# 目 录
CONTENTS

# 第1讲 平均数

平均数问题是等分除法的发展，也是统计问题中最常用到的知识。把几个不相等的数在总数不变的条件下通过移多补少，使它们完全相等，求得的数就是平均数。

如何灵活运用平均数的数量关系解答一些稍复杂的问题呢？下面的数量关系必须牢记：总数量 ÷ 总份数 = 平均数。

解答平均数应用题的关键是要找准问题与条件、条件与条件之间相对应的关系。

通过变形、综合后的平均数应用题，数量关系比较复杂也比较隐蔽。只要同学们始终记住，平均数是由“总数量”除以与“总数量”相对应的“总份数”而得到，有些较复杂的平均数应用题，它的总数量或者总份数各由几部分合并而成，或者是几个求平均数的过程交织在一起，采用作图、假设等方法，开动脑筋，认真审题，就能找到正确的解题方法。

## 金牌例题

**例题 1** **某学校入学考试，确定了录取分数线，报考的学生中，只有$\frac{1}{4}$被录取。录取者平均分比录取分数线高 10 分，没有被录取的同学其平均分比录取分数线低 26 分，所有考生的平均成绩是 70 分，那么，录取分数线是多少?**

**思路分析**：我们可以分以下几步来思考：

（1）这个题目的条件是什么？问题是什么？你能用自己的语言表达题目的意思吗？

（2）根据条件“报考的学生中，只有$\frac{1}{4}$被录取”，说明“把报考的学生数”看成几份？（4 份）可以把报考学生的总人数假设为 $4x$ 吗？为什么？

（3）如果报考人数为 $4x$，那么录取人数是多少？（$x$）没有被录取的人数是多少？（$3x$）

（4）如果以录取分数线作为基数，那么被录取的人数 $x$，每人高出录取分数线 10 分，一共高出几分？（$10x$）没有被录取的人数 $3x$，每人低于录取分数线 26 分，一共低了几分？（$26\times3x$）

（5）对所有考生来说，总共比录取分数线少了多少分？

$(26\times3x-10x)$

（6）每人平均少了多少分？

$(26\times3x-10x)\div(3x+x)=17$（分）

（7）每一考生的平均分是70分，这17分就是考生平均分比录取分数线少的分数，那么，录取分数线是多少？

$70+17=87$（分）

这道题可以作如下检验：

没有被录取的考生的平均成绩是 $87-26=61$（分），被录取的考生平均成绩是 $87+10=97$（分），全体考生的平均成绩是 $(61\times3+97\times1)\div(3+1)=70$（分）

**解：**设录取人数为 $x$ 人

$(26\times3x-10x)\div(3x+5)$

$=17$（分）

录取分数线是：$70+17=87$（分）

**答：**录取分数线是87分。

**例题2** **有4箱水果，已知苹果、梨、橘子平均每箱42个，梨、橘子、桃平均每箱36个，苹果和桃平均每箱37个。求：一箱苹果多少个？一箱桃多少个？**

**思路分析：**

已知：①1箱苹果+1箱梨+1箱橘子 $=42\times3=126$（个）

②1箱桃+1箱梨+1箱橘子 $=36\times3=108$（个）

③ 1 箱苹果 + 1 箱桃 = 37 × 2 = 74（个）

由①②两个等式可知：

一箱苹果比一箱桃多 126 − 108 = 18（个），再根据等式③就可以算出，一箱桃有（74 − 18）÷ 2 = 28（个），一箱苹果有 28 + 18 = 46（个）

**解：** 一箱苹果和一箱桃共有：37 × 2 = 74（个）

一箱苹果比一箱桃多：42 × 3 − 36 × 3 = 18（个）

一箱桃有：（74 − 18）÷ 2 = 28（个）

一箱苹果有：28 + 18 = 46（个）

**答：** 一箱苹果 46 个，一箱桃 28 个。

**例题 3** **两地相距 360 千米，一艘汽艇顺水行全程需要 10 小时，已知这条河的水流速度为每小时 6 千米。汽艇往返两地的平均速度是多少？**

**思路分析：** 用往返路程除以往返所用的时间就等于往返两地的平均速度。显然，要求往返的平均速度必须先求出逆水行全程所用的时间。因为 360 ÷ 10 = 36（千米/小时）是顺水速度，它是汽艇的静水速度与水流速度的和，所以，此汽艇的静水速度是 36 − 6 = 30（千米/小时），而"逆水速度 = 静水速度 − 水流速度"，所以汽艇的逆水速度是 30 − 6 = 24（千米/小时），逆水行全程时所用的时间是 360 ÷ 24 = 15（小时）。

**解**：$360 \div 10 - 6 \times 2 = 24$（千米/小时）

$360 \div 24 = 15$（小时/小时）

$360 \times 2 \div (10 + 15) = 28.8$（千米/小时）

**答**：汽艇往返两地的平均速度是每小时 28.8 千米。

**例题 4** **有四个数，每次选出其中三个数算出它们的平均数再加上另外一个数。用这种方法计算了四次，分别得出以下四个数 86、92、100、106。那么，原来这四个数的平均数是多少？**

**思路分析**：我们把这四个数分别用 $A$、$B$、$C$、$D$ 表示，每次取其中 3 个数算出它的平均数，再加上另外一个数，就可以表示为：

$\frac{A+B+C}{3}+D$、$\frac{A+B+D}{3}+C$、$\frac{B+C+D}{3}+A$、$\frac{A+C+D}{3}+B$，

而这样表示的数为 86、92、100、106，因此，我们可以得到下面的等式：$\frac{A+B+C}{3}+D+\frac{A+B+D}{3}+C+\frac{B+C+D}{3}+A+\frac{A+C+D}{3}+B=86+92+100+106$

把等式化简整理得：

$(A+B+C+D)\times 2=384$

这样就可以求出四个数的和以及它们的平均数了。

**解：**四个数的和：　$(86+92+100+106)\div 2$

$=384\div 2$

$=192$

四个数的平均数：$192\div 4=48$

**答：**原来这四个数的平均数是48。

**注意：**

（1）在用“总数量÷总份数＝平均数”求平均数时要注意“总数量”与“总份数”要相互对应。

（2）有一些题目采用“移多补少”把各数量扯平，会使思路更简捷，计算更巧妙。

**例题 5　汽车往返于甲乙两地之间，去时速度是每小时50千米，返回速度是每小时60千米，求往返的平均速度。**

**思路分析：**求往返的平均速度，需要来回的总路程和来回的总时间。题目没有告诉我们两地的距离，遇到这种情况可以运用假设法，假设出一段具体路程。为了方便计算，可假设路程为往返速度的最小公倍300千米，那么往返的总路程为$300\times 2$，去时行了$300\div 50=6$（小时），回来时行了$300\div 60=5$（小时），来回共用$5+6=11$（小时），用$300\times 2\div 11=54\frac{6}{11}$（千米/小时），就求出了往返的平均速度。

**解**：设甲乙两地相距300千米

$300 \times 2 \div (300 \div 50 + 300 \div 60)$

$= 600 \div 11$

$= 54\frac{6}{11}$（千米/小时）

**答**：往返的平均速度为$54\frac{6}{11}$千米/小时。

注意：类似这样的题目，用一个设定的数量为总路程的，不管设定的数量是多少，答案总是唯一的。

**小结**

通过变形，综合后的平均数应用题，数量关系较复杂也比较隐蔽。解答的关键是要找准问题与条件及条件与条件之间相对应的关系，只要我们认真审题开动脑筋，就能找到正确的解题方法。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 王东期末测试成绩，语言、数学、英语三科的平均分是 88 分，如果加上科技和自然，那么五科的平均分是 90 分，其中自然比科技多得 14 分，自然和科技分别得了多少分？

2. 一个学习小组有 12 个学生，一次英语测试时，王东请了病假。11 人的平均分是 85 分，后来王东补考的成绩比 12 人的平均分还高 5.5 分。王东考了多少分？

3. 商店将 8 元 1 千克的水果糖 15 千克、9 元 1 千克的酥糖 20 千克、12 元 1 千克的奶糖 25 千克混合在一起，成为什锦糖，什锦糖每千克多少元?

4. 一辆汽车驶过一座拱桥，桥的上坡与下坡的路程相等，汽车上坡每小时行 60 千米，下坡每小时行 80 千米，这辆汽车过桥的平均速度是多少千米/小时?

5. 某校有 100 个学生参加数学竞赛，平均得分 63 分，其中男生平均得 60 分，女生平均得 70 分，男生比女生多多少个？

## 变式训练

1. 实验小学六年级有学生 120 人，在毕业测试中，语文、数学、外语三科及格的百分比平均为 95%，已知语文及格 118 人，外语及格 105 人，数学及格的有多少人？

2. 甲乙丙三人一起买了8个面包平均分着吃，甲付了5个面包的钱，乙付了三个面包的钱。等吃完后，丙付了2.4元。甲应收回多少钱？

3. 甲数是乙、丙两数平均数的$\frac{6}{7}$，甲数是甲乙丙三数平均数的几分之几？

4. 五个数的平均数是18，把其中一个数改为6后，这五个数的平均数是16，这个改动的数原来是多少？

5. 王强从$A$地到$B$地，先骑自行车行完全程的一半，每小时行12千米，剩下的步行每小时行4千米，王强行完全程的平均速度是多少？

## 三 拔高训练

1. 一队学生去果园摘苹果，第一个进果园的学生摘 1 个苹果，第二个学生摘 2 个苹果，第三个学生摘 3 个苹果，以此类推后边的学生都比前边的学生多摘一个苹果。这样，这队学生恰好把果园的苹果摘完，最后，平均每个学生摘 6 个苹果，这队学生有多少人？

2. 有三个数，每次选取其中两个，算出这两个数的平均数，再加上余下的第三个数，这样算了三次得到 35、27、25 三个数值，这原来三个数分别是多少？

# 第2讲 行程问题（一）

行程问题是专门讲物体匀速运动的路程、时间、速度三者关系的应用题。有的涉及一个物体的运动，有的涉及两个物体的运动。运动的形式有相向（相遇）、同向（追及）、背向（相离）三种情况。不管哪种情况，它们的数量关系是相同的，都可以归结为路程 = 速度 × 时间，只要知道三个量中的任何两个量就能求出第三个量。

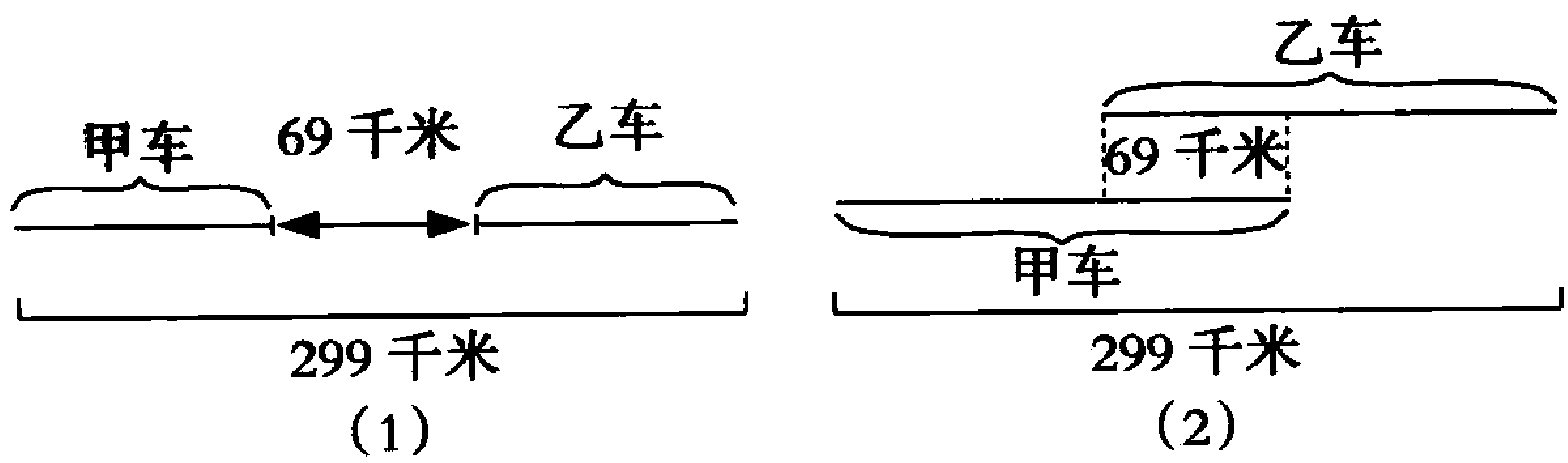
要正确解答有关行程问题的应用题，必须弄清物体运动的具体情况："相向""背向""同向"有着不同的数量关系：

1. 相向而行：相遇时间 = 距离 ÷ 速度和
2. 背向而行：相背距离 = 速度和 × 时间
3. 同向而行：追及时间 = 追及距离 ÷ 速度差

如果上述的几种情况交织在一起，组成的应用题将会丰富多彩、千变万化。解答这些问题时，我们还要理清题中的已知条件和所求问题之间的关系，同时采用"转化""假设"等方法，把复杂的数量关系转化为简单的数量关系，把一个复杂的问题转化为几个简单的问题，逐一进行解决。

## 金牌例题

**例题 1** **甲乙两车同时从相距 299 千米的两地相向而行，甲车每小时行 52 千米，乙车每小时行 40 千米，几小时后，两车第一次相距 69 千米？再经过几小时两车第二次相距 69 千米？**




**思路分析：**我们通过画图来理解两个“相距 69 千米”。

从图（1）中可以看出：第一次相距 69 千米是指两车还有 69 千米的路程没有行，两车实际行了 $299-69=230$（千米）。

从图（2）中可以看出：第二次相距 69 千米是指两车相遇后没有停止，又继续相背运动了 69 千米，此时两车实际行了 $299+69=368$（千米）。

**解法一：**$(299-69)\div(52+40)=2.5$（小时）

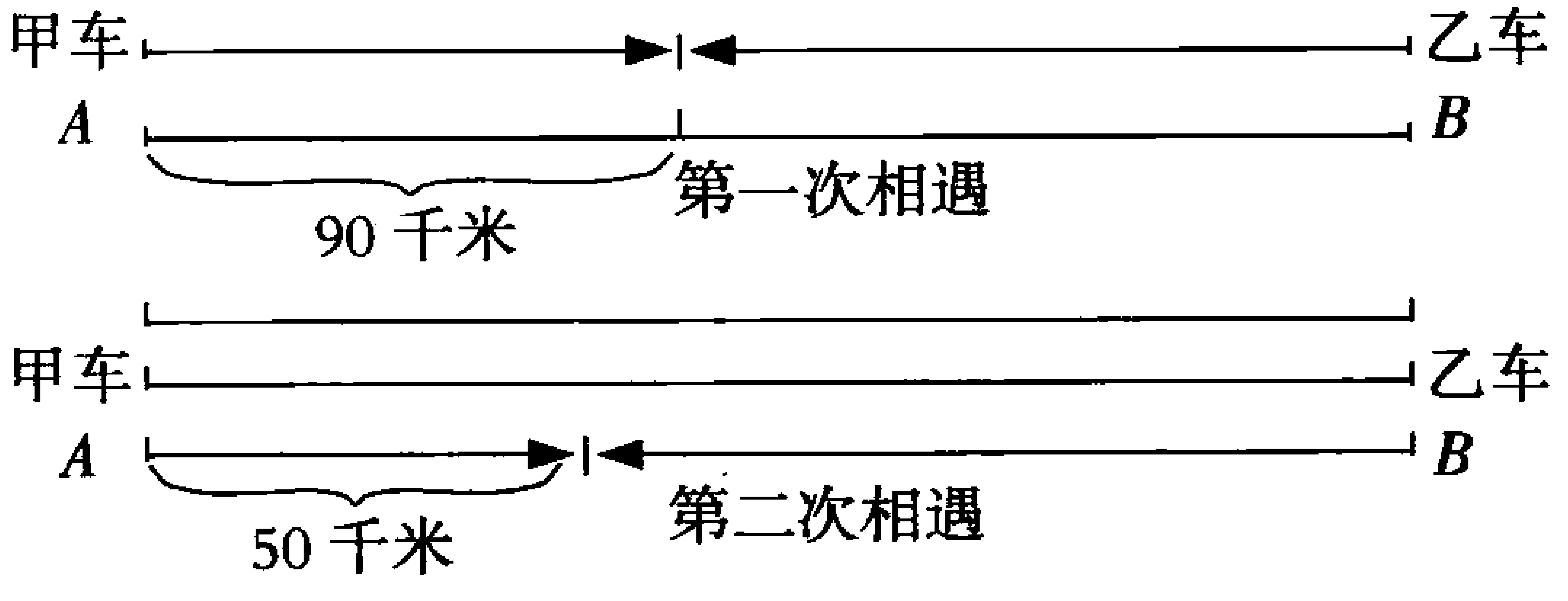
$(299+69)\div(52+40)-2.5=1.5$（小时）

**解法二：**$(299-69)\div(52+40)=2.5$（小时）

$69\times2\div(52+40)=1.5$（小时）

**答：** 2.5 小时后两车第一次相距 69 千米，再经过 1.5 小时两车第二次相距 69 千米。

**例题 2** **甲乙两车同时从 *A*、*B* 两地相向而行，途中相遇，相遇时距离 *A* 地 90 千米。相遇后，两车继续以原速度前进，到达目的地后，立即返回，在途中第二次相遇。这时相遇地点距 *A* 地 50 千米。已知从第一次相遇到第二次相遇所用的时间是 4 小时，求甲乙两车的速度。**




**思路分析：** 如图所示，我们知道，两车第一次相遇，行了一个全程，第二次相遇行了三个全程。那么本题，从第一次相遇到第二次相遇就行了两个全程。又知从第一次相遇到第二次相遇所用的时间是 4 小时，所以行一个全程就应该用 $4 \div 2 = 2$（小时），从出发到第一次相遇甲距 *A* 点 90 千米，说明甲行了 90 千米，甲的速度就是 $90 \div 2 = 45$（千米/小时），从第一次相遇到第二次相遇乙行了 $90 + 50 = 140$（千米），用了 4 小时，乙的速度就是 $140 \div 4 = 35$（千米/小时）。

**解**：甲的速度：$90 \div (4 \div 2) = 45$（千米/小时）

乙的速度：$(90 + 50) \div 4 = 35$（千米/小时）

**答**：甲乙两车的速度分别是每小时 45 千米、35 千米。

**例题 3** **一辆汽车从甲地开往乙地，要行 360 千米，开始按计划以每小时 45 千米的速度行驶，途中因汽车出故障修车 2 小时，因为要按时到达乙地，修好车后必须每小时多行 30 千米。问：汽车是在离甲地多远处修车的？**

**思路分析**：途中修车用了 2 小时，汽车就少行 $45 \times 2 = 90$（千米），修车后，为了按时到达乙地，每小时必须多行 30 千米，90 千米里面包含 3 个 30 千米，也就是说，再行 3 小时就能把修车少行的 90 千米行完。因此，修车后再行 $(45 + 30) \times 3 = 225$（千米）就能到达乙地，汽车是在离甲地 $360 - 225 = 135$（千米）处修车的。

**解**：
$$
\begin{aligned}
&360 - (45 + 30) \times (45 \times 2 \div 30) \\
&= 360 - 75 \times 3 \\
&= 360 - 225 \\
&= 135\text{（千米）}
\end{aligned}
$$

**答**：汽车是在离甲地 135 千米处修车的。

**例题4** **两列火车相向而行，甲车每小时行72千米，乙车每小时行90千米，两车错车时，甲车上一乘客发现：从乙车车头经过他的车窗时开始到乙车车尾，经过他的车窗共用了10秒，求乙车的车长。**

**思路分析：** 根据题意可知，从乙车车头经过甲车乘客车窗这一时刻算起，乙车车头和甲车乘客开始做“相向而行”，因为甲车乘客是坐在甲车上，所以乘客的速度就是甲车的速度，经过10秒乘客看见车尾，所以这10秒钟，甲乙两车行驶的路程就是乙车的车长。

**解：** $(72 \times 1000 \div 3600 + 90 \times 1000 \div 3600) \times 10$

$= (20 + 25) \times 10$

$= 450$（米）

**答：** 乙车的车长为450米。

**例题5** **甲乙丙三人都从$A$地到$B$地，早晨六点钟，甲乙两人一起从$A$地出发，甲每小时走5千米，乙每小时走4千米，丙上午8时才从$A$地出发，傍晚六点，甲和丙同时到达$B$地，问：丙什么时候追上乙？**

**思路分析：** 甲比丙先行2小时，共先行$5 \times (8-6) = 10$（千米），到傍晚六点，丙追上了甲，可以求出丙每小时比甲多行$10 \div (6+12-8) = 1$（千米），因此，丙每小时行$5+1=6$（千米），乙比丙也先行2小时，共先行$4 \times (8-6) = 8$（千米），丙只要用$8 \div (6-4) = 4$（小时）就

可以追上乙，因此，丙是在 $8+4=12$（时）追上乙的。

答：丙在12时追上乙。

**小结**

对于行程问题，一定要首先弄清行程中运动物体的个数（一个、两个或多个），运动的时间、地点（同时同地或异时异地），运动的方向（同向或背向），运动的途径（直线或曲线），速度的变化，相遇的地点和次数等基本要素，反复运用基本的数量关系灵活解决实际问题。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 甲乙两地相距120千米，一辆客车和一辆货车同时从甲地驶往乙地，客车比货车早到0.5小时，已知客车的速度是货车的1.2倍，客车每小时行多少千米?

2. 甲乙两车从相距 500 千米的两地同时出发相向而行，4 小时后还相距全程的$\frac{1}{5}$，已知甲车每小时行 55 千米，乙车每小时行多少千米?

3. 两地相距 600 千米，甲乙两列火车同时从两地出发相向而行，经过 6 小时相遇，已知甲每小时行的路程比乙每小时行的$\frac{4}{5}$多 1 千米，乙每小时行多少千米?

4. 小东从家步行去学校，每小时走 5 千米。回家时骑自行车每小时行 13 千米。步行比骑自行车的时间多 4 小时，求小东家到学校的距离。

5. 甲乙丙三人步行的速度分别是每分钟 100 米、90 米、75 米。甲在公路上 $A$ 处，乙丙同在公路上 $B$ 处，三人同时出发，甲与乙丙相向而行。甲和乙相遇 3 分钟后，甲和丙又相遇了，求 $AB$ 之间的距离。

## 变式训练

1. 甲乙两车同时从 $A$ 地开往 $B$ 地，甲车到达 $B$ 地后立即返回，在离 $B$ 地 45 千米处与乙车相遇，甲乙两车的速度比是 3:2，相遇时甲车行了多少千米?

2. 甲乙两人骑自行车从同一地点背向而行，甲每小时行 13 千米，乙每小时行 11 千米，如果乙先行 34 千米，那么两人同时行驶几小时后，他们之间的距离是 82 千米?

3. 一辆轿车和一辆比它时速慢 20 千米的卡车，分别从甲乙两地相对开出，行驶两小时后，两车还相距全程的 $\frac{1}{6}$，轿车这时已到中点，求两地的距离。

4. 一列火车通过 440 米的桥需要 40 秒，以同样的速度穿越 310 米的隧道需要 30 秒，这列火车的速度和车身长各是多少?

5. 一条船顺水航行每小时行 20 千米，逆水航行每小时行 15 千米，已知这条船在该航道的甲乙两港间往返一次要用 21 小时，甲乙两港间的距离是多少？

## 三 拔高训练

1. *B* 处的兔子和 *A* 处的狗相距 56 米，兔子从 *B* 处跳，狗同时从 *A* 处跳出追兔子。狗一跳前进 2 米，狗跳 3 次的时间与兔子跳 4 次的时间相同，兔子跳出 112 米到达 *C* 处，此时正好被狗追上，兔子一跳前进多少米？

2. 一只小船第一次顺水航行 42 千米，逆水航行 8 千米，共用去 11 小时。第二次用同样的时间顺流航行 24 千米，逆流航行 14 千米，求小船在静水中的速度和水速。

# 第3讲 行程问题（二）

有些较复杂的应用题，运用算术方法解答有一定困难，列方程解答就比较容易。

列方程解答行程问题的优点是可以使未知的数直接参与运算，列方程时能充分利用我们熟悉的数量关系。因此，对于一些复杂的行程问题，我们可以用题中已知的条件和所设的未知数，根据自己最熟悉的等量关系列出方程，方便解题。

## 金牌例题

**例题 1　某人骑自行车需要在规定的时间内把信件送到某地，每小时走 15 千米可以早到 0.4 小时，如果每小时走 12 千米就要迟到 0.25 小时，他去某地的路程有多远？**

**思路分析：**我们可以设规定的时间为 $x$ 小时，那么如果每小时走 15 千米，$(x-0.4)$小时就可以把信件送到，如果每小时走 12 千米，需要$(x+0.25)$小时才能送到，利用他去某地路程不变这一关系，就可以列出方程，

通过解方程求出规定时间，就可以求出他去某地的路程有多远。

**解：** 设规定的时间为 $x$ 小时

$15\times(x-0.4)=12\times(x+0.25)$

$3x=9$

$x=3$

$15\times(3-0.4)=39$（千米）

或 $12\times(3+0.25)=39$（千米）

**答：** 他去某地的路程是 39 千米。

**例题 2** **快、慢两车同时从 $A$ 地到 $B$ 地，快车每小时行 54 千米，慢车每小时行 48 千米。途中快车因故障停留 3 小时，结果两车同时到达 $B$ 地，求 $AB$ 两地间距离。**

**思路分析：** 我们可设快车行驶了 $x$ 小时，那么，慢车就行驶了（$x+3$）小时，利用快、慢车所行的路程相等这一关系，可以列出方程，通过解方程求出快车所行驶的时间，最后用“速度×时间＝路程”这一关系求出 $AB$ 两地间的距离。

**解：** 设快车行驶了 $x$ 小时

$54x=48\times(x+3)$

$6x=144$

$x=24$

$54\times24=1296$（千米）

答：$AB$ 两地间相距 1296 千米。

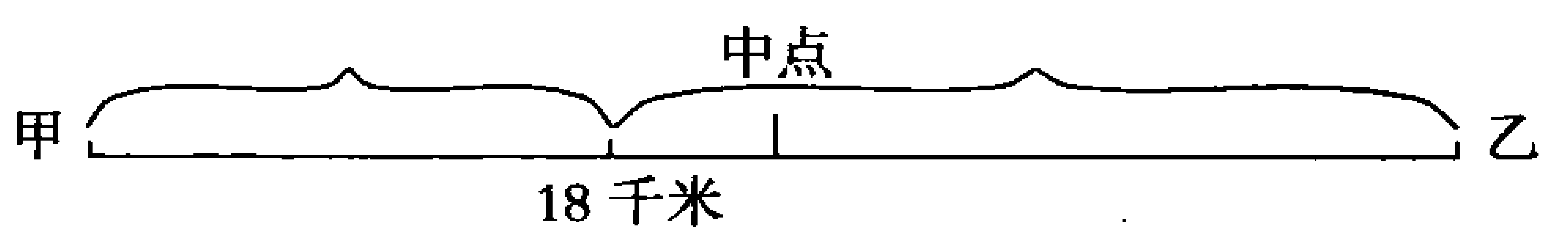
**例题 3** **两地相距 460 千米，甲列车开出两小时后，乙列车和甲列车相向开出，经过 4 小时与甲列车相遇。已知甲列车每小时比乙列车多行 10 千米，甲列车每小时行多少千米？**

**思路分析：** 甲列车 4 小时比乙列车 4 小时多行 $10\times4=40$（千米），因此，甲列车先行 2 小时，又行 4 小时，如果再行 4 小时就一定能行 $460+40=500$（千米），所以甲列车每小时行 $500\div(2+4\times2)=50$（千米）。

**解：** $(460+10\times4)\div(2+4\times2)=50$（千米）

**答：** 甲列车每小时行 50 千米。

**例题 4** **甲船从东港到西港要行 6 小时，乙船从西港到东港要行 4 小时，现在两船同时从东、西两港出发，相向而行，结果在离中点 18 千米的地方相遇，相遇时甲船行了多少千米？**




**思路分析：** 如图所示，相遇时"在离中点 18 千米的地方相遇"，因为是乙船快，所以乙船比甲船多行了 $18\times2=36$（千米）。已知甲乙行完全程所需要的时间，我们

可以分别求出甲船、乙船的速度，进而求出相遇时甲船乙船各行了全程的几分之几，乙船比甲船多行了全程的几分之几，进而求出全程，再求出甲船行了多少千米。

**解法一：**

① 甲乙两船相遇的时间：

$1\div(\frac{1}{6}+\frac{1}{4})=2\frac{2}{5}$（小时）

② 相遇时甲乙两船各行了全程的几分之几：

甲：$\frac{1}{6}\times2\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

乙：$\frac{1}{4}\times2\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

③ 全程共多少千米：

$18\times2\div(\frac{1}{4}\times2\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\times2\frac{2}{5})=180$（千米）

④ 相遇时甲船行了多少千米：

$180\times(2\frac{2}{5}\times\frac{1}{6})=72$（千米）

**解法二：**

① 甲乙两船相遇的时间：$1\div(\frac{1}{6}+\frac{1}{4})=2\frac{2}{5}$（小时）

② 相遇时甲船行了几分之几：$\frac{1}{6}\times2\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

③ 全程共多少千米：$18\div(\frac{1}{2}-\frac{2}{5})=180$（千米）

④ 相遇时甲船行了多少千米：$180\times\frac{1}{2}-18=72$（千米）

**解法三：**此题还可以用“比”的知识来解答，根据各自行完全程所需的时间，可求出甲乙两船所行路程的比，这样就可以找出相遇时乙船比甲船多行的千米数及其相对应的份数，求出每份千米数，又根据每份的千米数和甲船行的份数，求出相遇时甲船行的千米数。

**解：**$18\times2\div(6-4)\times4=72$（千米）

**答：**相遇时甲船行了72千米。

**例题5** **甲乙两地相距48千米，其中一部分是上坡路，其余是下坡路。某人骑自行车从甲地到乙地后沿原路返回，去时用了4小时12分，返回时用了3小时48分。已知自行车上坡时每小时行10千米，求自行车下坡时每小时行多少千米。**

**思路分析：**根据已知首先求出往返一共用的时间4小时12分+3小时48分=8小时。由于去时的上坡路就是返回时的下坡路，因此，在8小时内，正好是行48千米的上坡路和48千米的下坡路，这样，行上坡路共用了$48\div10=4.8$（小时），因此下坡路共行了$8-4.8=3.2$（小时），每小时行$48\div3.2=15$（千米）。

**解：**$48\div[(4\frac{1}{5}+3\frac{4}{5})-48\div10]=15$（千米/小时）

**答：**自行车下坡时每小时行15千米。

**小结**

在解行程问题时要充分利用图示把题中的情节形象地表示出来，有助于理解题意及分析数量关系，有助于迅速地找到解题思路。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 甲乙两个码头之间的距离是120千米，轮船从甲地到乙地平均每小时行30千米，由乙地返回甲地平均每小时行20千米，求轮船往返的平均速度。

2. 甲乙两港相距 480 千米，上午 10 时一艘货船从甲港开往乙港，下午 2 时一艘客船从乙港开往甲港，客船开出 12 小时后与货船相遇，客船每小时行 20 千米，货船每小时行多少千米？

3. 甲乙两车分别从 $A$、$B$ 两地相向而行，已知甲车的速度是乙车速度的$\frac{4}{5}$，两车在距中点 5 千米处相遇，问：$AB$ 两地间的路程是多少千米？

4. 甲每小时走 8 千米，乙每小时走 10 千米，两人同时由同地同向而行。走了 15 分钟，乙忘带东西，返回原地取了东西再追甲，问：乙再过几小时可以追上甲？

## 三 变式训练

1. 甲乙分别从 $A$、$B$ 两地同时相向而行，在距 $A$ 地 90 千米处第一次相遇，甲在距 $A$ 地 50 千米处第二次与乙相遇，两地相距多少千米？

2. 小张骑自行车从甲地到乙地，原计划8小时到达，当到了全程的90米处，自行车出现故障，速度比原来慢了$\frac{1}{5}$，结果比原计划推迟了30分钟到达，原计划每小时行多少千米？

3. 一辆汽车从甲地开往乙地，已经走完全程的$\frac{3}{8}$，剩下路程的$\frac{4}{5}$比走完的多120千米，问：甲地到乙地全程是多少千米？

4. 客货两车分别从甲乙两地同时出发相向而行，如果两车按原定的速度行驶6小时相遇，如果客车每小时比计划少行5千米，货车每小时比计划多行1千米，则8小时相遇。求甲乙两地相距多少千米。

5. 甲乙两港相距210千米，一船往返两港之间，船的速度是每小时18千米，水流的速度是每小时3千米，求往返一次所需要的时间。

## 三 拔高训练

1. *AB* 两地相距 35 千米，上午 8 时甲乙分别从 *AB* 两地出发，相向而行，甲到达 *B* 地后，立即返回，乙到达 *A* 地后也立即返回，上午 11 时他们第二次相遇，此时甲走的路程比乙多 3 千米，甲共行了多少千米？甲每小时行多少千米？

2. 某人从甲地去乙地，如果乘了汽车又乘轮船，需要 3 小时到达，如果全乘汽车，只需要 $1\frac{4}{5}$小时就能到达，单乘汽车比既乘汽车又乘船少用的时间相当于乘船那部分时间的$\frac{3}{5}$。那么，他从甲地到乙地全部乘船要多少小时才能到达？

# 第4讲　工程问题

工程问题是分数应用题的一种特殊形式，它的特点是把具体的数量加以概括、提炼，隐去具体的数量，具体工作总量用单位“1”来表示。工程问题研究的是工作量、工作效率、工作时间之间的相互关系，它们的基本数量关系是：

工作量÷工作时间=工作效率

工作量÷工作效率=工作时间

工作效率×工作时间=工作量

当一件工作由两人或两人以上共同完成时，工作量就变成了工作总量，工作效率就变成了工作效率和，工作时间就成了合作时间。

## 金牌例题

**例题1**　**一件工作，由甲单独完成需要10天，由乙单独完成需要15天。如果甲乙二人合作，需要几天就能完成？**

**思路分析**：一项工作可认为是单位“1”（即工作总量），甲每天完成这项工作的$\frac{1}{10}$，乙每天完成这项工作的$\frac{1}{15}$，它们的工作效率和是（$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$），用工作总量÷工作效率和，即可求出工作时间。

**解**：$1\div(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})=6$（天）

**答**：如果甲乙二人合作，需要6天就能完成。

**例题2** **甲乙两人合作一批零件，需25天完成，先由甲单独加工10天，再由乙单独加工30天，这时共加工了这批零件的$\frac{3}{4}$，乙每天能加工这批零件的几分之几？**

**思路分析**：已知“甲乙两人合作需要25天完成”，可以看出甲乙两人的工作效率和是$\frac{1}{25}$。而两人的工作方式是甲先单独做10天，然后乙再单独做30天，我们可以把乙单独做30天转化为与甲合作10天，再单独做$30-10=20$（天），这样就可以求出合作的工作量，再根据一共加工了这批零件的$\frac{3}{4}$，就可求出乙单独20天的工作量，进而可求出乙的工作效率。

**解：** $(\frac{3}{4}-\frac{1}{25}\times10)\div(30-10)$

$=\frac{7}{20}\div20$

$=\frac{7}{400}$

**答：**乙每天能加工这批零件的$\frac{7}{400}$。

**例题3** **一段公路，甲单独修需要20天，乙单独修需要15天，甲乙两队从这段公路的两端同时合修5天后，还距15千米，这段公路长多少千米？**

**思路分析：**从已知条件入手，我们很容易求出5天修了这段公路的几分之几，$(\frac{1}{20}+\frac{1}{15})\times5=\frac{7}{12}$，题目还告诉我们“还相距15千米”，这时我们就要找出剩下的工作量与剩下工作量占单位1的几分之几相对应，来解决这一问题。

**解：** $15\div[1-(\frac{1}{20}+\frac{1}{15})\times5]$

$=15\div\frac{5}{12}$

$=36$（千米）

**答：**这段公路长36千米。

**例题 4** **一件工作，甲独做 15 天完成，乙独做 20 天完成。现在甲乙合作 12 天才完工，在这段时间里，乙休息了 4 天，那么，甲休息了多少天？**

**思路分析：**分析这道题，我们可以运用假设的方法去思考，我们假设在这 12 天中，甲乙都不曾休息，那么，甲乙的工作总量应该是 $(\frac{1}{15}+\frac{1}{20})\times 12=1\frac{2}{5}$，为什么工作总量会大于单位“1”呢，这是因为我们没让甲乙休息，也就是多了甲乙该休息时做的工作量 $(1\frac{2}{5}-1)=\frac{2}{5}$。在$\frac{2}{5}$中既包括甲休息若干天做的，也包括乙休息 4 天时做的，从$\frac{2}{5}$中减去乙 4 天的工作量$\frac{1}{20}\times 4=\frac{1}{5}$，剩下的就是甲若干天的工作量，再以甲若干天的工作量除以它的工作效率就可以解决问题。

**解：** $[(\frac{1}{15}+\frac{1}{20})\times 12-1-\frac{1}{20}\times 4]\div\frac{1}{15}$

$=\frac{1}{5}\div\frac{1}{15}$

$=3$（天）

**答：**甲休息了 3 天。

**例题 5** **移栽西红柿苗若干棵，哥哥、弟弟合栽 8 小时完成，哥哥先栽了 3 小时后，弟弟单独栽了 1 小时，还剩总棵数的$\frac{11}{16}$没有栽，已知哥哥每小时比弟弟多栽 7 棵，这块地共栽西红柿多少棵？**

**思路分析：**题目告诉我们“哥哥先栽 3 小时后，弟弟又单独栽了 1 小时”，也可以看做“哥哥弟弟合栽 1 小时后，哥哥又单独栽 2 小时”，再根据“还剩总棵数的$\frac{11}{16}$没有栽”我们就知道了哥哥、弟弟共栽了（$1-\frac{11}{16}$），哥弟合作栽 1 小时后剩（$1-\frac{11}{16}-\frac{1}{8}$）$=\frac{3}{16}$，而$\frac{3}{16}$又是哥哥（$3-1$）$=2$（小时）栽的，因此，除以 2 就是哥哥的工效，进而求出弟弟的工效，最后求出总棵数。

**解：**哥哥的工效：$(1-\frac{11}{16}-\frac{1}{8})\div(3-1)=\frac{3}{32}$

弟弟的工效：$\frac{1}{8}-\frac{3}{32}=\frac{1}{32}$

这块地共栽：$7\div(\frac{3}{32}-\frac{1}{32})=112$（棵）

**答：**这块地共栽西红柿 112 棵。

## 小结

工程问题往往数量关系复杂，题型多样，富于变化，要抓住关键。在理解其特点的基础上，遵循其解题规律，抓住其本质问题进行有条理的分析解答。

有些工程题目中，工作效率、工作时间和工作总量三者之间的数量关系不明显，这时我们就要考虑运用一些特殊的思路，结合具体题目正确选择合理的方法进行解答。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 一件工作甲单独做要40天完成，乙单独做要15天完成，这件工作先由甲做若干天，再由乙继续做完，从开始到完工共用了20天，这件工作由甲先做了几天？

2. 甲乙两人合作加工一批零件 5 天可以完成，中途甲因事停工 2 天，因此，两个共用 6 天才完成。如果甲单独加工这批零件，需要多少天才能完成？

3. 完成一件工作，甲乙两人合作需要 12 小时，乙丙两人合作要 15 小时，甲丙两人合作要 20 小时，甲、乙、丙三人合作要多少小时？

4. 一项工作，甲单独做要 40 天完成，乙单独做要 60 天完成，现在由甲乙合作，中间甲休息几天，这样共用 30 天完成，求甲休息的天数。

5. 有同样的两个仓库 A、B，搬运一个仓库里的货物，甲需要 12 小时，乙需要 24 小时，丙需要 8 小时，甲、丙在 A 仓库，乙在 B 仓库，同时开始搬运，中途丙又帮助乙搬运，最后两个仓库同时搬完，丙帮助甲、乙各多少时间？

## 变式训练

1. 一件工作甲单独做要 10 小时，乙单独做要 12 小时，如果甲做 1 个小时后乙接替甲做 1 个小时，再由甲接替乙做 1 个小时……两人如此交替工作，问完成任务时共要多少小时？

2. 一项工程，甲先单独做 3 天，然后与乙合作 6 天，这样才完成工程的一半，已知，甲乙工作效率比是 4∶3，这件工作乙单独做，要多少天才能完成？

3. 完成一项工程，甲、乙两队合作要30天，乙、丙两队合作要15天，丙、丁两队合作要12天，甲、丁两队合作需要多少天？

4. 修一条公路，甲队单独修6天完成，乙队单独修8天完成，现在甲乙两队从公路的两端同时开工，经过三天剩下180米未修。甲队每天修多少米？

5. 甲乙两人共同做一项工作，甲单独完成要 6 小时，乙单独完成要 8 小时，实际上是甲干了若干小时后，再由乙干了若干小时，才完成任务。已知甲乙共用 $7\frac{1}{3}$ 小时，甲乙两人各工作了多少小时？

## 三 拔高训练

1. 某工程，甲队单独做 20 天完成，乙队单独做 30 天完成，现在两队一起做，其间甲队休息 3 天，乙队也休息若干天，这样，从开始到完工，共用了 16 天，问：乙队休息了多少天？

2. 一项工程，甲队单独做 24 天完成，乙队单独做 30 天完成，甲乙两队合作 8 天后，余下工程由丙队做，又做了 6 天才完成，问：这项工程由丙单独做需要多少天才能完成？

# 第 5 讲　年龄问题

年龄问题是一些关于年龄的数学问题，是和差、倍数综合在一起的结合问题。

## 金牌例题

**例题 1　哥哥与弟弟两人三年前的年龄和是 18 岁，弟弟今年的年龄等于两人的年龄差，哥哥、弟弟今年各几岁？**

**思路分析：** 根据已知“哥哥与弟弟两人三年前的年龄和是 18 岁”，我们可以得到今年哥哥与弟弟的年龄和是 $18+3\times2=24$（岁），由弟弟今年的年龄等于两人的年龄差”，可知，今年哥哥的年龄是弟弟年龄的 2 倍，哥哥、弟弟两人今年的年龄和是 24 岁，正好是弟弟年龄的 $(1+2)$ 倍。

**解：** 今年哥哥、弟弟的年龄和是：

$18+3\times2=24$（岁）

今年弟弟的年龄：$24\div(1+2)=8$（岁）

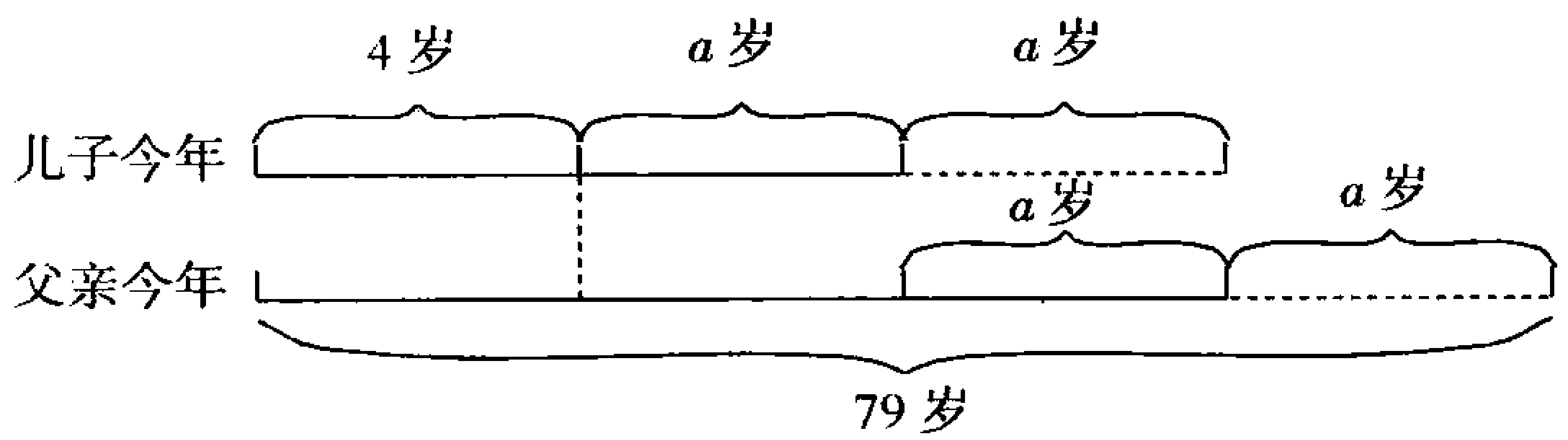
今年哥哥的年龄：$8\times2=16$（岁）

综合式：$(18+3\times2)\div(1+2)=8$（岁）

**答：**哥哥今年16岁，弟弟今年8岁。

**例题2** **爸爸对儿子说："我像你那么大时，你才4岁，当你像我这么大时，我就79岁了。"现在爸爸的年龄是多少岁？儿子是多少岁？**

**思路分析：**我们用 $a$ 表示父子的年龄差，画出如下线段图来帮助我们分析理解。




从图上我们就可以直观看出，$79-4$ 是3个年龄差，除以3就得父子的年龄差 $(79-4)\div3=25$（岁）。

**解：**儿子的现在年龄：$(79-4)\div3+4=29$（岁）

爸爸的现在年龄：$79-(79-4)\div3=54$（岁）

**答：**现在爸爸和儿子的年龄分别是54岁、29岁。

**例题3** **现在儿子的年龄是爸爸的 $\frac{1}{4}$，三年前父子年龄之和是49岁，现在父子年龄各是多少岁？**

**思路分析：**根据已知三年前父子年龄之和是49岁，那么今年父子年龄之和就是 $49+3\times2=55$（岁），再根

据已知儿子的年龄是父亲年龄的$\frac{1}{4}$，也可以看做爸爸的年龄是儿子年龄的4倍，把儿子今年的年龄看做1份，爸爸的年龄看做4份，就可求出问题。

**解：** 儿子的年龄：$(49+3\times2)\div(1+4)=11$（岁）

父亲的年龄：$55-11=44$（岁）

此题还可以按分数应用题的解题思路来解：

父亲的年龄：$(49+3\times2)\div(1+\frac{1}{4})=44$（岁）

儿子的年龄：$44\times\frac{1}{4}=11$（岁）

**答：** 现在父子的年龄分别是44岁、11岁。

**例题4** **妈妈今年35岁，恰好是女儿年龄的7倍，多少年后，妈妈的年龄恰好是女儿年龄的3倍？**

**思路分析：** 根据已知“妈妈今年35岁，恰好是女儿年龄的7倍”可以求出，今年女儿的年龄是$35\div7=5$（岁），母女的年龄差是$35-5=30$（岁），若干年后，母女的年龄差还是30岁，如果妈妈的年龄是女儿的3倍，也就是30岁与$(3-1)$倍相对应，这样就可以求出多少年后女儿的年龄，进而求出妈妈的年龄多少年后是女儿年龄的3倍。

**解：** 今年女儿的年龄：$35\div7=5$（岁）

母女年龄差：$35-5=30$（岁）

若干年后女儿的年龄：30 ÷ (3 − 1) = 15（岁）

多少年后，妈妈的年龄是女儿年龄的 3 倍：

15 − 5 = 10（年）

综合式：（35 − 35 ÷ 7）÷ (3 − 1) − 35 ÷ 7

= 30 ÷ 2 − 5

= 10（年）

**答：** 10 年后妈妈的年龄是女儿年龄的 3 倍。

**例题 5** **祖父、儿子、孙子三人的年龄和正好是 120 岁，祖父过的年数正好等于孙子过的月数，儿子过的星期数正好等于孙子过的天数，祖父、儿子、孙子各多少岁？**

**思路分析：** 我们把孙子的年龄看做 1 份数。根据已知“祖父过的年数正好等于孙子过的月数”可知祖父的年龄是孙子的 12 倍，根据已知“儿子过的星期数等于孙子过的天数”可知儿子的年龄是孙子的 7 倍，祖父、儿子、孙子的年龄和是 120 岁，正好是孙子年龄的（1 + 7 + 12）倍。

**解：** 孙子的年龄：120 ÷ (1 + 7 + 12) = 6（岁）

儿子的年龄：6 × 7 = 42（岁）

祖父的年龄：6 × 12 = 72（岁）

**答：** 祖父 72 岁，儿子 42 岁，孙子 6 岁。

**小结**

解年龄问题应用题应抓住以下特征：

1. 无论年份怎样变化，两个人的年龄差总是不变的。

2. 随着年份向将来或者过去推移，两个或两个以上人的年龄一定增加和减少同一个自然数。

3. 年份的变化，必定带来两个人年龄间倍数关系的变化。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 小红 10 岁时奶奶 65 岁，今年小红与奶奶的年龄合起来是 95 岁。奶奶今年多大岁数?

2. 小明今年 8 岁，他与爸爸、妈妈年龄的和是 81 岁，多少年后他们的平均年龄是 34 岁？这时小明多少岁？

3. 学生问老师今年多少岁，老师说："当我像你这么大的时候，你刚 3 岁，当你像我这么大的时候，我已经 39 岁了。"那么这位老师今年多少岁？

4. 父亲今年 36 岁，小红 8 岁，再过多少年，父亲的年龄正好是小红年龄的 2 倍？

5. 姐姐 5 年前等于妹妹 7 年后的年龄，姐姐 4 年后与妹妹 3 年前年龄的和是 35 岁，姐妹二人今年各多少岁？

## 二 变式训练

1. 4 年前张老师的年龄是小芳年龄的 4 倍，4 年后，张老师与小芳年龄的和是 56 岁，张老师今年多少岁？

2. 父子两人的年龄和是 64 岁，儿子年龄的 3 倍比父亲多 8 岁，父子俩各多少岁？

3. 阿姨对小丽说："我 15 年前的岁数和你 6 年后的岁数相同，7 年前，我的年龄是你年龄的 8 倍。"阿姨今年多少岁？

4. 一家三口人的年龄和是 78 岁，妈妈比爸爸小 1 岁，妈妈的年龄是儿子的 3 倍，爸爸、妈妈、儿子各多少岁？

5. 小刚比小强大 2 岁，小强比小明大 3 岁，三人年龄加在一起是 35 岁，三人各多少岁？

## 三 拔高训练

1. 3 年前王老师的年龄是小华的 5 倍，5 年后王老师的年龄是小华的 3 倍，今年王老师和小华各有多少岁？

2. 甲对乙说："当我的岁数是你现在的岁数时，你才 4 岁。"乙对甲说："当我的岁数是你现在的岁数时，你将 61 岁。"甲现在多少岁？乙现在多少岁？

# 第6讲　列方程解应用题

有一些数量关系比较复杂的数学题，要列出算式来解答难度较大，对于复杂的应用题，特别是需要逆向思维的应用题，有时甚至无法列出算式。这时我们可以考虑用列方程的方法来解答，列方程解应用题的一般方法是：先要设出未知数，然后把未知数与已知数同等看待，根据题意找准题中的等量关系列出方程，最后求出方程的解。列方程解应用题也是小学数学中比较重要的方法之一。

## 金牌例题

**例题1**　**张强2岁时，他的父亲32岁，张强的年龄是父亲的$\frac{3}{5}$的那一年，父亲去世，他父亲活了多大岁数？**

**思路分析：**如果设张强的父亲活了$x$岁，那么父亲去世时，张强的年龄应为$\frac{3}{5}x$，他父亲的年龄比他大

$(x-\frac{3}{5}x)$，根据两人年龄差是不变的这一等量关系，可列出方程。

**解：** 设张强父亲活了 $x$ 岁，那么他父亲去世时他的年龄为 $\frac{3}{5}x$ 岁，而他两岁时父亲的年龄是 32 岁，根据年龄差不变的等量关系，列出方程。

$$x-\frac{3}{5}x=32-2$$

$$\frac{2}{5}x=30$$

$$x=75$$

**答：** 他的父亲活了 75 岁。

**例题 2** **甲乙两班共有 62 人参加科技小组活动，甲班参加人数的 $\frac{1}{5}$ 比乙班参加人数的 $\frac{1}{4}$ 少 2 人。甲乙两班各有多少人参加科技小组活动？**

**思路分析：** 题目中存在两个单位“1”，只需要设其中一个班人数为 $x$，另一个班的人数便可用 $(62-x)$ 来表示，根据甲班人数 $\times\frac{1}{5}$ = 乙班人数 $\times\frac{1}{4}-2$ 的等量关系，列出方程。

**解**：设甲班有 $x$ 人参加科技小组活动

$$\frac{1}{5}x=\frac{1}{4}\times(62-x)-2$$

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{4}=\frac{62}{4}-2$$

$$\frac{9}{20}x=\frac{54}{4}$$

$$x=30\text{（人）}$$

$$62-30=32\text{（人）}$$

**答**：甲班有 30 人，乙班有 32 人参加科技小组活动。

**例题 3** **有一水池，第一次放出全部水的$\frac{2}{5}$，第二次放出 36 立方米的水，第三次放出剩下水的$\frac{2}{3}$，这时水池还剩下 30 立方米，这水池原有多少水？**

**思路分析**：如果用 $x$ 表示水池原有的水量，那么，第一次放出的水应该是$\frac{2}{5}x$，第三次放出的水应该是（$x-\frac{2}{5}x-36$）$\times\frac{2}{3}$。

根据等量关系，第一、二、三次放水量之和加剩下的水量等于池中原有的水，可列出方程。

**解：** 设水池原有水 $x$ 立方米

$$\frac{2}{5}x+36+(x-\frac{2}{5}x-36)\times\frac{2}{3}+30=x$$

$$\frac{1}{5}x=42$$

$$x=210$$

**答：** 这水池原有水 210 立方米。

**例题 4** **某商店库存的花布是白布的 2 倍，如果每天卖出 30 米白布和 40 米花布，几天后白布全部卖完而花布还剩 140 米，原来库存花布多少米？**

**思路分析：** 如果我们知道卖布的天数，就能算出原来库存花布的米数。我们设卖了 $x$ 天，则原来库存花布的米数为（$40x+140$），白布的米数为 $30x$，再根据“库存的花布是白布的 2 倍”，列出方程 $30x\times2=40x+140$。

**解：** 设卖了 $x$ 天

$$30x\times2=40x+140$$

$$60x=40x+140$$

$$20x=140$$

$$x=7$$

$30\times7\times2=30\times7\times2=420$（米）

**答：** 原来库存花布 420 米。

**例题 5　有一支部队以每秒 1.4 米的速度行军，队尾有一通讯员因事要通知队首，于是以每秒 2.6 米的速度从队尾赶到队首又立即返回队尾，共用了 10 分 50 秒钟，你知道这支队伍有多长吗？**

**思路分析：**这是一道追及又相遇的问题，通讯员从队尾到队首是追及问题，追及路程为队伍长，他从队首又返回队尾是相遇问题，相遇路程为队伍长，若设通讯员从队尾到队首用的时间为 $x$ 秒钟，又根据“追及路程=相遇路程”，就不难列出方程。

**解：**设通讯员从队尾赶到队首用了 $x$ 秒钟，根据题意得

$$(2.6-1.4)x=(2.6+1.4)\times(60\times10+50-x)$$

$$1.2x=2600-4x$$

$$5.2x=2600$$

$$x=500$$

$(2.6-1.4)\times500=600$（米）

**答：**队伍长为 600 米。

**小结**

列方程解应用题依赖于等量关系，而等量关系有的比较明显，有的比较隐蔽，可结合列表、画图等方法，可直观分析问题中的已知数与未知数之间的数量关系，当直接设未知数不易列方程时，就设与问题相关的间接未知数，如果未知数选择得当，往往可以使列方程变得简单。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 某校参加数学竞赛的女生比男生多 28 人，男生全部得优，女生$\frac{3}{4}$得优，男女生得优的一共有 42 人，男女生参赛的各有多少人？

2. 某校六年级共有学生 152 人，选出男同学的$\frac{1}{11}$和 5 名女同学，参加科技小组，剩下的男女同学人数刚好相等。六年级男女同学各有多少人？

3. 学校故事书占全校图书的$\frac{3}{5}$，又买进 400 本故事书，这时故事书占总数的$\frac{2}{3}$，原来共有多少本图书？

4. 六年级甲班比乙班少 4 人，甲班有$\frac{1}{3}$的人，乙班有$\frac{1}{4}$的人参加课外数学小组。两个班参加课外数学小组的共有 29 人，甲乙两班共有多少人？

5. 儿子的年龄是父亲的$\frac{1}{6}$，4 年后儿子的年龄是父亲的$\frac{1}{4}$，父亲今年多少岁？

## 二 变式训练

1. 有两根同样长的蜡烛，第一根 5 小时可烧完，第二根烧完只需 3 小时，两根蜡烛同时燃烧经过多少小时后，第一根剩下的长度是第二根剩下长度的 3 倍?

2. 现在弟弟的年龄恰好是哥哥年龄的$\frac{1}{2}$，而 9 年前弟弟的年龄是哥哥年龄的$\frac{1}{5}$，哥哥现在多少岁?

3. 小明和小华共存钱140元，小明取出自己存折上的$\frac{1}{4}$，小华取出自己存折上的10元后，他们剩下钱的比是6:5，原来小明小华各有多少钱？

4. 张伯伯买回两筐苹果，甲筐的重量是乙筐的75%，如果从乙筐拿出10千克放入甲筐，那么，甲筐的苹果重量是乙筐的2倍，乙筐原有苹果重量多少千克？

5. 一个瓶内的糖水，原来糖是水的$\frac{1}{11}$，后加进15克糖后糖是糖水的$\frac{1}{9}$，瓶内原有糖水多少克？

## 三 拔高训练

1. 建造两座房子，其中第一座造价比第二座的3倍少32万元，而第二座房子的造价占两座房子总造价的$\frac{3}{7}$，第二座房子的造价是多少万元？

2. 两桶油各有油若干千克，如果从第一桶倒入第二桶1.2千克，两桶油的重量相等。如果从两桶油中各取出0.6千克，那么第一桶余下的$\frac{5}{21}$等于第二桶余下的$\frac{1}{3}$，这两桶油原来各有油多少千克？

# 第7讲　植树问题

植树问题在生活中应用很广泛：如在有一定长度的线路上，等距离地安排若干个点植树，植树的棵数、株距与线路的总长之间，必定存在某种数量关系，研究这种数量关系的问题，通常被称为植树问题。

植树问题根据线路的封闭情况可分为两种情况：

1. 在封闭的线路上植树（指线路首尾相接）

如果在封闭线路（即环形）上植树，那么，植树的棵数与平均分成的段数相等。其数量关系是：

棵数 = 全长（周长）÷ 间距

2. 在不封闭的线路上植树（指线路首尾不相接）

（1）如果植树线路的两端都要植树，那么，植树的棵数比平均分成的段数多1。其数量关系是：

棵数 = 全长 ÷ 间距 + 1 = 段数 + 1

全长 = 间距 ×（棵数 − 1）

间距 = 全长 ÷（棵数 − 1）

（2）如果只在线路的一端植树，那么，植树的棵数与平均分成的段数相等。其数量关系是：

棵数 = 全长 ÷ 间距 = 段数

全长 = 间距 × 棵数

间距 = 全长 ÷ 棵数

（3）如果植树线路的两端都不植树，那么，植树的棵数比平均分成的段数少 1。其数量关系是：

棵数 = 全长 ÷ 间距 − 1 = 段数 − 1

## 金牌例题

**例题 1　一根木头锯成 4 段要付锯板费 1.2 元，如果要锯成 12 段，要付锯板费多少元？**

**思路分析：**把一根木头平均锯成 4 段，需锯 4 − 1 = 3（次），属于两端都没有点。从而可求出锯 1 次的费用 1.2 ÷ 3 = 0.4（元）。现要锯成 12 段，也就是要锯 12 − 1 = 11（次），这样就可以求出费用。

**解：**　1.2 ÷ (4 − 1) × (12 − 1)

= 0.4 × 11

= 4.4（元）

**答：**要付锯板费 4.4 元。

**例题 2　有一长方形的操场，长 45 米，宽 30 米，如果沿着它的周围每隔 3 米栽一棵树，一共要种多少棵树？**

**思路分析：**根据题意，这是在一个封闭的长方形周长上植树。首先要求出长方形的周长 (45 + 30) × 2 = 150

（米），再平均用每段3米，求出种多少棵树。

**解：** $(45+30)\times2\div3$

$=75\times2\div3$

$=50$（棵）

**答：** 一共要种50棵树。

**例题3** **在一条长600米的公路两旁各栽一行树，起点和终点都栽，一共栽302棵，每相邻两棵之间的距离都相等，相邻两棵间的距离是多少米？**

**思路分析：** 根据题意这是在一条不封闭的公路两旁栽树，两旁共栽302棵，每边各栽 $302\div2=151$（棵），把公路平均分成 $151-1=150$（段），两树间的距离都相等，所以相邻两棵树间的距离为 $600\div150=4$（米）。

**解：** $600\div(302\div2-1)=4$（米）

**答：** 相邻两棵间的距离是4米。

**例题4** **有一排电线杆共51根，杆与杆之间的距离是35米，今除其两端2根之外，其余全部拆除，重在中间竖69根，这时杆与杆之间的平均距离是多少？**

**思路分析：** 根据题意，这是一排不封闭的电线杆，因为两端都竖，所以段数比杆数少1。51根电线杆两端间的距离为 $35\times(51-1)=1750$（米），今重在中间竖69根，加上两端的2根，总根数为 $69+2=71$（根），总段

数 $71-1=70$（段），杆与杆之间的平均距离为 $1750\div(69+2-1)=25$（米）。

**解**：$35\times(51-1)\div(69+2-1)=25$（米）

**答**：杆与杆之间的平均距离是 25 米。

**例题 5　在铁路一旁，每隔 50 米就有 1 根电线杆，某旅客在行进的火车里看到，从经过的第 1 根电线杆到第 55 根电线杆，恰好过了 3 分钟，火车行进的速度是每小时多少千米？**

**思路分析**：根据题意，这是一条不封闭的火车线路，从经过第 1 根到第 55 根电线杆，中间有 $55-1=54$（段）。火车 3 分钟行进的路程就是 $50\times54=2700$（米），每分钟行的路程是 $2700\div3=900$（米），因此，1 小时行的路程就是 $900\times60\div1000=54$（千米）。

**解**：$50\times(55-1)\div3\times60\div1000=54$（千米）

**答**：火车行进的速度是每小时 54 千米。

**小结**

解答直线上的植树问题时，要根据题目的具体情况判断出棵数和段数的关系，不同情况，区别对待。在解答封闭图形上植树问题时，要特别注意棵数与段数是相等的，而不需要加 1 减 1。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 一条路每隔 5 米有 1 根电线杆，连两端的电线杆在内共 20 根，算一算这条路有多长？

2. 一只乌龟在公路上等速爬行，从第 1 根电线杆爬到第 12 根用了 132 分钟，这只乌龟如果从第 1 根电线杆爬到第 25 根电线杆需要多少时间？

3. 一个湖泊的周长是1800米，沿湖泊周围每隔8米栽1棵柳树，每两棵柳树中间栽1棵桃树，湖泊周围栽了多少棵柳树和桃树？

4. 有1根180厘米的绳子，从一端开始每3厘米做一个记号，每4厘米也做一记号，然后将标有记号的地方剪断，绳子共被剪了多少段？

5. 一座桥长 116 米，在桥的两侧栏杆上，分别安装了 16 块花纹图案，图案的横长为 2 米，两头的图案离桥端都是 12 米，且每相邻两块图案间的间隔都相等，相邻两块图案之间应间隔多少米?

## 三 变式训练

1. 把 30 米长的一条绳子分成 3 段，后一段都比前一段多 3 米，求各段长度。

2. 小英和小明同住在一幢大楼里，小英家住在 6 层，每天回家要走 80 个台阶，小明回家要走 32 个台阶，小明家住在几层？

3. 有学生 802 人，排成 2 路纵队，相邻两排前后各相距 0.5 米，队伍每分钟走 60 米，现在要过一座长 700 米的桥，从排头两人上桥到排尾两人离开桥，共需要多少分钟？

4. 一个圆形喷水池，周长 62.8 米，在距池岸边均为 3 米的池内圆周上等距离安装 28 根喷水管，每相邻两个喷水管的距离是多少米？

5. 从甲地到乙地每隔 45 米安装 1 根电线杆，加上两端共有 53 根电线杆。现在改成每隔 60 米安装 1 根电线杆，除两端的两根不需移动外，中途还有多少根不必移动？从起点的电线杆到最近的不必移动的电线杆之间距离是多少？

## 三 拔高训练

1. 参加阅兵式的车队共有 26 辆车，每辆车的车身长 5 米，两辆车之间的行进距离是 8 米，行进的速度是每分 30 米。这列车队通过 450 米长的阅兵场共需多少时间？

2. 科学家进行一项试验，每隔 5 小时作一次记录，作第 12 次记录时，挂钟的时针，恰好指向 9。问：作第一次记录时，时针指向几？

# 第8讲 还原问题

已知某个（或几个）未知数，经过一步或几步的运算所得的结果，求这个（或几个）未知数的应用题，称为还原问题。解决这类问题，可以采用从结果入手通过逆向思维寻求解题的思路。从后往前一步一步倒着来推算，采取逆运算的方法，即原来用加的现在用减，原来用减的现在用加，原来用除的现在用乘，原来用乘的现在用除。这样，便可以逐步推算出所求的数。

解答还原问题时，要注意观察运算顺序，若需要先算加减法，后算乘除法时，别忘记使用括号。

## 金牌例题

例题 1　**粮店有一批大米，卖掉2000千克后，又运来5000千克，再卖掉4000千克，还剩下3000千克，粮店原有大米多少千克?**

**思路分析：**从结果开始，卖掉4000千克后还剩3000千克，所以在没卖4000千克时，店里有3000 + 4000 = 7000（千克），店里在运来5000千克以前，7000 - 5000

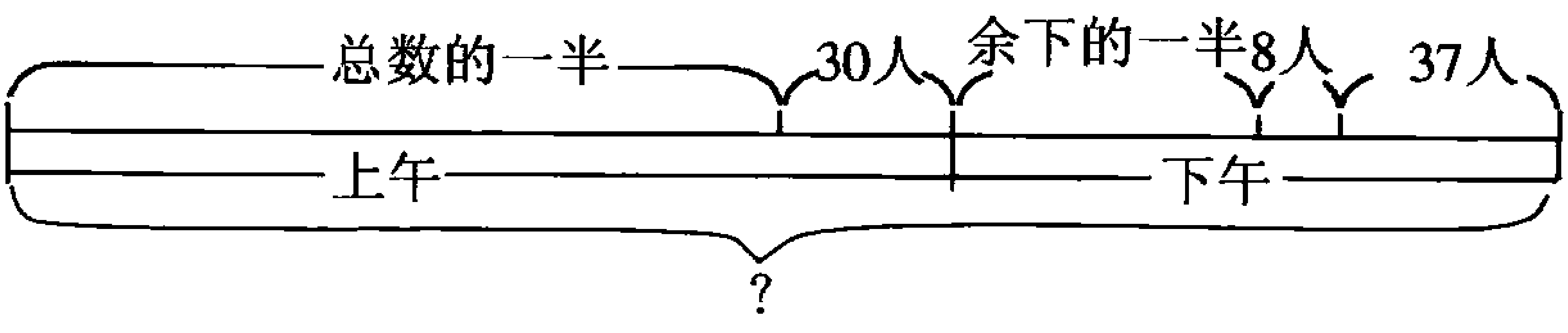
$=2000$（千克），店里在没卖掉2000千克以前有 $2000+2000=4000$（千克），就这样从结果入手，一步一步倒着算，采取逆运算的方法，求出原来粮店的大米多少千克。

**解：** $3000+4000-5000+2000=4000$（千克）

**答：** 粮店原有大米4000千克。

**例题2** **某刑警队，上午有总人数的一半又30人外出执行任务，下午又有余下的一半又8人外出执行任务，这时队里还有37人在等候情况，求刑警队共多少人？**

**思路分析：** 这类问题用线段图分析很容易求解。




从结果开始，从图中我们可以看出，$8+37=45$（人）是下午执行任务前剩余人数的一半，$45\times2=90$（人）是下午执行任务前的人数，$90+30=120$（人）是总人数的一半，用 $120\times2=240$（人）就是刑警队的总人数。

**解：** $[(8+37)\times2+30]\times2=240$（人）

**答：** 刑警队共有240人。

**例题3** **在做一道加法题时，小马把个位上的5看做9，把十位上的8看做2，结果错算为113。正确的答案是多少？**

**思路分析：**把个位上的5看做9，是多加了$9-5=4$。把十位上的8看做2，是少加了$80-20=60$，因此，这道题的正确答案应该是：

**解：**$113-(9-5)+(80-20)=169$

**答：**正确的答案是169。

**例题4** **商店运来五箱梨，第一箱卖出了$14\frac{1}{2}$千克，第二箱卖出了15.4千克，第三箱卖出了$10\frac{4}{5}$千克，第四箱卖出了8.3千克，第五箱卖出了11千克，剩下的梨正好等于原来两箱梨的重量，那么，原来每箱梨重多少千克？**

**思路分析：**按照题目的条件，仍然从结果入手，“剩下的梨正好等于原来两箱梨的重量”，还原过来看，则卖出的梨重量之和正好等于原来三箱梨的重量$5-2=3$（箱）。

**解：**$(14\frac{1}{2}+15.4+10\frac{4}{5}+8.3+11)\div(5-2)$

$=60\div3$

$=20$（千克）

**答：**原来每箱梨重20千克。

**例题 5** A、B、C 三个桶中各装一些水，先将 A 桶的$\frac{1}{3}$倒给 B 桶，再将 B 桶的$\frac{1}{5}$的水倒给 C 桶，最后再把 C 桶的$\frac{1}{7}$倒给 A 桶，这时三个桶的水都是 12 升，问：原来三个桶各有水多少升？

**思路分析**：解决这类问题，要按照题目中数量变化的过程，反过来从最后一步入手，倒着向前一步一步推算，直到算出结果。

首先要抓住最后三个桶中的水相等，都是 12 升，然后慢慢向前推算：

**解**：（1）C 桶的$\frac{1}{7}$未倒入 A 桶之前：

C 桶有：$12 \div (1-\frac{1}{7})=14$（升）

A 桶有：$12-14\times\frac{1}{7}=10$（升）

（2）B 桶的$\frac{1}{5}$未倒入 C 桶之前：

B 桶有：$12 \div (1-\frac{1}{5})=15$（升）

C 桶有：$14-15\times\frac{1}{5}=11$（升）

（3）A 桶的$\frac{1}{3}$未倒入 B 桶之前：

A 桶有：$10 \div (1 - \frac{1}{3}) = 15$（升）

B 桶有：$15 - 15 \times \frac{1}{3} = 10$（升）

**答：** 原来 A 桶有 15 升水，B 桶有 10 升水，C 桶有 11 升水。

**小结**

还原法解题也叫做倒推法，在思考分析时需要反向思考，解答时，一般按照题意的叙述顺序由后向前倒着推算，采用逆向思维逐步还原的方法来解决。

逆向思维是解应用题的主要形式之一，正确使用逆向思维解题，对拓宽应用题的解题思路促进思维灵活，都会起到积极的效果。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 有一位老人说："把我的年龄加上 17 再用 4 除再减去 15 后乘以 10，恰好是 100 岁。"这位老人有多少岁？

2. 某数加上 9，乘以 9，减去 9，除以 9，其结果等于 9，求这个数。

3. 李欣在做一道整数加法时，把一个加数的个位上的 6 看做 9，把另一个加数的十位上的 8 看做 3，结果和等于 123，正确的结果应该是多少？

4. 一辆汽车从甲地出发，第一天走了全程的$\frac{3}{8}$，第二天走了余下路程的$\frac{2}{3}$，第三天走了 250 千米到达乙地，甲乙两地间的路程是多少？

5. 甲乙两人各有人民币若干元，甲拿出$\frac{1}{5}$给乙后，乙又拿出$\frac{1}{4}$给甲，这时他们各有 90 元。他们原来各有多少钱？

## 变式训练

1. 某同学做一道乘法算式题，将十位的 7 看做 1，个位的 2 看做 3，结果所得的积是 104，正确答案是多少？

2. 甲乙两桶油共有 120 千克，从甲桶中倒出 15 千克给乙桶，再从乙桶中倒出 8 千克给甲桶，这时甲桶油的重量是乙桶的 2 倍，甲乙两桶原来各有多少千克油?

3. 3 只猴子吃篮里的桃子，第一只猴子吃了$\frac{1}{3}$，第二只猴子吃了剩下的$\frac{1}{3}$，第三只猴子吃了第二只猴子吃剩下的$\frac{1}{4}$，最后篮里还剩 6 个桃子，问：篮里原有桃子多少个?

4. 工厂运来一批煤，1 月份烧去了全部的$\frac{2}{3}$少 1 吨，2 月份烧去余下的$\frac{2}{5}$多 1 吨，这时还剩 4 吨，这批煤共有多少吨？

5. 甲、乙、丙三人共有钱 360 元，如果甲给乙 70 元，乙给丙 20 元，丙给甲 90 元，则三人钱数相等，甲、乙、丙三人原来各有钱多少元？

## 三 拔高训练

1. 一瓶水第一次倒出$\frac{1}{3}$，然后又倒回瓶中 40 克，第二次再倒出瓶中水的$\frac{5}{9}$，第三次倒出 180 克，瓶中还剩 60 克，原来瓶中有多少水？

2. 一杯盐水，第一次倒出$\frac{1}{3}$，第二次倒出 5 升，第三次倒出剩下的$\frac{1}{9}$，第四次加入 4 升，这时杯中有盐水 12 升，原有盐水多少升？

# 第9讲 盈亏问题

“盈”就是剩余，“亏”就是不足不够的意思。这类题目的共同特点就是：把一定数量的物品平均分给固定对象，如果按某种标准分，则分配后会有剩余（盈），如果按另一种标准分，分配后又会有不足（亏），求物品和分配对象的数量，这种一盈一亏的应用题，就是我们通常所说的盈亏问题。

1. 解答盈亏问题，常常通过比较法，根据除法的含义列式计算。一般会出现三种情况：

（1）两次分配：一次盈、一次亏

（盈＋亏）÷两次分配的相差数＝分配的份数

（2）两次分配都有盈

（大盈－小盈）÷两次分配的相差数＝分配的份数

（3）两次分配都亏

（大亏－小亏）÷两次分配的相差数＝分配的份数

2. 由于参加分配的总人数不变，参加分配的物品总

个数不变，所以也可以根据：

（1）第一种分法的人数 = 第二种分法的人数

（2）第一种分法的物品 = 第二种分法的物品

列方程来解答。

## 金牌例题

**例题 1　植树小组种树，如果每人种 5 棵，还剩 5 棵树苗，如果每人种 6 棵，就缺 4 棵树苗，这个植树小组有多少人？这批树苗有多少棵？**

**思路分析：** 已知每人种 5 棵，还剩下 5 棵树苗，也就是说树苗多出来了，有了盈余。如果每人种 6 棵，就缺少了 4 棵树苗，树苗不够了，亏了。一盈一亏相差 $5+4=9$（棵），即如按第二种办法栽树，可以比第一种办法多栽 9 棵，这是由于每人多栽了 $6-5=1$（棵），根据这两个差数的对应关系，就可以求出植树小组的人数和树苗的棵数。

**解法一：** $(5+4)\div(6-5)=9$（人）

$5\times9+5=50$（棵）

**解法二：** 这道题是在人数不变的条件下进行分配的，可以列方程来解答：

设：这个植树小组有 $x$ 人，根据题意得

$$5x+5=6x-4$$

$$x=9$$

$$5\times9+5=50\text{（棵）}$$

**答**：这个植树小组有9人，这批树苗有50棵。

**例题2** **给住校生安排宿舍，每个房间住5人，则缺27个床位，若每间房住7人，则空出9个房间。求住校生人数和房间数。**

**思路分析**：其条件有两层意思，即两种安排方法。解题的关键是两种安排相差的人数和每个房间多住的人数。根据题意，每个房间住7人，则空出9个房间，若都住满还要增加$7\times9=63$（人），两种安排相差$27+63=90$（人），这是因为每个房间多住了$7-5=2$（人），根据这两个差数的对应关系就可以求出房间数，然后再求出住校生人数。

**解法一**：$(27+7\times9)\div(7-5)=45$（个）

$5\times45+27=252$（人）

或 $7\times(45-9)=252$（人）

**解法二**：设有$x$个房间，根据人数不变，列方程得

$$5x+27=7\times(x-9)$$

$$2x=90$$

$$x=45$$

$5\times45+27=252$（人）

**解法三：** 设住校生为 $x$ 人，根据房间不变，列方程得

$$\frac{x-27}{5}=\frac{x}{7}+9$$

$$\frac{2x-189}{35}=9$$

$$2x=504$$

$$x=252$$

$$\frac{252-27}{5}=45\text{（个）}$$

**答：** 住校生有252人，房间有45个。

**例题3** **幼儿园教师把一箱饼干分给小班和中班的小朋友，平均每人分得6块，如果只分给中班的小朋友平均每人可以多分得4块，如果只分给小班的小朋友，平均每人分得多少块？**

**思路分析：** 这箱饼干分给中班和小班的小朋友，平均每人分得6块，如果只分给中班的小朋友，平均每人可多分4块，说明中班的人数是小班人数的 $6\div4=1.5$（倍）。因此，这箱饼干全分给小班的小朋友，每位小朋友可多分到 $6\times1.5=9$（块），一共可分到 $6+9=15$（块）饼干。

**解：** $6\times(6\div4+1)=15$（块）

**答：** 平均每人分得 15 块。

**例题 4** **1 根绳绕树 5 周，还余 $\frac{1}{6}$ 米，若用绳绕树 1 周还余 $\frac{5}{6}$ 米。求绳长和树的周长。**

**思路分析：** 根据"一根绳绕树 5 周，还余 $\frac{1}{6}$ 米，若用绳绕树 1 周还余 $\frac{5}{6}$ 米"，两种不同的绕法相差了 $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$（米），两种绕法相差了 $5-1=4$（周），由此，可得每周长是 $\frac{4}{6}\div4=\frac{1}{6}$（米），也是树的周长，进而可求出绳长。

**解：** 树的周长：$(\frac{5}{6}-\frac{1}{6})\div(5-1)=\frac{1}{6}$（米）

绳长：$\frac{1}{6}\times5+\frac{1}{6}=1$（米）

或 $\frac{1}{6}\times1+\frac{5}{6}=1$（米）

**答：** 绳长 1 米，树的周长是 $\frac{1}{6}$ 米。

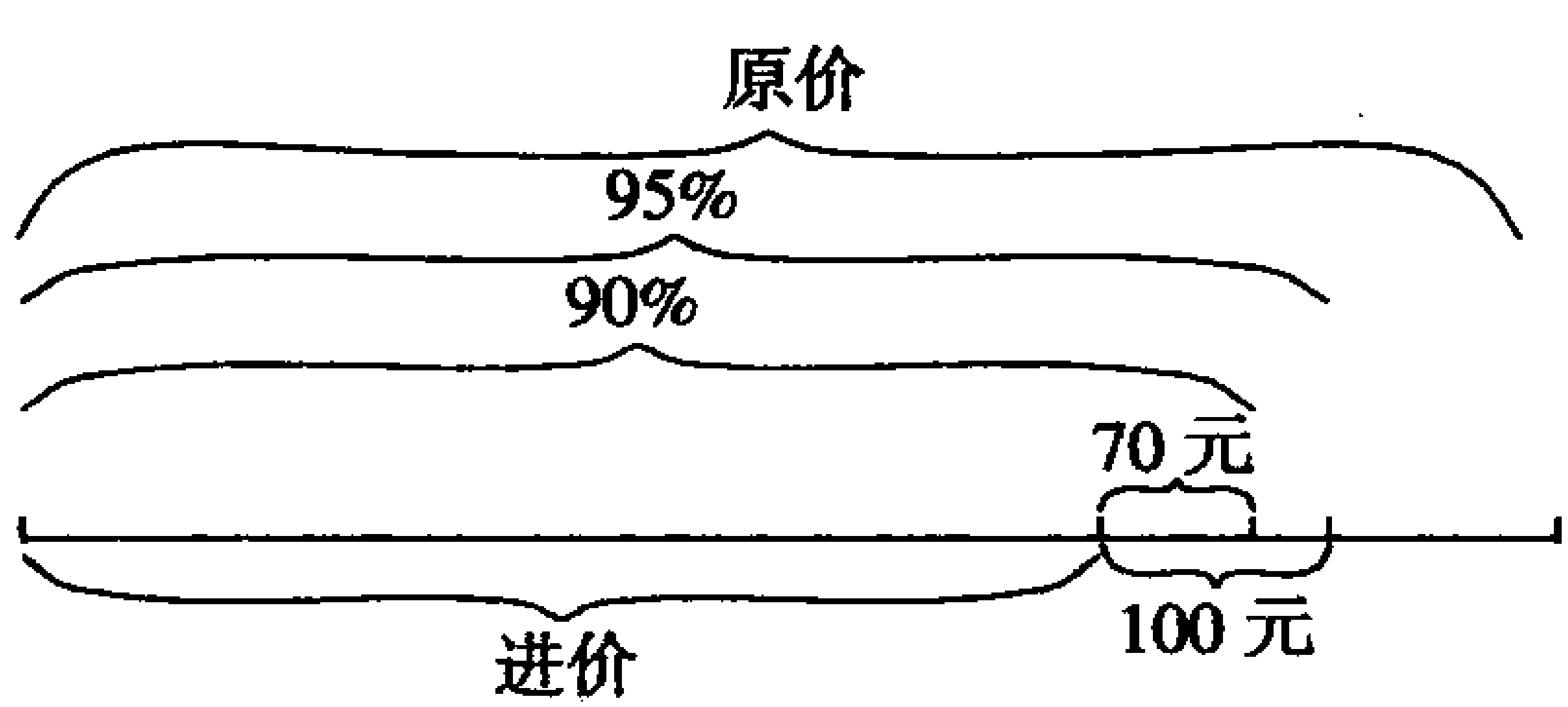
**例题5** **某商店出售一台收录机，如果按原价的九折出售可获利70元，如果按原价的九五折出售可获利100元。那么这台收录机的进货价格是多少？**

**思路分析：** 根据题意：一台收录机如果按原价的九折出售可获利70元，如果按原价的九五折出售可获利100元，两次出售获利相差100－70＝30（元），30中包括多少个5%，原价中就包含多少个30元，进而求出进货价格。

**解法一：** 原价：（100－70）÷（95%－90%）＝600（元）

进价：600×90%－70＝470（元）

**解法二：** 如下图所示，这道题也可以按百分数应用题的思路来分析，100－70＝30与95%－90%＝5%相互对应，可求出原价，进而求出进价。




（100－70）÷（95%－90%）×90%－70

＝600×90%－70

$=540-70$

$=470$（元）

答：这台收录机的进货价格是470元。

**小结**

在解有关盈亏问题的应用题时，有些题目的“盈”或“亏”没有直接告诉我们，需要进行转化，准确找出“盈”和“亏”，这样才能运用盈亏问题的规律、公式进行解答。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 小明从家到学校，如果每分钟走50米，就要迟到3分钟，如果每分钟走70米，则可提前5分钟到校，小明家到学校的路程是多少？

2. 学校将一批图书奖给优秀少先队员，每人 6 本缺 21 本，每人 5 本缺 3 本，问：一共有多少书？有多少优秀少先队员？

3. 幼儿园老师给小朋友分梨子，如果每人分 4 个，则多 9 个，如果每人分 5 个，则少 6 个。问有多少个小朋友？有多少个梨子？

4. 某校数学小组有若干名学生。如果减少一个女生，增加一个男生，则男生为总数的一半；如果减少一个男生，增加一个女生，则男生为女生的一半，数学小组一共有多少学生？

5. 学校将一批图书分给各班阅读，如果每班分 50 本，最后分到的一个班只能分到 45 本；如果每个班分 45 本，还余下 95 本，这批图书有多少本？

## 二 变式训练

1. 用绳子测井深，把绳二折来量，井外余5米，把绳三折来量，还差1米。求井深和绳长。

2. 苹果的个数是梨的2倍，梨每人分3个余2个，苹果每人分7个少6个。问：有多少人？多少苹果，多少梨？

3. 某班同学去划船，租船若干只，如果每船坐 4 人，则还有 1 人留在岸上；如果每只船坐 5 人，就可以少租两只船，而且每人可以少付船费 0.4 元，全班共有多少人去划船？每只船的租费是多少？

4. 一堆煤用汽车运走，每辆装 2.5 吨要比每辆装 4 吨多用 3 辆车，这堆煤有多少吨？

5. 一个旅游团去旅馆住宿，6 人一间，多两个房间，如果4 个人住一间，又少了两个房间。这个团共多少人？

## 三 拔高训练

1. 有若干个苹果，若干个梨，如果按 1 个苹果 2 个梨分堆，梨分完了还剩 5 个苹果，如果按 3 个苹果 5 个梨分堆，苹果分完了还剩 5 个梨。苹果和梨各有多少？

2. 商店以每双 65 元购进一批皮鞋，售价为每双 74 元，卖到还剩 5 双时，除成本外还获利 440 元，这批皮鞋共多少双？

# 第10讲 比与比例（一）

比是反映数量关系的一种常见形式，也是解数学题的一种重要工具，有了它解决一些实际问题就可以化难为易，化繁为简，处理倍数关系，解答分数等应用题就方便灵活得多。

两个数相除又叫做这两个数的比，即 $a\div b$（$b\neq 0$）称为 $a$ 与 $b$ 的比，记为 $a:b$。$a$ 称为前项，$b$ 称为后项，$a\div b$ 的结果称为 $a$ 与 $b$ 的比值。

比的基本性质：比的前项与后项同时乘以（或除以）相同的数（零除外）比值不变。

表示两个比相等的式子叫做比例式。在任意一个比例中两个外项的积等于两个内项的积。

如果两个变数 $y$ 和 $x$ 的比值一定，那么称 $y$ 与 $x$ 成正比例关系。如果两个变数 $y$ 和 $x$ 的乘积一定，那么称 $y$ 与 $x$ 成反比例关系。

把一个数量按照比例进行分配的问题，叫做按比例分配问题，将已知比分配变成按份数分配，把比的各项相加得到总份数，各项与总份数之比，就是各个分量在总量中所占的份额，从而求出各个分量。

## 金牌例题

**例题 1　甲乙两列火车同时从两地相向开出，已知甲列车每小时行120千米，乙列车每小时行90千米，求甲车乙车的速度比，甲乙两车相遇时所行路程比，甲乙两车各自行完全程所用的时间比。**

**思路分析：**

（1）根据已知条件，甲乙两车的速度比可直接得出：

甲车的速度：乙车的速度 $=120:90=4:3$

对于甲乙两车相遇时所行的路程比和甲乙两车各自行完全程的时间比，可用字母代替相遇时间和两地之间的距离。

（2）设甲乙两车 $x$ 小时相遇，相遇时

甲车所行的路程：乙车所行的路程 $=120x:90x=4:3$（$x$ 是相遇时间，一定不为0）

（3）再设两地之间的距离为 $y$ 千米

甲车行完全程所用的时间：乙车行完全程所用的时间 $=\frac{y}{120}:\frac{y}{90}=3:4$（$y$ 是两地间距离，一定不为0）

从上面可以看出：速度比等于在相同时间内所行路程的比，速度比等于时间比的反比，时间比等于路程比的反比。

**答：** 甲乙两车的速度比是4∶3，

甲乙两车相遇时所行路程的比是4∶3，

甲乙两车各自行完全程所用的时间比是3∶4。

**例题 2** (1) $a$ 的$\frac{5}{7}$等于 $b$ 的$\frac{3}{4}$，那么 $a:b=$

(　　)∶(　　)

(2) $a:b=3:4$　$b:c=5:6$　那么

$a:b:c=$(　　)∶(　　)∶(　　)

**思路分析：**

(1) 根据 $a$ 的$\frac{5}{7}$等于 $b$ 的$\frac{3}{4}$，可写成 $a\times\frac{5}{7}=\mathrm{b}\times\frac{3}{4}$。

**解：** $a:b=\frac{3}{4}\div\frac{5}{7}=\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{21}{20}$

(2) 在这两组比中都有 $b$，可以先求出两组比中 $b$ 的最小公倍数，再求出 $a$，$b$ 相应的值，最后把三个量连接起来。4 和 5 的最小公倍数是 20。

**解：** $a:b=3:4=15:20$

$b:c=5:6=20:24$

$a:b:c=15:20:24$

**例题 3** **要配制混凝土，其中水泥和砂的比是5∶8，砂和石子的比是1∶2。问：要制混凝土 1160 吨，需要水泥、砂、石子各多少吨？**

**思路分析**：由水泥∶砂=5∶8，砂∶石子=1∶2，求出，水泥、砂和石子的连比是水泥∶砂∶石子=5∶8∶16。

然后按比例分配方法，根据题中已知的总量和几个部分量的比，求出各个部分是多少。

**解**：总量为1160吨，分量的比为5∶8∶16

水泥的重量：$1160\times\frac{5}{5+8+16}=200$（吨）

砂的重量：$1160\times\frac{8}{5+8+16}=320$（吨）

石子的重量：$1160\times\frac{16}{5+8+16}=640$（吨）

**答**：配制1160吨混凝土需水泥200吨、砂320吨、石子640吨。

**例题4** **甲乙两色糖的重量比是4∶1，如果从甲色糖取出10克放入乙色糖后，甲乙两色糖的重量比是7∶5，那么甲色糖原来重多少克？**

**思路分析**：甲乙两色糖原来的重量比是4∶1，可知甲色糖原来的重量占两色糖总重量的$\frac{4}{4+1}$，由于从甲色糖取出10克放入乙色糖，这时两色糖的重量比为7∶5，即甲色糖现在的重量占两色糖总重量的$\frac{7}{5+7}$，从甲色糖取出放入乙色糖的10克相当于两色糖总重量的（$\frac{4}{4+1}-$

$\frac{7}{5+7})=\frac{13}{60}$，由此可以求出两色糖的总重量，再求出甲色糖的重量。

**解：** $10\div(\frac{4}{4+1}-\frac{7}{7+5})\times\frac{4}{4+1}$

$=10\div\frac{13}{60}\times\frac{4}{5}$

$=36\frac{12}{13}$（克）

**答：** 甲色糖原来重 $36\frac{12}{13}$ 克。

**例题 5** **甲乙两个瓶子里装的溶液体积相等，甲瓶中酒精与水的体积比是3:1，乙瓶中酒精与水的体积比是4:1，现在把两瓶溶液混合在一起，这时酒精和水的体积比是多少？**

**思路分析：** 已知甲瓶中酒精与水的体积比是3:1，那么甲瓶中酒精占整个溶液的$\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4}$，水占整个溶液的$\frac{1}{4}$，同样道理，乙瓶中酒精占整个溶液的$\frac{4}{5}$，水占整个溶液的$\frac{1}{5}$。我们把每瓶溶液的体积看做“1”，则混合后一共有酒精 $1\times\frac{3}{4}+1\times\frac{4}{5}=\frac{31}{20}$，混合后一共有水 $1\times\frac{1}{4}+$

$1\times\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$。

**解：** 甲乙两瓶共有酒精：

$$1\times\frac{3}{3+1}+1\times\frac{4}{4+1}=\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{31}{20}$$

甲乙两瓶共有水：

$$1\times\frac{1}{3+1}+1\times\frac{1}{4+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$$

混合后酒精与水的体积比：$\frac{31}{20}:\frac{9}{20}=31:9$

**答：** 混合后酒精与水的体积比是31:9。

**小结**

用比的知识来解稍复杂的应用题时，应根据题目中的条件，把题目中的量用份数来表示，最后再按比例分配的方法来求出结果。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 甲数与乙数的比是 3∶2，乙数与丙数的比是 4∶3，求甲乙丙三数的比。

2.（1）甲数是乙数的$\frac{4}{5}$，乙数是丙数的$\frac{5}{8}$，

甲乙丙三数的比是（　　）∶（　　）∶（　　）。

（2）甲数是丙数的$\frac{4}{5}$，乙数是丙数的 $1\frac{1}{5}$，

甲乙丙三数的比是（　　）∶（　　）∶（　　）。

（3）甲数是乙数的 $1\frac{5}{7}$，是丙数的 $1\frac{1}{3}$，

甲乙丙三数的比是（　　）∶（　　）∶（　　）。

3. 光明小学五年级共有学生 140 人，分成三个小组进行植树活动，已知第一个小组与第二个小组人数的比是 2∶3，第二个小组与第三个小组人数的比是 4∶5，这三个小组各有多少人？

4. 图书室取出一批书，按照一年级得$\frac{1}{2}$、二年级得$\frac{1}{3}$、三年级得$\frac{1}{7}$分配，正好是 41 本，各年级得多少本？

5. 甲乙丙三人共做零件 900 个，甲做总数的 30%，乙比丙多做$\frac{1}{3}$，三人各做多少？

## 二 变式训练

1. 六年级三个班参加植树活动，一班与二班的人数比是 5:4，二班与三班的人数比是 3:2，已知一班比二、三班的总人数少 15 人，问：六年级参加植树的共多少人？

2. 甲乙丙三人共有存款 106 元，已知甲存款数的$\frac{1}{2}$相当于乙的$\frac{1}{5}$，乙存款数的$\frac{1}{4}$相当于丙的$\frac{1}{5}$。甲乙丙各有存款多少元？

3. 某小学组织英语口语竞赛，已知参赛男生人数的$\frac{1}{4}$和参赛女生人数的$\frac{2}{5}$相等，男生比女生多 36 人，男生有多少人？

4. 甲乙两组的人数比是5∶3，如果从甲组调9人去乙组，那么甲乙两组的人数比是2∶3。求甲乙两组原来各有多少人。

5. 制造一个零件，甲需要8分钟，乙需要6分钟，丙需要5分钟，现在有1180个零件的制造任务分配给他们三人，要求在相同时间内完成，每个人应该分多少零件？

## 三 拔高训练

1. 甲乙两桶油共 130 千克，从甲桶倒出$\frac{2}{7}$给乙桶，甲桶油与乙桶油的比为 7∶6，原来甲乙两桶各有油多少千克？

2. 装配车间有两个小组，甲组与乙组人数的比是 5∶3，如果从甲组调出 14 人到乙组，这时甲组与乙组人数的比是 1∶2，原来两个小组各有多少人？

# 第11讲 比与比例（二）

正确理解并灵活运用比和比例这些基本知识，应用正反比例性质解答应用题时要特别注意题目中某一数量是否一定，然后再确定是成正比例还是成反比例。

在用比例知识解应用题时，要根据正反比例的概念进行判断，分析相关联的两个量是什么关系，看两个量是商一定，还是积一定。如果商一定就是正比例关系，如果积一定就是反比例关系。

## 金牌例题

**例题 1　甲乙两人加工一批零件，由甲单独做需要15小时，乙每小时能加工60个，现在甲乙二人同时加工，完成任务时，乙加工的个数是甲的$\frac{4}{5}$，这批零件共多少个？**

**思路分析：**甲乙二人同时开始加工到完成任务所花时间相同。因为工作时间一定，工作效率与工作总量成正比，所以甲乙的工作效率比为5:4，乙每小时加工60

个，甲每小时则能加工 $60\times\frac{5}{4}=75$（个），而甲单独做需15小时，所以这批零件共有 $75\times15=1125$（个）。

**解：** $60\times\frac{5}{4}\times15=1125$（个）

**答：** 这批零件共有1125个。

**例题2** **客货两车同时从甲乙两地相对开出。相遇时客货两车所行路程的比是5:4，相遇后货车每小时比相遇前每小时多走了27千米，客车仍按原速前进，结果两车同时到达对方的出发站。已知客车一共行了10小时，甲乙两地相距多少千米？**

**思路分析：** 从相遇到两车同时到达对方的出发点，货车和客车所行的路程比是5:4，因为时间相同，路程与速度成正比例，所以相遇后的货车速度与客车速度的比为5:4，即相遇后，货车速度是客车速度的 $\frac{5}{4}$。根据题意又可知道相遇前的货车速度是客车的 $\frac{4}{5}$，速度差27千米就相当于客车速度的 $\frac{5}{4}-\frac{4}{5}=\frac{9}{20}$，那么客车的速度就是每小时行 $27\div(\frac{5}{4}-\frac{4}{5})=60$（千米）。又知道客车行完全程用了10小时，就可求出甲乙两地的距离。

**解**：$27 \div (\frac{5}{4} - \frac{4}{5}) \times 10 = 600$（千米）

**答**：甲乙两地相距600千米。

**例题3** **一辆汽车在甲乙两站之间行驶，往返1次共用4小时，汽车去时每小时行45千米，回来时每小时行30千米。甲乙两站之间的距离是多少千米？**

**思路分析**：因为甲乙两站的距离一定，所以汽车行驶的速度与时间成反比例。汽车去时与回时速度的比为$45:30=3:2$，则汽车去时与回时时间的比为$2:3$，根据往返1次共用4小时可求出去时或回时所用的时间，进而求出甲乙两站间的距离。

**解**：$45:30=3:2$

$45 \times (4 \times \frac{2}{3+2}) = 72$（千米）

或 $30 \times (4 \times \frac{3}{3+2}) = 72$（千米）

**答**：甲乙两站之间的距离是72千米。

**例题4** **甲乙二人工作效率的比是3:4，两人合作一项工程，合做了6天后，再由甲单独工作10天完成。甲乙二人单独完成这项工程各要多少天？**

**思路分析：** 合做 6 天，即他们合做时间一样，甲乙二人工作效率的比是 3:4，工作量与工作效率成正比，也是 3:4，所以乙用 6 天完成的工作，甲用 $6\times\frac{4}{3}=8$（天），因此，甲单独做这项工程要用 $6+8+10=24$（天），由于工作总量一定，工作时间与工作效率成反比例。由于甲乙工作效率的比为 3:4，他们工作时间的比就是 4:3，所以乙要单独完成这项工程要 $24\times\frac{3}{4}=18$（天）。

**解：** 甲：$6\times\frac{4}{3}+6+10=24$（天）

乙：$24\times\frac{3}{4}=18$（天）

**答：** 甲单独完成这项工程要 24 天。乙单独完成这项工程要 18 天。

**例题 5** **甲乙两人各加工 100 个零件，甲比乙迟 $\frac{5}{2}$ 小时开工，结果同时结束。甲乙两人工作效率的比是 5:2，甲每小时加工多少个零件？**

**思路分析：** 甲乙两人加工零件的个数相同，即工作总量相同。那么工作时间与工作效率成反比例，甲乙两人工作效率的比是 5:2，工作时间的比则是 2:5。“甲比

乙迟$\frac{5}{2}$小时开工”，也就是甲比乙少用$\frac{5}{2}$小时，甲完成100个零件需要$\frac{5}{2}\div(5-2)\times2=\frac{5}{3}$（小时），甲每小时加工$100\div\frac{5}{3}=60$（个）。

**解：** $100\div[\frac{5}{2}\div(5-2)\times2]$

$=100\div\frac{5}{3}$

$=60$（个）

**答：**甲每小时加工60个零件。

**小结**

用正比例、反比例的知识解答问题时，关键是要抓住题目中不变的量，找出其余的量之间的比例关系，再用比例知识解答出来。只要我们能灵活地运用有关比和比例的知识解答较复杂的应用题，不仅能降低解题难度提高解题正确率，还能提高我们的分析、综合、概括、转化能力。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 客货车同时从甲站开往乙站，客车 6 小时到站，货车速度比客车速度快$\frac{1}{5}$，问：货车到站需要多少时间？

2. 师徒两人各加工 480 个零件，完成时所用的时间比是 2:3，已知师傅比徒弟每小时多加工 20 个，师傅加工这批零件需要多少小时？

3. 客车与货车同时从 $AB$ 两地相对开出，客车每小时行 60 千米，货车每小时行全程的$\frac{1}{15}$，相遇时客车所行的路程是货车的$\frac{5}{4}$，$AB$ 两地的距离是多少千米？

4. 甲乙两人同时加工一批零件，已知甲乙工作效率的比是4∶5，完成任务时，乙比甲多加工了 120 个零件。这批零件共有多少？

5. 客车和货车同时从甲乙两地相向而行，相遇时客货两车所行的路程比是6∶5，相遇后，货车比相遇前每小时多走22千米，客车仍按原速前进，结果两车同时到达对方的出发站，已知客车一共行了16小时，甲乙两地相距多少千米?

## 变式训练

1. 一批零件，甲乙两人单独完成，所需的时间比是3∶5，现两人合作，完成任务时甲比乙多加工30个，这批零件共有多少个?

2. 甲乙两车同时从 $AB$ 两城相对开出，经过 8 小时相遇，相遇后甲车继续开到 $B$ 城还要 4 小时，已知甲车每小时比乙车快 35 千米，$AB$ 两地相距多远？

3. 货车速度与客车速度的比是 3∶4，两车同时从甲乙两站相对行驶，在离中点 6 千米处相遇。甲乙两地相距多少千米？

4. 甲乙合作一批零件 6 小时完成，已知甲乙工作效率的比是7:6。乙单独做需要多少小时完成？

5. 师徒二人共加工零件 168 个，师傅加工一个零件用 5 分钟，徒弟加工一个用 9 分钟，完成任务时，两人各加工零件多少个？

## 三 拔高训练

1. 甲乙丙三人共植树 697 棵，已知甲植树棵数的$\frac{1}{2}$等于乙植树棵数的$\frac{2}{5}$，甲植树棵数的$\frac{1}{3}$等于丙植树棵数的$\frac{2}{7}$，问：甲乙丙三人各植树多少棵？

2. 小军行走的路程比小红多$\frac{1}{14}$，而小红行走的时间比小军多$\frac{1}{16}$，求小军与小红的速度比。

# 第12讲 分数与百分数

分数、百分数的知识是小学数学教学的重要内容，也是小学数学的重点与难点。分数、百分数应用题是研究数量之间份数关系的典型应用题，即研究标准量与比较量之间的关系。在解决这类问题时，通常将标准量设为单位“1”，对应地分析题中的数量关系，找出量与率之间的对应关系。

在稍复杂的分数、百分数应用题中，经常会出现两个或两个以上的单位“1”量，从属于不同单位“1”的分率，就必须将不同单位“1”的分率，转化为一个统一的单位“1”的分率。转化后的数量关系及量率关系，就由复杂转为简单。

而百分数有两种不同的定义：一种作为特殊的分数——分母为100的分数；另一种表示一个数是另一个数的一百分之几，此时又称为百分比或百分率，百分数通常不写成分数形式，而采用百分号“%”。

## 金牌例题

**例题 1** **一辆汽车从甲地开往乙地，行了全程的$\frac{1}{3}$时，离中点还有25千米，甲乙两地相距多少千米？**

**思路分析：**中点是甲乙两地全程的$\frac{1}{2}$，把全程看做单位“1”，那么15千米相当于全程的（$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$）$=\frac{1}{6}$（对应分率）。

**解法一：** $25\div(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$

$=25\div\frac{1}{6}$

$=150$（千米）

**解法二：**设：甲乙两地相距$x$千米，那么一半长为$\frac{1}{2}x$，行了全程的$\frac{1}{3}$，为$\frac{1}{3}x$，离中点还有25千米。

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=25$

$x=150$

**答：**甲乙两地相距150千米。

**例题 2** **筑路队修一段公路，第一天修了全长的$\frac{4}{7}$，第二天修了余下的$\frac{3}{5}$，这时还有 42 千米没有修，这段公路全长多少千米？**

**思路分析：** 解分数应用题，要注意“比较数”与“分率”的对应关系，第一天后未修公路长占全长的分率为$1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$，第二天修的公路长占全长的分率为$\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{35}$，也就是 42 千米所对应的分率为$1-\frac{4}{7}-\frac{9}{35}=\frac{6}{35}$，公路全长为$42\div\frac{6}{35}=245$（千米）。

**解法一：** $42\div[1-\frac{4}{7}-(1-\frac{4}{7})\times\frac{3}{5}]$

$=42\div\frac{6}{35}$

$=245$（千米）

**解法二：** $42\div(1-\frac{3}{5})\div(1-\frac{4}{7})$

$=42\div\frac{2}{5}\div\frac{3}{7}$

$=245$（千米）

**答：** 这段公路全长 245 千米。

**例题3** **耕一块地，第一天耕的比这块地的$\frac{1}{3}$多2公顷，第二天耕的比剩下的$\frac{1}{2}$少1公顷，这时还剩38公顷没有耕，这块地共有多少公顷？**

**思路分析：**根据已知：第二天耕地少1公顷不足第一天剩下的$\frac{1}{2}$，要加上1公顷就够$\frac{1}{2}$了，那么剩下的就不是38公顷了，而是$38-1=37$（公顷），这37公顷，就是第一天耕完剩下的$\frac{1}{2}$，因此，第一天耕完就剩下$37\div\frac{1}{2}=74$（公顷）。同样的道理，从第一天的分率和剩下的公顷数可以求出这块地的公顷数是$(74+2)\div(1-\frac{1}{3})=114$（公顷）。

**解：** $[(38-1)\div(1-\frac{1}{2})+2]\div(1-\frac{1}{3})$

$=[37\div\frac{1}{2}+2]\div\frac{2}{3}$

$=76\div\frac{2}{3}$

$=114$（公顷）

**答：**这块地共有114公顷。

**例题 4** **姐妹俩养兔 100 只，姐姐养的$\frac{1}{3}$比妹妹养的$\frac{1}{10}$多 16 只，求姐妹俩各养兔多少只。**

**思路分析：**先把姐姐养兔的数量看做单位“1”，“姐姐养的$\frac{1}{3}$比妹妹养的$\frac{1}{10}$多 16 只”，就可以变为“姐姐养的$\frac{1}{3}\times3$ 比妹妹养的$\frac{1}{10}\times3$ 多 $16\times3$”，即“姐姐养的比妹妹养的$\frac{3}{10}$多 48 只”。

这样 100 只兔子可分为 3 部分：妹妹的全部 + 妹妹全部的$\frac{3}{10}+48$ 只。

然后再把妹妹养兔的数量看做单位“1”，就容易看出：100 只 − 48 只 =52 只，所对应的分率为 $1+\frac{3}{10}=\frac{13}{10}$，从而就可以求出妹妹养兔的数量为 $52\div\frac{13}{10}=40$（只），姐姐养的就是 $100-40=60$（只）。

**解：**妹妹养兔数量：

$$(100-16\times3)\div(1+\frac{1}{10}\div\frac{1}{3})=40\text{（只）}$$

姐姐养兔数量：$100-40=60$（只）

**答：**姐姐养兔 60 只，妹妹养兔 40 只。

**例题 5** **某种商店按定价卖出可得利润 960 元，如果按定价的 80% 出售则亏损 832 元，该商品的购入价是多少?**

**思路分析：** 根据题意，按定价卖出，可得利润 960 元，现在按定价的 80% 出售，应该获得原有利润的 80%，即 $960\times80\%=768$（元），实际情况是不仅没有得到利润，反而亏损 832 元，这样共损失 768 元 + 832 元 = 1600 元，这 1600 元正好是定价的 20%。

**解法一：** $(960\times80\%+832)\div(1-80\%)$

$=1600\div20\%$

$=8000$（元）

**解法二：** 按原定价的 80% 出售后，正好亏损 832 元，可根据这个数量关系列出方程解答。

设：某种商品的购入价为 $x$ 元

$$(x+960)\times80\%=x-832$$

$$80\%x+768=x-832$$

$$x-80\%x=768+832$$

$$20\%x=1600$$

$$x=8000$$

**答：** 该商品的购入价是 8000 元。

**小结**

实际上我们遇到的分数、百分数应用题的数量关系是变化多样的，我们必须认真审题，通过分析推理、弄清量与分率的对应关系，依据有关数量关系式解答问题。在解题中要善于掌握对应、假设、转化等多种解题方法，不断地开拓解题思路。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 修一条路每天修 15 米，修了 4 天，后来又修了全长的$\frac{1}{5}$，这时还剩下全长的$\frac{1}{5}$没有修，求这条路共有多少米。

2. 一批课外读物，借出的占这批读物的$\frac{7}{8}$，后来又添置了125本，这时存书占原有本数的$\frac{1}{3}$，求原有课外读物多少本。

3. 快、慢两车分别从甲乙两地相向而行，在相距210千米时，快车行了全程的$\frac{3}{4}$，慢车行了全程的$\frac{3}{5}$，求甲乙两地相距多少千米。

4. 小华看一本故事书，第一天看的比全书的$\frac{1}{6}$多 6 页，第二天看的比全书的$\frac{1}{8}$少 8 页，最后还剩 172 页，这本故事书一共有多少页？

5. 一件商品随季节变化降价销售，如果按现价降低 10% 赢利 180 元，如果降价 20% 就要亏损 240 元，这件商品的进价是多少元？

## 变式训练

1. 某乡要挖一条水渠，第一期挖了 180 米，第二期挖了余下的$\frac{2}{7}$，这时没挖的和已挖的长度相等，这条水渠全长多少米？

2. 水果店运来一批水果，第一天卖出 1200 千克，第二天比第一天多卖出$\frac{1}{8}$，这时还余下总数的$\frac{1}{4}$，求这批水果共有多少千克。

3. 学校买来一批图书，放在两个书柜中，其中第一个书柜中的图书占这批图书的58%，如果从第一个书柜中取出32本放到第二个书柜中，这时两个书柜的图书各占这批图书的$\frac{1}{2}$，求这批图书共有多少本。

4. 甲乙二人在银行共存钱若干元，已知甲存款的$\frac{1}{4}$等于乙存款的$\frac{1}{5}$，又知乙比甲多存了24元，求甲乙二人各存款多少元。

5. 小华三天看完一本书，第一天看了全书的$\frac{1}{4}$，第二天看了余下的$\frac{2}{5}$，第二天比第一天多看了15页，这本书共有多少页？

## 二 拔高训练

1. 化肥厂一月份生产化肥200吨，以后每一个月都比前一个月增产20%，所以第一季度完成了全年计划的$\frac{1}{2}$，这个厂全年计划生产化肥多少吨？

2. 光明小学四年级的学生比三年级的学生多25%，五年级的学生比四年级的学生少10%，六年级的学生比五年级的学生多10%，如果六年级的学生比三年级的学生多38人，问，三至六年级共有多少人?

# 第13讲 浓度问题

将糖溶解在一定量的水中，放的糖越多，糖水就越甜，我们把糖与糖水的重量的比值称为糖水的浓度。

在浓度问题中，我们通常称糖、盐、药为溶质（即被溶解的物质），把溶解这些溶质的液体称为溶剂，如水、汽油等。溶质和溶剂混合的液体称为溶液，如糖水、盐水等，因而浓度就是溶质重量与溶液重量的比值，通常用百分数来表示。

溶质、溶液、溶剂和浓度具有如下基本关系式：

溶液的质量 = 溶质的质量 + 溶剂的质量

浓度 = 溶质的质量 ÷ 溶液的质量

溶液的质量 = 溶质的质量 ÷ 浓度

溶质的质量 = 溶液的质量 × 浓度

溶剂的质量 = 溶液的质量 ×（1 − 浓度）

溶剂的增加或减少引起浓度的变化，面对这种问题，不论溶剂增加或减少，溶质是始终不变的，据此便可解题。有时浓度问题可以根据题目中数量间的相等关系列方程解答。

## 金牌例题

**例题1** **在浓度为25%的15千克糖水中加入5千克水，这时糖水溶液的浓度是多少?**

**思路分析：** 要求出新的溶液浓度，就要先求出原溶液含糖多少千克。15×25%=3.75（千克），再求新溶液的重量，用15+5=20（千克），最后用求浓度的公式来计算。

**解：** 15×25%÷(15+5)×100%

=3.75÷20×100%

=18.75%

**答：** 这时糖水溶液的浓度是18.75%。

**例题2** **有浓度为10%的盐水溶液900克，要使其浓度稀释到6%，需要加水多少克?**

**思路分析：** 往原溶液里加水，里面盐的重量不变，抓住不变量求出新的溶液重量，再减去原溶液重量，就求出了需要加水多少克。

**解法一：** 900×10%÷6%−900

=1500−900

=600（克）

**解法二：** 由于加水溶液里的盐不变，可以盐为等量列方程。

设：需要加水 $x$ 克

$900 \times 10\% = (900 + x) \times 6\%$

$x = 600$

**答：** 需要加水 600 克。

**例题 3** **现有浓度为 25% 的盐水 80 克，要使盐水的浓度提高到 40%，需要加多少克盐？**

**思路分析：** 将浓度 25% 的盐水变为浓度为 40% 的盐水，在盐水的变化过程中，盐的重量增加了，但水的重量没有变化，也就是说原来盐水中水的重量等于现在盐水中水的重量，80 克盐水，盐占 $80 \times 25\% = 20$（克），水占 $80 \times (1 - 25\%) = 60$（克），变化后 60 克水，配成浓度 40% 的盐水溶液，就应该是 $60 \div (1 - 40\%) = 100$（克），原来盐水溶液为 80 克，所以就应该加 $100 - 80 = 20$（克）盐。

**解：** $80 \times (1 - 25\%) \div (1 - 40\%) - 80$

$= 80 \times 75\% \div 60\% - 80$

$= 100 - 80$

$= 20$（克）

**答：** 需要加 20 克盐。

**例题 4** **在浓度为 10% 的盐水 80 克中，加入多少克水，就能得到浓度为 8% 的盐水?**

**思路分析**：在浓度为 10% 的 80 克的盐水中，盐的重量应该是 $80\times10\%=8$（克），在盐水中加入若干克水后，盐水的浓度变成 8%。这时盐水中盐的重量并没有改变，仍然是 8 克，根据数量关系式，现在盐水的重量 × 现在的浓度 = 现在盐的重量，可求出盐水的重量，再用现在盐水的重量减去原来盐水的重量，就得到加水的重量。

**解法一**：原来盐的重量：$80\times10\%=8$（克）

现在盐水的重量：$8\div8\%=100$（克）

加入水的重量：$100-80=20$（克）

综合式：$80\times10\%\div8\%-80=20$（克）

**解法二**：根据题意，可以知道在原来的盐水中和现在的盐水中，盐的重量是相等的。因此，也可以列方程解答，数量间的相等关系是：原来盐水中盐的重量 = 现在盐水中盐的重量。

设：加入 $x$ 克水

$$80\times10\%=(80+x)\times8\%$$

$$8=6.4+8\%x$$

$$8\%x=1.6$$

$$x=20$$

**答**：加入 20 克水，就能得到浓度为 8% 的盐水。

**例题5** 现有浓度为20%的糖水300克，要把它变成浓度40%的糖水，需加糖多少克？

**思路分析：**根据题意可以知道，在浓度为20%的糖水中加糖，就改变了原来糖水的浓度。糖的重量增加了，糖水的重量也增了，但水的重量并没有改变。因此，可以先根据原来糖水中的浓度求出原来糖水中水的重量，再根据后来糖水中的浓度求出现在糖水的重量，用现在糖水的重量减去原来糖水的重量，就是增加的糖的重量。

**解法一：**原来糖水中水的重量：

$300\times(1-20\%)=240$（克）

现在糖水的重量：

$240\div(1-40\%)=400$（克）

加入糖的重量：

$400-300=100$（克）

**解法二：**根据原来糖水中水的重量和现在糖水中水的重量相等的关系，可以列方程解答。

设：需加$x$克糖

$$300\times(1-20\%)=(300+x)\times(1-40\%)$$

$$300\times80\%=300\times60\%+60\%x$$

$$240=180+60\%x$$

$$60\%x=60$$

$$x=100$$

**答：**需加糖100克。

小结

在解答浓度问题时，要仔细分析题目，分清在变化前后，谁变了，谁没变，学会选择解题方法。比如抓住不变量，列方程解等方法。在有些题目稍难的情况下，要学会分步分析、分步解答。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 浓度为 25% 的盐水 100 克，如果想稀释到 10% 的浓度，需加水多少克？

2. 浓度为 25% 的盐水 80 克，加入多少盐后，浓度增加到 40%？

3. 现有浓度为 20% 的盐水 450 克，要把它变成浓度为 40% 的盐水，需要加盐多少克？

4. 某种农药的浓度为 25%，现要将 600 克这种农药稀释成 3% 的药水，应加水多少克？

5. 一只杯中有浓度为 20% 的盐水，若再加入 10 千克水，则盐水浓度变为 15%，这只杯中含盐多少千克？

## 变式训练

1. 浓度为 20% 的糖水 300 克和浓度为 35% 的糖水 200 克，混合在一起，混合后的糖水浓度是多少？

2. 某工厂使用了两种浓度分别为85%和40%的工业酒精，现在要配制10千克浓度为67%的工业酒精，需要从这两种酒精中各取多少千克？

3. 甲乙两桶盐水的浓度分别为70%和55%，现在要配制浓度为65%的盐水3000克，应当从这两桶盐水中各取多少克？

4. 有浓度为 25% 的糖水 400 克和浓度为 5% 的糖水 100 克混合，求混合后糖水溶液的浓度。

5. 有含盐 8% 的盐水 40 克，要配制含盐 20% 的盐水 100 克，需加盐加水各多少克?

## 三 拔高训练

1. 现有含盐 20% 的盐水 500 克，要把它变成 15% 的盐水，应加入 5% 的盐水多少克？

2. 从装满 100 克浓度为 80% 的盐水杯中倒出 40 克盐水，再用清水把杯加满，如此反复三次后，杯中盐水浓度是多少？

# 第14讲 利润和利息

利润和利息与我们的实际生活有着千丝万缕的联系，它是一种特殊的百分数应用题。比如，我们在买卖商品的过程中，存在利润问题，商品从厂家购进的价格称为成本（也叫进价），商家在定价的基础上提高价格出售，所赚的称之为利润，利润与成本的比称为利润率，利润率通常用百分数来表示。

利润、成本、定价及利润率的关系是：

利润＝定价－成本

利润率＝（定价－成本）÷成本×100%

定价＝成本×(1＋利润率)

成本＝定价÷(1＋利润率)

我们去银行存款、取钱的过程中，就存在利息问题，本金就是存入银行的钱，利息指的是取款时银行多付的钱，利率指的是利息与本金的百分比，一般还要交纳20%利息税。

本金、利息、利率的关系为：

利息＝本金×利率×时间×(1－20%)

$$利率=\frac{利息}{本金\times时间\times(1-20\%)}\times100\%$$

## 金牌例题

**例题 1　某商场进了200只书包，每售一只可获利润30%，当这批书包售出$\frac{3}{4}$时，已经获得利润2250元，问：每只书包的进货价是多少？**

**思路分析：** 要求出每只书包的进货价，根据已知条件，可以先求出每只书包获得的利润$2250\div(200\times\frac{3}{4})=15$（元），再用每只书包的利润与利润率之间的对应关系，求出每只书包的进货价。

**解：** $2250\div(200\times\frac{3}{4})\div30\%$

$=2250\div150\div30\%$

$=50$（元）

**答：** 每只书包的进货价是50元。

**例题 2　妈妈把3万元存入银行，存期为三年，年利率为3.96%。问：她到期后一共能取出多少钱？**

**思路分析：** 根据已知：三年后，将她的本金30000元，加三年所得的利息$30000\times3.96\%\times3\times(1-20\%)=2851.2$（元），就是一共取出的钱。

**解：** $30000+30000\times3.96\%\times3\times(1-20\%)$

$=30000+2851.2$

$=32851.2$（元）

**答：** 三年到期后一共能取出 32851.2 元。

**例题 3** **某商品按定价的 80% 出售（八折），仍能获得 20% 的利润。定价时期望的利润百分数是多少？**

**思路分析：** 求利润的百分数就是求获得的利润占成本的百分之几。假设定价（设想的卖价）为 1，因为商品实际按定价的 80% 出售，因此，商品的实际卖价就应该是 $1\times80\%=0.8$。

按照题意，按定价的 80% 出售后，仍得 20% 的利润，也就是"成本 $\times(1+20\%)=$ 卖价"，因为实际卖价是 0.8。

因此用 $0.8\div(1+20\%)$ 就可以求出成本，当卖价和成本都求出后，就可以求出定价时期望的利润百分数是多少了。

**解：** 设定价为 1，商品的实际卖价：$1\times80\%=0.8$

商品的成本：$0.8\div(1+20\%)=\frac{2}{3}$

定价时期望的利润百分数：$(1-\frac{2}{3})\div\frac{2}{3}=50\%$

**答：** 定价时期望的利润百分数是 50%。

**例题 4** **张爷爷将5万元存入银行，年利率7.8%，张爷爷要存多少年，到期的利息是19500元？**

**思路分析：**根据利息 = 本金 × 利率 × 时间 ×（1 - 20%），那么就是：时间 = 利息 ÷［本金 × 利率 ×（1 - 20%）］。

**解：** 19500 ÷［50000 ×7.8% ×（1 - 20%）］

=19500 ÷［3900 ×80%］

=19500 ÷3120

=6.25（年）

**答：**张爷爷要存约6.25年，到期的利息才能是19500元。

**例题 5** **商店以每双6.5元的价格购进一批凉鞋，售价为每双8.7元，卖到还剩200双时，除去购进这批凉鞋的成本外还获利20元，这批凉鞋共多少双？**

**思路分析：**商店以每双6.5元的价格购进一批凉鞋，以每双8.7元的价格售出，每双可获利润8.7 - 6.5 =2.2（元），卖到还剩200双时，除去购进这批凉鞋的成本外还获利20元，如果用20元加上未卖出的这200双鞋的成本，就可以求出卖出这批鞋获得的利润20 +6.5 ×200 =1320（元），用获得利润的总数，除以每双应得的利润，就可以求出已经卖出的双数，1320 ÷（7.8 - 6.5）= 600（双），再加上剩下的200双，就是这批凉鞋的总数

量 $600+200=800$（双）。

解：$(20+6.5\times200)\div(7.8-6.5)+200$

$=1320\div2.2+200$

$=600+200$

$=800$（双）

答：这批凉鞋共有 800 双。

**小结**

解答利润问题的应用题，首先要理清题中有关利润名词的意义，分清利润和利润率，找到不同成本所对应的不同的利润率，再按照关系式求出未知量。

解答利息问题时，我们要抓住利息的计算公式即利息 = 本金 × 利率 × 时间 ×（1 − 20%）来解决。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 李奶奶将50000元钱存入银行，存期三年，年利率为2.07%，到期后，李奶奶将税后利息全部捐给了农村小学，李奶奶捐给农村小学多少钱？

2. 商店以每只36元的价格购进一批球拍，售价为44元，卖到还剩6只时，除成本外，已获利80元，这批球拍一共有多少只？

3. 王老师把3000元钱存入银行，定期6年，到期时他获得本金和税后利息共3324元，这种储蓄年利率是多少？

4. 某商品按20%的利润定价，然后又按88折卖出，共获利润84元，这件商品成本是多少元？

5. 某种空调按定价卖出可得利润 650 元，若按定价的 80% 出售，则亏损 480 元，问：此种空调的购进价是多少元？

## 二 变式训练

1. 一件商品随季节变化降价出售，如果现降价 10%，仍可赢利 180 元，如降价 20% 就要亏损 240 元，这件商品进价是多少元？

2. 张老师有一张存折，年利率为 3.24%，他计算了一下，三年到期后，扣除 20% 的利息税，可净得本金和利息共计 8622.08 元，问：这张存折存了多少钱？

3. 某商店按每台 5000 元的价格进了 80 台电脑，第一个月按 20% 的利润定价出售，共卖出 50 台，第二个月按第一个月定价的 75% 全部售完，这批电脑共获利多少元？

4. 一种商品，先按30%的利润进行定价，然后按定价的80%出售，结果每件获利84元，这件商品的成本是多少？

5. 甲乙二人做生意，甲获利20%，乙亏损20%，此时乙的资本仅是甲的$\frac{3}{4}$，甲原有本金10万元，乙原有本金多少万元？

## 三 拔高训练

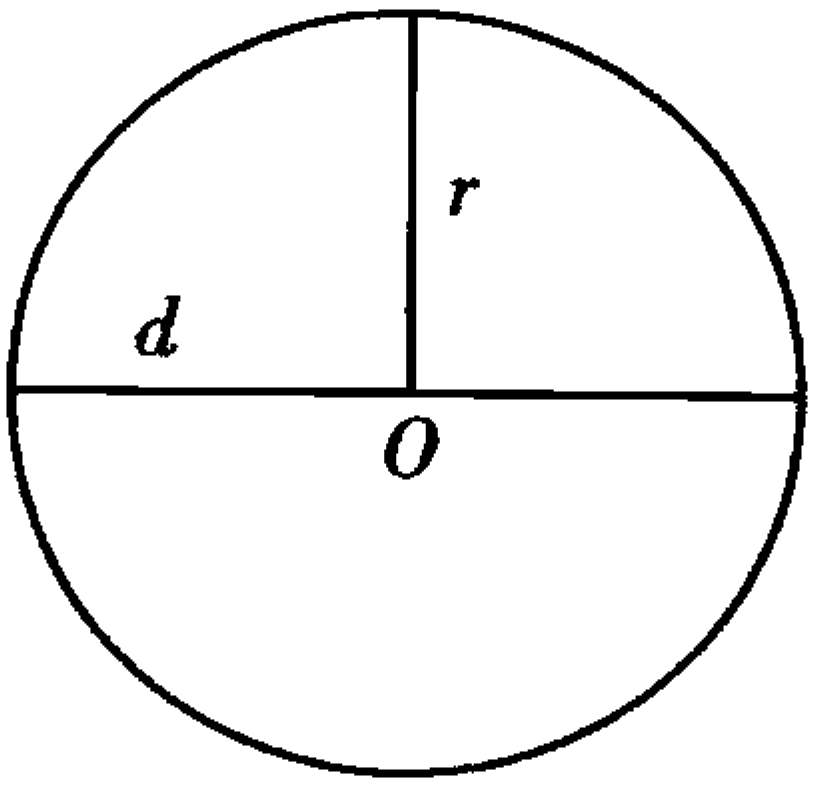
1. 某商店出售一批服装，按60%的利润定价进行销售，从销售之月起以后每个月比前一个月减价20%，第三个月比第一个月便宜了288元，这种服装的进价是多少？

2. 同一种商品，甲店比乙店的进价便宜10%，甲店按25%的利润定价，乙店按20%的利润定价，甲店的定价比乙店少18元，甲店的进价是多少元？

# 第 15 讲　圆的周长与面积

有关圆的计算是指与圆有关的图形的周长和面积的计算，其中组合图形的面积是学习的重点。在进行组合图形计算时，必须掌握有关概念、公式，要仔细观察、认真思考，看清组合图形是由哪几个基本图形组成的，看清题目的已知条件和问题，要注意找出图中的隐蔽条件与已知条件和问题的联系。

圆的周长：当一条线段绕着它的一个端点 $O$，在平面上旋转一周时，它的另一个端点所画的封闭曲线叫做圆，端点 $O$ 就是这个圆的圆心，这条封闭曲线的长度就是这个圆的周长，用 $C$ 来表示，连接圆心到圆上任意一点的线段叫半径，一般用字母 $r$ 来表示，通过圆心并且两端都在圆上的线段叫直径，用字母 $d$ 表示，用 $S$ 表示圆的面积，于是有下列公式：



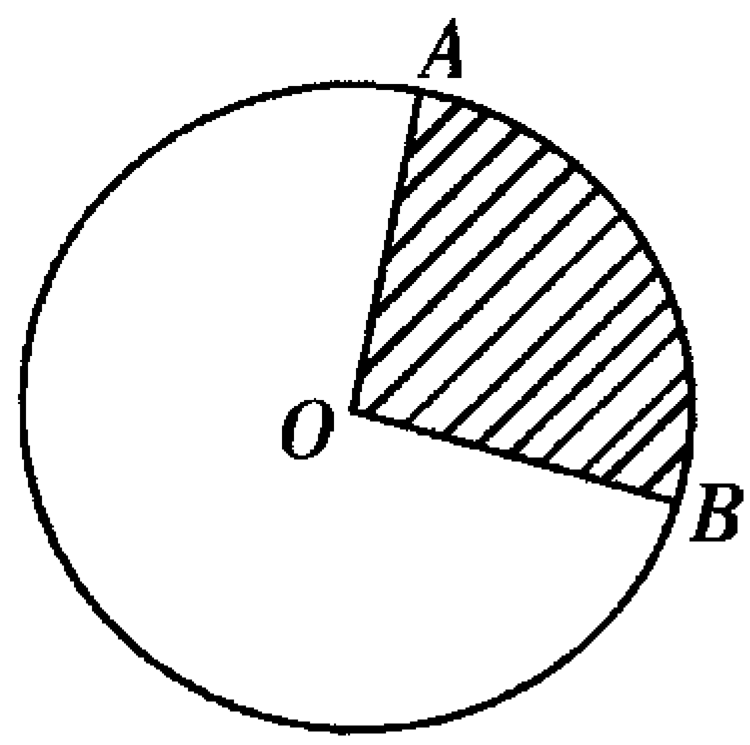
$d=2r \qquad C=\pi d=2\pi r$

$S=\pi r^2$（其中 $\pi$ 是圆周率，取 $\pi=3.14$）

圆上两点间的部分叫做弧，这两点与圆心连接所得两条半径的夹角叫做圆心角，一般用 $n$ 表示圆心角的度数，用 $l$ 表示弧长，则

$$l=\frac{n}{180}\pi r$$

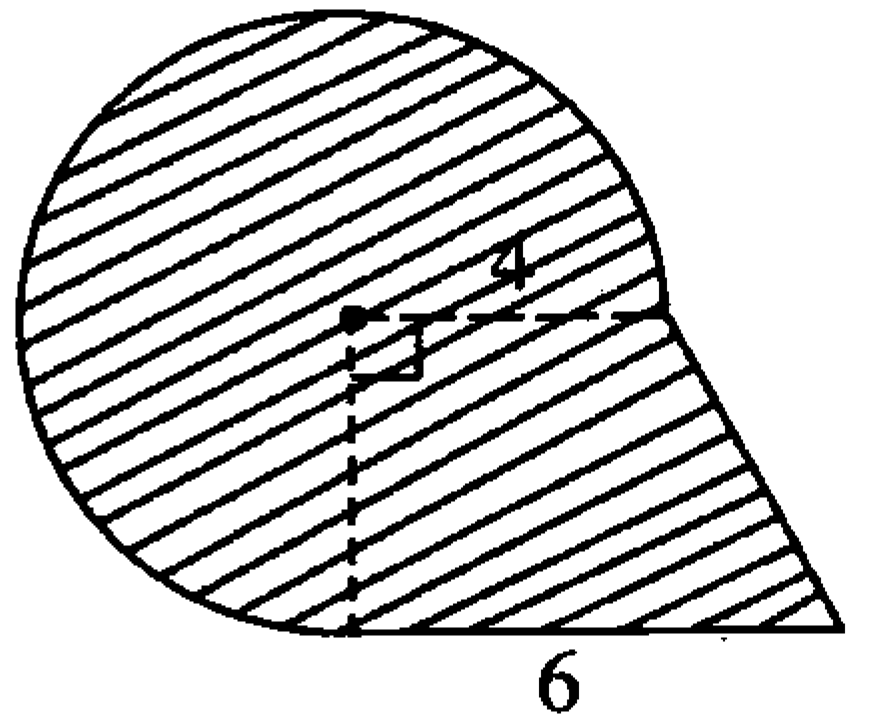
圆心角的两条半径和圆心角所对的弧围成的图形叫做扇形，则




$$S=\frac{n}{360}\pi r^2=\frac{1}{2}lr$$

## 金牌例题

**例题 1** 计算图中阴影部分的面积。（单位：厘米）



**思路分析：** 图中的阴影部分是由一个扇形和一个直角梯形合并而成的。求阴影部分的面积就是求扇形面积与梯形面积的和。根据图中的已知条件，扇形的半径是4厘米，扇形的圆心角的度数是270°，直角梯形的上底和高是扇形的半径都是4厘米，下底是6厘米。

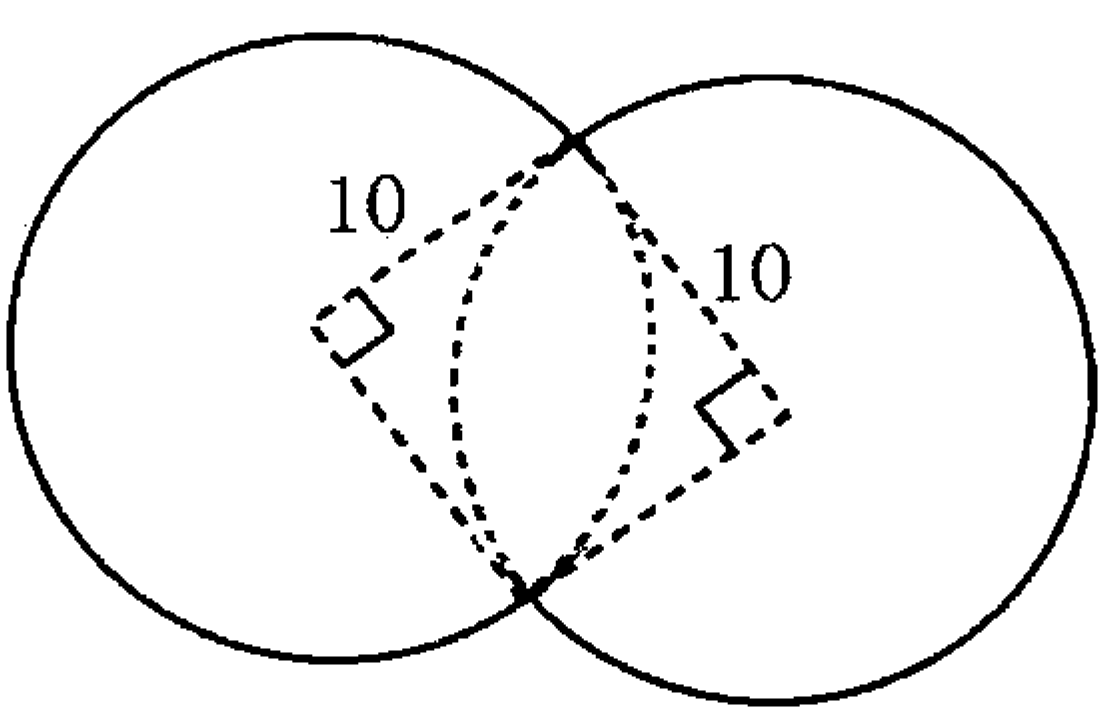
**解：** 扇形面积：$3.14\times4^2\times\frac{270}{360}=37.68$（平方厘米）

直角梯形面积：$(4+6)\times4\div2=20$（平方厘米）

阴影部分面积：$37.68+20=57.68$（平方厘米）

**答：** 阴影部分的面积是57.68平方厘米。

**例题2** **求图中外圆的周长。(单位：分米)**

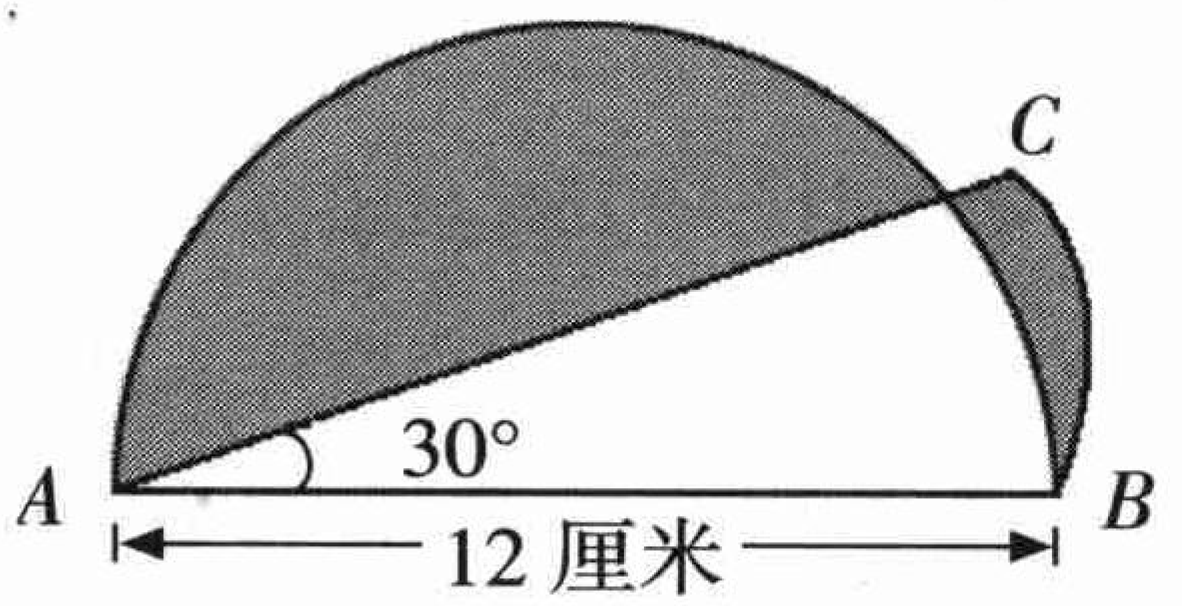



**思路分析：** 要求这个图形外圆的周长，就是求两个圆的周长和减去两个$\frac{1}{4}$圆的周长，也就是求两个$\frac{3}{4}$圆的周长。

**解：** $3.14\times2\times10\times\frac{3}{4}\times2=94.2$（分米）

**答：** 图中外圆周长是94.2分米。

**例题 3** **已知 $AC=AB$，求图中阴影部分的周长。**




**思路分析：** 从图中可以看出，阴影部分的周长，包括三部分的长度，一是扇形的一条半径，二是半圆的弧长，三是圆心角为 30°的扇形的弧长。已知扇形的半径 $AC=AB=12$ 厘米，只要再求出另两条弧长即可。

**解：** 扇形的半径：

$AC=AB=12$ 厘米

半圆的弧长：

$3.14\times12\times\frac{1}{2}=18.84$（厘米）

圆心角为 30°扇形的弧长：

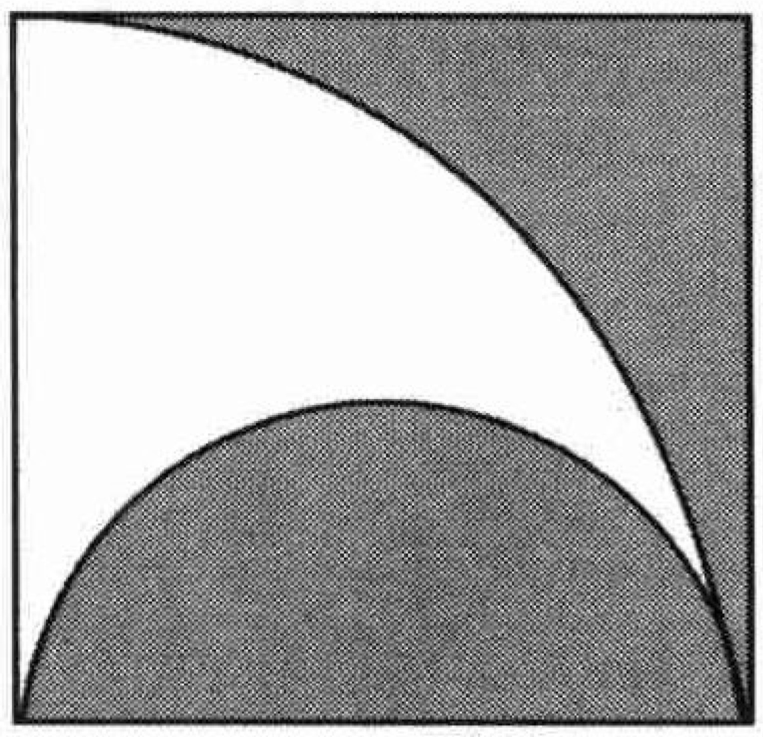
$3.14\times12\times\frac{30°}{180°}=6.28$（厘米）

阴影部分的周长：

$12+18.84+6.28=37.12$（厘米）

**答：** 图中阴影部分的周长是 37.12 厘米。

例题 4 **求出图中阴影部分的面积。**




**思路分析**：图中阴影部分的面积是一个正方形减去一个圆心角为90°的扇形面积再加上一个半圆面积，正方形的边长是10厘米，扇形的半径就是正方形的边长，也是10厘米，半圆的直径是10厘米，也可以把图中的阴影部分看成正方形减去扇形与半圆的差（图中的空白部分）。

**解**：正方形面积：$10 \times 10 = 100$（平方厘米）

扇形面积：$3.14 \times 10^2 \times \frac{90°}{360°} = 78.5$（平方厘米）

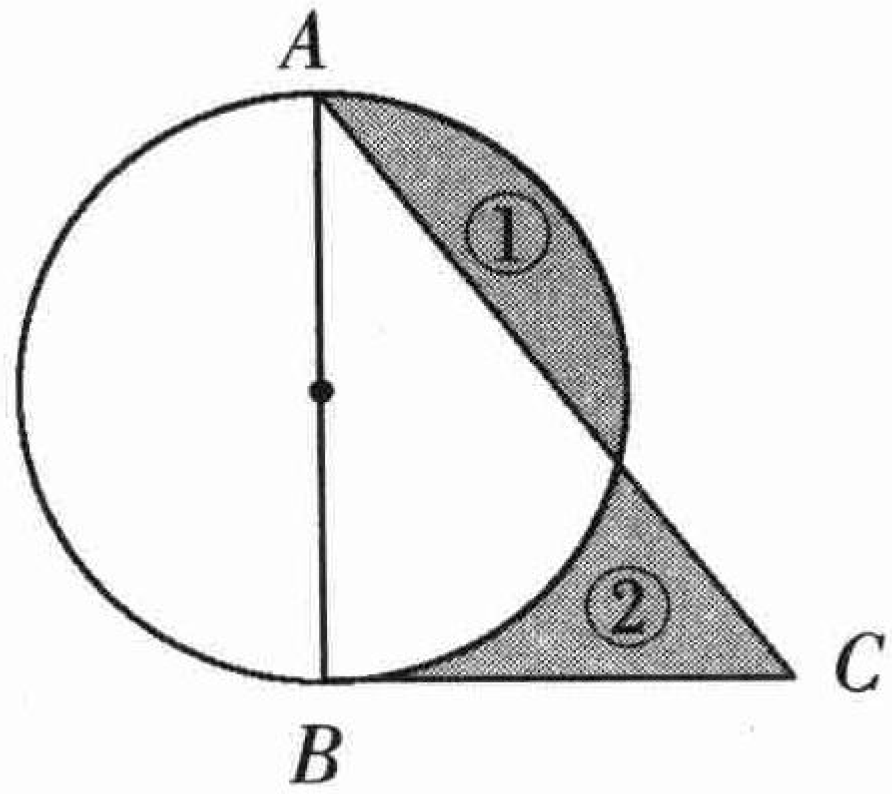
半圆面积：$3.14 \times (\frac{10}{2})^2 \div 2 = 39.25$（平方厘米）

阴影部分面积：

$100 - 78.5 + 39.25 = 60.75$（平方厘米）

**答**：图中阴影部分的面积是60.75平方厘米。

**例题 5** **在三角形 $ABC$ 中，$\angle B=90°$，$AB=10$ 厘米，阴影①的面积比阴影②的面积大 8 平方厘米，求 $BC$ 的长度。**




**思路分析：** 要求 $BC$ 的长度，就要求出三角形 $ABC$ 的面积，因为①号图形比②号图形的面积大 8 平方厘米，就相当于半圆的面积比三角形 $ABC$ 的面积大 8 平方厘米，从而求出三角形 $ABC$ 的面积，再求出 $BC$ 的长度。

**解：** 三角形 $ABC$ 的面积是：

$(\frac{10}{2})^2\times3.14\div2-8=31.25$（平方厘米）

$BC$ 的长度是：

$31.25\times2\div10=6.25$（厘米）

**答：** 图中 $BC$ 的长度是 6.25 厘米。

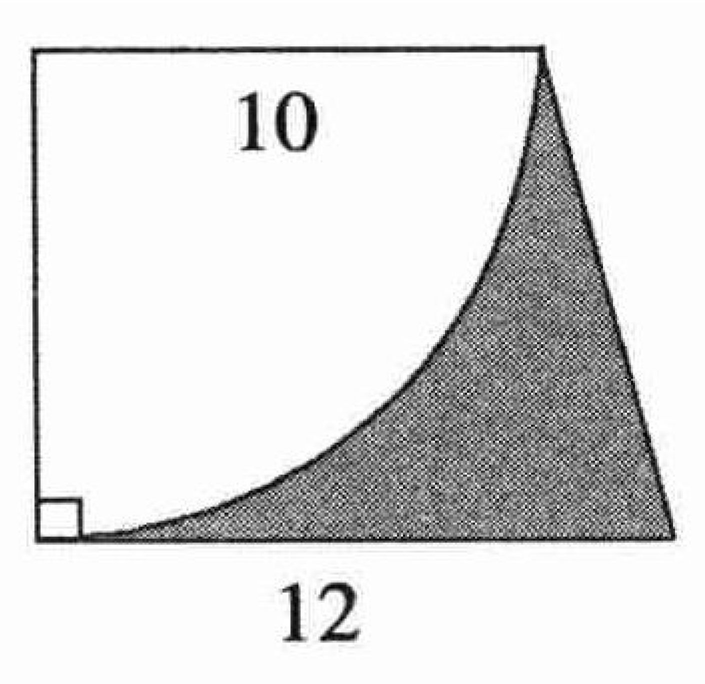
**小结**

在求圆的周长时，一定要认真观察，弄清周长包括哪些线段、弧长，再运用计算周长的公式，正确求得结果。在求圆的面积时，有些图形的面积不能直接进行计算，可以先求出一个比它更大的图形面积，再减去比原图形多的那些图形的面积。也就是说，先多算一点，再把多余的部分减去。

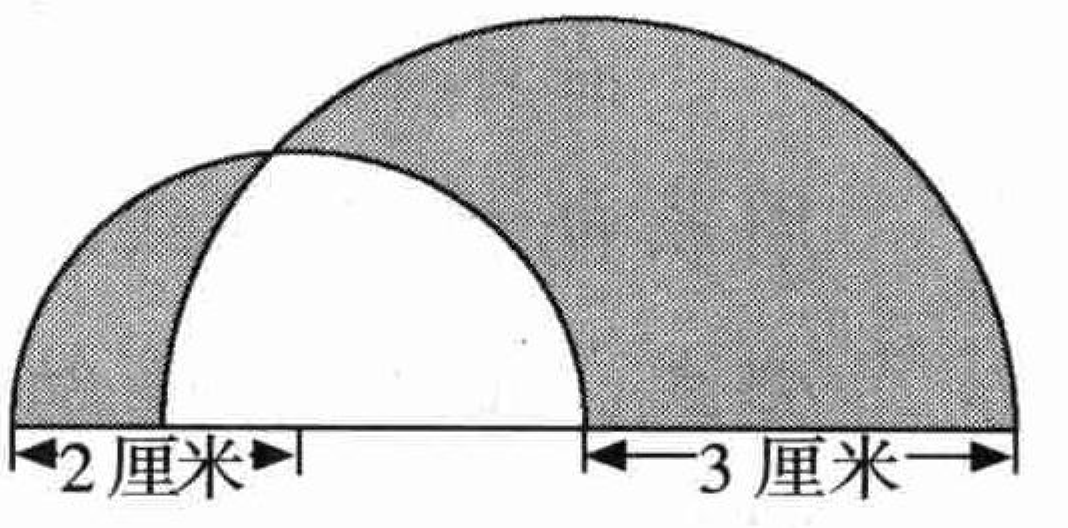
## 金牌训练

### 一 对应训练

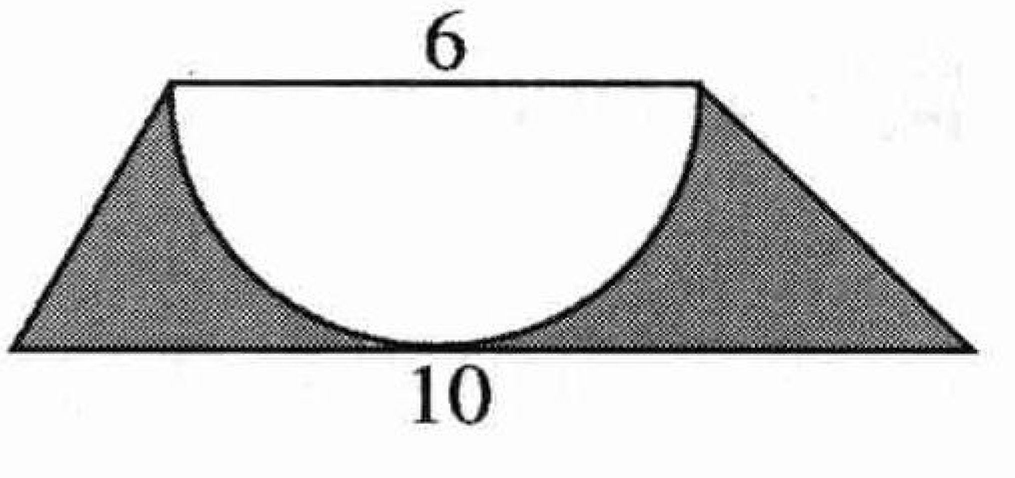
1. 求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）



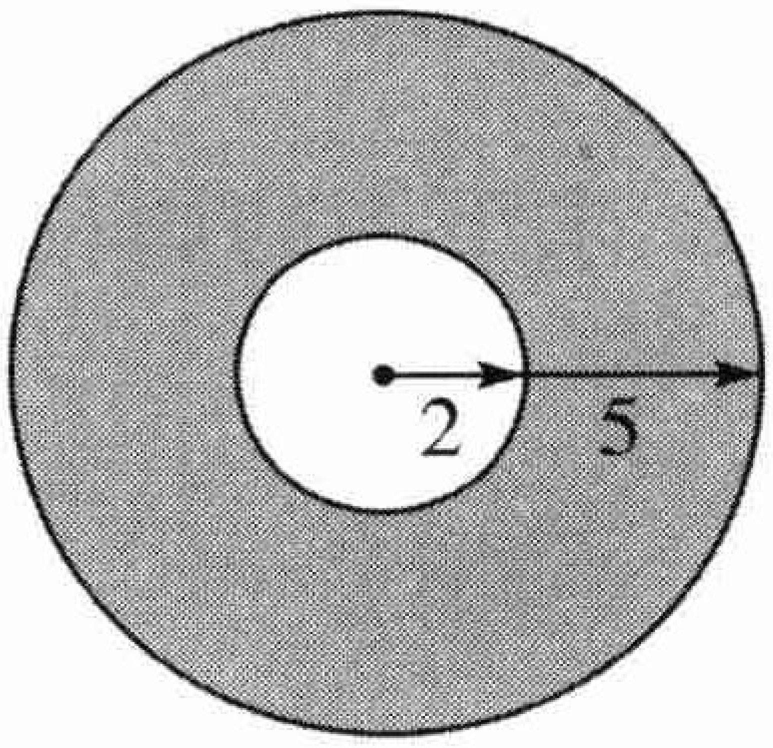
2. 将半径分别为 3 厘米和 2 厘米的两个半圆如图放置，求阴影部分的周长。



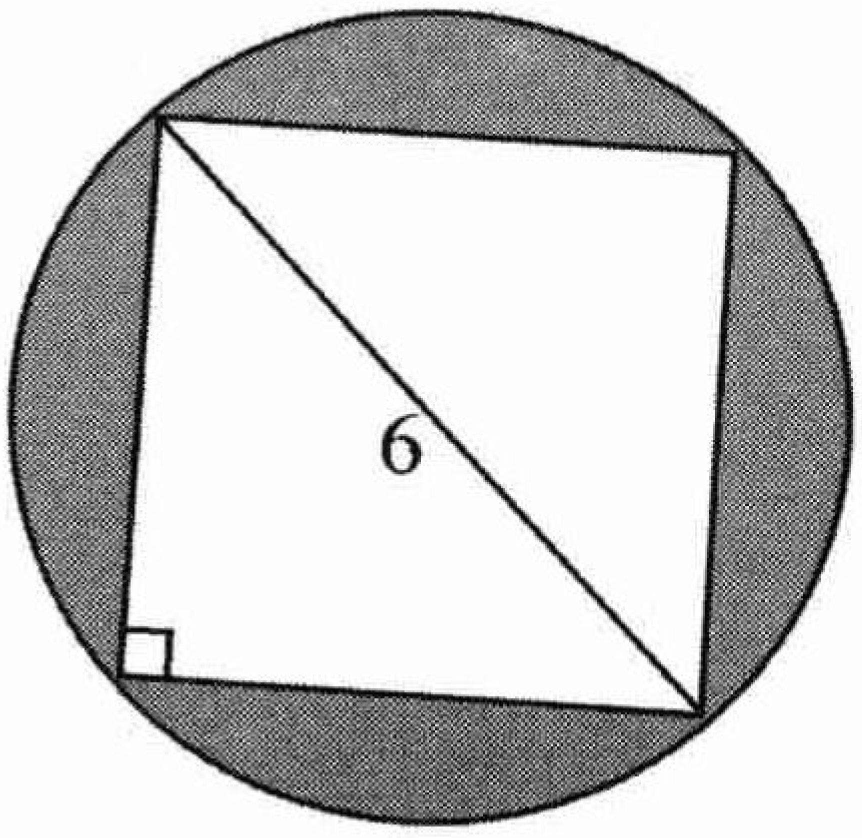

3. 求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）



4. 求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）

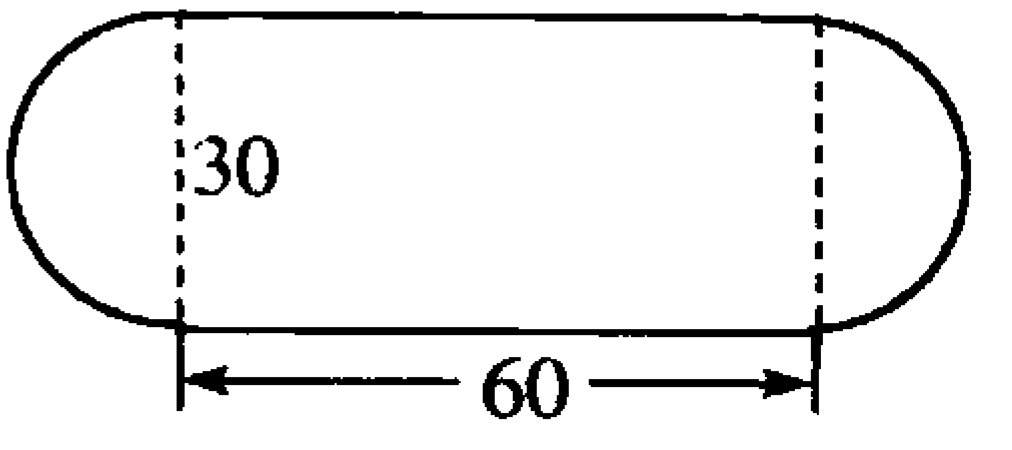



5. 求下图中阴影部分的面积。（单位：分米）

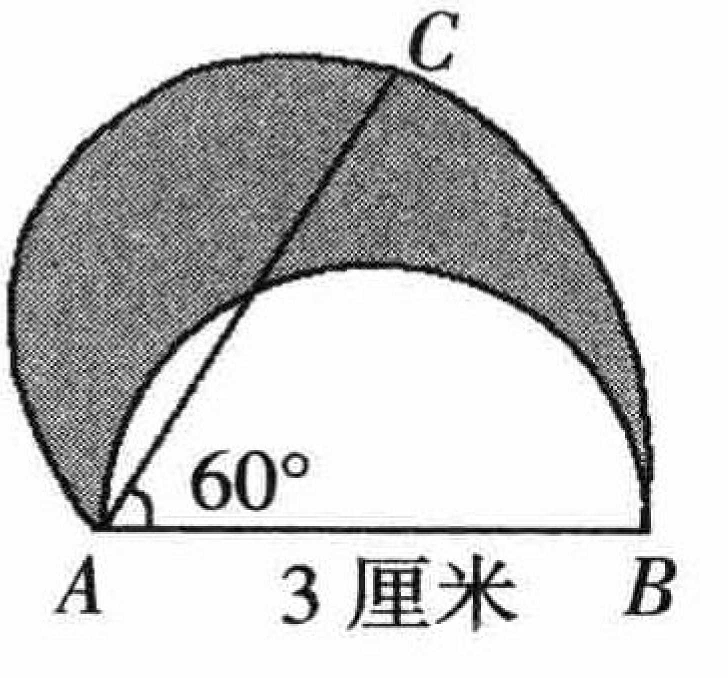


## 变式训练

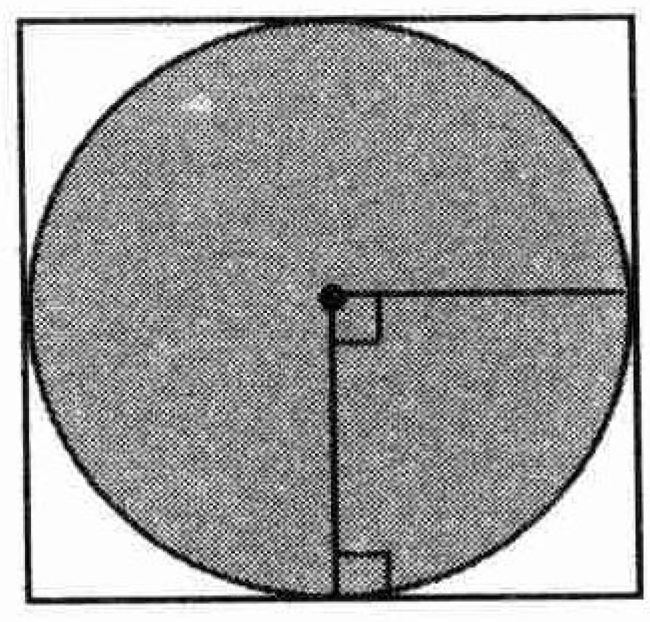
1. 求下图的周长和面积。（单位：厘米）




2. 如下图，直径 $AB$ 为 3 厘米的半圆绕 $A$ 逆时针旋转 $60°$，使 $AB$ 到达 $AC$ 的位置，求图中阴影部分的周长。

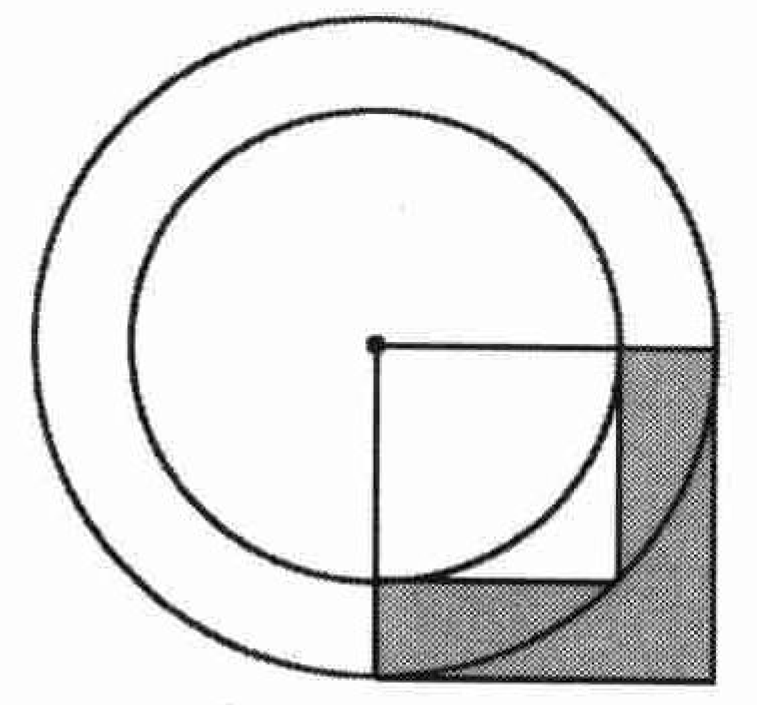


3. 如下图，已知正方形的面积为 12 平方厘米，阴影部分是一个内切圆，求圆的面积。



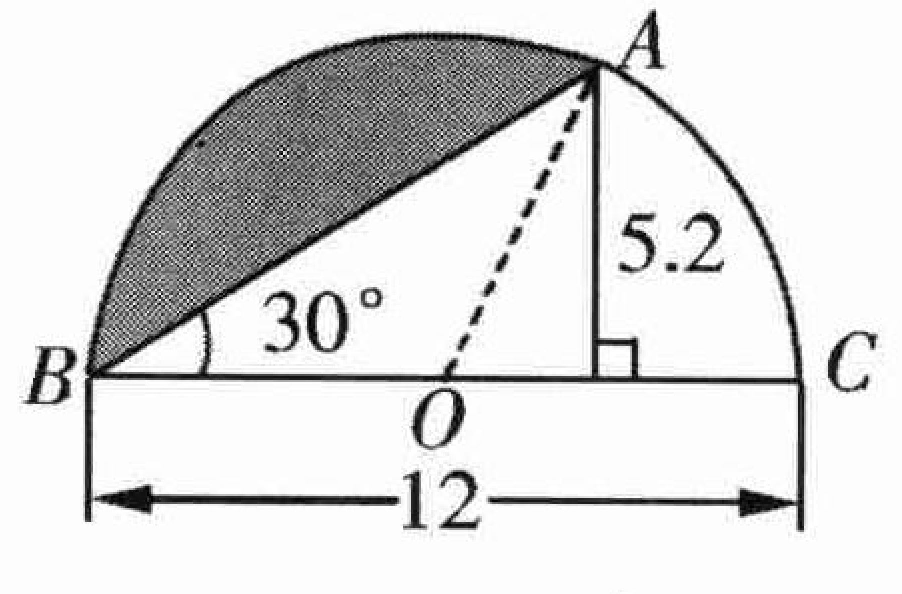
4. 如果一个圆的半径增加$\frac{1}{4}$，那么它的面积就增加 36 平方分米，求原来圆的面积。

5. 下图阴影部分的面积为 20 平方厘米，求圆环的面积。

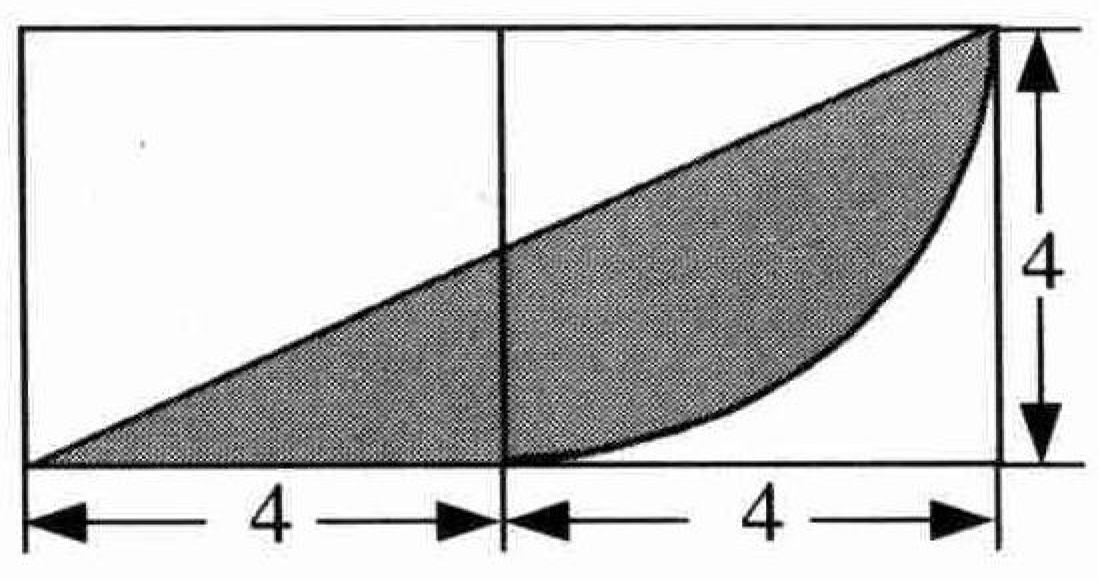


## 三 拔高训练

1. 求下图中阴影部分的面积。(单位：厘米)



2. 求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）



# 第16讲 组合图形

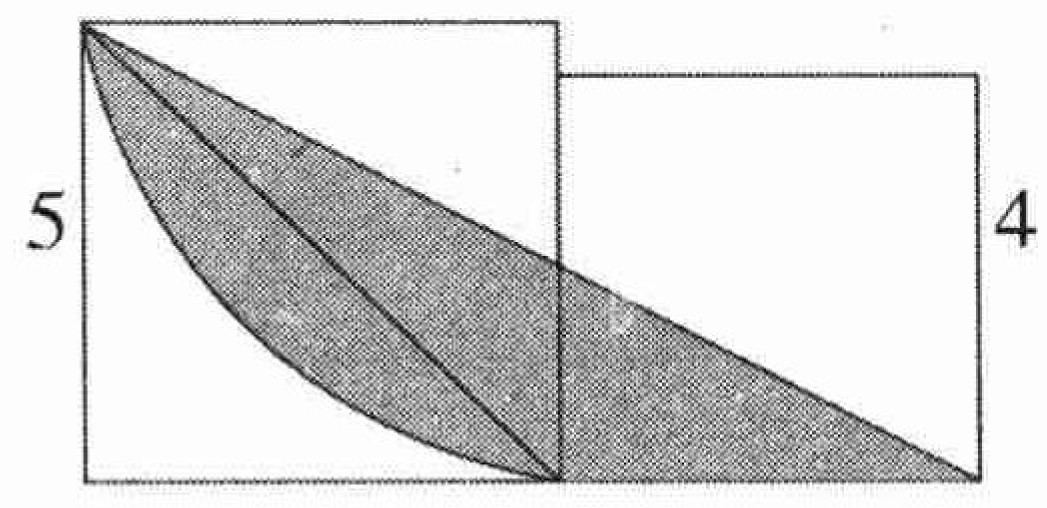
圆及扇形同长方形、正方形、三角形、平行四边形、梯形组合在一起的不规则的平面图形，叫组合图形。

组合图形的周长面积的计算，不仅要熟练地运用圆、扇形的有关知识与公式，还要牢记长方形、正方形、三角形等有关图形的周长、面积公式。同时在解题过程中的主要方法有：首先要认真观察，仔细分析图形，找出组合图形中的基本图形，作出适当的辅助线，铺路搭桥，沟通联系。

对于一些复杂的无法直接求出结果的组合图形，我们常常通过用辅助线、分割、移补、旋转等方法，将它归结为常见图形的组合体，再经过加减就能化难为易、化繁为简。

## 金牌例题

**例题 1** 求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）




**思路分析：** 可将阴影部分分解成一个弓形和一个钝角三角形，弓形的面积可以用半径 5 厘米的 90°扇形面积减去直角边长为 5 厘米的等腰直角三角形的面积。钝角三角形底是 4 厘米，高是 5 厘米，分别求出弓形面积和钝角三角形面积，再相加就可以求出阴影部分的面积。

**解：** 弓形面积：

$$3.14\times5^2\times\frac{90°}{360°}-5\times5\times\frac{1}{2}$$

$=19.625-12.5$

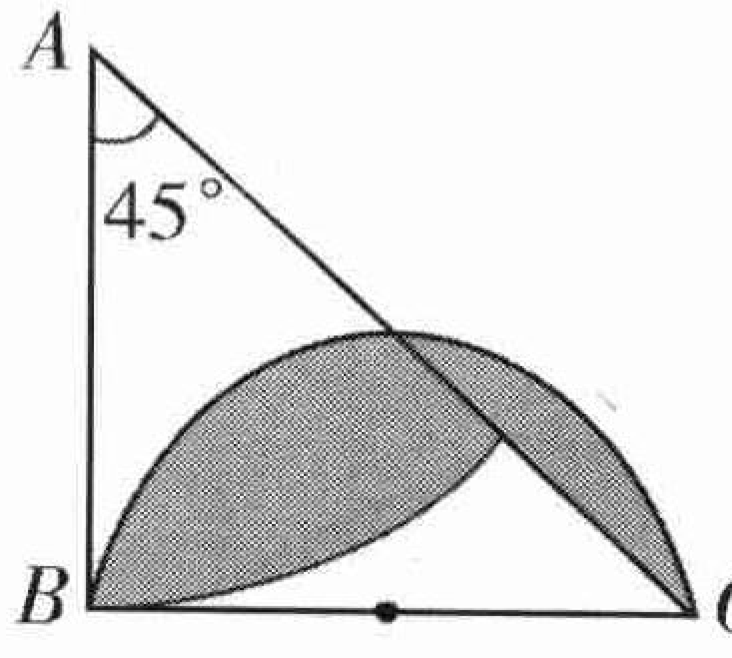
$=7.125$ （平方厘米）

钝角三角形面积：$4\times5\times\frac{1}{2}=10$ （平方厘米）

阴影部分面积：$7.125+10=17.125$ （平方厘米）

**答：** 阴影部分面积是 17.125 平方厘米。

例题 2　**如下图，直角三角形 $ABC$ 的面积是 12 平方厘米，$\angle BAC = 45°$，$AB = BC$，求阴影部分的面积。**




**思路分析：**从图中看到阴影部分都处在半圆之中，用半圆面积减去空白，就求出了阴影面积，半圆的直径是直角三角形的边长，而且两直角边相等，那么根据已知，这个等腰直角三角形的面积是 12 平方厘米，可求出它的直角边长，即半圆的直径$\frac{1}{2}AB \times BC = 12$，又由 $AB = BC =$ 半圆的直径，可求出半圆的面积，再求出直角三角形面积减去扇形面积，等于空白的面积，再用半圆面积减去空白的面积就求出了阴影部分的面积。

**解：**等腰直角三角形面积是 12 平方厘米，$\angle BAC = 45°$，则 $AB = BC$，于是$\frac{1}{2} \times AB \times BC = 12$，$AB^2 = BC^2 = 24$，所以，直角三角形的面积是 12 平方厘米。

扇形的面积：$3.14 \times 24 \times \frac{45°}{360°} = 9.42$（平方厘米）

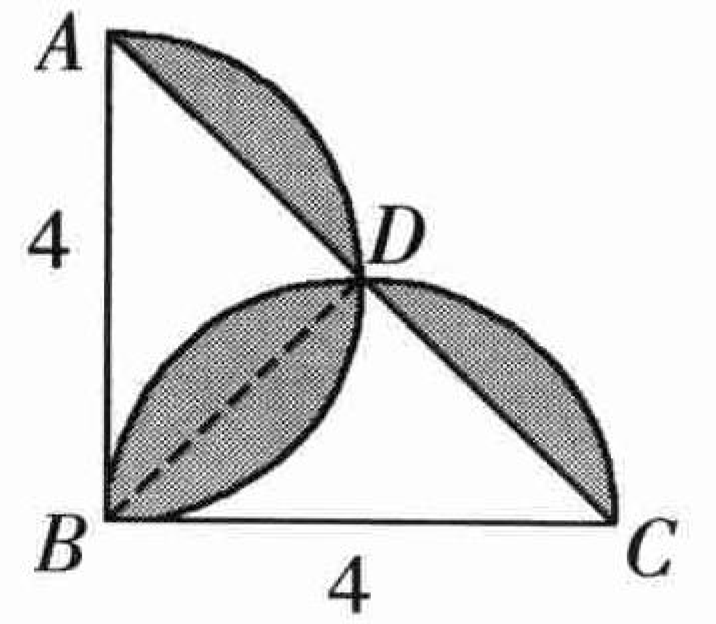
空白的面积：$12 - 9.42 = 2.58$（平方厘米）

半圆的面积：$\frac{1}{2}\times3.14\times6=9.42$（平方厘米）

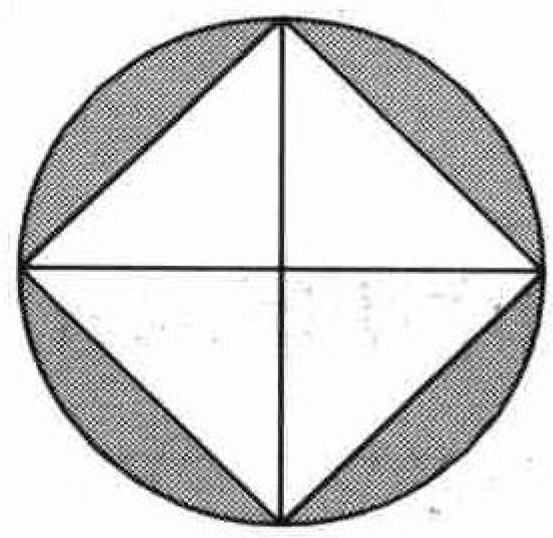
阴影部分的面积：$9.42-2.58=6.84$（平方厘米）

**答：** 阴影部分的面积是6.84平方厘米。

**例题3** **求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）**




**思路分析：** 连结 $BD$ 发现阴影部分由4个完全一样的弓形构成，以 $B$ 为轴旋转其中一个半圆就形成了下面的图形，由此可以看出阴影部分的面积等于一个圆的面积减去一个正方形的面积。



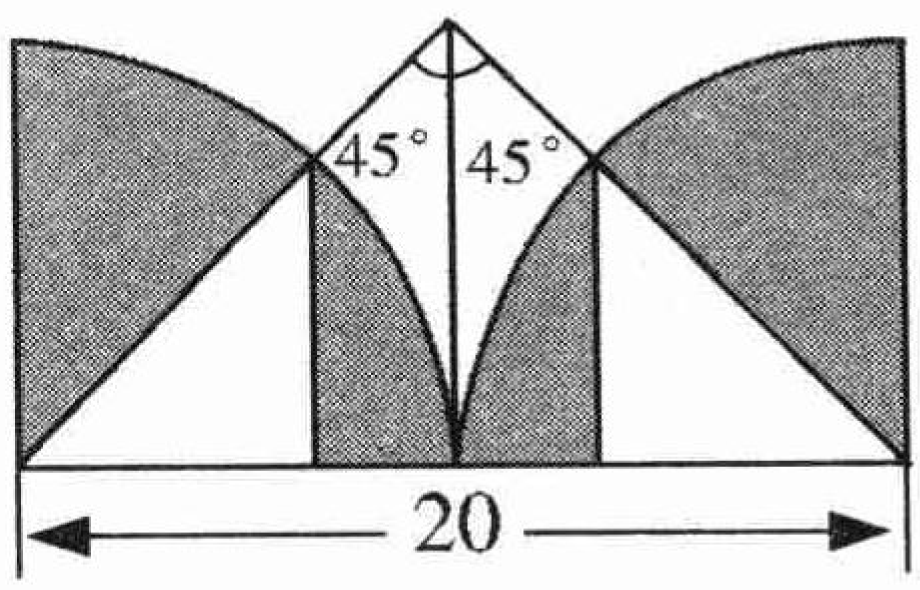
**解：** $3.14\times(4\div2)^2-\frac{1}{2}\times(4\div2)\times(4\div2)\times4$

$=12.56-8$

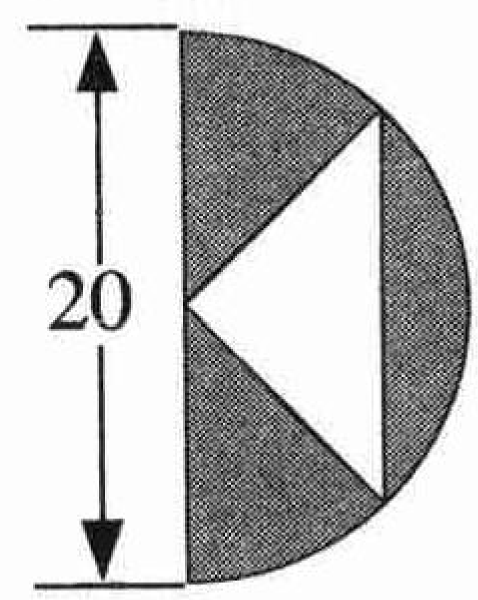
$=4.56$（平方厘米）

**答：** 图中阴影部分的面积是4.56平方厘米。

例题 4　**求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）**




**思路分析：**以等腰三角形底的中点为中心点，把上图的右半部分向下旋转 180°后，阴影部分的面积就变成以半径为 10 厘米的半圆面积与直角边为 10 厘米的等腰直角三角形面积的差。



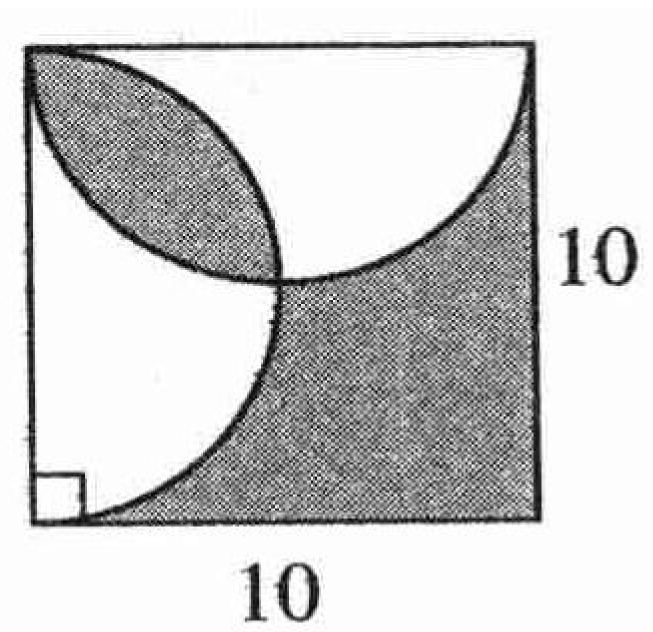

**解：**　$(20 \div 2)^2 \times 3.14 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (20 \div 2)^2$

$= 157 - 50$

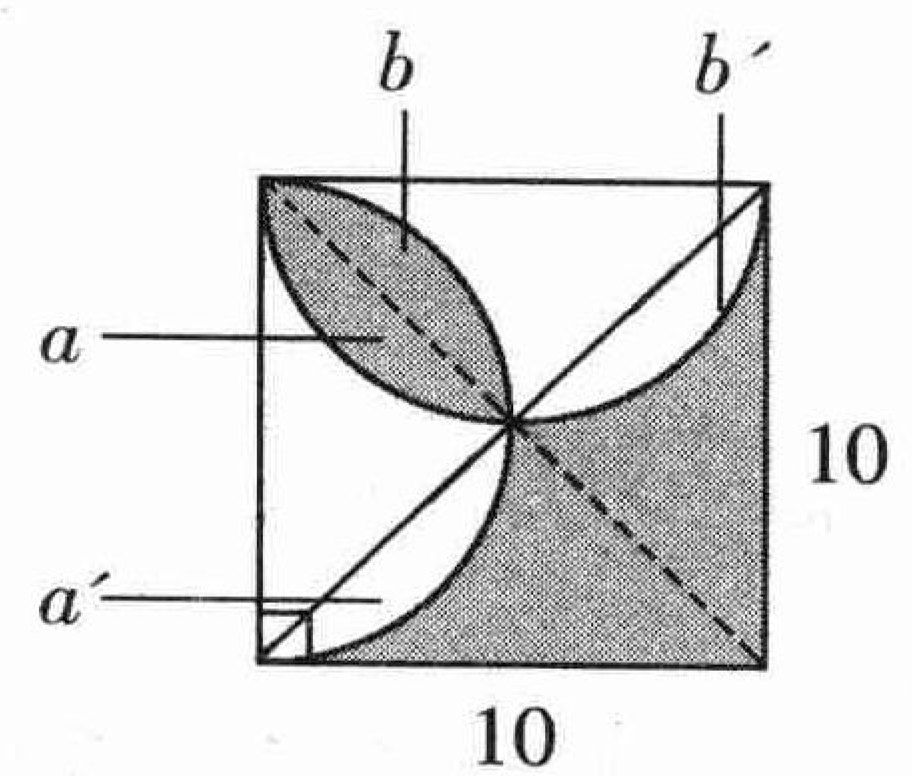
$= 107$（平方厘米）

**答：**图中阴影部分的面积是 107 平方厘米。

例题 5　**求出下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）**




**思路分析：**认真观察图形，求阴影部分的面积，可能会想到用正方形的面积减去空白部分的面积，解题时




我们就会发现求空白部分的面积比较麻烦。我们利用正方形对称性，连接正方形的对角线把其中一块阴影部分分割成 $a$，$b$ 两个部分，如上图，而 $a$ 可以逆时针旋转 90°，移到 $a'$ 处，$b$ 顺时针旋转 90°，移到 $b'$ 处，这样通过分割、旋转的方法，可以把原图形中的阴影部分，拼成一个三角形，再求这个三角形的面积就简单多了。

**解**：$\frac{1}{2}\times 10\times 10=50$（平方厘米）

**答**：图中阴影部分的面积是 50 平方厘米。

**小结**

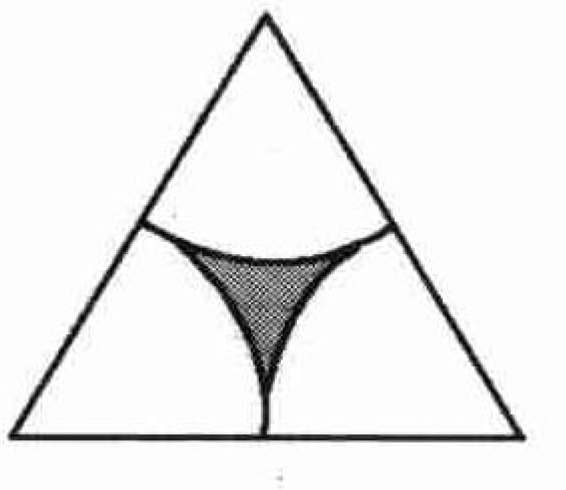
对于组合图形求阴影部分面积常用的方法是"排空法"，减去空白面积，以求出阴影部分的面积，除此之外还经常用到"二次求差法"，就是指利用"排空法"求图中阴影部分面积，而空白部分的面积也要通过两个图形面积相减求得。

有些不规则的比较复杂的组合图形（或阴影部分）的面积计算，无法直接或较难直接求得，但是通过将这些图形分割，或将这些图形平移、旋转后，重新组成一个面积大小不变的新图形，这时面积就很容易求得。

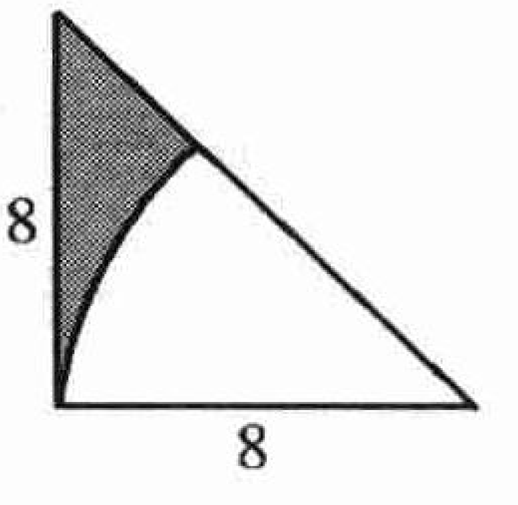
## 金牌训练

### 一 对应训练

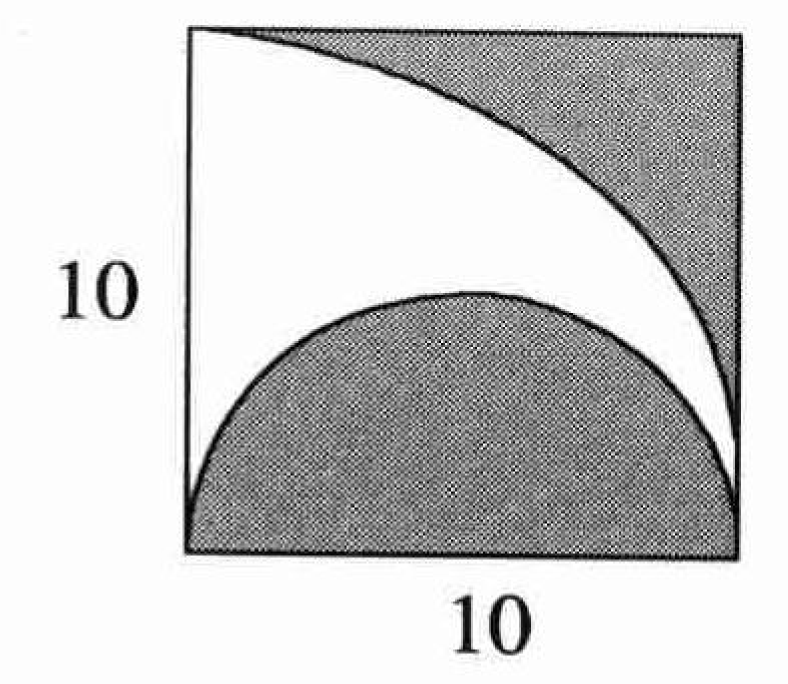
1. 下图中等边三角形的空白部分，是三个形状相同且半径为边长的$\frac{1}{2}$的扇形，三角形边长为 10 厘米，求这三个扇形的总面积及阴影部分的周长。



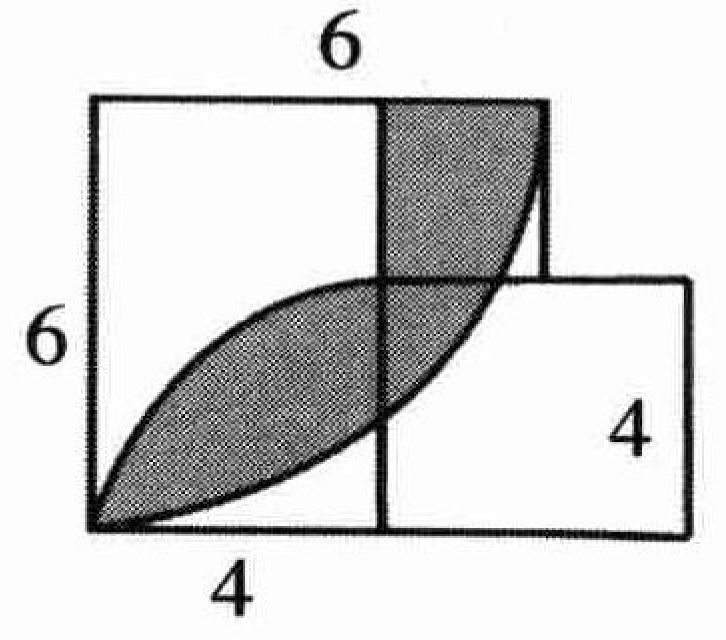
2. 下图为直角边长为 8 厘米的等腰直角三角形。求阴影部分的面积。



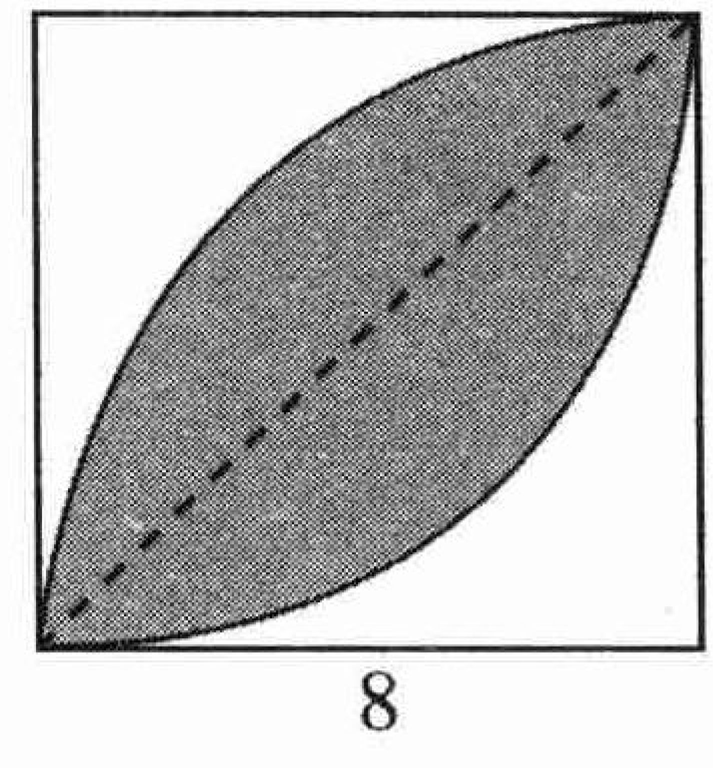
3. 求下图中阴影部分的面积。(单位：厘米)




4. 求下图中阴影部分的面积。(单位：厘米)

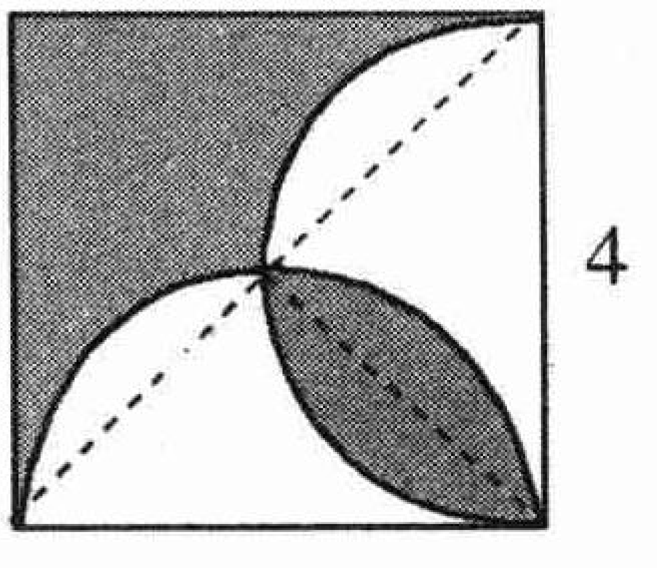


5. 求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）

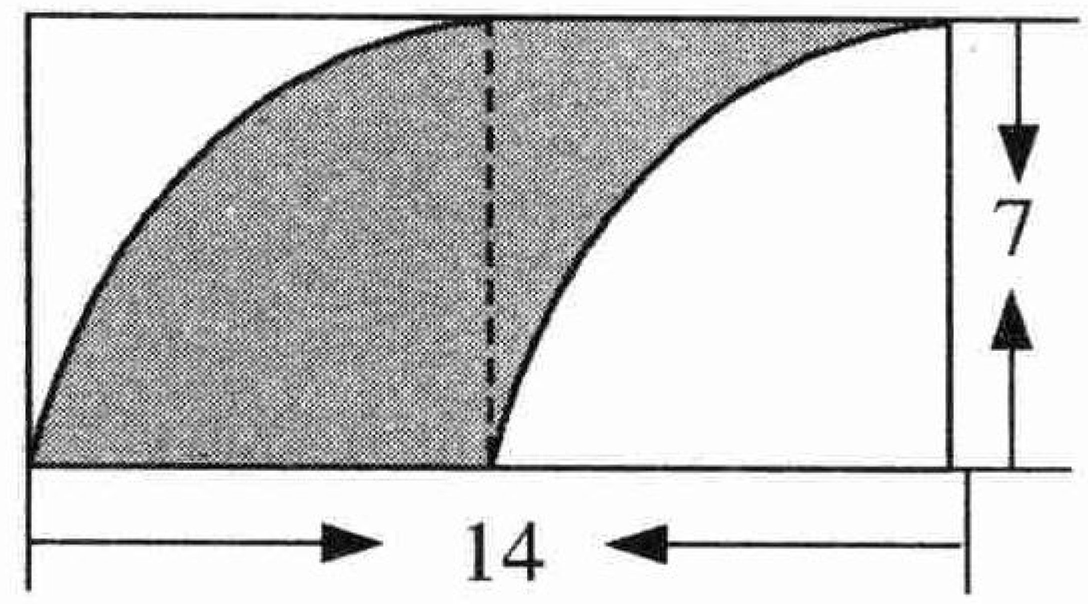


## 变式训练

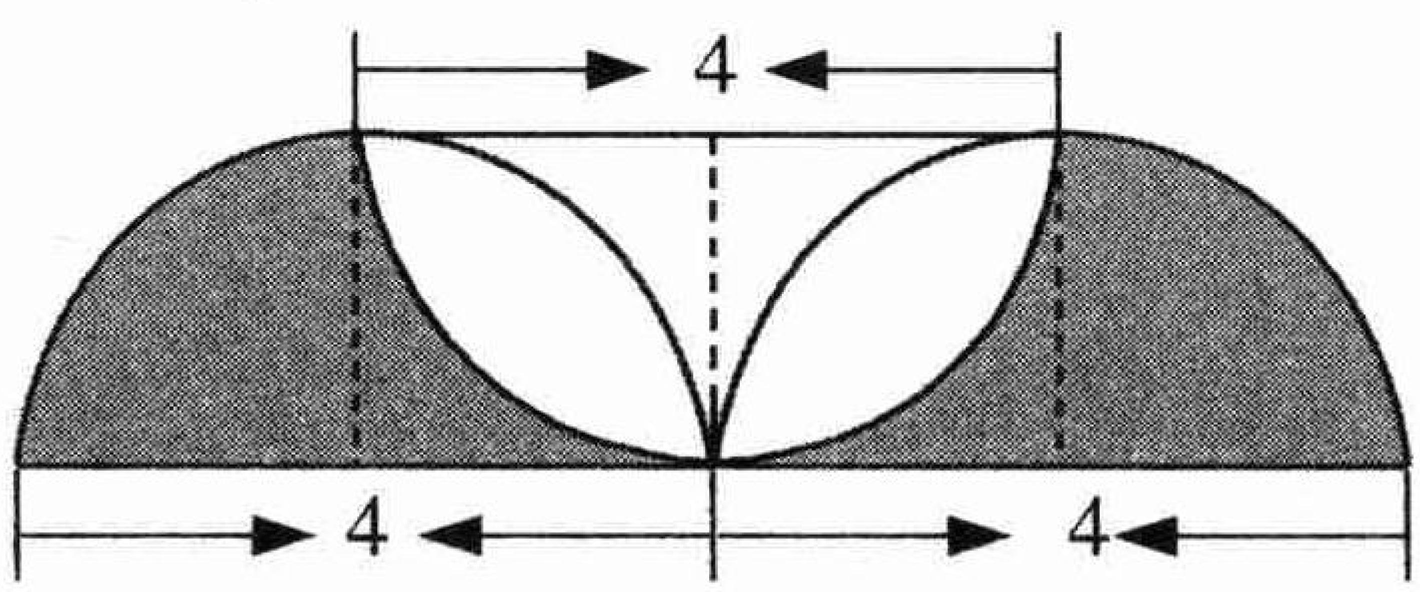
1. 求下图正方形中阴影部分的面积。（单位：厘米）



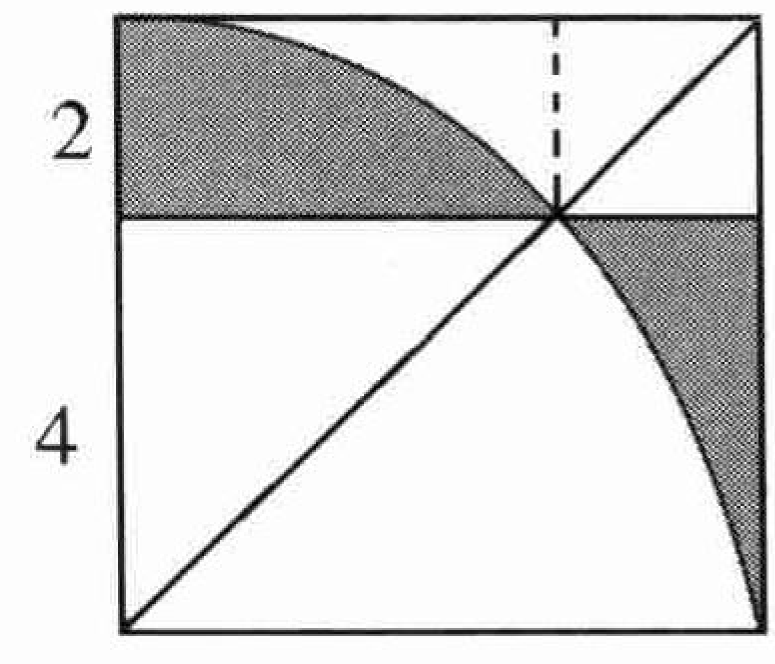
2. 计算下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）



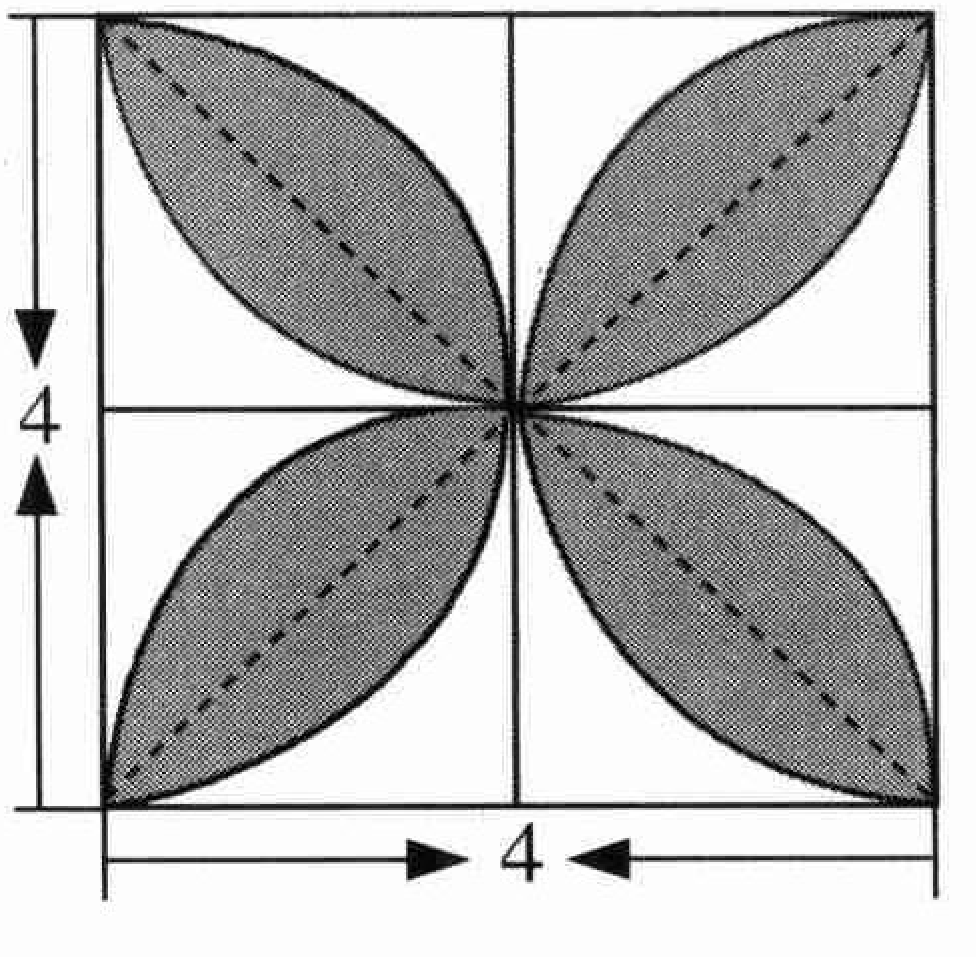

3. 求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）



4. 求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）

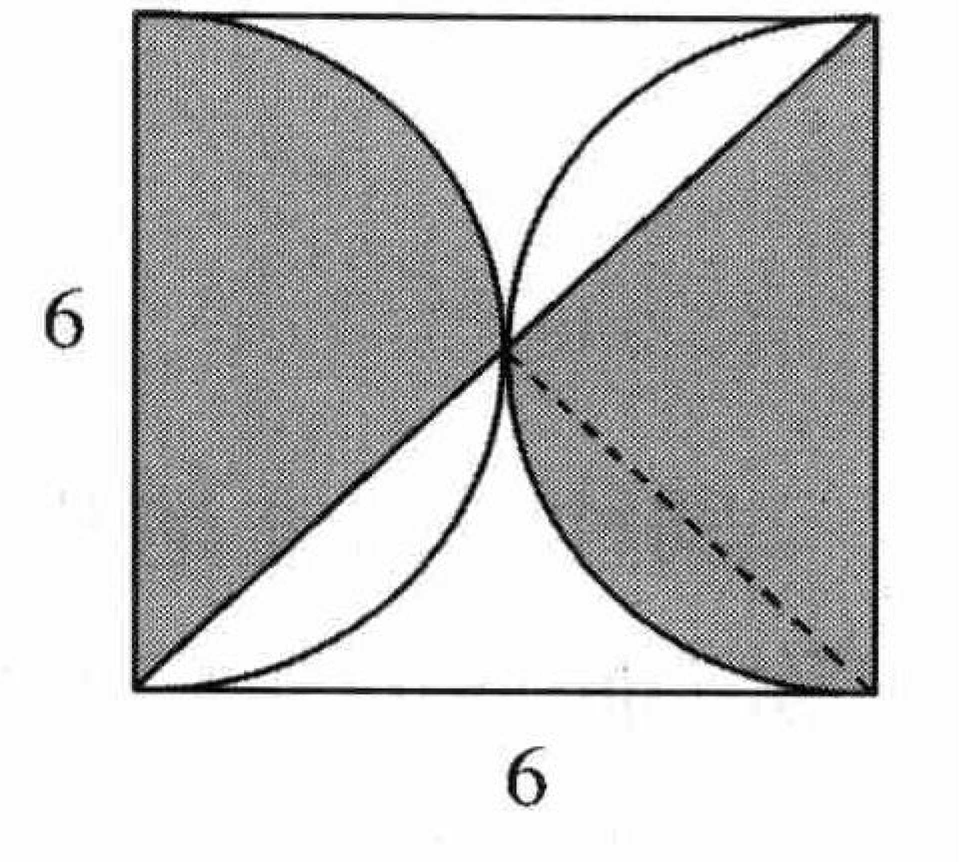



5. 求下图中阴影部分的面积。（单位：厘米）

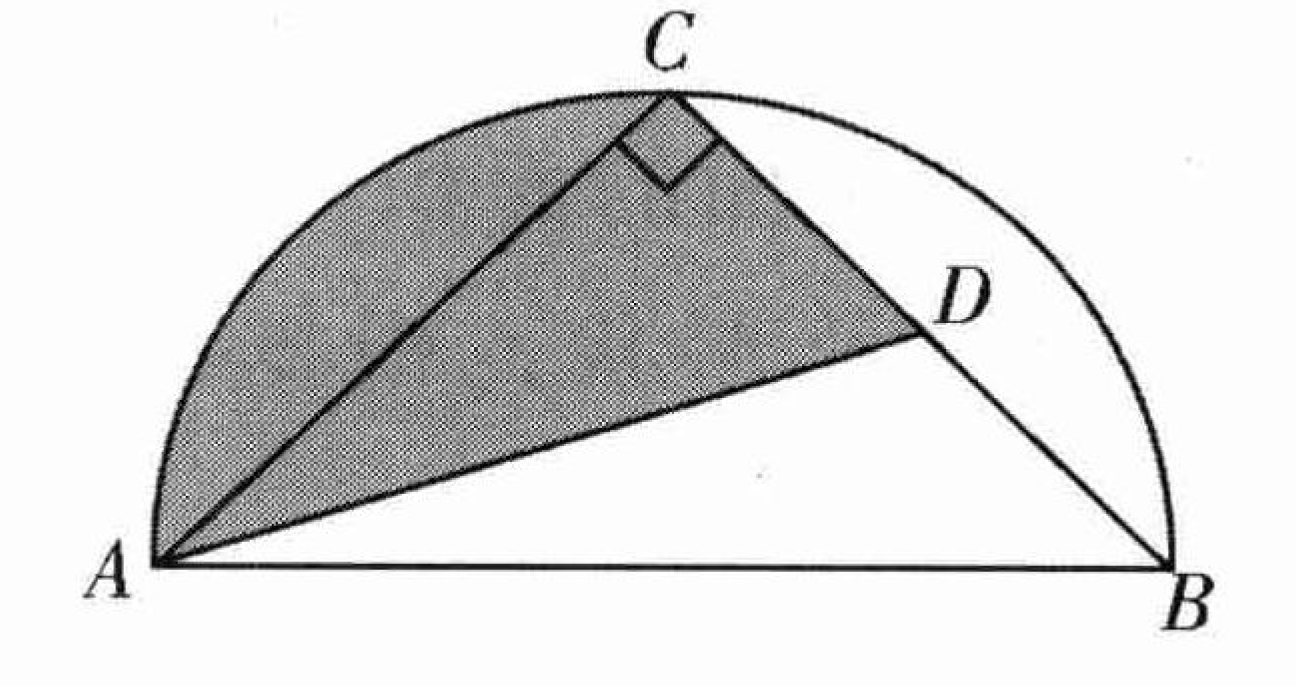


## 三 拔高训练

1. 求下图中阴影部分的面积。(单位：分米)




2. 如下图三角形 $ABC$ 为等腰直角三角形，$CD=DB$，$AB=4$ 厘米，求阴影部分的面积。



# 第17讲 圆柱与圆锥

圆柱与圆锥是基本的立体图形。圆柱的上下两个面积称为底面，两底面之间的距离叫做圆柱的高，圆锥只有一个底面，从圆锥的顶点到底面圆心的距离为圆锥的高。

圆柱的侧面积等于底面周长与高的乘积，圆柱的表面积是其侧面积与两底面面积之和。圆柱的体积为底面积乘以高。圆锥的体积等于底面积与高乘积的$\frac{1}{3}$。

计算表面积时，要注意根据实际情况，弄清究竟求哪几个面的面积，要注意仔细辨别增加和减少的面的情况及形状，根据有关数据，正确运用公式列式计算。

求圆柱、圆锥体积和容积的有关问题，要认清物体的结构特征及相关数量关系，才能迅速、准确地解决问题。

## 金牌例题

**例题 1** **一只高9分米的无盖圆柱形铁桶，底面周长1.57米，做这只桶需要多少铁皮？**

**思路分析：** 这是一只无盖的圆柱形铁桶，因此，求做这只桶需要多少铁皮只要求这只铁桶的侧面积和底面积，题目中已告诉我们圆柱的底面周长和高，直接用底面周长乘高就可以求出侧面积。再求底面积，题目中没有直接告诉我们底面半径，已知的是底面周长，先要根据底面周长，求出底面半径，再求底面积，最后用侧面积加上一个底面积就是做这只桶需要的铁皮数。

**解：** 底面周长：1.57米 = 15.7分米

侧面积：$15.7\times9=141.3$（平方分米）

底面半径：$15.7\div3.14\div2=2.5$（分米）

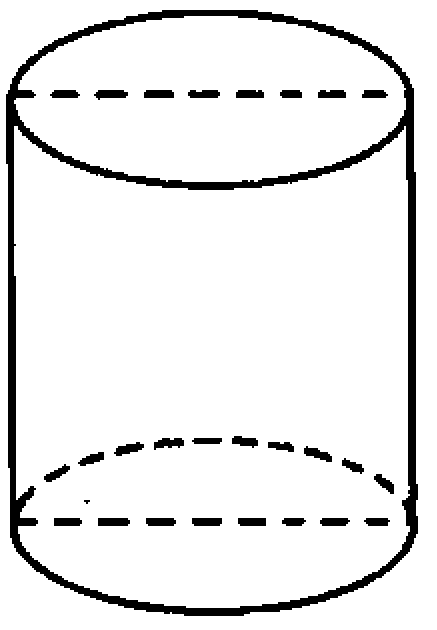
底面积：$3.14\times2.5^2=19.625$（平方分米）

需要铁皮：$141.3+19.625=160.925$（平方分米）

**答：** 做这样一只水桶需要铁皮160.925平方分米。

**例题 2** **把一段长30分米的圆柱形木头沿底面直径剖成相同的两块，表面积增加了360平方分米，原来这段圆柱形木头的表面积是多少平方分米？**

**思路分析：** 如下图沿底面直径剖成相同的两块，按此种分法截面是相等的两个长方形，且长方形的长与宽分别是圆柱的直径与高，因此，一个长方形的面积是 $360 \div 2 = 180$（平方分米）。



**解：** 底面直径：$180 \div 30 = 6$（分米）

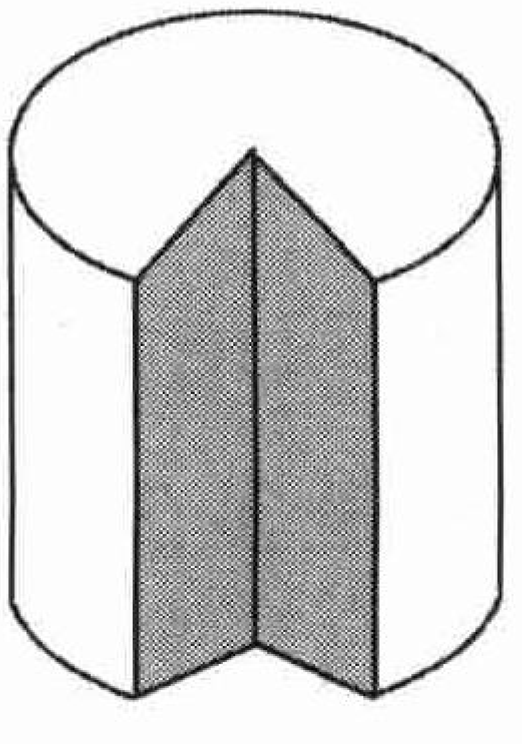
侧面积：$3.14 \times 6 \times 30 = 565.2$（平方分米）

底面积：$3.14 \times (\frac{6}{2})^2 = 28.26$（平方分米）

表面积：$565.2 + 28.26 \times 2 = 621.72$（平方分米）

**答：** 原来这段木头的表面积是 621.72 平方分米。

**例题 3** **下图是个柱体，高 30 厘米，底面是一个半径为 10 厘米的圆心角为 270°的扇形。求这个柱体的表面积和体积。**



**思路分析：** 根据已知底面扇形的圆心角为270°，所以该柱体的体积、底面积和侧面积（不包括阴影部分）恰好都是所在圆柱体的体积、底面积和侧面积的$\frac{270°}{360°}=\frac{3}{4}$。柱体的表面积还要加上两个长方形阴影面积。

**解：** 表面积：（底面积×2＋侧面积）$\times\frac{3}{4}$＋阴影面积

$(3.14\times10^2\times2+3.14\times10\times2\times30)\times\frac{3}{4}+30\times10\times2$

$=1884+600$

$=2484$（平方厘米）

体积：$3.14\times10^2\times30\times\frac{3}{4}=7065$（立方厘米）

**答：** 这个柱体的表面积是2484平方厘米。体积是7065立方厘米。

**例题4** **一个圆柱和一个圆锥的体积和高都相等，已知圆柱的底面周长是12.56米，求圆锥的底面积是多少？**

**思路分析：** 根据已知圆柱和圆锥的体积和高都相等，那么，我们设圆柱和圆堆的体积都是$V$，高都是$h$，则圆柱的底面积$S_{柱}$乘以高$h$就等于$\frac{1}{3}$的圆锥的底面积

乘以高 $h$，所以就得出 $S_{柱}=\frac{1}{3}S_{锥}$。圆锥的底面积就是圆柱底面积的 3 倍，根据已知圆柱底面周长，求出圆柱的底面积，再乘以 3 就是圆锥的底面积。

**解：** $3.14\times(\frac{12.56}{3.14\times2})^2\times3$

$=3.14\times4\times3$

$=37.68$（平方米）

**答：** 圆锥的底面积是 37.68 平方米。

**例题 5** **一个底面半径是 3 厘米，高是 8 厘米的圆柱形木块，现在要削制成一个最大的圆锥体，削去部分的体积是多少立方厘米？**

**思路分析：** 根据已知，要在一个底面半径为 3 厘米，高为 8 厘米的圆柱体中，削制成一个最大的圆锥体，只需满足与圆柱体木块等底等高即可，因此，最大圆锥体的体积，就是这个圆柱木块体积的 $\frac{1}{3}$，那么削去部分的体积，就是这个圆柱木块体积的 $\frac{2}{3}$。

**解：** $\frac{2}{3}\times3.14\times3^2\times8=150.72$（立方厘米）

**答：** 削去部分的体积是 150.72 立方厘米。

**小结**

分析解答有关圆柱、圆锥计算问题，需要具备一定的空间想象能力，使图形能在脑中“立”起来，还要牢记各类立体图形的特征、计算公式以及它们之间的关系。并能将公式变形，善于寻找隐藏在图形中的数量关系，不断提高空间想象能力和解决实际问题的能力。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 填空：

(1) 圆柱形油桶底面直径6分米，高12分米，内装油的体积占桶容积的$\frac{3}{4}$，桶内有油（　　）升。

(2) 圆锥底面周长为18.84分米，高为5分米，它的底面积是(　　)平方分米，体积是（　　）立方分米。

(3) 一个圆柱和一个圆锥等底等高，如果圆锥的体积是18立方米，圆柱的体积是（　　）立方米，如果圆柱的体积是18立方米，圆锥的体积是(　　)立方米。

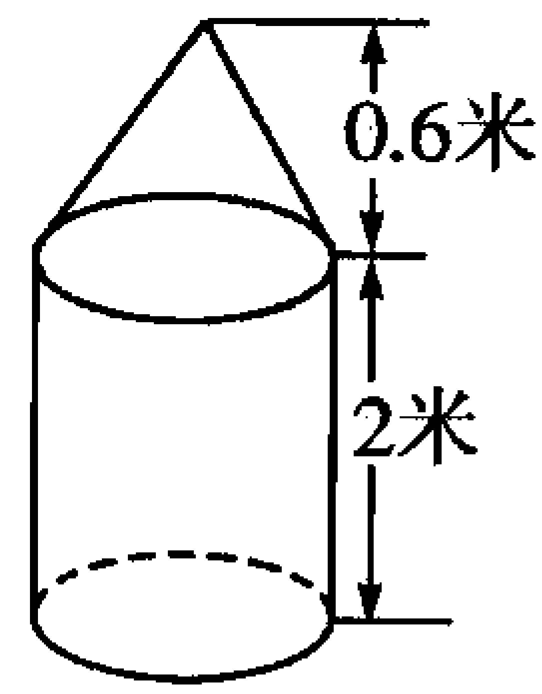
（4）一个圆柱的底面半径扩大2倍，高扩大2倍，它的体积扩大了(　　)倍。

（5）一个直角三角形的两条直角边分别长6厘米，8厘米，以（　　）厘米的边为轴转旋得到的圆锥体积最大。

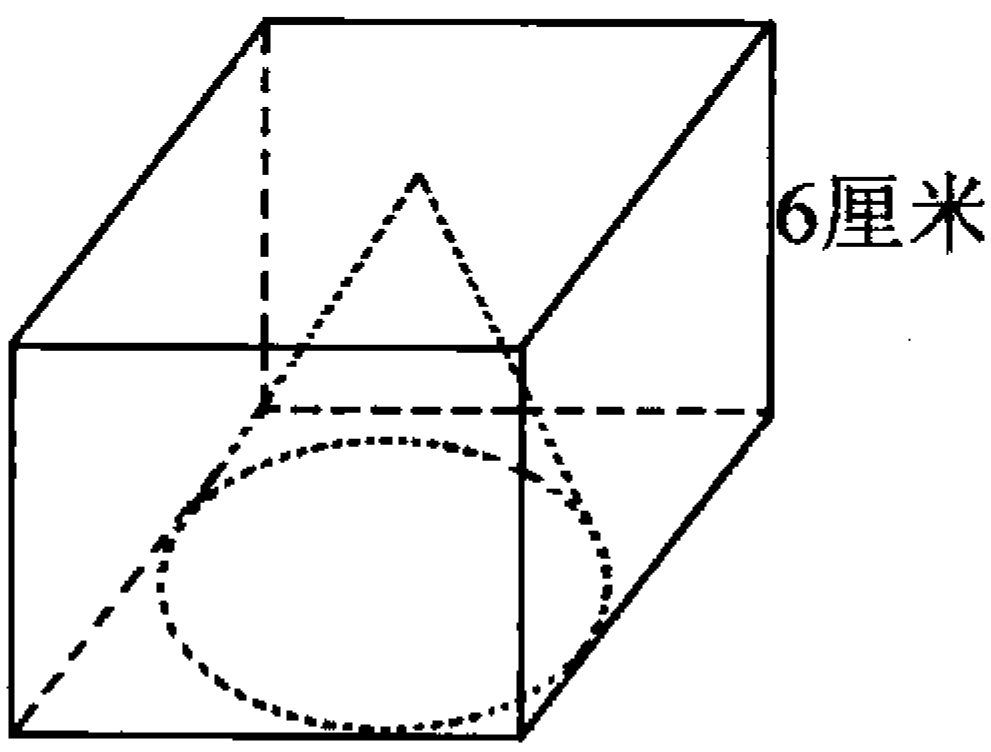
2. 一个无盖圆柱形铁皮水桶，底面半径2分米，高8分米，在桶的里外两面都漆上防锈漆，每平方分米用油漆2克，一共要用防锈漆多少克?

3. 把一根2米长的圆柱体木料截成3段，已知木料的横截面直径为10厘米，那么表面积比原来增加多少平方厘米?

4. 一个谷囤上面是圆锥体，下面是圆柱体（如下图），圆柱底面周长是9.42米，高2米，圆锥高是0.6米，求这个谷囤的体积是多少立方米。




5. 如下图所示，一个棱长为6厘米的正方体从正方体的底面向内挖去一个最大的圆锥体，求剩下的体积是原正方体体积的百分之几。



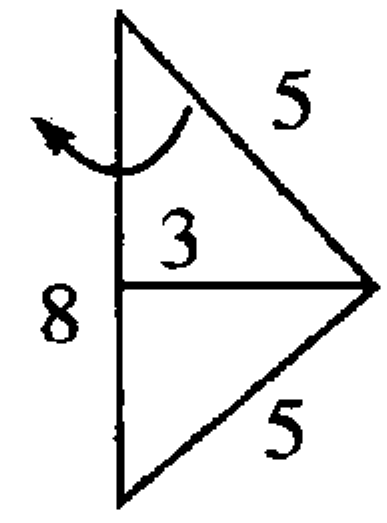
## 变式训练

1. 把一根长 1.2 米的圆柱形钢材截成 3 段，表面积增加 6.28 平方分米，原来这根钢材的体积是多少？

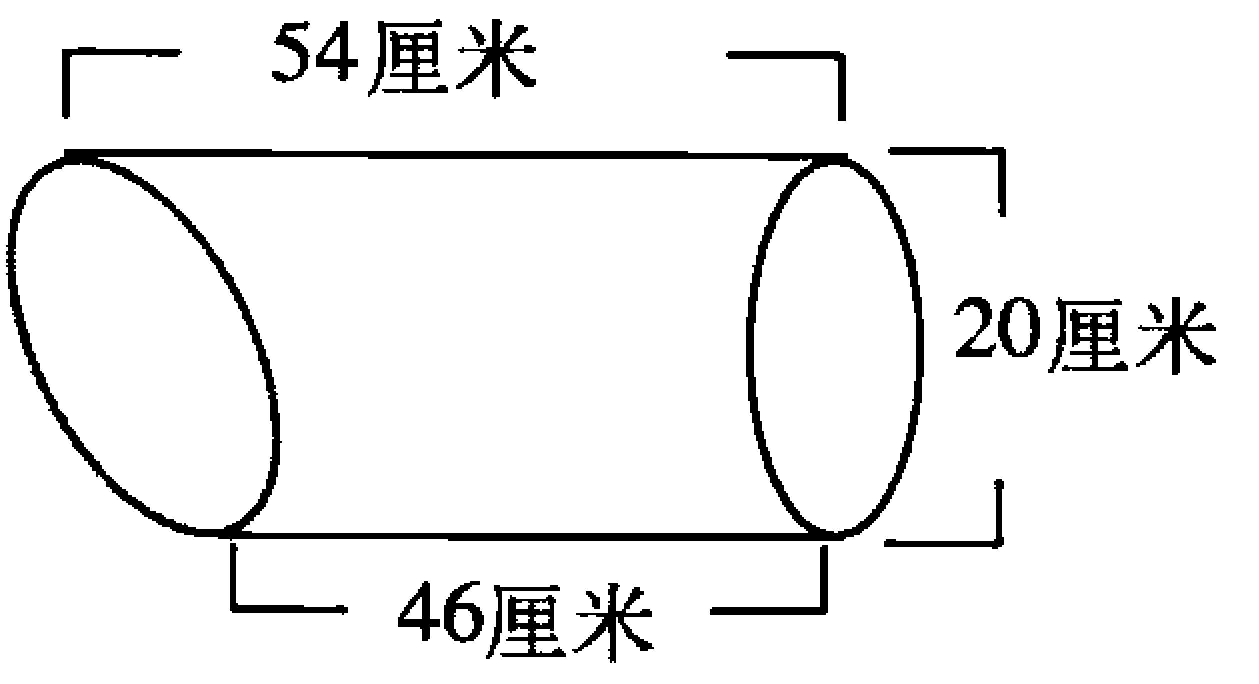
2. 把一个底面半径是 10 厘米的圆锥形木块，从顶点延着高竖直把它切成两个大小一样的木块，这时表面积增加 120 平方厘米，这个圆锥形木块的体积是多少立方厘米？

3. 一个圆锥形麦堆，底面周长为25.12米，高3米，把这些小麦装入一个底面直径是4米的圆柱形粮囤正好装满，这个圆柱形粮囤的高是多少？

4. 如下图，是一个等腰三角形。绕它的底边旋转一圈，得到一个旋转体，求这个旋转体的体积和表面积。（单位：厘米）

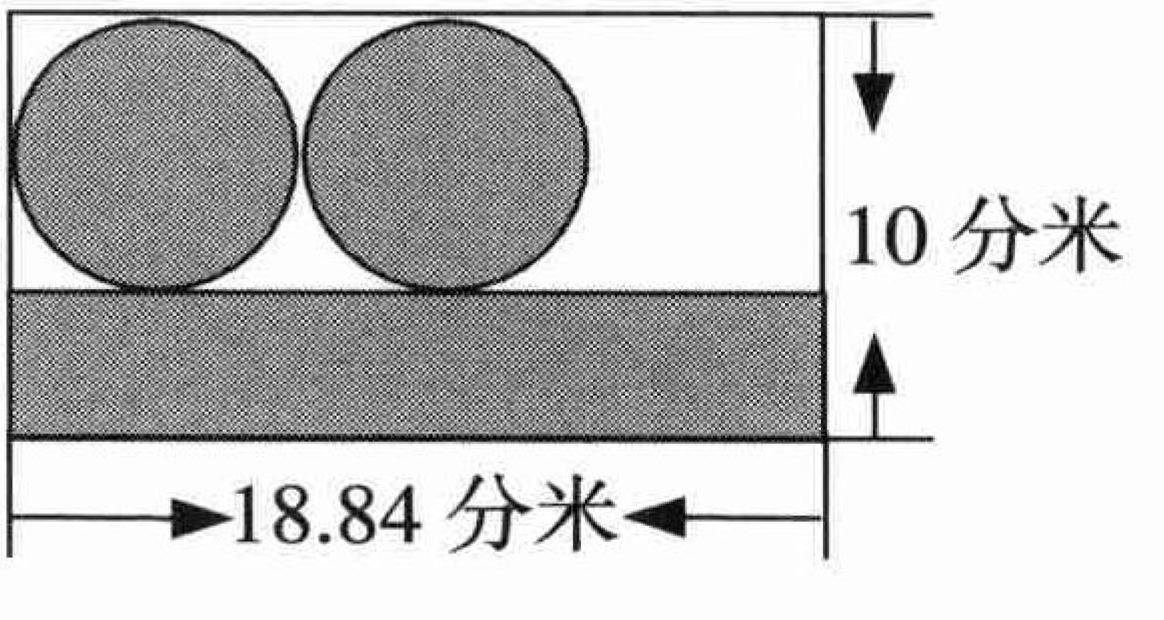


5. 用铁皮做一个如下图所示的工件（无盖），需用铁皮多少平方厘米？这个工件的体积是多少立方厘米？

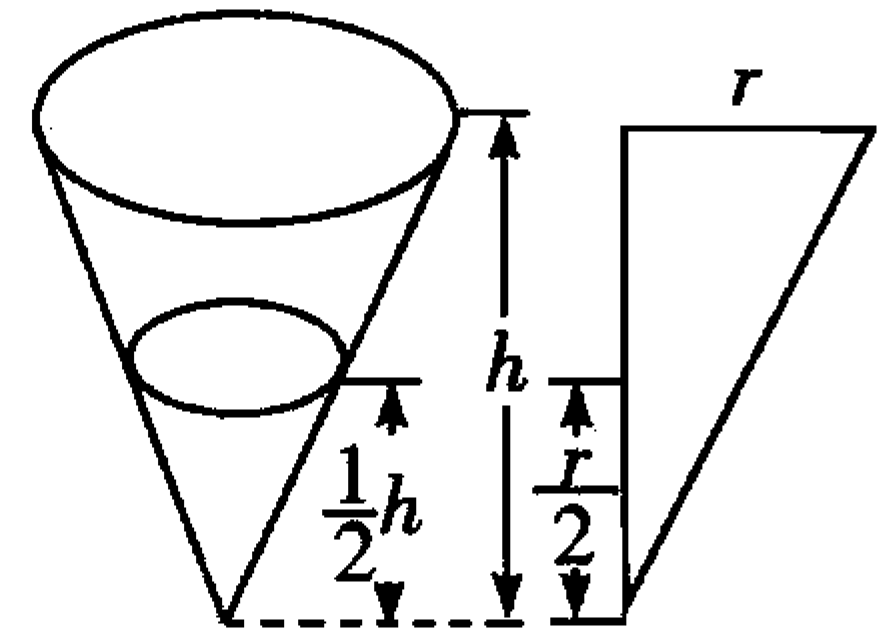



## 三 拔高训练

1. 有一张长方形的铁皮，如下图，剪下阴影部分制成圆柱体，求这个圆柱体的表面积。



2. 一个圆锥形容器中装有 3 升水，水面高度正好是圆锥高度的一半，这个容器还能装多少水？（如下图）



# 第 18 讲　包含与排除

包含与排除问题又称重叠问题。在计数时，为了使重叠部分不至被重复计算，人们研究出了一种新的计数方法。这种方法的基本思路是：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有的对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算了的数目排斥出去，使得计算的结果，无重复又无遗漏。

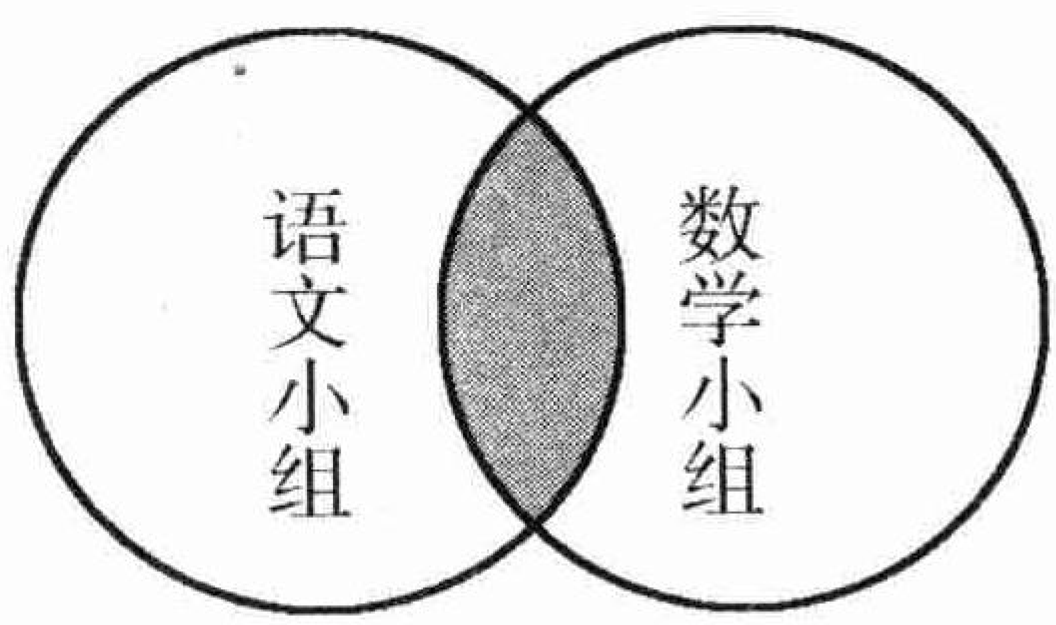
像这样的数学原理，我们称为“包含与排除”原理，也叫做容斥原理。这一数学原理是非常重要的，应用这一原理，可以解决许多有趣的数学问题。

## 金牌例题

例题 1　**一个班有学生 45 人，参加语文小组的有 25 人，参加数学小组的有 35 人，并且每人都至少参加一个小组，这个班两个小组都参加的有多少人？**

**思路分析：**如下页图，左边的圆圈表示参加语文小组的人数，右边的圆圈表示参加数学小组的人数，两个

圆圈重叠的阴影部分，表示两个小组都参加的人数，如果我们把25 + 35 合起来，总数是60 人，这样总人数就比全班的45 人多出了15 人。为什么会这样呢？这是因为两个小组都参加的人数，被计算了两次，所以，60 - 45 = 15（人）就是两个小组都参加的人数。



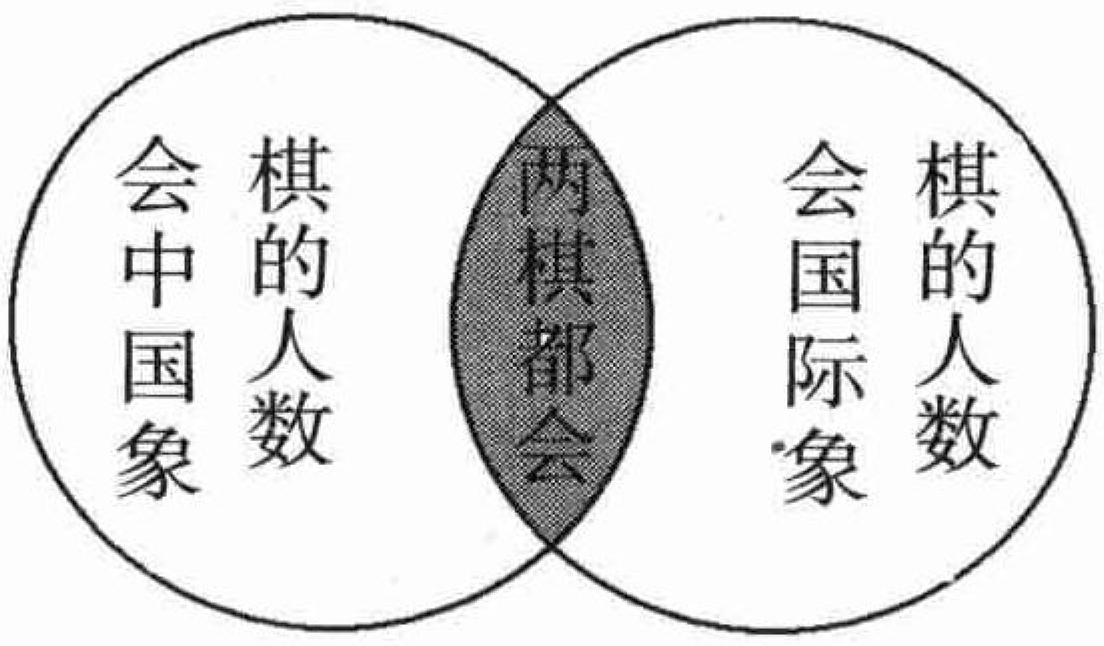

**解**：25 + 35 - 45 = 15（人）

**答**：这个班两个小组都参加的有15 人。

例题 2 **在六年级96 个学生中，调查会下中国象棋和国际象棋的人数，发现每个学生至少会一样。调查结果是，有$\frac{7}{12}$的学生会中国象棋，有$\frac{1}{4}$的学生两样都会。求会国际象棋的学生有多少人。**

**思路分析**：如下页图，左边的圆圈表示会中国象棋的人数，右边的圆圈表示会国际象棋的人数，阴影部分表示两棋都会的学生人数。会中国象棋的人数占总人数的$\frac{7}{12}$，即$96\times\frac{7}{12}=56$（人），中国象棋和国际象棋都会

的占总人数的$\frac{1}{4}$，即 $96\times\frac{1}{4}=24$（人）。题目中要求会国际象棋的人数。




我们来观察上图，会国际象棋的人数由两部分人组成：只会国际象棋的和国际象棋、中国象棋都会的，只要我们分别求出这两部分，再把他们合起来即可。

**解**：会中国象棋的：$96\times\frac{7}{12}=56$（人）

中国象棋、国际象棋都会的：$96\times\frac{1}{4}=24$（人）

只会国际象棋的：$96-56=40$（人）

会国际象棋的：$40+24=64$（人）

综合算式：$(96-96\times\frac{7}{12})+96\times\frac{1}{4}$

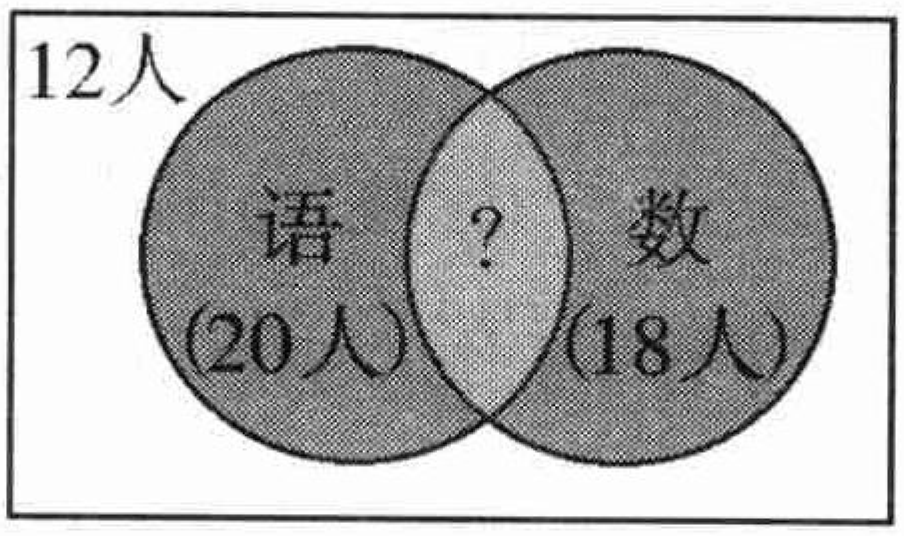
$=40+24$

$=64$（人）

**答**：会国际象棋的学生有 64 人。

**例题 3** **五年级（1）班有 46 人，其中有 12 人没有参加语文竞赛和数学竞赛。参加语文竞赛的有 20 人，参加数学竞赛的有 18 人，既参加语文竞赛，又参加数学竞赛的有多少人？**

**思路分析**：如下图，长方形的方框代表全班 46 人，方框中空白部分代表没有参赛的 12 人，阴影部分代表参赛的学生人数，第一步求出全班有多少人参赛，然后再把参加语文竞赛的 20 人与参加数学竞赛的 18 人相加，减去参赛人数，就是既参加语文竞赛，又参加数学竞赛的人数。



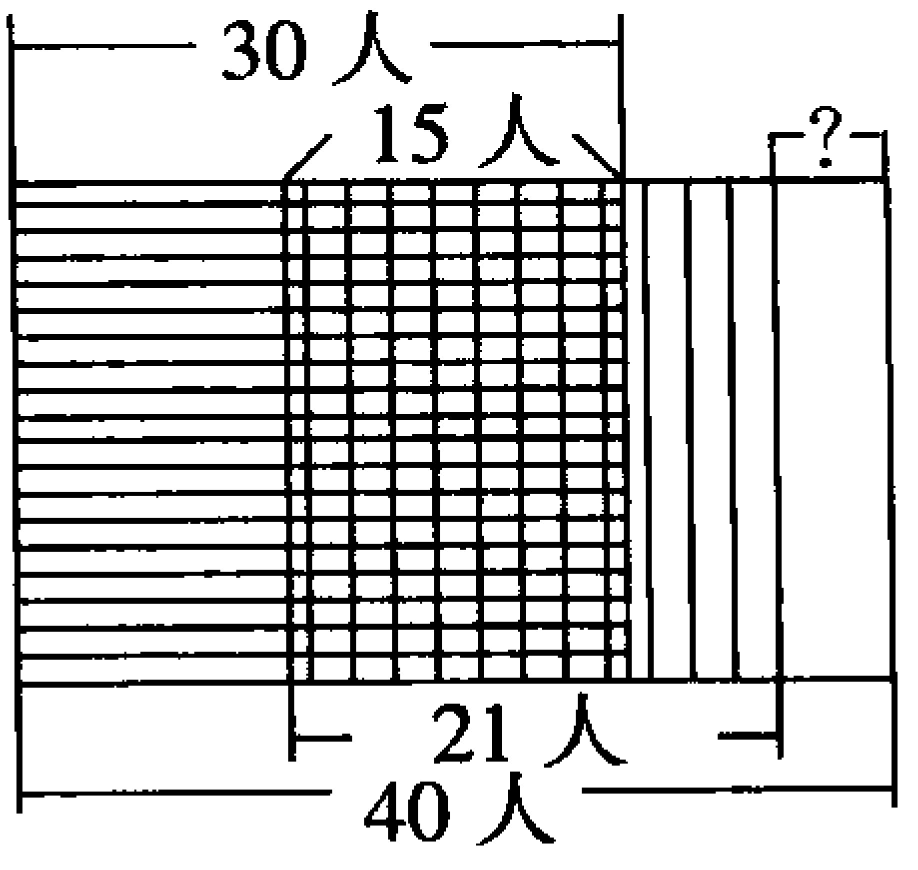

**解**：20 + 18 − (46 − 12) = 4（人）

**答**：既参加语文竞赛，又参加数学竞赛的有 4 人。

**例题 4** **40 人参加数学测试，答对第一题的有 30 人，答对第二题的有 21 人，两题都答对的有 15 人，两题都没有答对的有多少人？**

**思路分析**：如下页图，画横线的表示答对第一题的人数 30 人，画竖线的表示答对第二题的人数 21 人，空

白部分表示两题都没有做对的人数，横线竖线交叉的表示两题都答对的人数 15 人。




从图中可以看出，30 中包含 15，21 中也包含 15。30 + 21 中，15 被计算了两次，也即从 30 + 21 中减去重复计算的 15 才是至少有一道题答对的人数，再从总人数中减去至少有一道题答对的人数就是两题都没答对的人数。

**解**：40 - (30 + 21 - 15) = 4 （人）

**答**：两题都没有答对的有 4 人。

**例题 5** **某班有 52 人，其中会下棋的有 48 人，会画画的有 37 人，会跳舞的有 39 人。这个班三项都会的至少有多少人？**

**思路分析**：根据题中已知全班会下棋的有 48 人，则不会下棋的就有 52 - 48 = 4 （人），会画画的有 37 人，则不会画画的有 52 - 37 = 15 （人），会跳舞的有 39 人，

则不会跳舞的有 52－39＝13（人）。

三项中有一项不会的最多有 4＋15＋13＝32（人），因此，三项都会的至少有 52－32＝20（人）。

**解：** $52-[(52-48)+(52-37)+(52-39)]$

$=52-[4+15+13]$

$=52-32$

$=20$（人）

**答：** 这个班三项都会的至少有 20 人。

**小结**

在解包含与排除问题时，要善于使用形象的图示，帮助理解题意，搞清数量关系和逻辑关系，有些语言不是表达清楚的关系，用了适当的图形就显得很直观很清楚，因而容易进行计算。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 五年级有 112 人参加语文、数学考试，每人至少有一门功课得优，其中，语文得优的有 65 人，数学得优的有 87 人，问语文、数学都得优的有多少人。

2. 某班有 50 名学生，在一次测验中有 26 人得满分，在第二次测验中有 21 人得满分。如果两次测验都没得过满分的学生有 17 人，那么，两次测验都得满分的有多少人？

3. 某班在一次测验中有 26 人语文获优，有 30 人数学获优，其中语文、数学双优的 12 人，另外还有 8 人语文、数学均未获优，这个班共有多少学生？

4. 某班有 36 个同学，在一次测验中，答对第一题的有 25 人，答对第二题的有 23 人，两题都答对的有 15 人，那么两题都不对的有多少人？

5. 一个班有 52 人，做完语文作业的有 32 人，做完数学作业的有 35 人，语文、数学作业都没有做完的有 8 人，这个班语文、数学作业都做完的有多少人？

## 变式训练

1. 六年级二班的学生参加数学小组和语文小组的人数是 26 人，其中参加数学小组的有 17 人，参加语文小组的有 14 人，问：语文、数学小组都参加的有多少人？

2. 某班有 46 人，其中仅会打乒乓球的有 18 人，会打乒乓球又会打羽毛球的有 7 人，既不会打乒乓球又不会打羽毛球的有 6 人，问：仅会打羽毛球的有多少人？

3. 某车间有工人 100 个，其中有 5 个人只能干电工工作，有 77 人只能干车工工作，86 只能干焊工工作，问：既能干车工工作又能干焊工工作的人有多少？

4. 某次数学竞赛共有五道题（满分不是 100 分），丁一只做对了（1）（2）（3）三题得 16 分，于山只做对了（2）（3）（4）三题得 25 分，刘奇只做对了（1）（4）（5）三题得 30 分，王水只做对了（3）（4）（5）三题得 28 分，张灿只做对了（1）（2）（5）三题得了 21 分，李明五道题都对了，他得了多少分？

5. 六年级开展语文、数学竞赛，已知参赛的人数正好是全年级人数的 40%，其中参加数学竞赛的占全体参加竞赛人数的$\frac{2}{5}$，参加语文竞赛的占全体参加竞赛人数的$\frac{3}{4}$，两科都参加的有 9 人，全年级有多少人？

## 三 拔高训练

1. 育才小学各年级在一次英语比赛中，四年级和五年级共有 20 人获奖，在获奖者中有 16 人不是四年级的，有 12 人不是五年级的，该校英语比赛获奖的总人数是多少？

2. 实验小学成立美术、体育两个活动小组，有 535 人报名参加，已知两个小组都报名参加的有 75 人，参加体育小组的有 435 人。

（1）参加美术小组的人有多少？

（2）参加美术小组，没有参加体育小组的有多少人？

# 第19讲 抽屉原理

把三本书放进两个箱子里，想一想，有几种方法？稍加思索，我们就会发现有两种方法：一种方法是一个箱子里放1本书，另一个箱子里放两本书，还有一种是一个箱子里放3本书，另一个箱子不放书。由此，我们可以得出这样一个结论：不论怎样放，总有一个箱子至少有两本以上的书。同理，如果把5本书放到4个箱子里，总有一个箱子里至少有两本书，如果把100本书放入99个箱子里，也总有一个箱子里至少有两本书。一般来说，如果书的本数比箱子的个数多时，那么，一定有一个箱子里有两本或更多的书，这就是要介绍的抽屉原理。

生活中这样的例子很多：

把5只苹果放入4个果盘里，那么某个果盘里一定有至少两个苹果。

13名同学中至少有两人在同一月份出生。

如果从5双袜子中挑出6只来，那么挑出的这6只袜子中必定有两只是配对的。

如果把22个“三好学生”的名额分配给四个班，那

么至少有一个班分得的名额多于5名。

从以上这些事实中可以概括出“抽屉原理”的两条原则：

（1）如果把 $n+k$（$k\geqslant1$）件东西放入 $n$ 个抽屉，那么至少有一个抽屉中有两件或两件以上的东西。

（2）如果把多于 $m\times n$ 件的东西，任意分放在 $n$ 个抽屉里，那么至少有一个抽屉中的东西不少于（$m+1$）件。也可以这样理解：如果东西的件数多于抽屉数量的 $m$ 倍，那么必有一个抽屉中放有至少（$m+1$）件东西。

## 金牌例题

例题 1　**小明做事非常马虎，把4双分别为红、蓝、黄、白颜色的袜子随便丢在一起。一天晚上，小明有急事必须穿袜子，但房间里电灯忽然坏了，他只好拿着一些袜子到路灯下去辨认，问小明至少应该拿几只袜子，才能保证其中有相同颜色的一双？**

**思路分析：**

（1）如果小明只拿2只袜子，能保证两只颜色相同吗？

（2）如果开始两只分别为红的、蓝的，再拿一只能保证有两只相同颜色的吗？如果再拿两只呢？

（3）至少拿几只，才能保证有两只颜色相同？如果

袜子为红、蓝、黄、白、黑五种颜色，则至少拿几只，才能保证其中有相同颜色的一双？

**解**：根据抽屉原理（1），如果把 $n+k$（$k\geqslant 1$）件东西放入 $n$ 个抽屉，那么至少有一个抽屉中有两件或两件以上的东西。因此小明至少要拿 5 只袜子，才能保证其中有相同颜色的一双。

**例题 2** **布袋里有 4 种不同颜色的小球，每次摸两个，要保证有 10 次所摸的结果是一样的，至少要摸多少次？**

**思路分析**：当摸出的两个球颜色相同时，可以有 4 种不同结果。当摸出的两个球颜色不同时，最多可以有 $3+2+1=6$（种）不同的结果，把这 $4+6=10$（种）不同结果作为 10 个抽屉。

**解**：因为要求 10 次摸出的结果相同，根据抽屉原理（2），如果把 $m\times n+k$（$k\geqslant 1$）件东西放入 $n$ 个抽屉，那么必定有一个抽屉里至少有 $m+1$ 件东西。因为要求 10 次摸出的结果相同，所以至少要摸 $9\times 10+1=91$（次）。

**例题 3** **某旅游团一行 50 人，每人游览甲、乙、丙三地的方式随意，至少有多少人游览的地方完全相同？**

**思路分析**：设某人去某地记作 1，否则记作 0，则某人游览甲、乙、丙三地的方式只可能有：$2\times 2\times 2=8$ 种，

即（0，0，0）（0，0，1）（0，1，0）（1，0，0）（1，1，0）（1，0，1）（0，1，1）及（1，1，1）。

以上 8 种情况为 8 个抽屉。

**答：** 根据抽屉原理（2），至少有 $(\frac{50-1}{8})+1=7$（人）落在同一抽屉里，即有 7 人游览的地方完全相同。

**例题 4** **六（2）班的同学参加一次数学考试，满分为 100 分，全班最低分为 75 分，每人得分都是整数，并且班上至少有 3 人的得分相同，那么六（2）班至少有多少同学？**

**思路分析：** 把可能的得分看做抽屉，把学生看做东西。一个学生的得分是 88 分，就把它放在 88 分这个抽屉里，我们要求出学生的总人数。

由于最高分为 100 分，最低分为 75 分，所以学生可能得到 $100-75+1=26$（种）不同的分数，26 就是抽屉的个数。

**解：** 因为至少有 3 人的得分相同，所以

$m=3-1=2$

$A\geqslant 2\times 26+1=53$（人）

**答：** 六（2）班至少有 53 人。

## 小结

运用抽屉原理的关键是“制造抽屉”并确定抽屉的个数，“制造抽屉”的基本思路是分类，确定抽屉的个数有时需要应用计数的基本方法和原理。

解题过程中，我们需要考查：

$A=m\times n+a\ (a\geqslant 1)$

这是个带余除法。在这个关系式中，$A$ 是东西的总数，$n$ 是抽屉的个数，$1\leqslant a<n$ 通常可以把 $a$ 看做 1。当已知 $A$ 和 $n$ 时可求出 $m$，当已知 $m$ 和 $n$ 时可求出 $A$ 或 $A$ 的最小值。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1. 某校有 370 名 1992 年出生的学生，其中至少有 2 名学生的生日是同一天，为什么？

2. 15 个小朋友中，至少有几个小朋友同在一个月出生？

3. 某班学生去买数学书、语文书、英语书、音乐书，有的买一本，有的买两本，有的买三本，有的买四本。问：至少去几位学生才能保证一定有两位同学买到相同的书？（每种书最多买一本）

4. 一只袋子里装有许多颜色不同的棋子，颜色有红、黄、蓝三种，问：最少要取出多少个棋子才能保证有两个同色的？

5. 一只布袋中装有同样尺寸大小的内衣，但颜色不同，有白、红、蓝三种，问最少要摸出多少件内衣，才能保证有3对同色的？

## 变式训练

1. 在长 100 米的笔直的公路上的一侧站有 12 人，至少有两个人的距离小于 10 米，为什么？

2. 今年入学的一年级新生中，有 181 人是 2002 年出生的。这些新生中，至少有多少人是 2002 年同一个月出生的？

3. 某区的中学生人数是 11000 人，其中必定有多少人是同年同月同日出生的？（中学生年龄为 11 ~ 20 岁）

4. 从 1 到 50 的自然数中，任取 27 个数，其中必有两个数的和等于 52，为什么？

5. 从 1，2，3，4，…，10，这 10 个数中，任取几个数，可以保证在这些数中一定能找到两个数，使其中一个数是另一个数的倍数？

## 三 拔高训练

1. 有一大筐苹果和梨，分成若干堆，如果要确保找到这样两堆，使这两堆苹果的总数和梨的总数都是偶数，那么最少要把这些苹果和梨分成几堆？

2. 某班有46名同学，他们都参加了课外小组，有语文、数学、英语、美术，每人可参加1个、2个、3个或4个小组，问：班级中至少有几名学生参加的小组完全相同？

# 第20讲 周期规律

自然界里有许多周期现象，如每个星期总是以七天为周期重复地循环着，春夏秋冬的四季也是年复一年地按一定的周期规律延续着。

在数学的领域里，也有许多有趣的周期规律。一些数或者图形，它们的计算或者排列有一定的规律，要经过观察、思考、试算，发现数与数、图形与图形相互之间的关系，找准其中的周期规律，才能在解答此类问题时，利用周期性的规律，使看似复杂的问题，化难为易，迎刃而解。

## 金牌例题

**例题1** **把$\frac{3}{7}$化成小数，小数点右第1996位上的数字是几？**

**思路分析：**先把这个分数化成小数：$\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}428571\cdots\cdots$可以清楚地看出它的小数部分是以"428571"这六个数为周期循环着的。根据这个周期规律，我们可以得出：$1996\div6=332\cdots\cdots4$，说明1996里

包含着332个完整周期，另外剩下4个数，所以这个数字应该是5。

**解**：$1996 \div 6 = 332 \cdots\cdots 4$

**答**：小数点右第1996位上的数字是5。

**例题2** **观察分析下面这串分数的变化规律：**

$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{4}$，……

（1）$\frac{7}{10}$是第几个分数？

（2）第400个分数是几分之几？

**思路分析**：要回答$\frac{7}{10}$是第几个分数，可以这样思考，首先要认真仔细地观察这串分数的分子和分母，找出这一串分数排列的规律，分母是1的分数有几个？分母是2的分数有几个？它们的分子是怎样排列的？

下面我们仔细研究一下：

分母是1的分数有1个：$\frac{1}{1}$；

分母是2的分数有3个：$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{2}$；

分母是3的分数有5个：$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$；

分母是 4 的分数有 7 个：$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{4}$；

依次类推，分母是 5，6，7，8，9 的分数个数分别为 9 个，11 个，13 个，15 个和 17 个。分母是 1，2，3，4，5，6，7，8，9 的分数的个数共有 $1+3+5+7+9+11+13+15+17=81$（个）。分母是 10 的分数共有 19 个，$\frac{7}{10}$应该是分母为 10 的分数中的第 7 个和第 13 个。因此，$81+7=88$，$81+13=94$。

要回答第 400 个分数是几分之几，可以这样思考：分母是 1，2，3，4，5，6，7，8，9……的分数的个数为 1，3，5，7，9，11，13……试算一下，分母从 1 到 19，共有分数的个数是：$1+3+5+\cdots+35+37=361$（个），从 362 个开始是分母为 20 的分数，分母为 20 的分数共有 39 个，$361+39=400$，第 400 个分数正好是分母为 20 的分数中的最后一个。

（1）**解：** 分母 1 ~ 9 的分数的个数是 81 个，$\frac{7}{10}$应该是分母为 10 的分数中的第 7 个和第 13 个，$81+7=88$，$81+13=94$。

**答：** $\frac{7}{10}$是第 88 个分数和第 94 个分数。

（2）**解**：经试算，分母从 1 到 19 共有分数的个数是 361 个，分母是 20 的分数共有 39 个，$361+39=400$，第 400 个分数是分母为 20 的分数中的最后一个$\frac{1}{20}$。

**答**：第 400 个分数是$\frac{1}{20}$。

**例题 3** **从 1 开始，每隔两个数写出一个数来，得到的数列是 1，4，7，10，13……问第 100 个数是多少？**

**思路分析**：题中告诉我们，从 1 开始每隔两个数写出一个数来，得到的数列是 1，4，7，10……观察这个数列，不难发现，在这一个数列中，后一个数总比前一个数大 3。

第一个数 1

第二个数 $1+3=4$

第三个数 $1+3+3=7$

第四个数 $1+3+3+3=10$

……

第 100 个数 $1+3+3+3+\cdots+3=298$（共加上 99 个 3）。

通过找数的规律发现，第 100 个数就是 1 加上 99 个 3 的和，就可求出第 100 个数是多少。

**解**：$1+3\times(100-1)=1+3\times99=298$

**答**：第 100 个数是 298。

**例题 4** **1999 年 1 月 1 日是星期五，那么 2000 年 1 月 1 日是星期几？**

**思路分析：** 有关星期几的问题具有周期性的规律，天数虽多，但每个天数是星期几，无非是从星期日到星期六，每 7 天一个循环。

为了表达方便，我们把 1999 年 1 月 1 日作为第一天，1999 年 1 月 2 日作为第二天，1999 年 1 月 3 日作为第三天，等等，就是给每一天编个号码。

1999 年是 365 天，也就是说 1999 年的最后一天是第 365 天，因此 2000 年的 1 月 1 日是第 366 天，根据星期是 7 天一个循环周期的规律，$366=7\times52+2$ 所以第 366 天是从 1999 年 1 月 1 日到 2000 年 1 月 1 日，经历了 52 个每星期 7 天的周期后的第二天，1999 年 1 月 1 日是星期五，循环结束的第二天是星期六。

**解：** 把 1999 年 1 月 1 日作为第一天，1999 年有 365 天，也就是说 1999 年的最后一天是第 365 天，那么，2000 年 1 月 1 日就是第 366 天。

对于每一天相对应的星期数，7 天一个循环周期是星期五、星期六、星期日、星期一、星期二、星期三、星期四。$366=7\times52+2$ 说明第 366 天是 1999 年一个循环的第二天，即相对应的星期数是星期六，所以 2000 年 1 月 1 日是

星期六。

**答**：2000 年 1 月 1 日是星期六。

**例题 5** **一项工程甲单独做需要 12 小时完成，乙单独做需要 18 小时完成，若甲做 1 小时后乙接替甲做 1 小时，再由甲接替乙做 1 小时，两人如此交替工作，完成任务需要多少小时？**

**思路分析**：根据已知，我们把 2 小时工作量看做一个循环，先求出循环的次数。

**解**：（1）需循环的次数为：

$$1\div(\frac{1}{12}+\frac{1}{18})=\frac{36}{5}>7\text{（次）}$$

（2）7 个循环后剩下的工作量是：

$$1-(\frac{1}{12}+\frac{1}{18})\times 7=\frac{1}{36}$$

（3）余下的工作量还需甲做的时间为：

$$\frac{1}{36}\div\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\text{（小时）}$$

（4）完成任务共用的时间为：

$$2\times 7+\frac{1}{3}=14\frac{1}{3}\text{小时}$$

**答**：完成任务共用 $14\frac{1}{3}$小时。

**小结**

在解答循环周期有规律的题目时，一定要仔细观察题目中的数、数列等的特征，找出它们的规律，然后运用题中存在的规律性去解题，就能把看似复杂的数学题变得很简单。

## 金牌训练

### 一 对应训练

1.（1）当 27 个 8 连乘时，它的积的个位上的数字是几?

（2）当有 1993 个 8 连乘时，它的积的个位上的数字是几?

2. 按一定规律排列着一串数组（1，5，10）（2，10，20）（3，15，30）（4，20，40）……求第100组里三个数的和？

3. 阳历1978年的1月1日是星期日，阳历2000年的1月1日是星期几？

4. 我国农历是鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪12种动物，按顺序轮流代表各年的年号。例如第一年如果属鼠年，第二年就属牛年，第三年就属虎年，依次类推，如果公元1年属猴年，那么，公元2100年属什么年？

5. 一项工程甲单独完成要9小时，乙单独完成要12小时，如果按照甲、乙，甲、乙……的顺序轮流工作，每人每次工作1小时，完成这项工程的$\frac{2}{3}$共需多少时间？

## 变式训练

1. 有249朵花，按5朵红花、9朵黄花、13朵绿花的顺序排列，问：最后一朵是什么颜色？这249朵花中，红花、黄花、绿花各有多少朵？

2. 小明的爸爸出差离家时，小明看了看钟面，他爸爸出差回来时小明又看了钟面，恰好是12点整，而且恰好经过200小时，问：小明爸爸离家时钟面是几点？

3. 一个水池安装了甲乙两个进水管。单开甲管 24 分钟能把空池灌满，单开乙管 18 分钟能把空池灌满。现在甲乙两管轮流开，按照甲 1 分钟，乙 2 分钟，甲 2 分钟，乙 1 分钟，甲 1 分钟，乙 2 分钟……如此交替下去，灌满一池水共用多少分钟？

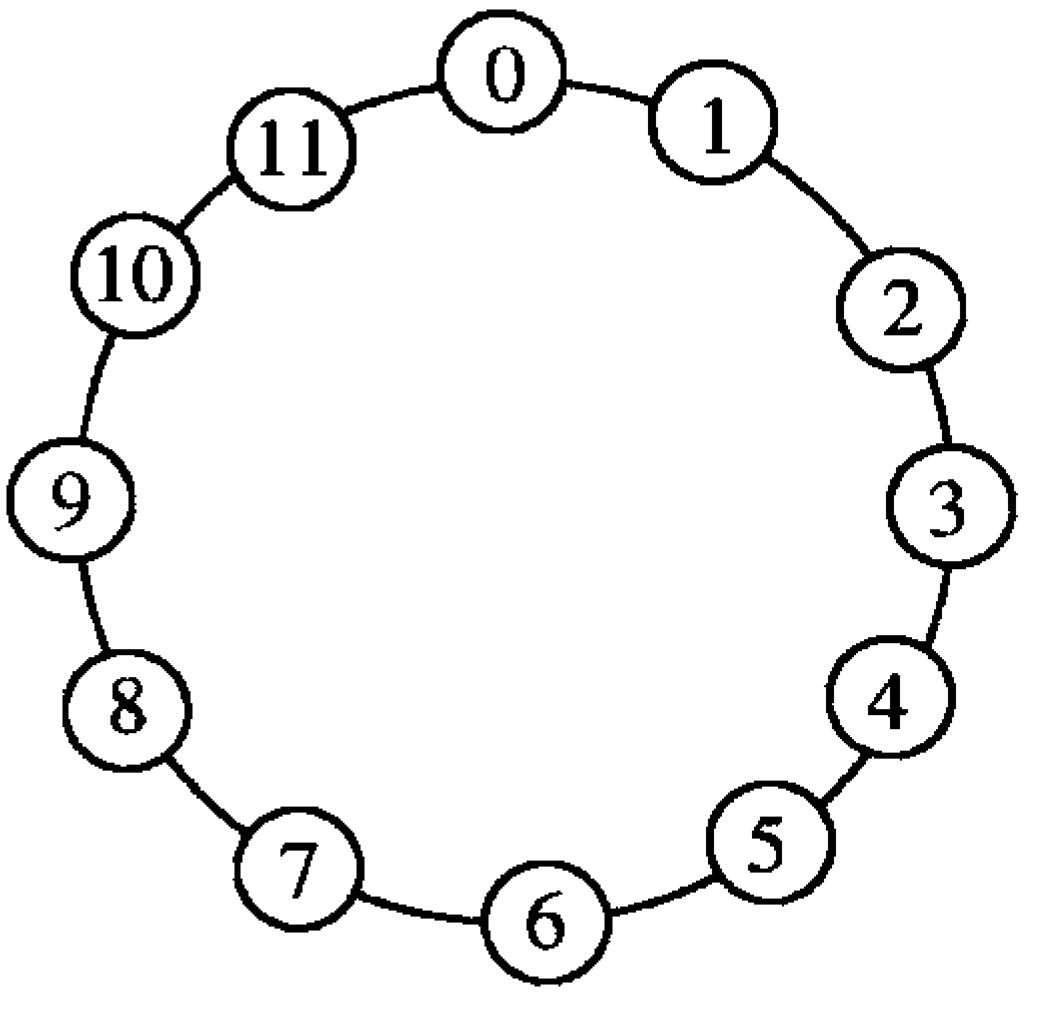
4. 一项工程，乙单独做 20 天可以完成。如果第一天甲做，第二天乙做，这样轮流交替做，也恰好用整数天完成。如果第一天乙做，第二天甲做，这样轮流交替做，比上次轮流交替做要多半天才能完成，这项工程要甲单独做几天可以完成？

5. 有43位同学，他们身上带的钱从8分到5角，钱数都各不相同。每个同学把身上带的所有的钱各自买了画片，画片只有两种，3分1张和5分1张，每人都尽量多买5分1张的画片。问：他们所买的3分1张的画片的总数是多少张？

## 三 拔高训练

1. 一项工程甲队单独做完要150天，乙队单独做完要180天。两队合作时，甲队做5天，休息2天，乙队做6天休息1天，完成这项工程要多少天？

2. 如下图，电子跳蚤每跳一步可以从一个圆圈跳到相邻的圆圈，现在一只红跳蚤从标有数字 0 的圆圈按顺时针方向跳了 1991 步落在一个圆圈里，一只黑跳蚤也从标有数字 0 的圆圈里开始起跳，但它是沿着逆时针方向跳了 1949 步，落在另一个圆圈里，这两个圆圈里的数字的乘积是多少？



# 参 考 答 案

## 第1讲 平均数

### 一、对应训练

1. 自然100分，科技86分。
2. $(85\times11+5.5\times12)\div(12-1)=91$（分）
3. $(8\times15+9\times20+12\times25)\div(15+20+25)=10$（元）
4. 假设桥为2.4千米。

   $2.4\times2\div(2.4\div60+2.4\div80)=68\frac{4}{7}$（千米/小时）
5. 提示：假设参加竞赛的全部是男生，则共得：$60\times100=6000$（分）

   与实际相差：$63\times100-6000=300$（分）

   为什么少了300分呢？因为其中还有女生参加，少算一个女生就少算了$70-60=10$（分），现在少算了300分，就少算了$300\div(70-60)=30$（个）女生，所以女生就有30个，男生有$100-30=70$（个）。男生比女生多$70-30=40$（个）。

### 二、变式训练

1. $120\times95\%\times3-(118+105)=119$（人）

2. 平均每人吃：$8 \div 3 = 2\frac{2}{3}$（个）

每个面包：$2.4 \div 2\frac{2}{3} = \frac{9}{10}$（元）

甲多买：$5 - 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$（个）

甲应收回：$\frac{9}{10} \times 2\frac{1}{3} = 2.1$（元）

3. 提示：设乙、丙两数的平均数是1。

则甲数为 $1 \times \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$

甲乙丙三数的平均数为 $(1 + 1 + \frac{6}{7}) \div 3 = \frac{20}{21}$

综合式：$\frac{6}{7} \div [(1 + 1 + \frac{6}{7}) \div 3] = \frac{9}{10}$

4. 提示：原来五个数的和是 $18 \times 5 = 90$。
改动后五个数的和是 $16 \times 5 = 80$。
80 比 90 少 10，这 10 就是把这个数改为 6 后少掉的，因此，这个改动的数原来是 $18 \times 5 - 16 \times 5 + 6 = 16$。

5. 提示：求全程的平均速度，应该用全程除以行全程所用的时间。由于题中没有告诉我们 $AB$ 之间的路程，我们可以假设全程为 24 千米（也可以设其他数），这样我们就可以得到行全程的平均速度：
$24 \div (12 \div 12 + 12 \div 4) = 6$（千米/小时）

## 三、拔高训练

1. 提示：根据题意可知这队学生摘苹果的数如下排列 1，2，3，4，5……，已知最后平均每个学生摘 6 个苹果，那就是摘最少

的学生与摘得最多的学生的个数相加再除以 2，应该是 6 个，可知 $6\times2-1=11$（个），摘 11 个苹果的学生也正好就是第 11 个学生，这队学生有 $6\times2-1=11$（人）

2. 提示：设这三个数分别为 $a$、$b$、$c$，根据题意可得：

$$\left(\frac{a+b}{2}+c\right)+\left(\frac{a+c}{2}+b\right)+\left(\frac{b+c}{2}+a\right)=35+27+25$$

化简得：$2\times(a+b+c)=87$

$$a+b+c=43.5$$

已知：$\frac{a+b}{2}+c=35$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+c=35$$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}=35$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c+c)=35$$

$$a+b+c+c=70$$

$$c=70-43.5=26.5$$

同理：$b=10.5$　　$a=6.5$

这三个数分别是 6.5，10.5，26.5。

## 第 2 讲　行程问题（一）

### 一、对应训练

1. 48 千米
2. 45 千米

3. $(600-1\times6)\div6\div(1+\frac{4}{5})=55$（千米）

4. $(5\times4)\div(13-5)\times13=32.5$（千米）

5. $(100+75)\times3\div(90-75)=35$（分钟）

$(100+90)\times35=6650$（米）

## 二、变式训练

1. $45\times2\div(3-2)\times3=270$（千米）

或 $45\times2\div(\frac{3}{3+2}-\frac{2}{3+2})\times\frac{3}{3+2}=270$（千米）

2. $(82-34)\div(13+11)=2$（小时）

3. $20\times2\div\frac{1}{6}=240$（千米）

4. $(440-310)\div(40-30)=13$（米/秒）

$13\times30-310=80$（米）

5. 解法一：设顺水航行需要 $x$ 小时，逆水航行需要 $(21-x)$ 小时

$20x=(21-x)\times15$

$20x=21\times15-15x$

$35x=21\times15$

$x=9$

$20\times9=180$（千米）

解法二：设全长为 $x$ 千米

$x\div20+x\div15=21$

$x=180$（千米）

## 三、拔高训练

1. 狗跑的米数：$56+112=168$（米）

狗共跳次数：168 ÷ 2 = 84（次）

在同一时间内兔子跳的次数：84 ÷ 3 × 4 = 112（次）

兔子一跳前进的米数：112 ÷ 112 = 1（米）

2. 顺速是逆速的几倍：(42 − 24) ÷ (14 − 8) = 3

顺速：(42 + 8 × 3) ÷ 11 = 6（千米/小时）

逆速：8 ÷ (11 − 42 ÷ 6) = 2（千米/小时）

静水中船速：(6 + 2) ÷ 2 = 4（千米/小时）

水流速度：(6 − 2) ÷ 2 = 2（千米/小时）

## 第3讲　行程问题（二）

### 一、对应训练

1. 120 × 2 ÷ (120 ÷ 30 + 120 ÷ 20) = 24（千米/小时）
2. 12 + 2 − 10 = 4（小时）　(480 − 20 × 12) ÷ (12 + 4) = 15（千米）
3. $5 \times 2 \div (1 - \frac{4}{5}) \times (1 + \frac{4}{5}) = 90$（千米）
4. 再过 2 小时可追上甲。

### 二、变式训练

1. (90 × 3 + 50) ÷ 2 = 160（千米）
2. 后一段路原计划用时：$\frac{1}{2} \div \frac{1}{5} \times (1 - \frac{1}{5}) = 2$（小时）

   原计划速度：90 ÷ (8 − 2) = 15（千米/小时）
3. $120 \div [(1 - \frac{3}{8}) \times \frac{4}{5} - \frac{3}{8}] = 960$（千米）

4. $(5-1)\div(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})=96$（千米）

5. $210\div(18+3)+210\div(18-3)=24$（小时）

**三、拔高训练**

1. 甲共行了：$(35\times3+3)\div2=54$（千米）

甲每小时行：$54\div(11-8)=18$（千米）

2. $(3-1\frac{4}{5})\div\frac{3}{5}=2$（小时）

$3-2=1$（小时）　$1\frac{4}{5}-1=\frac{4}{5}$（小时）

$\frac{4}{5}:2=2:5$　$1\frac{4}{5}\times\frac{5}{2}=4\frac{1}{2}$（小时）

答：全部乘船需要 $4\frac{1}{2}$小时。

## 第 4 讲　工程问题

**一、对应训练**

1. $(\frac{1}{15}\times20-1)\div(\frac{1}{15}-\frac{1}{40})=8$（天）

2. $\frac{1}{5}\times6-1=\frac{1}{5}$　$\frac{1}{5}\div2=\frac{1}{10}$

$\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$　$1\div\frac{1}{10}=10$（天）

3. $1\div[(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20})\div2]=10$（小时）

4. $30-(1-\frac{1}{60}\times 30)\div\frac{1}{40}=10$（天）

5. 甲、乙、丙共用时间：$2\div(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{8})=8$（小时）

丙帮甲的时间：$(1-\frac{1}{12}\times 8)\div\frac{1}{8}=2\frac{2}{3}$（小时）

丙帮乙的时间：$8-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}$（小时）

## 二、变式训练

1. $1\div(\frac{1}{10}+\frac{1}{12})=5\frac{5}{11}>5$ 次

$1-(\frac{1}{10}+\frac{1}{12})\times 5=\frac{1}{12}$

$\frac{1}{12}\div\frac{1}{10}=\frac{5}{6}$（小时）

$2\times 5+\frac{5}{6}=10\frac{5}{6}$（小时）

2. $[(3+6)\times\frac{4}{3}+6]\times 2=36$（天）

3. $1\div(\frac{1}{30}+\frac{1}{12}-\frac{1}{15})=20$（天）

4. $180\div[1-(\frac{1}{6}+\frac{1}{8})\times 3]=1440$（米）

$1440\div 6=240$（米）

5. 乙工作的时间：$(\frac{1}{6}\times 7\frac{1}{3}-1)\div(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})=5\frac{1}{3}$（小时）

甲工作的时间：$7\frac{1}{3}-5\frac{1}{3}=2$（小时）

## 三、拔高训练

1. $16-[1-\frac{1}{20}\times(16-3)]\div\frac{1}{30}=5.5$（天）

2. $[1-(\frac{1}{24}+\frac{1}{30})\times8]\div6=\frac{1}{15}$

   $1\div\frac{1}{15}=15$（天）

# 第 5 讲　年龄问题

## 一、对应训练

1. $[95+(65-10)]\div2=75$（岁）
2. $(34\times3-81)\div3=7$（年）

   $7+8=15$（岁）
3. $39-(39-3)\div3=27$（岁）
4. $(36-8)\div(2-1)-8=20$（年）
5. 姐姐的年龄：$[(35-4+3)+5+7]\div2=23$（岁）

   妹妹的年龄：$23-(5+7)=11$（岁）

## 二、变式训练

1. $(56-4\times2-4\times2)\div(1+4)\times4+4=36$（岁）
2. 儿子：$(64+8)\div(3+1)=18$（岁）

   父亲：$18\times3-8=46$（岁）
3. $(15+6)\div(8-1)\times8+7=31$（岁）
4. 儿子：$(78-1)\div(3\times2+1)=11$（岁）

妈妈：$11\times3=33$（岁）

爸爸：$11\times3+1=34$（岁）

5. 小强：$(35-2+3)\div3=12$（岁）

小刚：$12+2=14$（岁）

小明：$12-3=9$（岁）

## 三、拔高训练

1. 解：设三年前小华 $x$ 岁

$$5x+(3+5)=(x+3+5)\times3$$

$$x=8$$

小华的年龄：$8+3=11$（岁）

王老师的年龄：$8\times5+3=43$（岁）

2. 年龄差：$(61-4)\div3=19$（岁）

甲：$19\times2+4=42$（岁）

乙：$19+4=23$（岁）

# 第 6 讲　列方程解应用题

## 一、对应训练

1. 设男生为 $x$ 人，则女生有（$x+28$）人

$$x+(x+28)\times\frac{3}{4}=42$$

$$x=12$$

女生人数：$12+28=40$（人）

2. 设六年级男同学为 $x$ 人

$$x-\frac{1}{11}x=152-x-5$$

$$x=77$$

女同学人数：$152-77=75$（人）

3. 设原来共有 $x$ 本图书，则

$$\frac{3}{5}x+400=(x+400)\times\frac{2}{3}$$

$$x=2000$$

4. 设乙班共有 $x$ 人，则甲班共有（$x-4$）人

$$(x-4)\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}x=29$$

$$x=52$$

甲班人数：$52-4=48$（人）

5. 设父亲今年 $x$ 岁，则儿子今年 $\frac{1}{6}x$ 岁

$$(x+4)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}x+4$$

$$x=36$$

## 二、变式训练

1. 设经过 $x$ 小时

$$1-\frac{1}{5}x=3\times(1-\frac{1}{3}x)$$

$$x=2.5$$

2. 设哥哥今年 $x$ 岁，根据年龄差不变则

$$x-\frac{1}{2}x=(x-9)-\frac{1}{5}\times(x-9)$$

$x=24$

3. 设小明原有 $x$ 元，则

$$\left(x-\frac{1}{4}x\right)\div(140-x-10)=\frac{6}{5}$$

$$x=80$$

小华原有钱数：$140-80=60$（元）

4. 设乙筐原有苹果 $x$ 千克

$$2\times(x-10)=\frac{3}{4}x+10$$

$$x=24$$

5. 设瓶内原有糖水 $x$ 克

$$x+15=\left(\frac{1}{11+1}x+15\right)\times 9$$

$$x=480$$

## 三、拔高训练

1. 设两座房子的总造价是 $x$ 万元

$$\frac{3}{7}x\times 3-32=\left(1-\frac{3}{7}\right)x$$

$$x=44.8$$

第二座房子的造价：$44.8\times\frac{3}{7}=19.2$（万元）

2. 设第二桶原来有油 $x$ 千克，第一桶有油（$x+1.2\times 2$）千克

$$(x+1.2\times 2-0.6)\times\frac{5}{21}=\frac{1}{3}\times(x-0.6)$$

$$x=6.6$$

第一桶原来有油：$6.6+1.2\times 2=9$（千克）

# 第 7 讲　植树问题

## 一、对应训练

1. $5\times(20-1)=95$（米）
2. $132\div(12-1)\times(25-1)=288$（分钟）
3. $1800\div8=225$（棵）

   答：柳树、桃树各栽了 225 棵。
4. $180\div3+180\div4-180\div12=90$（段）
5. $(116-12\times2-2\times16)\div(16-1)=4$（米）

## 二、变式训练

1. $(30-3-3\times2)\div3=7$（米）　$7+3=10$（米）　$10+3=13$（米）

   答：这 3 段的长度分别是 7 米、10 米、13 米。
2. $32\div[80\div(6-1)]+1=3$（层）
3. $[(802\div2-1)\times0.5+700]\div60=15$（分）
4. $(62.8\div3.14-3\times2)\times3.14\div28=1.57$（米）
5. $45\times(53-1)=2340$（米）

   $[45,60]$ 最小公倍 $=180$（米）

   $2340\div180-1=12$（根）

   答：中途还有 12 根不必移动，从起点到最近的不必移动的电线杆的距离是 180 米。

## 三、拔高训练

1. 提示：26 辆车，车身长 $5\times26=130$（米）　车之间有 $26-1$

$=25$（段）

共长 $8\times25=200$（米），车队行进的距离 $130+200+450=780$（米）

$[5\times26+8\times(26-1)+450]\div30=26$（分）

2. 提示：12 次记录，中间有 11 个间隔，每次间隔 5 小时，共 $5\times11=55$（小时）

从时针指向 9，倒推 55 小时，$55-12\times4=7$　$9-7=2$

$9-[5\times(12-1)-12\times4]=2$　第一次记录时针指向 2

## 第 8 讲　还原问题

### 一、对应训练

1. $(100\div10+15)\times4-17=83$（岁）
2. $(9\times9+9)\div9-9=1$
3. $123+(80-30)-(9-6)=170$
4. $250\div[(1-\frac{3}{8})\times(1-\frac{2}{3})]=1200$（千米）
5. 提示：他们共有 $90\times2=180$（元），当乙没有拿出 $\frac{1}{4}$ 给甲时，乙有 $90\div(1-\frac{1}{4})=120$（元），这时甲有 $180-120=60$（元）。而甲给乙 $\frac{1}{5}$，可见甲原有：$60\div(1-\frac{1}{5})=75$（元）。

乙原有：$180-75=105$（元）

### 二、变式训练

1. 提示：根据所得的积求出另一个乘数，$104\div13=8$，再乘以

72，得出正确答案：$104 \div 13 \times 72 = 576$

2. 乙桶：$120 \div (2+1) + 8 - 15 = 33$（千克）

甲桶：$120 - 33 = 87$（千克）

3. 提示：从最后剩下的 6 个桃子，进行逐步倒推，

第三只猴子没吃时篮子里有桃子：$6 \div (1 - \frac{1}{4}) = 8$（个）

第二只猴子没吃时篮子里有桃子：$8 \div (1 - \frac{1}{3}) = 12$（个）

第一只猴子没吃时篮子里原有桃子：$12 \div (1 - \frac{1}{3}) = 18$（个）

综合式：$6 \div (1 - \frac{1}{4}) \div (1 - \frac{1}{3}) \div (1 - \frac{1}{3}) = 18$（个）

4. $[(4+1) \div (1 - \frac{2}{5}) - 1] \div (1 - \frac{2}{3}) = 22$（吨）

5. 提示：从最后三人的钱数相等向前推算，每人 $360 \div 3 = 120$（元）

根据题意

丙原有钱：$120 + 90 - 20 = 190$（元）

乙原有钱：$120 + 20 - 70 = 70$（元）

甲原有钱：$120 + 70 - 90 = 100$（元）

## 三、拔高训练

1. $[(60+180) \div (1 - \frac{5}{9}) - 40] \div (1 - \frac{1}{3}) = 750$（克）

2. 提示：根据题目特点，从结果向前倒推。根据题意

第四次加入 4 升后，还剩 12 升，则加入前有：$12 - 4 = 8$（升）

第三次倒出剩下的$\frac{1}{9}$后，还剩 8 升，倒出前有：$8 \div (1 - \frac{1}{9}) =$

9（升）

依次求得 $9+5=14$（升）第二次倒出前的盐水数，那么第一次倒出前就应该是原有盐水：$14\div(1-\frac{1}{3})=21$（升）

综合式：$[(12-4)\div(1-\frac{1}{9})+5]\div(1-\frac{1}{3})=21$（升）

## 第9讲　盈亏问题

### 一、对应训练

1. $(50\times3+70\times5)\div(70-50)=25$（分）

   $50\times(25+3)=1400$（米）或　$70\times(25-5)=1400$（米）

2. 优秀少先队员有：$(21-3)\div(6-5)=18$（人）

   图书有：$6\times18-21=87$（本）

3. 小朋友人数：$(9+6)\div(5-4)=15$（人）

   梨子数：$15\times4+9=69$（个）

4. 提示：减少一个女生，增加一个男生，男生为总人数的一半，可知女生比男生多2人。减少一个男生，增加一个女生，男生为女生人数的一半，可知女生就比男生多4人，现在女生有：$4\times2=8$（人），原来女生有 $8-1=7$（人），男生有 $7-2=5$（人），共 $7+5=12$（人）。

   女生人数：$(1\times2+1\times2)\times2-1=7$（人）

   数学小组总人数：$7+7-2=12$（人）

5. $(50-45+95)\div(50-45)=20$（个）

   $45\times20+95=995$（本）

## 二、变式训练

1. 绳长：$(5+1)\div(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=36$（米）

   井深：$36\div2-5=13$（米）

2. 人数：$(6+2\times2)\div(7-3\times2)=10$（人）

   苹果数：$7\times10-6=64$（个）

   梨数：$3\times10+2=32$（个）

3. 租船只数：$(1+5\times2)\div(5-4)=11$（只）

   划船人数：$4\times11+1=45$（人）

   每只船租费：$0.4\times45\div2=9$（元）

4. $4\times[2.5\times3\div(4-2.5)]=20$（吨）

5. $(6\times2+4\times2)\div(6-4)=10$（间）

   $(10-2)\times6=48$（人）

## 三、拔高训练

1. 苹果：$(2\times5+5)\div(2-5\div3)=45$（个）

   梨：$2\times(45-5)=80$（个）

2. $(440+65\times5)\div(74-65)=85$（双）

   $85+5=90$（双）

# 第 10 讲　比与比例（一）

## 一、对应训练

1. 甲∶乙 $=3:2=6:4$　　乙∶丙 $=4:3$　　甲∶乙∶丙 $=6:4:3$

2. （1）甲∶乙∶丙 $=4:5:8$

（2）甲∶乙∶丙 = 4∶6∶5

（3）甲∶乙∶丙 = 12∶7∶9

3. 提示：先求出三个组人数的连比为 8∶12∶15，总份数 $8+12+15=35$。

一组的人数：$140\times\frac{8}{35}=32$（人）

二组的人数：$140\times\frac{12}{35}=48$（人）

三组的人数：$140\times\frac{15}{35}=60$（人）

4. 提示：三个年级分书本数的连比是 $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{7}=21:14:6$，

总份数是 $21+14+6=41$。

一年级分得的本数：$41\times\frac{21}{41}=21$（本）

二年级分得的本数：$41\times\frac{14}{41}=14$（本）

三年级分得的本数：$41\times\frac{6}{41}=6$（本）

5. 提示：先求出乙丙做总数的百分之几：$1-30\%=70\%$

乙丙做的零件的个数比 $(1+3):3=4:3$

然后，求出乙做的个数占总数的百分之几：$70\%\times\frac{4}{4+3}=40\%$

丙做的个数占总数的百分之几：$70\%\times\frac{3}{4+3}=30\%$

三个人做的零件数的连比 $30\%:40\%:30\%=3:4:3$

总份数：$3+4+3=10$

甲做的个数：$900\times\frac{3}{10}=270$（个）

乙做的个数：$900\times\frac{4}{10}=360$（个）

丙做的个数：$900\times\frac{3}{10}=270$（个）

**二、变式训练**

1. 提示：将题中的已知两组比，求出一、二、三班的连比，找与15人（已知量）相对应的份数，求出每份数，进而求出总人数。

   一班二班的比为$5:4=15:12$，二班与三班的人数比为$3:2=12:8$

   则一班∶二班∶三班$=15:12:8$　而一班比二、三班少$(12+8)-15=5$（份）

   那么5份相对应的是少15人，每份人数$15\div5=3$（人）

   $3\times(15+12+8)=105$（人）

2. 提示：根据已知求出甲乙存款数的比$\frac{1}{5}:\frac{1}{2}=2:5$。乙丙存款数的比$\frac{1}{5}:\frac{1}{4}=4:5$，甲乙丙三人存款数的连比$8:20:25$，然后按比例分配求出，甲乙丙各自的存款数。

   甲：$106\times\frac{8}{8+20+25}=16$（元）

   乙：$106\times\frac{20}{8+20+25}=40$（元）

   丙：$106\times\frac{25}{8+20+25}=50$（元）

3. 提示：先求出男、女生人数的比，然后再找出与已知量36人

相对应的份数，按比例分配求出男生人数。

男女生人数的比为$\frac{2}{5}:\frac{1}{4}=8:5$

男生比女生多3份，男生人数：$\frac{36}{8-5}\times8=96$（人）

4. 解法一：提示：根据已知两组总人数不变，先求出总人数，再求甲乙各组的人数。

总人数：$9\div(\frac{5}{5+3}-\frac{2}{2+3})=40$（人）

甲组人数：$40\times\frac{5}{5+3}=25$（人）

乙组人数：$40\times\frac{3}{5+3}=15$（人）

解法二：也可用方程来解，把总人数可看做8份

设1份为$x$，那么

$(5x-9):(3x+9)=2:3$

$(5x-9)\times3=(3x+9)\times2$

$x=5$

甲组人数：$5\times5=25$（人）

乙组人数：$5\times3=15$（人）

5. $\frac{1}{8}:\frac{1}{6}:\frac{1}{5}=15:20:24$　$15+20+24=59$

甲：$1180\times\frac{15}{59}=300$（个）

乙：$1180\times\frac{20}{59}=400$（个）

丙：$1180\times\frac{24}{59}=480$（个）

## 三、拔高训练

1. 提示：根据已知，甲桶倒给乙桶$\frac{2}{7}$后，甲乙两桶油的比是7:6，两桶油的总数不变，仍是130千克，可按比例分配求出这时甲桶油的数量，$130\times\frac{7}{7+6}=70$（千克），这是甲桶倒出$\frac{2}{7}$，剩下的$\frac{5}{7}$。

甲桶原有油：$130\times\frac{7}{7+6}\div(1-\frac{2}{7})=98$（千克）

乙桶原有油：$130-98=32$（千克）

2. 解法一：根据题意，甲组与乙组人数比是5:3，那么两组的总人数则是$5+3=8$（份），这时甲组占车间总人数的$\frac{5}{8}$，当甲组调出14人到乙组，甲组与乙组的人数比就变成了1:2，这时把两组的总人数看做$1+2=3$（份），那么甲组占全车间总人数的$\frac{1}{1+2}$，产生这样变化的原因是因为14人的调动，也就是说总人数的$\frac{5}{8}$与总人数的$\frac{1}{3}$的差是14人，因此，14人的对应分率是$\frac{5}{8}-\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$，这样就求出车间的总人数$14\div\frac{7}{24}=48$（人），进而求出甲、乙两组的原有人数。

甲组人数：$14\div(\frac{5}{5+3}-\frac{1}{1+2})\times\frac{5}{5+3}=30$（人）

乙组人数：$14\div(\frac{5}{5+3}-\frac{1}{1+2})\times\frac{3}{5+3}=18$（人）

解法二：这个车间总人数是8份，乙组占总人数的$\frac{3}{8}$，调入14人后乙组则占全车间总人数的$\frac{2}{3}$，因此，14人对应的分率是$\frac{2}{3}-\frac{3}{8}=\frac{7}{24}$，以此求出车间总人数和原有甲、乙两组人数。

甲组人数：$14\div(\frac{2}{1+2}-\frac{3}{5+3})\times\frac{5}{5+3}=30$（人）

乙组人数：$14\div(\frac{2}{1+2}-\frac{3}{5+3})\times\frac{3}{5+3}=18$（人）

## 第11讲　比与比例（二）

### 一、对应训练

1. 客车速度$\frac{1}{6}$，货车速度$\frac{1}{6}\times(1+\frac{1}{5})=\frac{1}{5}$，客货车速度比5∶6，路程一定，速度与时间成反比，客货车时间比是6∶5，客车行完全程用6小时，所以货车行完全程用5小时。
2. $20\div(3-2)\times3=60$（个）　$480\div60=8$（小时）
3. $60\div(\frac{1}{15}\times\frac{5}{4})=720$（千米）
4. 提示：甲乙两人加工零件的时间相同，所以工作总量与工作效率成正比，工作总量就等于他们工作效率的比，已知乙比甲多加工了120个零件，所以，

   $120\div(\frac{5}{4+5}-\frac{4}{4+5})=1080$（件）

5. 客车每小时所行路程：$22 \div (\frac{6}{5} - \frac{5}{6}) = 60$（千米）

甲乙两地的距离：$60 \times 16 = 960$（千米）

## 二、变式训练

1. 提示：工作量一定，工作效率和工作时间成反比，甲乙两人工作效率的比 5∶3。完成任务两人用的时间相同，工作效率与工作量成正比，所以完成任务两人工作量的比是 5∶3，也就是说甲完成了 5 份，乙完成了 3 份，甲比乙多两份与甲比乙多加工 30 个相对应。

这批零件总数：$30 \div (5-3) \times (5+3) = 120$ 个

2. 提示：甲 4 小时行的路程 = 乙 8 小时行的路程，甲乙的速度比是2∶1，甲每小时比乙快 35 千米，

$35 \times \frac{2}{2-1} \times (8+4) = 840$（千米）

3. 提示：先求出货车与客车的路程差。由于相遇时间相同，速度与路程成正比，那么两车的路程比也是 3∶4，根据路程差，求出两地间的距离。

$6 \times 2 \div \frac{4-3}{4+3} = 84$（千米）

4. 提示：甲乙工作效率比为 7∶6，时间一定，与工作量成正比，所以，6 小时甲乙工作量的比也是 7∶6，因此乙 6 小时完成工作总量的$\frac{6}{7+6}$，

乙单独做需要的时间：$1 \div (\frac{6}{7+6} \div 6) = 13$（小时）

5. 提示：师徒二人工作时间相同，工作效率与工作量成正比，即

$\frac{1}{5}:\frac{1}{9}=9:5$，再按比例分配：

师傅：$168\times\frac{9}{9+5}=108$（个）

徒弟：$168\times\frac{5}{9+5}=60$（个）

三、拔高训练

1. 提示：甲乙丙三人共植树 697 棵

甲 $\times\frac{1}{2}=$ 乙 $\times\frac{2}{5}$　甲:乙 $=\frac{2}{5}:\frac{1}{2}=4:5=12:15$

甲 $\times\frac{1}{3}=$ 丙 $\times\frac{2}{7}$　甲:丙 $=\frac{2}{7}:\frac{1}{3}=6:7=12:14$

甲:乙:丙 $=12:15:14$

甲：$697\times\frac{12}{12+15+14}=204$（棵）

乙：$697\times\frac{15}{12+15+14}=255$（棵）

丙：$697\times\frac{14}{12+15+14}=238$（棵）

2. 提示：小军行走的路程比小红多$\frac{1}{14}$，即把小红行走的路程看做 14 份，小军走的路程就该是（$14+1$）$=15$（份）。小红行走的时间比小军行走的时间多$\frac{1}{16}$，即把小军行走的时间看做 16 份，小红用的时间就该是（$16+1$）$=17$（份）根据速度 = 路程 ÷ 时间，求出小军与小红的速度比。

$[(1+14)\div16]:[14\div(1+16)]=\frac{15}{16}:\frac{14}{17}=255:224$

# 第 12 讲　分数与百分数

## 一、对应训练

1. $15\times4\div(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5})=100$（米）

2. 提示：借出$\frac{7}{8}$，剩下的就是$\frac{1}{8}$，又添了 125 本，剩下的就占原来总数的$\frac{1}{3}$，增加的分率正好与 125 本相对应。

$125\div[\frac{1}{3}-(1-\frac{7}{8})]=600$（本）

3. 提示：快车行了全程的$\frac{3}{4}$，慢车行了全程的$\frac{3}{5}$，说明两车共行了一个全程还多（$\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-1$）$=\frac{7}{20}$。这时两车相距 210 千米，就和$\frac{7}{20}$相对应，进而求出甲乙两地的距离。

$210\div(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-1)=600$（千米）

4. 提示：要找到与已知量的和或差所对应的分率，

$(172+6-8)\div(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})=170\div\frac{17}{24}=240$（页）

5. 提示：商品的进价 = 现销售价 − 赢利，

现价为：$(240+180)\div(20\%-10\%)=4200$（元）

进价为：$4200\times(1-10\%)-180=3600$（元）

或　$4200\times(1-20\%)+240=3600$（元）

## 二、变式训练

1. 提示：由“第二期挖了余下的$\frac{2}{7}$”就是把第一期挖 180 米后，余下的看做单位 1，又根据由第二期挖后，已挖的和没挖的长度相等 180 米 + 余下的$\frac{2}{7}$ = 余下的（$1-\frac{2}{7}$）

$180\div[(1-\frac{2}{7})-\frac{2}{7}]+180=600$（米）

2. $[1200+1200\times(1+\frac{1}{8})]\div(1-\frac{1}{4})=3400$（千克）

3. 提示：第一书柜比第二书柜多 $32\times2=64$（本）

第一书柜占这批图书的 58%，第二书柜占这批图书的（1 − 58%），

$32\times2\div[58\%-(1-58\%)]=64\div16\%=400$（本）

4. 提示：甲乙存款的比是 4:5，又根据乙比甲多 24 元，

甲存款：$24\div(5-4)\times4=96$（元）

乙存款：$24\div(5-4)\times5=120$（元）

5. 提示：由题意知道“把第二天看了余下的$\frac{2}{5}$”转化成第二天看全书的（$1-\frac{1}{4}$）$\times\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$

$15\div[(1-\frac{1}{4})\times\frac{2}{5}-\frac{1}{4}]=300$（页）

## 三、拔高训练

1. 提示：二月份生产的是一月份的（1 + 20%）；三月份又是二月份的（1 + 20%），三个月生产总量求出后，进而得出全年计

划量。

$$[200+200\times(1+20\%)+200\times(1+20\%)\times(1+20\%)]\div\frac{1}{2}$$

$=728\div\frac{1}{2}$

$=1456$（吨）

2. 提示：六年级学生比三年级多38人，先求出六年级学生比三年级学生多百分之几。以三年级学生为单位“1”四年级是三年级的$1+25\%$，五年级学生为三年级的$(1+25\%)\times(1-10\%)$，六年级学生为三年级的$(1+25\%)\times(1-10\%)\times(1+10\%)$，即

六年级为三年级学生的：$(1+25\%)\times(1-10\%)\times(1+10\%)=\frac{99}{80}$

三年级：$38\div(\frac{99}{80}-1)=160$（人）

四年级：$160\times(1+25\%)=200$（人）

五年级：$200\times(1-10\%)=180$（人）

六年级：$180\times(1+10\%)=198$（人）

三至六年级共有：$160+200+180+198=738$（人）

## 第13讲　浓度问题

### 一、对应训练

1. 提示：将25%的盐水稀释到10%，盐水和水的重量都发生了变化，但盐水中的盐稀释前后都没变，可先求出盐的重量，再求出稀释后盐水的重量，从而求出加水克数。

$100\times25\%\div10\%-100=150$（克）

2. $80\times(1-25\%)\div(1-40\%)-80=20$（克）

3. 提示：可根据原来溶液中的水和加盐后溶液中的水相等的关系，列方程解。解：设需加盐 $x$ 克

$450\times(1-20\%)=(450+x)\times(1-40\%)$

$x=150$

4. 提示：稀释前后，水和药液发生了变化，农药没有变，先求出纯农药的重量，再求出稀释后药水的重量。

解：$600\times25\%\div3\%-600=4400$（克）

5. 提示：这只杯中加水前后盐的重量没变，根据加水前后杯中含盐的重量用等量关系，列出方程来解。

解：设这只杯中原有盐水 $x$ 千克

$20\%x=(x+10)\times15\%$

$x=30$

$30\times20\%=6$（千克）

## 二、变式训练

1. 提示：混合后糖水浓度 $=\dfrac{\text{两种糖水中糖重量的和}}{\text{两种糖水溶液的和}}$

$(300\times20\%+200\times35\%)\div(300+200)\times100\%=26\%$

2. 提示：在配制过程中，前后酒精溶液的总重量是确定的，即 10 千克，同时可根据配制前后所含酒精重量相等，列方程求解。

解：设需要取浓度为 85% 的酒精 $x$ 千克，则需要取浓度为 40% 的酒精（$10-x$）千克

$85\%x+(10-x)\times40\%=10\times67\%$

$x=6$

40%的酒精需要取：10 - 6 = 4（千克）

3. 提示：根据配制溶液前后，溶液中的溶质（盐）没有改变，利用这个关系，列方程求解。

解：设从甲桶 70%浓度的盐水中取 $x$ 克，

从乙桶 55%浓度的盐水中取（3000 - $x$）克

$$70\%x + (3000 - x) \times 55\% = 3000 \times 65\%$$

$$x = 2000$$

从乙桶中取出盐水：3000 - 2000 = 1000（克）

4. 提示：混合前后溶液的总重量不变，混合前两种糖水中的糖重量的和，等于混合后糖水中糖的重量。再根据"溶质的重量 ÷ 溶液的重量 = 浓度。"

解：$(400 \times 25\% + 100 \times 5\%) \div (400 + 100) = 21\%$（混合后浓度）

5. 提示：根据要配制浓度为 20%的盐水 100 克，求得新配溶液的含盐量减去原来溶液的含盐量，就是新增加盐的重量。

加盐的重量：$100 \times 20\% - 40 \times 8\% = 16.8$（克）

加水的重量：$100 - 40 - 16.8 = 43.2$（克）

## 三、拔高训练

1. 提示：两种不同浓度的盐水混在一起，所得新溶液中的溶质，溶剂就是两种盐水中溶质、溶剂之和。根据其中任意一种等量关系，列方程解答。

解：设应加 5%的盐水 $x$ 克

$$500 \times 20\% + 5\%x = (500 + x) \times 15\%$$

$$x = 250$$

2. 提示：从第一次开始，要求出每次操作后杯中还剩多少克盐，又加满水后浓度是多少。

原来杯中含盐：$100\times80\%=80$（克）

第一次倒出盐：$40\times80\%=32$（克）

加满水后盐水浓度：$(80-32)\div100=48\%$

第二次倒出盐：$40\times48\%=19.2$（克）

加满水后盐水浓度：$(80-32-19.2)\div100=28.8\%$

第三次倒出盐：$40\times28.8\%=11.52$（克）

加满水后盐水浓度：$(80-32-19.2-11.52)\div100=17.28\%$

反复三次杯中的浓度为17.28%。

## 第14讲　利润和利息

### 一、对应训练

1. 提示：按利息＝本金×利率×时间×(1－20%)直接计算

   $50000\times2.07\%\times3\times(1-20\%)=2484$（元）

2. 提示：进价36元，售价44元，每只获利8元，卖到剩6只时已获利80元（除成本），那么一共获利$36\times6+80=296$（元），除以每只获利8元，等于售出的只数，再加上剩下的6只球拍，就是一共的球拍数。

   $(36\times6+80)\div(44-36)+6=43$（只）

3. $(3324-3000)\div(1-20\%)\div6\div3000=2.25\%$

4. $84\div[(1+20\%)\times88\%-1]=1500$（元）

   或设商品的成本为$x$元，列方程求解

   $x\times(1+20\%)\times88\%-x=84$

   $0.056x=84$

   $x=1500$

5. 提示：按定价卖出，获利润 650 元，按定价的 80% 卖出则亏损 480 元

按定价的 80% 出售本该获利 $650\times80\%=520$（元），实际却亏损 480 元，这样共损失 $520+480=1000$（元），正好是定价的 20%。

$(650\times80\%+480)\div(1-80\%)=5000$（元）

## 二、变式训练

1. 提示：先求现价，再求进价。

现价：$(180+240)\div(20\%-10\%)=4200$（元）

进价：$4200\times(1-10\%)-180=3600$（元）

2. $8622.08\div[1+3.24\%\times3\times(1-20\%)]=8000$（元）

3. 第一个月获利：$5000\times20\%\times50=50000$（元）

第二个月每台售价：$5000\times[(1+20\%)\times75\%]=4500$（元）

第二个月共亏损：$(5000-4500)\times30=15000$（元）

这批电脑共获利：$50000-15000=35000$（元）

4. 提示：设这件商品为 1，则定价为 $(1+30\%)$，售价为 $(1+30\%)\times80\%=104\%$。实际每件获利 $104\%-1=4\%$，与 84 元相对应，可得成本价。

$84\div[(1+30\%)\times80\%-1]=2100$（元）

5. $10\times(1+20\%)\times\frac{3}{4}\div(1-20\%)=11.25$（万元）

## 三、拔高训练

1. 提示：设这件服装进价为 1。

$288\div[(1+60\%)-(1+60\%)\times(1-20\%)\times(1-20\%)]$

$=500$（元）

2. 乙店进价为：$18\div[(1+20\%)-(1-10\%)\times(1+25\%)]=240$（元）

甲店进价为：$240\times(1-10\%)=216$（元）

## 第15讲　圆的周长与面积

### 一、对应训练

1. 提示：梯形面积减去扇形面积：

$(10+12)\times10\div2-\frac{90°}{360°}\times3.14\times10^2=31.5$（平方厘米）

2. 提示：这个阴影部分的周长包括小圆周长的一半，大圆周长的一半，大圆半径和小圆半径的一半。

$3.14\times3\times2\times\frac{1}{2}+3.14\times2\times2\times\frac{1}{2}+3+(2\times2-3)=19.7$（厘米）

3. 提示：图中的梯形面积减去直径为6厘米的半圆面积，就求出阴影的面积，半圆的半径是梯形的高。

$(10+6)\times(6\div2)\div2-3.14\times(6\div2)^2\div2=9.87$（平方厘米）

4. 提示：大圆的面积减去小圆的面积就是阴影面积

$3.14\times(2+5)^2-3.14\times2^2=141.3$（平方厘米）

5. 提示：用圆面积减去两个直角三角形面积，就是阴影面积。

$3.14\times(\frac{6}{2})^2-6\times\frac{6}{2}\div2\times2=10.26$（平方分米）

### 二、变式训练

1. 周长：$60\times2+3.14\times30=214.2$（厘米）

面积：$60\times30+3.14\times(\frac{30}{2})^2=2506.5$（平方厘米）

2. 周长：$3.14\times3+\frac{60°}{360°}\times2\times3.14\times3=12.56$（厘米）

3. 提示：将圆心和圆与正方形的内切点连接起来，正好是一个小正方形，小正形的边长为圆的半径，通过大正方形的面积，求出小正形的面积，再求出 $r^2$，进而求出圆的面积。

$r^2=12\div4=3$（平方厘米）

圆的面积：$\pi r^2=3.14\times3=9.42$（平方厘米）

4. 提示：半径增加$\frac{1}{4}$后，它的面积就增加 36 平方分米，那么现在半径与原来半径的比是（$1+\frac{1}{4}$）：$1=5:4$，半径的平方比等于面积的比，再求出面积的比为 25∶16，从而求出原来圆的面积。

$(1+\frac{1}{4}):1=5:4$ $\quad$ $5^2:4^2=25:16$

$36\div(25-16)\times16=64$（平方分米）

5. 提示：用 $R$、$r$ 分别表示大小两个圆的半径，圆环的面积为 $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi$（$R^2-r^2$），而图中阴影部分的面积是两个正方形的差即 $R^2-r^2$。

圆环的面积为：$\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi\times20=62.8$（平方厘米）

## 三、拔高训练

1. 提示：做辅助线连接 $AO$。

解法一：阴影部分的面积可用扇形 $ABO$ 减去三角形 $ABO$ 的面积。

$$3.14\times(12\div2)^2\times\frac{180^\circ-30^\circ\times2}{360^\circ}-(12\div2)\times5.2\div2$$

$=22.08$（平方厘米）

解法二：阴影部分的面积还可以用半圆的面积，先减去扇形 $AOC$ 的面积，再减去三角形 $ABO$ 的面积。

$3.14\times(12\div2)^2\times\frac{1}{2}-3.14\times(12\div2)^2\times\frac{60^\circ}{360^\circ}-(12\div2)\times5.2\div2=22.08$（平方厘米）

2. 提示：可以把图中阴影部分看做在一个直角三角形中，直角三角形是长方形面积的$\frac{1}{2}$，直角三角形的面积减去正方形与扇形的面积差，就是阴影的面积。

$(4+4)\times4\div2-(4\times4-3.14\times4^2\times\frac{90^\circ}{360^\circ})=12.56$（平方厘米）

## 第16讲　组合图形

### 一、对应训练

1. 提示：等边三角形的顶角是$60^\circ$，半径是边长的$\frac{1}{2}$，三个扇形合起来正好是个半圆，三个扇形的面积和，就是半圆的面积，阴影部分的周长是圆周长的一半。

面积：$\frac{1}{2}\times3.14\times(10\div2)^2=39.25$（平方厘米）

周长：$\frac{1}{2}\times3.14\times10=15.7$（厘米）

2. 提示：直角三角形面积减去扇形面积就是阴影部分的面积。

$8\times8\div2-3.14\times8^2\times\frac{45°}{360°}=6.88$（平方厘米）

3. 提示：正方形面积减去扇形面积加上半圆面积。

$10\times10-3.14\times10^2\times\frac{90°}{360°}+3.14\times(\frac{10}{2})^2\div2=60.75$（平方厘米）

4. 提示：用大扇形的面积减去空白部分面积，即求得阴影部分面积，而空白部分的面积可以用长方形面积减去小扇形面积，可求得

$3.14\times6^2\div4-(6\times4-3.14\times4^2\div4)=16.82$（平方厘米）

5. 提示：作出正方形阴影中的对角线，将阴影部分平分成两份，用扇形面积减去等腰直角三角形的面积，可求得

$(3.14\times8^2\times\frac{90°}{360°}-8\times8\times\frac{1}{2})\times2=36.48$（平方厘米）

## 二、变式训练

1. 提示：作正方形空白部分对角线，再作辅助线将两半圆重叠阴影部分平分成两份，每份分别向上移动到对角线空白位置，原图阴影部分面积就转成了等腰直角三角形的面积。

$4\times4\div2=8$（平方厘米）

2. 提示：这是两个相等的正方形，把左边正方形中的阴影部分向右平移，阴影部分就正好是一个正方形，求阴影部分的面积就是求这个正方形的面积。

$7\times7=49$（平方厘米）

3. 提示：三个半圆的半径都相等，将空白半圆的直径两端与另两个半圆的圆心相连，两个阴影扇形分别顺时针、逆时针，以空白半圆直径两端为轴旋转，填补在大小相等的空白的两个扇形

上，拼成了一个长方形。

$4\times2=8$（平方厘米）

4. 提示：将图中两块阴影割补拼接或一个小长方形

$2\times4=8$（平方厘米）

5. $[3.14\times(4\div2)^2\times\frac{90°}{360°}-2\times2\times\frac{1}{2}]\times8=9.12$（平方厘米）

**三、拔高训练**

1. 提示：一个半圆面积加上一个等腰直角三角形面积，就等于阴影部分的面积。

$3.14\times(\frac{6}{2})^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times6\times\frac{6}{2}=23.13$（平方分米）

2. $3.14\times(\frac{4}{2})^2\times\frac{90°}{360°}-\frac{1}{2}\times\frac{4}{2}\times\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\times4\times\frac{4}{2}\times\frac{1}{2}=3.14$（平方厘米）

## 第17讲　圆柱与圆锥

**一、对应训练**

1. （1）254.34　（2）28.26　47.1　（3）54　6　（4）8　（5）6

2. 侧面积：$3.14\times2\times2\times8=100.48$（平方分米）

底面积：$3.14\times2^2=12.56$（平方分米）

需用防锈漆：$2\times(100.48+12.56)\times2=452.16$（克）

3. 提示：截一次多两个切面，三段截两次多4个切面。

$3.14\times(\frac{10}{2})^2\times(3-1)\times2=314$（平方厘米）

4. 提示：可分别求出圆锥、圆柱的体积，然后合并一起求出总体积。

$\frac{1}{3}\times3.14\times(\frac{9.42}{2\times3.14})^2\times0.6+3.14\times(\frac{9.42}{2\times3.14})^2\times2$

$=15.543$（立方米）

5. 提示：圆锥底面直径是正方形的棱长，高与棱相等，剩下的体积等于原正方形体积减去圆锥体积。

正方形体积：$6^3=216$（立方厘米）

圆锥体积：$\frac{1}{3}\times3.14\times(\frac{6}{2})^2\times6=56.52$（立方厘米）

剩下的体积是原正方形的：$(216-56.52)\div216\approx73.8\%$

## 二、变式训练

1. 提示：增加 4 个底面积。

底面积：$6.28\div[(3-1)\times2]=1.57$（平方分米）

原来这根钢材的体积：$1.57\times(1.2\times10)=18.84$（立方分米）

2. 提示：当切成大小一样的两块后，截面为一个等腰三角形，其底为 $10\times2=20$ 厘米，三角形的高也是圆锥的高。

圆锥的高：$120\div2\times2\div20=6$（厘米）

圆锥的体积：$\frac{1}{3}\times3.14\times10^2\times6=628$（立方厘米）

3. 先求出圆锥的底面半径：$25.12\div3.14\div2=4$（米）

再求出圆锥的体积：$3.14\times4^2\times3\times\frac{1}{3}=50.24$（立方米）

最后求出圆柱形粮囤的高：$50.24\div[3.14\times(\frac{4}{2})^2]=4$（米）

4. 提示：得到的是底面相对的两个圆锥形体，从三角形顶点向底边所作的垂线，就是圆锥的底面半径，三角形底边的一半就是圆锥的高，旋转体表面积是两圆锥侧面积之和，即两个扇形面积之和。

体积：$\frac{1}{3}\times3.14\times3^2\times\frac{8}{2}\times2=75.36$（立方厘米）

表面积：$3.14\times3\times5\times2=94.2$（平方厘米）

5. 提示：用两个同样图中的工件，可拼成一个底面直径为 20 厘米，高为（46 +54）厘米的圆柱体，这个圆柱体侧面积、体积的一半，即为所求。

需要铁皮：$3.14\times20\times(54+46)\times\frac{1}{2}=3140$（平方厘米）

工件体积：$3.14\times(\frac{20}{2})^2\times(54+46)\times\frac{1}{2}=15700$（立方厘米）

## 三、拔高训练

1. 提示：长方形的长即是圆柱体的底面周长，则圆柱体的底面直径为 $18.84\div3.14=6$（分米），于是圆柱的高为 $10-6=4$（分米）

于是圆柱的表面积为 $18.84\times4+3.14\times(\frac{6}{2})^2\times2=131.88$（平方分米）

2. 提示：根据三角形的比例关系，设圆锥底面半径为 $r$，则水面半径为$\frac{r}{2}$，圆锥高为 $h$，水面的高为$\frac{h}{2}$。

根据公式，圆锥形容器的容积为$\frac{1}{3}\pi r^2h$，水的体积是$\frac{1}{3}\pi(\frac{r}{2})^2\times\frac{h}{2}$，圆锥形容器的容积是水体积的$\frac{1}{3}\pi r^2h\div\frac{1}{3}\pi(\frac{r}{2})^2$

$\times\frac{h}{2}=8$（倍）

那么还能装水：$3\times(8-1)=21$（升）

## 第 18 讲　包含与排除

### 一、对应训练

1. $65+87-112=40$（人）
2. $26+21-(50-17)=14$（人）
3. $26+30-12+8=52$（人）
4. $36-(25-15)-(23-15)-15=3$（人）
5. $32+35-(52-8)=23$（人）

### 二、变式训练

1. $(17+14)-26=5$（人）
2. $46-18-7-6=15$（人）
3. $77+86-(100-5)=68$（人）
4. 提示：由题意得前五名同学合在一起，将五道试题做对了三遍，他们的总分恰好是试题总分的三倍。

   $(16+25+30+28+21)\div3=40$（分）
5. $9\div(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-1)\div40\%=150$（人）

### 三、拔高训练

1. 提示：根据已知可知，16 人是五年级和其他年级的，12 人是四年级和其他年级的，（16 + 12）就是四年级、五年级与两个

其他年级的人数和，再减去20除以2，就得出其他年级的人数，该校参加英语比赛获奖的总人数是

$(16+12-20)\div 2+20=24$（人）

2. （1）参加美术小组有175人。

（2）参加美术小组，没有参加体育小组的有 $175-75=100$（人）。

## 第19讲　抽屉原理

### 一、对应训练

1. 1992年共366天，把它看成366个抽屉，把370个人放入366个抽屉中，至少有一个抽屉里有两个人，因此其中至少有两个学生的生日是同一天。
2. 一年有12个月，把12个月看成是12个抽屉，把15个小朋友放入12个抽屉中，至少有一个抽屉中有两个小朋友，因此，至少有两个小朋友在同一个月出生。
3. 买书的类型中买一本的有4种，买两本的有6种，买三本的有4种，买四本的有1种，共有 $4+6+4+1=15$（种），把这15种情况看做15个抽屉，要保证有两位同学买到相同的书，至少要去16位同学。
4. 棋子的颜色有3种，要保证有两个同色，最少要取4个棋子。
5. 把这三种颜色看成3个抽屉，要保证有一对同色的就要摸出4件内衣，这时拿出一对同色的后，3个抽屉中还剩2件内衣。以后只要再摸出两件就可以保证有一对同色的，因此要保证有3对同色的最少要摸 $4+2+2=8$（件）内衣。

二、变式训练

1. 把 100 米平均分成 11 等份，看做 11 个抽屉，这 12 人看做东西，由抽屉原理得知，至少有两个人属于同一等份，这两个人的距离不大于$\frac{100}{11}=9\frac{1}{11}$（米），当然小于 10 米。

2. 一年有 12 个月，把 12 个月看做抽屉，181 人放入 12 个抽屉中，根据抽屉原理（2），由于 $181=15\times12+1$，这 181 人至少有 $15+1=16$ 人是2002 年同一个月出生的。

3. 闰年 366 天，10 年最多有 3 个闰年，所以 11 ~ 20 岁的学生中最多有 $365\times7+366\times3=3653$（个）不同生日。而 $11000=3\times3653+41$，将 3653 看做抽屉，将 11000 名学生按出生年月日，放入这些抽屉中，根据抽屉原理（2），其中至少有 4 人是同年同月同日生。

4. 制造 26 个抽屉（1）（2，50）（3，49）…（25，27）（26），从中取 27 个数，必有两个数从同一抽屉中取出，所以必有两个数的和等于 52。

5. 数字 1 ~ 10 可制造 5 个抽屉（10，5）（9，3）（8，4）（7，1）（6，2），所以至少要取 6 个数，可以保证这些数中一定能找到两个数，使其中一个数是另一个数的倍数。

三、拔高训练

1. 梨和苹果总数的奇偶性可分为 4 个抽屉（奇奇）（奇偶）（偶奇）（偶偶），根据抽屉原理（1）最少要把这些苹果和梨分成 5 堆。

2. 只参加一个组的有 4 种类型，只参加两个组的有 6 种类型，只参加三个组的有 4 种类型，参加四个组的有 1 种类型。

把 $4+6+4+1=15$（种）类型看做15个抽屉，因 $46=15\times3+1$，所以班级中至少有4名同学参加的小组完全相同。

## 第20讲　周期规律

### 一、对应训练

1. 提示：当若干个8连乘时，积的个位数字，变化情况如下：

| 几个8连乘 | 1　2　3　4　5　6　7　8…… |
|---|---|
| 积的个位数 | 8　4　2　6　8　4　2　6…… |

（1）$27\div4=6\cdots\cdots3$　　个位数字是2

（2）$1993\div4=498\cdots\cdots1$　　个位数字是8

2. 提示：先找出规律　第100数组是（100　500　1000）

这三个数的和是1600。

3. 从1978年至1999年共有17个平年和5个闰年，

共有：$365\times17+366\times5=8035$（天）

$8035\div7=1147\cdots\cdots6$　所以2000年的1月1日是星期六。

4. 12种动物为一个周期，而 $2100\div12=175$，因为公元1年属猴年，所以公元2100年属羊年。

5. 需要循环的次数：$\frac{2}{3}\div(\frac{1}{9}+\frac{1}{12})=\frac{24}{7}>3$

3个循环后剩下的工作量：$\frac{2}{3}-(\frac{1}{9}+\frac{1}{12})\times3=\frac{1}{12}$

最后由甲做的时间：$\frac{1}{12}\div\frac{1}{9}=\frac{3}{4}$（小时）

一共需要的时间：$2\times3+\frac{3}{4}=6\frac{3}{4}$（小时）

## 二、变式训练

1. 提示：根据三色花的排列，$5+9+13=27$，因此花的排列是以 27 为一个周期，那么 $249\div27=9\cdots\cdots6$，所以最后一朵是黄花，红花共有 $5\times9+5=50$（朵），黄花有 $9\times9+1=82$（朵），绿花有 $13\times9=117$（朵）。

2. 提示：时针转 1 圈是 12 小时，$200\div12=16$（圈）$\cdots\cdots8$（小时）
$12-8=4$（点）小明爸爸出差离家时是 4 点钟。

3. 提示：把 6 分钟看做一个循环周期。

循环一次的工作量：$(\frac{1}{24}+\frac{1}{18})\times(1+2)=\frac{7}{24}$

总工作量里有几个：$\frac{7}{24}$: $1\div\frac{7}{24}=3\frac{3}{7}$

3 个循环后剩下的工作量：$1-\frac{7}{24}\times3=\frac{1}{8}$

一共需要多少时间：$6\times3+1+(\frac{1}{8}-\frac{1}{24})\div\frac{1}{18}=20\frac{1}{2}$（分钟）

4. 提示：甲的工作效率是乙的 2 倍，
$20\div2=10$（天）

5. 提示：钱用分做计数单位，43 位同学的钱数各不相同，因此他们带的钱是从 8 分到 50 分这 43 个数。

从下表来分析买画片的情况找出周期规律：

| 钱数 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 分张数 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 3 | 2 | 4 | 3 | … |
| 3 分张数 | 1 | 3 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 | … |

观察上表买 3 分画片张数的规律是 13204 这五个数为一个循环周期，由此可推算出 $43\div5=8$ 余 3，

共买了：$1+3+(1+3+2+4)\times 8=84$（张）

## 三、拔高训练

1. 提示：把7天看做一个周期

$1\div(\frac{1}{150}\times 5+\frac{1}{180}\times 6)=15$

$7\times 15-1=104$（天）

2. 提示：从图中可以看到一个圆圈一共有12步，红跳蚤从标有数字0的圆圈，按顺时针方向跳了1991步，而$1991\div 12=165$余11，所以落在的圆圈是11，同理黑跳蚤沿时针方向跳了1949步，而$1949\div 12=162$余5，即落在圆圈7里，$7\times 11=77$。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝小学生奥数夺冠　　６年级
作者＝徐向阳主编
页数＝２８１
ＳＳ号＝１２２０９２６３
出版日期＝２００８．１０

目录