 和 b，a 和 b 都是 7 的倍数，a 和 b 的和也是 7 的倍数。把这两个数都除以 7，那么原题变成："两个数的最大公约数是 1，最小公倍数是 30，这两个数的和是 11，这两个数各是多少？"

改变以后的 2 个数我们可以写成 $a_1 \times b_1 = 30$，$a_1 + b_1 = 11$。乘积为 30 的两个数有：30 × 1、15 × 2、10 × 3、6 × 5。在这四

个算式中，两个因数的和是 11 的只有 5×6，且 5 和 6 互质。因此改变后的两个数应为 5 和 6，从而推出原来的两个数。

解：设两个数分别为 a 和 b，$a=a_1\times7$，$b=b_1\times7$，$a_1\times b_1=210\div7=30$

$30=30\times1=15\times2=10\times3=6\times5$，$a_1+b_1=77\div7=11$

当 $a_1=6$，$b_1=5$ 时，$a_1+b_1=11$

$a=7a_1=7\times6=42$，$b=7b_1=7\times5=35$

答：这两个数分别是 42 和 35。

2. 提示：此题初看不知该怎样解答，实际上只要我们认真审题，仔细分析，善于运用所学的知识，就会正确解决这个问题。由题意可知，参加会餐的人数一定是 1，2，3，4 的公倍数，找出它们的最小公倍数后，再寻求最少要多少碗，最后再求有多少人。

解：因为 $[1,2,3,4]=12$，所以参加会餐的人数应该是 12 的倍数。

又因为 $12\div1=12$，$12\div2=6$，$12\div3=4$，$12\div4=3$

$12+6+4+3=25$（个）碗

所以 12 人就要用 25 个碗，即 12 个饭碗，6 个菜碗，4 个汤碗和 3 个肉碗。

又因为 $100\div25=4$，所以参加会餐的总人数应该是 12 的 4 倍，即：$12\times4=48$（人）

因此，参加会餐的人数一共有 48 人。

如果我们用分数来思考，则一个人要用 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$（个）碗，则共有 $100\div\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=48$（人）。

第 15 讲　尾数和余数

一、对应训练

1.（1）因为 31 的个位 1 乘以 1，积的个位仍然是 1。所以不管多少个 31 相乘，个位还是 1。答：积的个位数是 1。

（2）因为括号里 22×53 的积的个位是6，我们只要分析100个6相乘，积的尾数是几就行了，因为个位6乘以6，积的个位仍然是6，所以不管多少个 (22×53) 相乘，积的个位还是6。
答：积的个位数是6。

2. （1）我们通过列举，看看个位数在怎样变化。1个4个位就是4，4×4 的个位是6，$4\times4\times4$ 的个位是4，$4\times4\times4\times4$ 的个位是6……由此可见，积的尾数是以“4、6”两个数字在不断重复出现。$101\div2=50\cdots\cdots1$，余数是1，说明101个4相乘积的个位是4。
（2）同理，用上面的方法可以发现：100个29相乘时，积的个位是以“9、1”两个数字不断重复地出现，$100\div2=50$ 没有余数，说明100个29相乘，积的个位是1。

3. 提示：根据题意知，这3个数对于该除数是同余的，所以根据同余的性质，此3数中任何两数之差都应是除数的倍数，即除数应是此3数中任两数的差的公约数，根据上面所给的规律，我们将其两两相减，并将所得的差一一分解。找出相同的因数即可。
$319-262=57=3\times19$
$262-186=76=4\times19$
这两个差的公约数为19，而19的约数中1不符合条件，因此这个整数是19。

4. 提示：要分析解答这道题目，首先必须把题目的条件加以整理，把“被5除少3，被7除少5”改述为：被5除余2，被7除余2。这样就变成了一个“同余”的问题了。不难想象，题目要求的那个数就是3、5、7的最小公倍数再加上2的和。3、5、7的最小公倍数是105。题目要求的那个数即为 $105+2=107$。
检验：$107\div3=35\cdots\cdots2$
$(107+3)\div5=22$
$(107+5)\div7=16$
答：这个数最小是107。

5. 提示：因为 $\frac{1}{7}\approx0.142857142857\cdots\cdots$，化成的小数是一个无限

循环小数，循环节的“142857”共有6个数字，由于 $50 \div 6 = 8 \cdots\cdots 2$，所以小数点后面的第50位是第9个循环节的第2个数字，是4。

二、变式训练

1. 提示：积的个位数字是由100个26相乘的积的尾数和1000个15相乘积的尾数决定。根据因数26的个位是6，6乘以6积的个位仍是6，不管多少个26相乘，个位还是6。同理，因数15的个位是5，5乘以5积的个位仍是5，不管多少个15相乘，个位还是5。因为100个26相乘的积的个位数字是6，1000个15相乘的积的个位数字是5，用尾数6和尾数5相乘，就可以得到个位数字是0。
2. 提示：差的个位数字是由102个74相乘的积的尾数和101个39相乘积的尾数决定：根据因数74的个位数字是4，积的尾数是以“4、6”两个数字不断重复出现，而 $102 \div 2 = 51$ 没有余数，说明102个74相乘积的个位是6。再根据因数39的个位数字是9，积的尾数是以“9、1”两个数字不断重复出现，而 $101 \div 2 = 50 \cdots\cdots 1$，余数是1。说明101个39相乘积的个位是9，用102个74相乘积的个位减去101个39的积的个位。个位不够减，即 $16 - 9 = 7$，所以差的个位数字是7。
3. 提示：此题看起来虽不复杂，但解题入手却并不容易。如果将题中的条件变一种说法，即 $(768 + 1) = 769$ 除以某一个自然数 n，余数为2，进而就很容易用同余性质求解。

   解：从题意分析可知，990和769除以某一个自然数 n 时，余数相同，都是2，而：$990 - 769 = 221$，$221 = 13 \times 17$，取 $n = 13$

   检验：$990 \div 13 = 76 \cdots\cdots 2$，$768 \div 13 = 59 \cdots\cdots 1$

   所以，n 最小为13。
4. 提示：解答这道题目，同样要先把条件加以改述：某数被5除余2，被6除余4，被7除仍余4。符合其中后两个条件的最小的数是：$6 \times 7 + 4 = 46$。但“46”不符合“被5除余2”这一条件，怎么办呢？就应在“46”的基础上逐一加上“42”（因为42是6和7的最小公倍数，所以不管加多少次42，它们的

和都能符合“被 6 除余 4，被 7 除也余 4”这一要求）。

$46+42=88$（被 5 除余 3，舍去）；

$46+42\times2=130$（被 5 除无余，舍去）；

$46+42\times3=172$（被 5 除余 2，符合条件）。

答：符合题目条件的最小的数是 172。

5. 提示：如果用除法硬除显然太麻烦。我们可以先用竖式来除一除，看一看余数在按怎样的规律变化。

$$
\begin{array}{r}
42735\cdots \\
13\overline{)555555\cdots} \\
\underline{52} \\
35 \\
\underline{26} \\
95 \\
\underline{91} \\
45 \\
\underline{39} \\
65
\end{array}
$$

从竖式中可以看出，余数是按“5、3、9、4、6、0”这 6 个数字不断重复出现。$2001\div6=333\cdots\cdots3$，所以，当商是整数时，余数是 9。

三、拔高训练

1. 此题可以改述为：一个最大的三位数，它“被 2 除少 1，被 3 除少 1，被 4 除少 1，被 5 除也少 1”。这样便找到了解题的突破口，符合“被 2 除少 1，被 3 除少 1，被 4 除少 1，被 5 除也少 1”这四个条件的数一定是 2、3、4、5 的公倍数减去 1，所以先求出 2、3、4、5 的最小公倍数 $[2,3,4,5]=60$，题目要求的是一个最大的三位数，就应在“60”的基础上进行调整 $60\times16=960$，且是最大的三位数，所以 $960-1=959$ 就是题目要求的数。
2. 提示：把第 2001 个数求出来，再除以 4，显然很困难。我们不妨列出下表：从这列数除以 4 的余数中寻找规律。

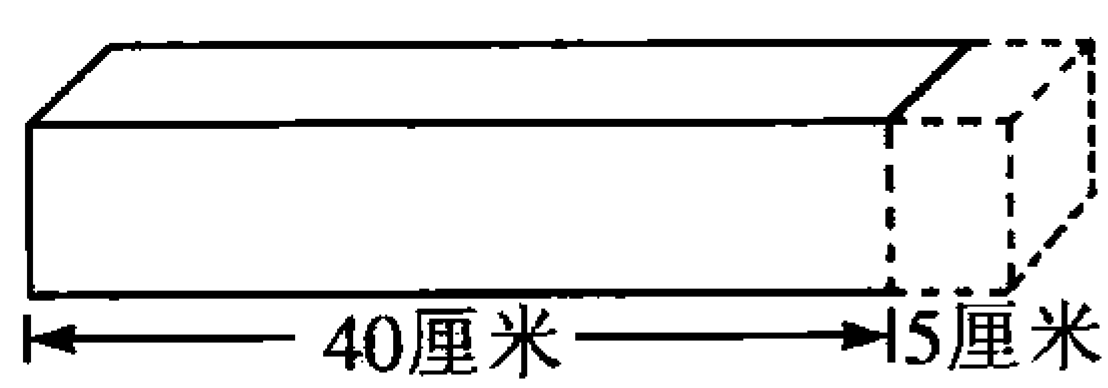
一列数	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	…
余数	3	0	3	3	2	1	3	0	3	3	2	1	…

从表中可以发现，这些余数在按 3、0、3、3、2、1 这样的顺序循环出现着。因为 2001 ÷ 6 = 333（组）……3，余数是 3，即是一组余数中的第 3 个，所求的余数是 3。

第 16 讲　长方体和正方体（一）

一、对应训练

1. 提示：30 × 20 + (30 × 10 + 20 × 10) × 2 = 1600平方厘米 = 16 平方分米。
2. 提示：把两个正方体拼成一个长方体，会减少两个面的面积，要求这个长方体表面积就相当于求正方体 10 个面的面积，10 × (2 × 6 − 2) = 10 × 10 = 100（平方厘米）。
3. 提示：根据题意，画出示意图。长增加 5 厘米，增加的表面积是指增加部分上下、前后 4 个面的面积，4 个面大小相等，可以求出一个面的面积，用一个面的面积除以增加部分的长 5 厘米，就得原长方体的宽，也就是高，这样就可以求出原长方体的表面积。



解：80 ÷ 4 ÷ 5 = 4（厘米）

(40 × 4 + 40 × 4 + 4 × 4) × 2 = 672（平方厘米）

答：原长方体的表面积是 672 平方厘米。

4. 提示：要将这个长方体切割成两个完全一样的长方体，会有三种不同的切法。因此，这题的答案不唯一。

第一种切法：表面积增加了 9 × 6 × 2 = 108（平方厘米）

第二种切法：表面积增加了 6 × 4 × 2 = 48（平方厘米）

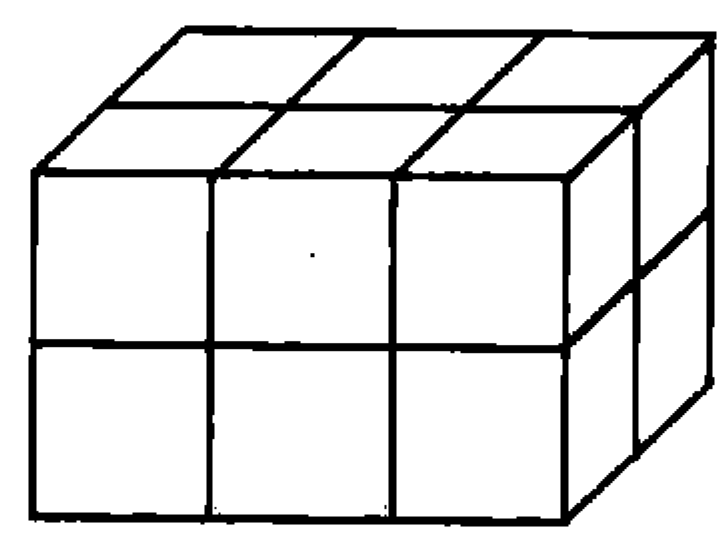
第三种切法：表面积增加了 4 × 9 × 2 = 72（平方厘米）

5. 提示：想一想从正方体的一个面中间挖去一个小正方体，表面积有什么变化？外侧的面平移到里面，又增加了4个面，共挖去了6个这样的正方体，即增加了$2\times2\times4\times6=96$（平方厘米），增加的96平方厘米加原来的$8\times8\times6=384$（平方厘米），现在的表面积是$96+384=480$（平方厘米）即：$8\times8\times6+2\times2\times4\times6=480$（平方厘米）。

二、变式训练

1. $8.5\times6+(8.5\times4.2+6\times4.2)\times2-35.8$
$=51+121.8-35.8$
$=137$（平方米）

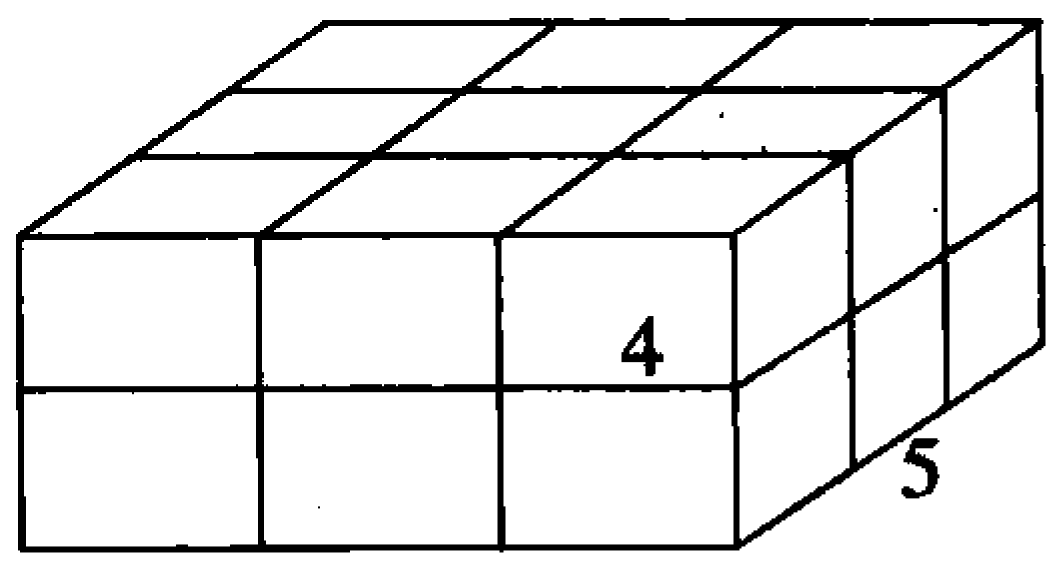
2. 提示：把几个小正方体拼合成一个大长方体，每两个小正方体拼合在一起就会减少两个面的面积。要使所拼成的长方体的表面积最小，那么就要使拼合的面尽量的多。可以拼成如右的长方体：



解：$(3\times2\times2+2\times2)\times2=32$（平方厘米）
答：这个长方体的表面积最小是32平方厘米。

3. 提示：仔细观察右图，截去上下两个长方体后减少的表面积就是两个长方体的侧面积。也就相当于减少的是高为$(2+3)$厘米的长方体的侧面积，因此高为5厘米的长方体每个侧面积是$100\div4=25$（平方厘米），那么长方体底面正方形的边长就是$25\div5=5$（厘米），可以求出原长方体的表面积
$100\div4\div(2+3)=5$（厘米）……长方体底面正方形的边长（即中间正方体的边长）
$5\times5\times2+5\times(2+3+5)\times4=250$（平方厘米）
或$100+5\times5\times6=250$（平方厘米）

4. 提示：因为每块小长方体的大小不一样，所以不可能一个一个地计算出每个小长方体的表面积。因此，做这类题要从整体去思考，所有长方体表面积总和=原长方体的表面积+增加的面积，沿长方体长边切一刀就会增加2个侧面积，沿宽垂直切一刀，就会增加长方体前、后两个面面积，沿高水平切一刀，就会增加上、下两个面的面积。



解：原长方体表面积：$(6\times4+6\times5+5\times4)\times2$

$=74\times2$

$=148$（平方厘米）

增加的面积：$6\times4\times4+4\times5\times4+6\times5\times2$

$=96+80+60$

$=236$（平方厘米）

所有小长方体表面积：$148+236=384$（平方厘米）

答：所有小长方体表面积是384平方厘米。

5. 提示：这道题展开空间想象可知：正方体的表面积减去表面上减少的面积加上洞内增加的面积，就得这个几何体的表面积。

解：原正方体表面积：$4\times4\times6=96$（平方厘米）

表面减少的面积：$1\times1\times6=6$（平方厘米）

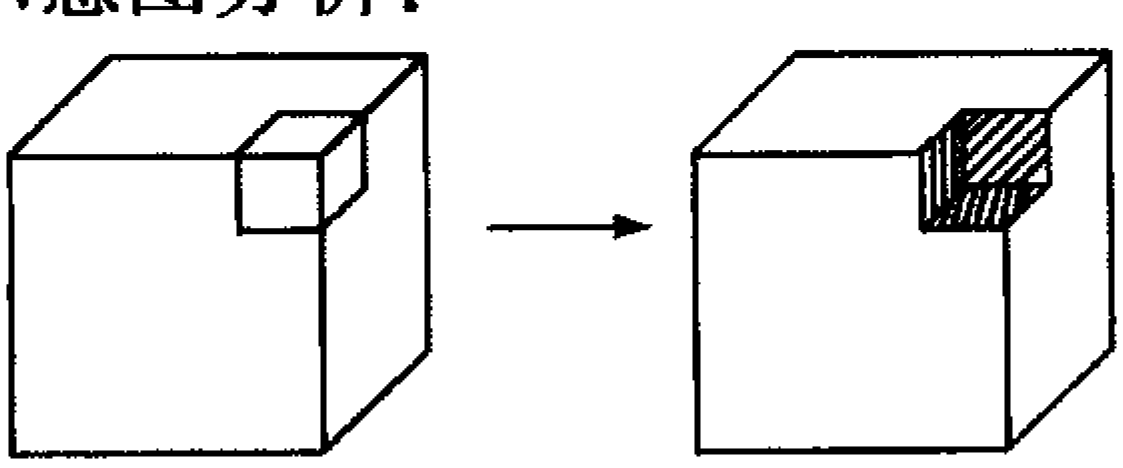
洞内增加的面积：$(1\times4\times4\times3)-(1\times1\times4\times3)=36$（平方厘米）

所得几何体的面积：$96-6+36=126$（平方厘米）

答：这个几何体的表面积是126平方厘米。

三、拔高训练

1. 提示：要从八个顶点处截去八个小正方体，先考虑截去棱长为1厘米的小正方体的情况，画出示意图分析：

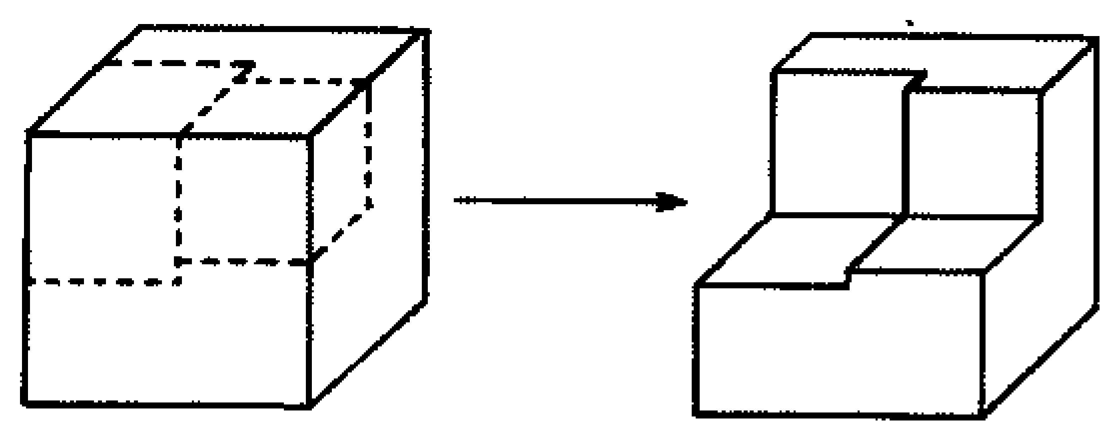


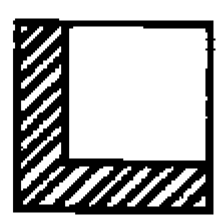
（1）　　（2）

顶点处的小正方体原来有3个面在表面上（如上图1），挖去以后，少了这3个面，但同时又有3个面变成了表面（如图2），所以表面的大小不变。同样，挖去棱长是2、3、4、5、6、7、8厘米的小正方体，少了几个面就会相应的增加几个面。所以挖过以后的长方

体表面积和挖前是同样的。

以上只是一种一般的考虑，每个顶点处都独自挖去一个正方体，但是否有特殊情况呢？挖去的两个较大的小正方体的棱长是 7 厘米和 8 厘米，如果这两个小正方体在同一条棱的两个顶点上，那么这条棱就被整体挖去，情况会有新的变化，看下图：

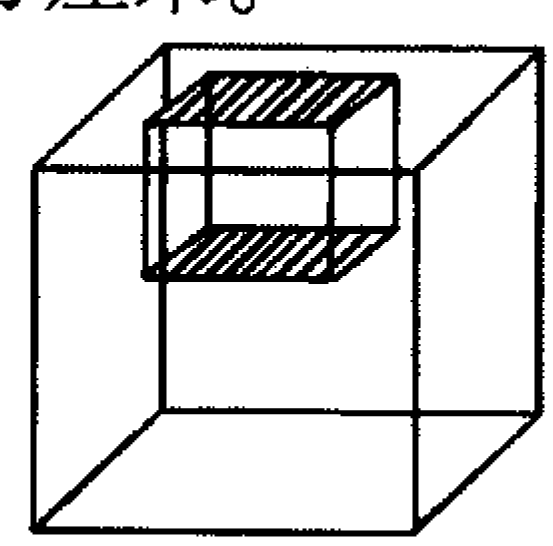


每个正方体少了 3 个面，只增加了 2 个面，但两个正方体交界处增加了这样  一部分面积，整个表面积减少了 $7\times7\times2=98$（平方厘米），这时的表面积最小。

解：$15\times15\times6-7\times7\times2=1252$（平方厘米）

答：这个木块剩下部分的表面积最少是 1252 平方厘米。

2. 提示：在一个正方体上面的正中间向下挖一个小正方体，增加的表面积实际就是这个小正方体的侧面积。



解：原正方体的表面积：$4\times4\times6=96$（平方厘米）

挖第一个洞后增加的表面积：$2\times2\times4=16$（平方厘米）

挖第二个洞后增加的表面积：$1\times1\times4=4$（平方厘米）

挖第三个洞后增加的表面积：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times4=1$（平方厘米）

最后得到立体图形的表面积：$96+16+4+1=117$（平方厘米）

答：最后得到的立体图形的表面积是 117 平方厘米。

第 17 讲　长方体和正方体（二）

一、对应训练

1. $0.4\times0.4\times5\times6=4.8$（立方米）

2. $160 \div 4 \div 5 \times 5 \times 5 = 200$（立方厘米）
3. 提示：A 处比 B 处高 4 米，可以算出这 4 米高的土的体积。要使 A、B 两地同样高，就是要把高出 4 米的土变成一个新的长方体，这个长方体的底面是 A、B 底面积之和，这个长方体的高就是 B 地可升高的米数。

   解：$(25 \times 4) \div (25 + 15) = 2.5$（米）
4. 提示：要求原来长方形铁皮的面积，关键要能求出原长方形铁皮的宽。根据题意，画出示意图，结合空间想象，可知做成的长方体铁盒的长是 $24 - 3 \times 2 = 18$（厘米），高就是剪下的小正方形的边长，也就是 3 厘米。又知铁盒的容积是 486 立方厘米，这样就可以算出铁盒的宽。铁盒的宽并不是原来长方形铁皮的宽，再加上 $3 \times 2 = 6$（厘米）才是原铁皮的宽。

   解：长方体铁盒的长：$24 - 3 \times 2 = 18$（厘米）

   长方体铁盒的宽：$486 \div 3 \div 18 = 9$（厘米）

   长方形铁皮的宽：$9 + 3 \times 2 = 15$（厘米）

   长方形铁皮的面积：$24 \times 15 = 360$（平方厘米）

   答：原长方形铁皮的面积是 360 平方厘米。
5. 提示：露出水石的铁块上被水浸湿的部分包括向上提起的 24 厘米和铁块提起后水面下降的高度两部分，而下降部分水的体积就等于提起的 24 厘米的铁块的体积，因此水面下降的高度就可以用 24 厘米的铁块体积除以水箱底面积求得：

   $(15 \times 15 \times 24) \div (90 \times 40) + 24$

   $= 5400 \div 3600 + 24$

   $= 1.5 + 24$

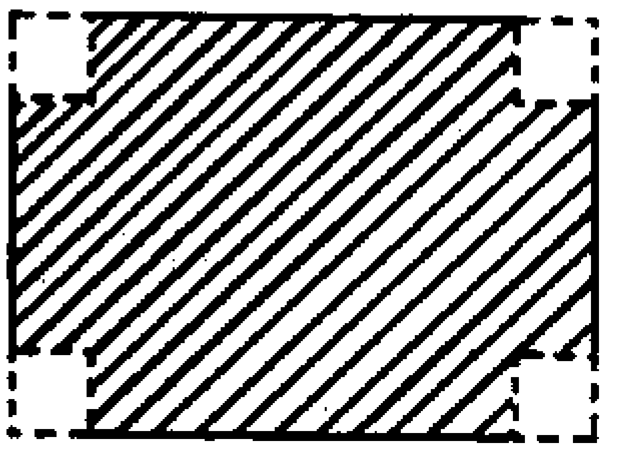
   $= 25.5$（厘米）

二、变式训练

1. 提示：求长方体铁盒的容积，要知道这个长方体铁盒的长、宽、高。根据题意先画出示意图：

   从图中可以看出，这个长方体铁盒的高是 5 厘米，用长方形铁皮的长、宽分别减去 $5 \times 2 = 10$（厘米）所得的差分别是长方体铁盒的长和宽。用长方体铁盒的长乘宽乘高就得到这个铁盒的容积。

解：$(40-5\times2)\times(30-5\times2)\times5=3000$（立方厘米）



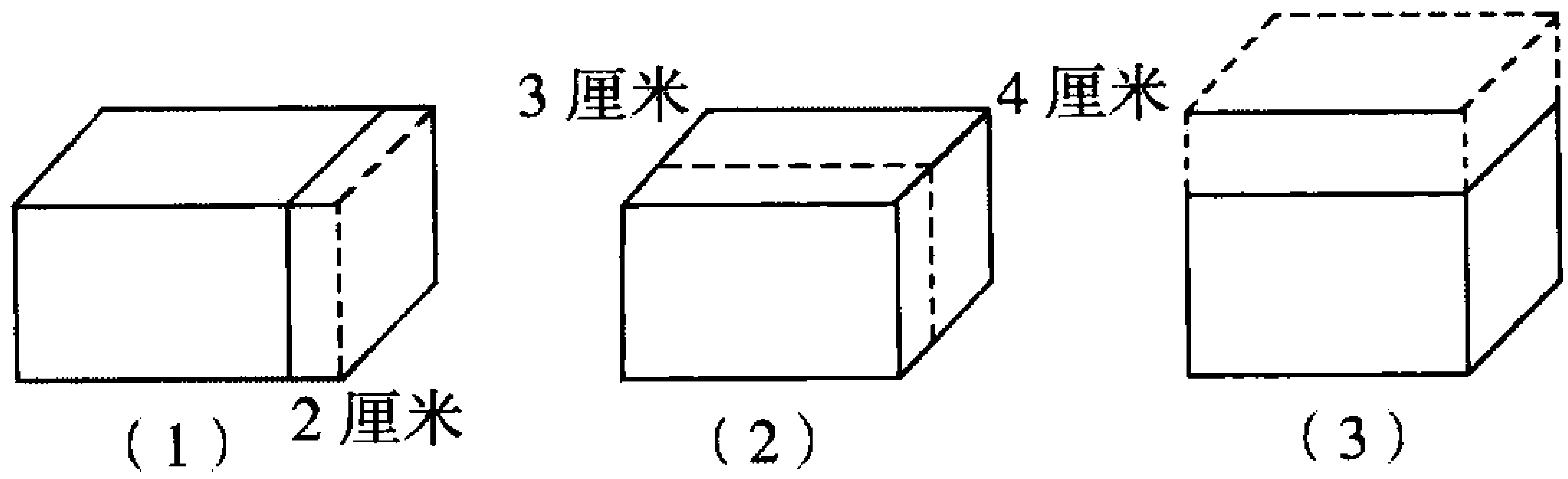
2. 提示：因为高度增加以后，长方体变成了正方体，说明原来长方体的上下两个面是正方形，它的前后左右都是完全一样的长方形。又因为正方体的表面积比原来长方体的表面积多 56 平方厘米，而从图上可以看出，增加的面积其实就是增加部分的前后左右的小长方形的面积总和，所以每个小长方形的面积是：$56\div4=14$（平方厘米）。又因为增加部分的高是 2 厘米，可以求出原来长方体的长和宽是$14\div2=7$（厘米），它的高是 $7-2=5$（厘米）。所以长方体的体积是：$7\times7\times5=245$（立方厘米）。
3. 提示：把铁块放入水中后，水的体积没有变，还是 $40\times30\times10=12000$（立方厘米），但是，现在水的形状改变了，变成了一个底面积是 $40\times30-20\times20=800$（平方厘米）的柱体了。因此，这时的水面高度是 $12000\div800=15$（厘米）。

   解：　$(40\times30\times10)\div(40\times30-20\times20)$
   $=12000\div800$
   $=15$（厘米）
4. $(20-5\times2)\times(15-5\times2)\times5=250$（立方厘米）$=250$（毫升）
5. 提示：把两堆沙分别沉没在小、中水池的水里，使水位上升，则这两堆沙的体积分别等于两个水池上升部分水的体积，再将两堆沙都沉没在大水池中，大池中上升部分水的体积等于这两堆沙的体积之和。这实际是一道等积变形的题目。

   解：4 厘米 =0.04 米，9 厘米 =0.09 米
   $(3^2\times0.04+4^2\times0.09)\div6^2$
   $=1.8\div36$
   $=0.05$（米）
   0.05 米 =5 厘米

三、拔高训练

1. 提示：画示意图来表示题目的条件。



从图（1）可以看出，长增加 2 厘米，增加的体积是 48 立方厘米，用增加的体积除以 2 可得原长方体右侧面的面积；从图（2）可知，用增加的体积除以 3 可得原长方体前面的面积；从图（3）可知，用增加的体积除以 4 可得原长方体上面的面积。长方体三组对面的面积都知道了，就可以求出长方体的表面积了。

解：宽 × 高 = 48 ÷ 2 = 24（平方厘米）

长 × 高 = 99 ÷ 3 = 33（平方厘米）

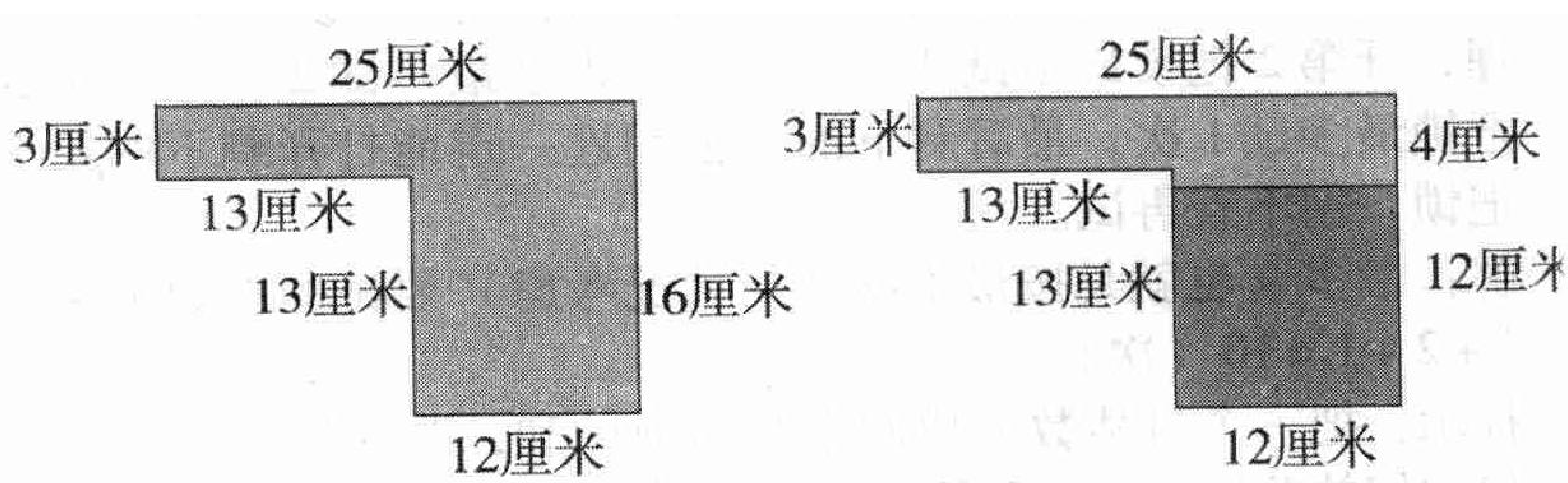
长 × 宽 = 340 ÷ 4 = 85（平方厘米）

原长方体表面积：(24 + 33 + 85) × 2 = 284（平方厘米）

答：原长方体的表面积是 284 平方厘米。

2. 画图分析：

第一次能切下最大的正方体的棱长是 13 厘米，切后剩下立体图形的底面如图 1：它的高度是 13 厘米。



第二次能切下的最大正方体的棱长是 12 厘米，切后剩下立体图形的底面图形如图 2：高度 13 厘米，高度是 1 厘米。

第三次能切下的最大正方体的棱长是 4 厘米。用原长方体的体积减去三次切掉的体积，就是剩下立体图形的体积。

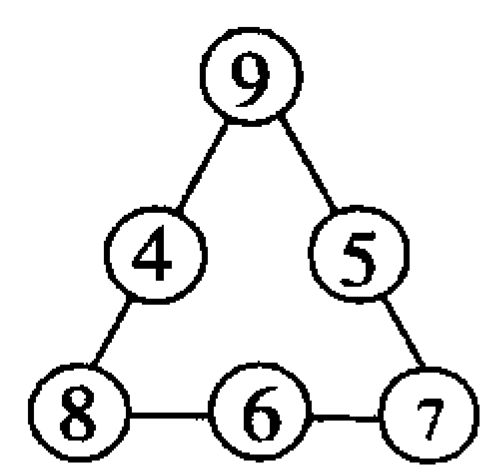
解：$25\times16\times13-13\times13\times13-(25-13)^3-[16-(25-13)]^3$
$=5200-2197-1728-64$
$=1211$（立方厘米）

答：剩下的体积是 1211 立方厘米。

第 18 讲　最大与最小

一、对应训练

1. 提示：根据题意要使三角形每条边的和相等且最大，所以要尽可能填大数，即：7、8、9，然后根据使三角形每条边上的和相等这一条件，就可以计算出这个和的最大值。

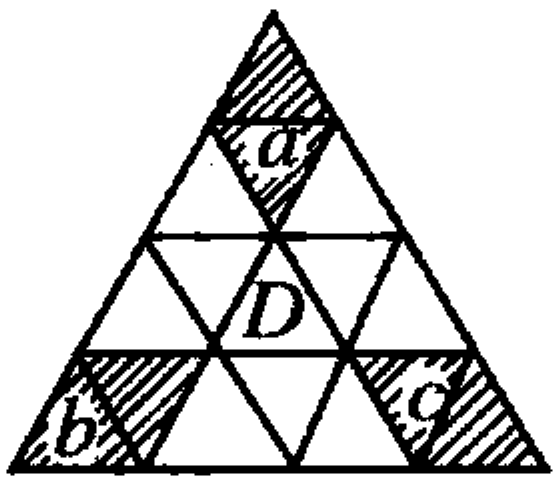


$(7+8+9)\times2+4+5+6=63\quad 63\div3=21$

2. 提示：因为四个人的平均年龄是 25 岁，那么四个人的年龄总和是 $25\times4=100$ 岁，四人中没有小于 17 岁的，那当某人年龄最大时，另外三人年龄最小都是 17 岁，所以年龄最大的人可能是：$25\times4-17\times3=49$ 岁。
3. 提示：开第 1 把锁，从最坏的情况考虑，试了 4 把钥匙还未成功，则第 5 把不用再试了，它一定能打开这把锁。同样的道理，开第 2 把锁最多试 3 次，开第 3 把锁最多试 2 次，开第 4 把锁最多试 1 次，最后剩下的一把钥匙一定能打开剩下的第 5 把锁，用不着再试。
解：最多（也就是按最不凑巧的情况考虑）要试的次数为 $4+3+2+1=10$（次）。
4. 提示：把一个自然数分成两个自然数的和，要乘积最大，必须使它们的差最小。因而可以将 17 分成 8 与 9 的和，即 $8+9=17$，$8\times9=72$。
5. 提示：应该划去 4 个 7 和万位上的 8，剩下的数组成的最小五位数是 62980。最大的五位数是 82980。

二、变式训练

1. 提示：为了方便描述，我们把图中部分三角形注上字母，从图中可以看出，中心处 D 中填的数和三条边上的和没有关系，因此，应填最小的数 1。而三个角上的 a、b、c 六个小三角形中的数都被用过两次，所以要尽可能填大数，即填 11 ~ 16。然后根据“三角形三边上 7 个小三角形内数的和相等”这一条件，就可以计算出这个和的最大值了。



解：$(2+3+4+\cdots+16+11+12+13+14+15+16)\div 3=72$

答：这个和的最大值是 72。

2. 提示：把 360 分解质因数：$360=2\times2\times2\times3\times3\times5$。
这四个数是：2×2，2×3，3，5，即 3，4，5，6。
因此最大一个是 6 岁。

3. 提示：开第一把锁，从最坏的情况考虑，试了 9 把钥匙还未成功，则第 10 把不用再试了，它一定能打开这把锁，同样道理，开第二把锁最多试 8 次，开第三把锁最多试 7 次，开第四把锁最多试 6 次……最后剩下的一把钥匙一定能打开剩下的第十把锁，用不着再试。
最多（也就是按最不凑巧的情况考虑）要试的次数为：
$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$（次）

4. 提示：用枚举的方法，周长为 20 厘米，长、宽为整数厘米的长方形有 5 个：长为 9 厘米，宽为 1 厘米，面积为 9 平方厘米；
长为 8 厘米，宽为 2 厘米，面积为 16 平方厘米；
长为 7 厘米，宽为 3 厘米，面积为 21 平方厘米；
长为 6 厘米，宽为 4 厘米，面积为 24 平方厘米；
长为 5 厘米，宽为 5 厘米，面积为 25 平方厘米。
因此，在这些长方形中，长和宽都等于 5 厘米时面积最大。

5. 提示：在一个多位数中划去 6 个数字，使剩下的数字组成一个最大的六位数，要使这个六位数最大，应用十万位以上的最大的数做最高位数，且最高位只能用 8，万位上的数只能从 5 和

9 中选，故万位上是 9，千位上是 7……这个最大的六位数是 897071。

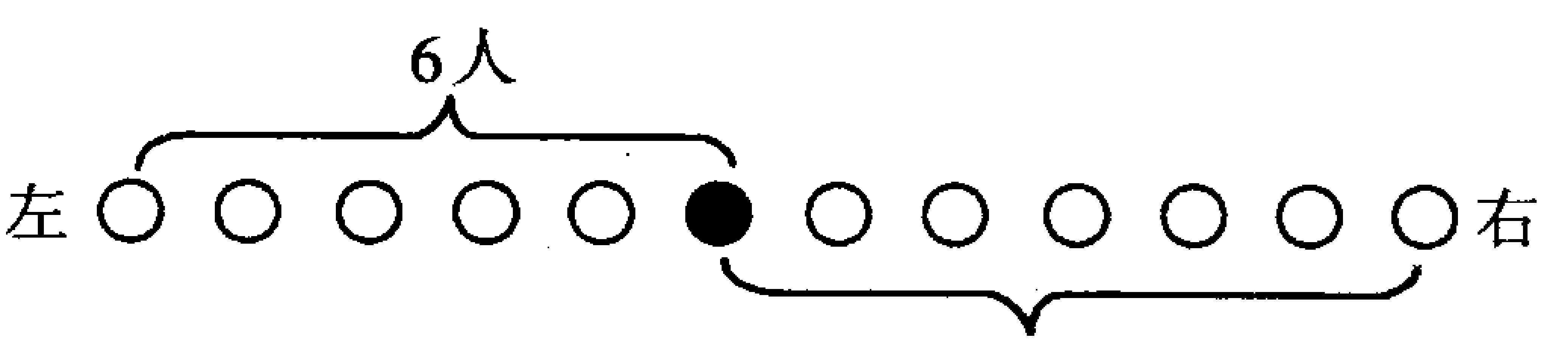
三、拔高训练

1. 提示：从节省原料的角度来考虑，将 10 米长的铁条截成 4 米和 3 米长的铁条，有以下几种截取方法：
(1) 截成 3 米、3 米、4 米，无残料；
(2) 截成 3 米、3 米、3 米，残料 1 米；
(3) 截成 4 米、4 米，残料 2 米。
　　显然应充分利用（1），先用 32 根 10 米长的铁条按（1）截取，得到 64 根 3 米的，32 根 4 米的，还差 19 根 3 米的，须再用 7 根按（2）截取，这样要想得到 83 根 3 米长和 32 根 4 米长铁条，至少需要 $32+7=39$（根）10 米长的铁条。
2. 提示：要使运费最省，就要尽量选择运费低的供方，因此北京需要大米 180 吨，供应方 A 与 B 运到北京的运费分别是每吨 5 元与 4 元，应该选择运费低的 B 地供应北京 180 吨，费用是 $4\times180=720$（元）。B 地还剩 20 吨大米供应天津，再由 A 地供应给天津 140 吨，所需费用 $3\times20+2\times140=340$（元），因此最省运费应是：
$$\begin{aligned}&4\times180+3\times20+2\times140\\=&720+60+280\\=&1060\text{（元）}\end{aligned}$$

第 19 讲　容斥原理

一、对应训练

1. 提示：根据题意画出图如下：



三种思考方法：

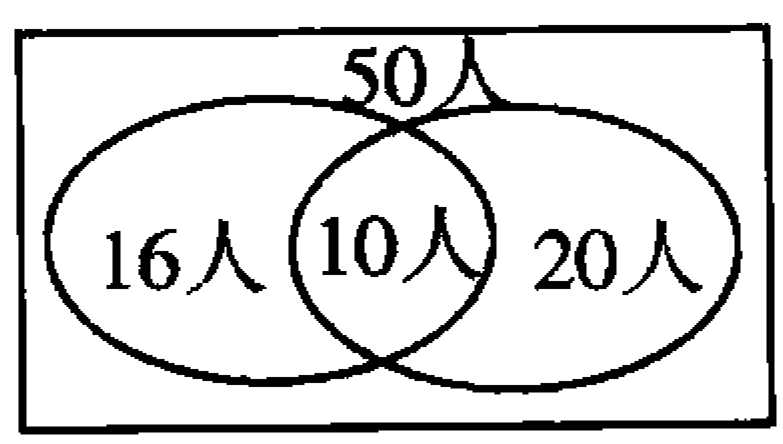
（1）根据题意：从左向右数是第 6 位，说明它前面有 5 个人，所以这队有 $5+7=12$（人）

（2）从右向左数是第 7 位，说明小红后面有 6 人，所以这队有 $6+6=12$（人）

（3）由图所示：小红属于重叠部分，前后各加了一次，所以将前后的人数相加，最终再减去 1，所以这队有 $6+7-1=12$（人）

2. 提示：大长方形的面积为 $3\times6=18$（平方厘米），中长方形的面积为 $3\times4=12$（平方厘米），小长方形（阴影）的面积为 $2.5\times1.5=3.75$（平方厘米）。所以盖住的面积是 $18+12-3.75=26.25$（平方厘米）。

3. 提示：如图：参加英语兴趣班和自然科技班的总人数是 $16+20-10=26$（人），则两个班都没有参加的人数是全班人数－参加英语兴趣班或自然科技班的人数。



解：$50-(16+20-10)=24$（人）

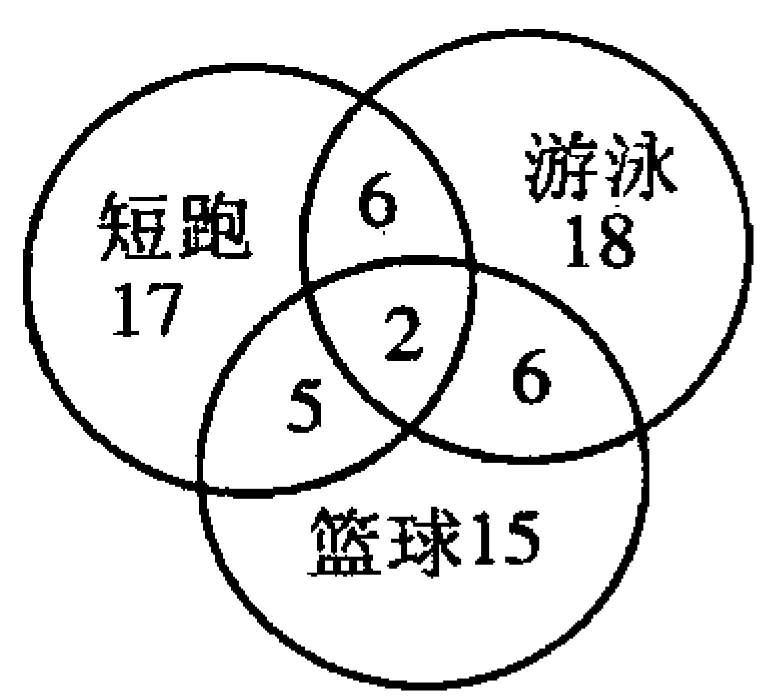
4. 提示：由"24 名不是六年级的"可知，24 名是五年级和其他年级的，由"28 名不是五年级的"可知，28 名是四年级和其他年级的，用 $24+28$ 可算出五年级加六年级以及两个其他年级的人数和，再减去 32 就得到两个其他年级的人数，这样其他年级的人数是 $(24+28-32)\div2=10$（人）

解：中低年级：$(24+28-32)\div2=10$（人）

五年级：$4-10=14$（人）

六年级：$28-10=18$（人）

5. 提示：画韦恩图表示，可知，至少有一项达到优秀的学生人数＝短跑优秀人数＋游泳优秀人数＋篮球优秀人数－短跑和游泳均优秀人数－游泳和篮球均优秀人数－篮球和短跑均优秀人数＋三项均优秀人数。



解：至少一项优秀的学生数：

$17+18+15-6-6-5+2=35$（人）

全班人数：35 +4 =39（人）

答：全班有 39 名学生。

二、变式训练

1. 提示：

（1）根据题意：李军在第二列中，从前向后数他是第 5 个，说明他前边有 4 个人，所以先求这列共有 4 +9 =13（人），再求四列共有 13 ×4 =52（人）。

（2）若从后面数，李军是第 9 个，说明李军后面有 8 人。先求这列有 5 +8 =13（人），再求四列共有 13 ×4 =52（人）。

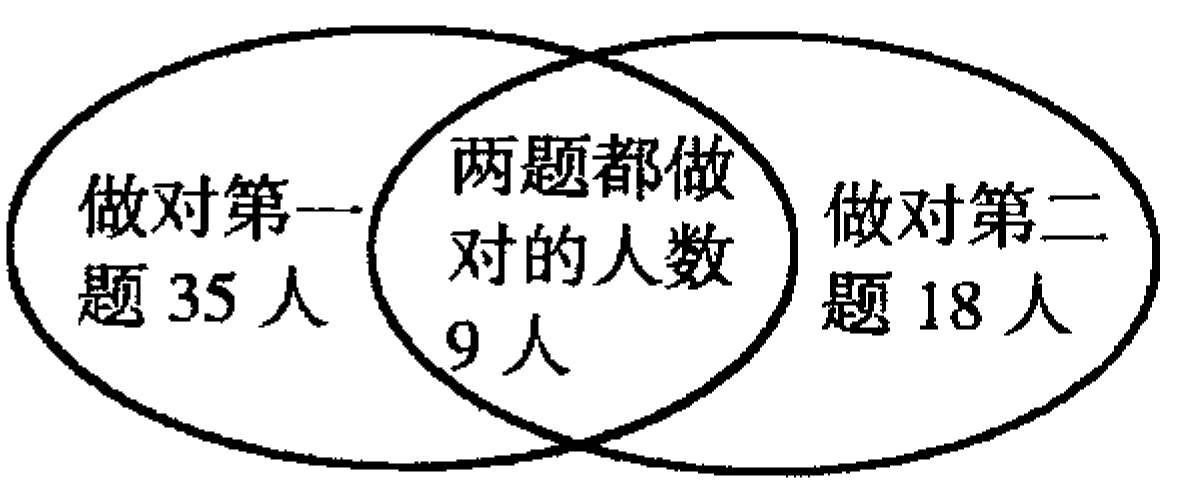
（3）李军属于重叠部分，前后各加了 1 次，所以将前后人数相加，最后再减去 1，也是这列的人数，再求四列人数。

解：（1）［(5 -1) +9］×4 =52（人）

（2）［5 +(9 -1)］×4 =52（人）

（3）(5 +9 -1) ×4 =52（人）

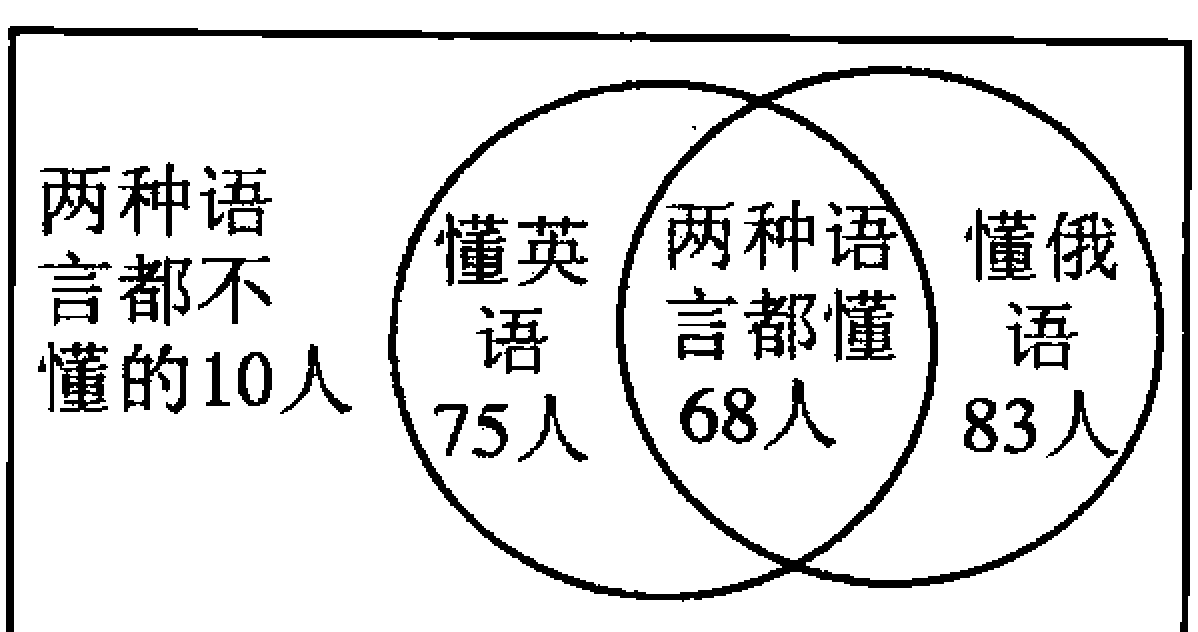
2. 提示：根据题意画出下图：



图中重叠部分表示两题都做对的 9 人，这 9 人，既被包括在做对第一题的 35 人内，又被包括在做对第二题的 18 人内，重复算了一次，所以要算出全班人数，必须从 35 + 18 = 53（人）中去掉重复算过的 9 人，所以全班人数应是 35 + 18 - 9 =44（人）。

3. 提示：如图所示，旅客的总人数 = 懂英语人数 + 懂俄语人数 - 两种语言都懂的人数 + 两种语言都不懂的人数。

解：75 +83 -68 +10 =100（人）



4. 提示：由“64 件作品不是三年级的”可知 64 件是四年级和其他年级的，由“58 件作品不是四年级的”可知 58 件作品是三年级和其他年级的。用 64 +58 可算出三年级加四年级以及两个其他年级的作品和，再减去 32 就得到两个其他年级的作品，这样其他年级的作品是（64 +58 −32）÷2 =45（幅）。

解：一、二、五、六年级：（64 +58 −32）÷2 =45（幅）

根据和差问题：（45 +5）÷2 =25（幅）

5. 提示：这三张纸片盖在桌面上，由整个图形来看，它是由三部分组成：图中阴影部分（二重叠）、阴影围着的内部 42 平方厘米（三重叠）和阴影外的部分（无重叠），盖住桌面的面积（144 平方厘米）是这三部分面积的总和。

三个圆形纸片面积总和减去盖住桌面面积后，就是一份阴影部分与两份 42 平方厘米面积的和。

由此可求得阴影部分的面积：

100 ×3 −144 −42 ×2

=300 −144 −84

=72（平方厘米）

答：三个阴影部分面积的和是 72 平方厘米。

三、拔高训练

1. 提示：两科都参加的人数是 200 +200 −260 =140（人），而两科都参加的女生人数是 140 −75 =65（人），所以只参加数学竞赛而没有参加语文竞赛的女生是 80 −65 =15（人）。

解：两科都参加的人数：200 +200 −260 =140（人）

两科都参加的女生人数：140 −75 =65（人）

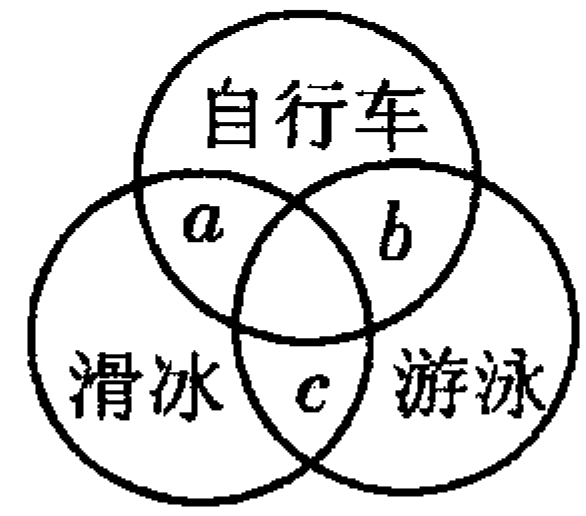
只参加数学竞赛的女生人数：80 −65 =15（人）

2. 提示：

（1）先求出最少有几个人至少会三项运动之一。因为没有人三项运动都会，因此只有当每人都会两项时人数最少，此时会运动的人也有（17 +13 +8）÷2 =19（人）。这些人数学都及格了，再加上数学不及格的 6 人正好是 25 人，所以没有人数学优秀。

（2）如图所示：设既会骑自行车又会滑冰的有 a 人，既会骑自行车又会游泳的有 b 人，既会滑冰又会游泳的有 c 人。

$a+b+c=19$，$a+b=17$，$c=19-17=2$（人）。



第 20 讲　抽屉原理

一、对应训练

1. 提示：一共有 12 个属相，那么抽屉就是 12，平均分配，每个抽屉里放进一个人，还剩下 3 个人，不论这 3 个人属相是什么，都会保证有的抽屉至少有 2 个人。

   列式 $15 \div 12 = 1$（个）……3（人）

   $1+1=2$（人）

2. 提示：把一次摸出的 13 个小球看做 13 个苹果，小球的颜色共有 4 种，抽屉就是 4，根据抽屉原理列式：

   $13 \div 4 = 3$（个）……（1 个）　$3+1=4$（个）

3. 提示：游览的方法有：（玄武湖、中山陵）、（玄武湖、总统府）、（中山陵、总统府）、（玄武湖）、（中山陵）、（总统府）共 6 种，所以至少有 $6+1=7$（班）。

4. 提示：17 个同学——→17 个抽屉，152 本书——→152 个物体。

   如果 17 个同学所分到的书的本数都不相同，至少要有 $1+2+3+\cdots+17=153$ 本，而且现在只有 152 本书，我们把 17 个同学看做 17 个抽屉，把 152 本书看做是 152 个物体，我们把物体放进 17 个抽屉，如果每个抽屉的物体不同，一定有一个抽屉没有物体，如果要使每个抽屉里都有物体，至少有两个抽屉的物体相同，所以一定会有两个同学得到的本数相同。

5. 提示：一个小组苹果数和香蕉的数目可以分成以下四类情况：

	苹果数	香蕉数
（1）	奇数	偶数
（2）	偶数	奇数

(3) 奇数　　　　　　　　奇数

(4) 偶数　　　　　　　　偶数

五个小组中至少有两个小组的奇偶数相同，因此，这两组的苹果数的和和香蕉数的和都为偶数。

二、变式训练

1. 提示：把 18 个小朋友看做 18 个抽屉，把苹果看做物体，物体的个数必须大于抽屉的个数，才能保证至少有一个抽屉里放两个或两个以上的物体。因此，老师至少要拿 $18+1=19$（个）苹果分给小朋友，才能保证至少有一个小朋友能拿到两个或两个以上的苹果。

   $18+1=19$（个）

2. 提示：把四种不同颜色看成是 4 个抽屉，把袜子看成是物体，要保证有 1 双同色的，就是 1 个抽屉里至少有 2 只袜子，根据抽屉原理，最少要摸出 5 只袜子才行。这时拿出 1 双同色的后，4 个抽屉中还有 3 只袜子，如果再摸出 2 只袜子，又能保证有 2 只是同色的。以此类推，要保证有 3 双同色的，共要摸出的袜子是 $5+2+2=9$（只），所以最少要摸出 9 只袜子，才能保证有 3 双是同色的。

3. 提示：订阅报刊的种类共有 7 种：①只订阅一种有 3 种情况；②订阅两种的有 3 种情况；③三种都订的有一种情况。从最不利的情况考虑，每 7 个学生订阅的报刊种类各不相同，40 里面有 5 个 7 还余 5，所以至少有 6 名学生订阅报刊种类相同。

   解：$40\div7=5$（名）……5（名）

   　　$5+1=6$（名）

4. 提示：把 40 个小朋友看做是 40 个抽屉，125 个水果看做物体。这时的物体数远远大于抽屉数了。我们可以用物体数除以抽屉数。$125\div40=3$……5，即每个小朋友都可以分到 3 个水果，还余 5 个呢。这余下的 5 个水果不管分给谁，就肯定有人会得到 4 个或 4 个以上的水果了。

   　　解：$125\div40=3$……5

   　　答：所以会有人得到 4 个或 4 个以上的水果。

5. 提示：因为相邻的两个自然数一定是互质的数，把 1～10 这十

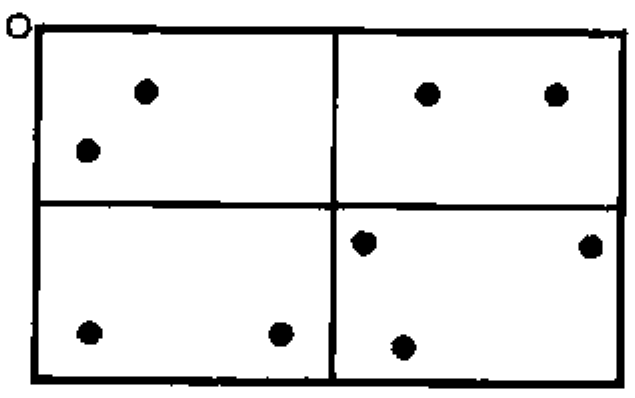
个数每相邻的两个数分成一组，制成5个抽屉，(1，2)、(3，4)、(5，6)、(7，8)、(9，10)。现在从每组数中取一个数，共取了5个数，如果再取一个数，一定有其中一组数中的两个数被取上，而被取上的这组中的两个数一定是互质的。所以不大于10的6个自然数中，必定有两个数互质。

三、拔高训练

1. 提示：共有9列，每列有3个小方格，用红蓝两色给每列中的3个小方格随意涂色，有下面8种情况。

红	蓝	红	红	蓝	蓝	红	蓝
红	蓝	红	蓝	红	红	蓝	蓝
红	蓝	蓝	红	红	蓝	蓝	红

把这8种情况看作8个抽屉，而在3×9的方格中，共有9列（每列有3个小格），给第9列再涂色，一定与这8种中的一种相同。因此一定有2列涂色方法完全相同。



2. 提示：说明这个问题，首先要构造“抽屉”。“抽屉”怎么构造呢？说来真巧妙，把这个长方形平均分成四个小方形，这就是四个“抽屉”。画上的9个点就好比是9个“苹果”，至少会有3个“苹果”落在某一个“抽屉”里（如图中右下角的那一份就有3个点）。

我们再对右下角小长方形里的3个点作深入地分析：因为小长方形的面积是2，即（8÷4），所以，哪怕那3个点落在小长方形的三个角上或两个点落在一侧的两个角上，另一点落在对边上，由它们构成的三角形的面积也只等于$2\times\frac{1}{2}=1$，绝对不可能大于1。若这3个点落在小长方形内，所构成的三角形的面积一定小于1。

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝小学生奥数夺冠　５年级
作者＝徐向阳主编
页数＝２８４
ＳＳ号＝１２２０９２６４
出版日期＝２００８．１０

目录