文都教育®

2022
文都考研数学系列

全国硕士研究生招生考试

高等数学辅导讲义

适用：全程

策划◎文都考研数学命题研究组
编著◎汤家凤

精品
文都图书畅销系列

罗列考查要求，了解考试范围
总结基本理论，掌握基础知识
讲解重点题型，提升解题能力

中国原子能出版社

文都教育®

2022

文都考研数学系列

全国硕士研究生招生考试

高等数学辅导讲义

适用：全程

策划◎文都考研数学命题研究组

编著◎汤家凤

中国原子能出版社

图书在版编目（CIP）数据

全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义 / 汤家凤编著. —北京 ：中国原子能出版社，2018.12（2021.1 重印）
ISBN 978-7-5022-9557-8

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 286827 号

全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义

出版发行	中国原子能出版社（北京市海淀区阜成路 43 号 100048）
责任编辑	王 青
特约编辑	何妍妍
印 刷	大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
经 销	全国新华书店
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	16.5 **字 数** 412 千字
版 次	2018 年 12 月第 1 版 2021 年 1 月第 11 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-9557-8 **定 价** 42.00 元

网址：http://www.aep.com.cn **E-mail：atomep123@126.com**
发行电话：010-68452845

郑重声明

买正版图书　听精品课程

文都考研数学名师汤家凤老师编著的《全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义》《全国硕士研究生招生考试线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导教程》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书，这类图书印制质量差，错误百出，不仅使考生蒙受金钱与精力的损失，而且误导考生，甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益，文都教育特发如下郑重声明：

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人，一经发现，文都教育将严厉追究其法律责任；

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的，立即取消其代理、合作资格，并依法追究其法律和相关经济责任；

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者，文都图书事业部将给予奖励；若举报者为参加考研的考生，文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷。

全国各地举报电话：010-88820418，13488713672

电子邮箱：tousu@wendu.com

中国原子能出版社

世纪文都教育科技集团股份有限公司

授权律师：北京市安诺律师事务所

刘　岩

2021年1月

前言 Preface

数学是全国硕士研究生招生考试工程类和经济类考生必考的一门课程，且数学课程分值为 150 分，与专业课的分值相同，数学考试的成败直接关系到整个考试的成败，而高等数学是数学试卷中分值最大的一门课程，其中高等数学在数学一、数学三试卷中的分值为 90 分，占总分的 60%，在数学二试卷中的分值为 120 分，占总分的 80%，所以高等数学的复习是整个考研数学复习的重中之重。

高等数学所涉及的内容非常多，知识体系系统性非常强，题型多，方法技巧性高，很多同学虽然在复习高等数学上花费了大量的时间，但收效甚微，甚至对数学产生惧怕心理。高等数学的复习要有正确的方法，抓好复习的几个关键环节，系统全面掌握高等数学的理论体系和方法体系，善于归纳和总结，通过努力可以很好地掌握这门课程。本书是根据作者近三十年考研数学辅导的心得和教案精心总结而成的，使理论更加系统化、通俗化，便于掌握和记忆，对题型和方法进行了全面总结和概括。认真阅读此书，可使考生分析问题、解决问题的能力得到大幅度提高，尽快进入最佳学习状态，达到事半功倍的复习效果。

本书的特点有：

1. 每章给出考查要求，便于考生了解各个知识点的考查范围和要求达到的程度。

2. 对每章的基本理论都给出了系统的归纳和总结，理论部分包括基本概念、基本原理、基本公式，同时配备基础题，以加强对所学知识和原理的理解，对重要的原理给出了新的理论证明，对需要重点掌握的知识点给出了延伸解读。

3. 重点题型讲解部分给出每个部分的基本题型和综合题型，通过重点题型的掌握使大家对考查的重点和形式有非常深入的了解，更加适应考试要求，尤其重要的是，重点题型部分给出了很多新视角的题型，很多新的题型在过去的考试过程中也被证明是命题者思考的方向。

本书适用于数学一、数学二、数学三，并对不同数学种类考试内容不同的部分给出了说明。

本书作者在若干年教学过程中，借鉴和参考了若干国内外的优秀著作，得到很多的收获和启发，在此作者对这些书的作者表示衷心感谢！

由于作者的水平有限，教学过程中及本书中仍然有很多地方需要改进和提高，恳请读者和广大同仁提出宝贵的批评和建议。

汤老师微博　　汤老师微信公众号

汤老师一直播 ID：186288809

汤家凤

2021 年 1 月于南京

目录 Contents

第一章　极限与连续

考查要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

第一节　函　数

一、基本概念

1. 函数——设变量 x 的取值范围为 D，若对任意的 $x \in D$，按照某种对应关系总有唯一确定的值 y 与 x 对应，称 y 为 x 的函数，记为 $y = f(x)$，其中 D 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域.

2. 复合函数——设 $u = \varphi(x)(x \in D_1)$，$y = f(u)(u \in D_2)$，且对任意的 $x \in D_1$ 有 $\varphi(x) \in D_2$，称 y 为 x 的复合函数，记为 $y = f[\varphi(x)]$.

3. 反函数——设 $y = f(x)(x \in D)$ 为单调函数，其值域为 $f(D)$，对任意的 $y \in f(D)$，有唯一确定的 $x \in D$ 与之对应，称 x 为 y 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$.

【例】　求函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数.

【解】　由 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 得

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = e^y,$$

因为 $(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = 1$，所以有

$$-x + \sqrt{x^2 + 1} = e^{-y},$$

两式相减得原函数的反函数为

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

4. 基本初等函数 —— 称$\begin{cases} x^a, \\ a^x(a>0,a\neq 1), \\ \log_a x(a>0,a\neq 1), \\ \sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x, \\ \arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x \end{cases}$为基本初等函数.

5. 初等函数 —— 由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而成的式子构成的函数称为初等函数.

二、函数的初等特性

1. 有界性 —— 设 $y=f(x)(x\in D)$,若存在 $M>0$,对任意的 $x\in D$,总有 $|f(x)|\leqslant M$,称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

【注解】

(1) 若存在常数 M_1,对任意的 $x\in D$,有 $f(x)\geqslant M_1$,称 $f(x)$ 在 D 上有下界;若存在常数 M_2,对任意的 $x\in D$,有 $f(x)\leqslant M_2$,称 $f(x)$ 在 D 上有上界.

(2) 若 $|f(x)|\leqslant 2$,则 $f(x)\geqslant -2$ 且 $f(x)\leqslant 2$,即若 $f(x)$ 有界,则 $f(x)$ 既有下界又有上界;

反之,若 $f(x)\geqslant -2$ 且 $f(x)\leqslant 4$,则 $|f(x)|\leqslant 4$,即若 $f(x)$ 既有下界又有上界,则 $f(x)$ 有界,故 $f(x)$ 有界的充分必要条件是 $f(x)$ 既有下界又有上界.

2. 单调性 —— 设 $y=f(x)(x\in D)$,若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$,总有 $f(x_1)<f(x_2)$,称 $y=f(x)$ 在 D 上单调增加;若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$,总有 $f(x_1)>f(x_2)$,称 $y=f(x)$ 在 D 上单调减少.

3. 奇偶性 —— 设 $y=f(x)(x\in D)$,其中 D 关于原点对称,若 $f(-x)=-f(x)$,称 $y=f(x)$ 在 D 上为奇函数;若 $f(-x)=f(x)$,称 $y=f(x)$ 在 D 上为偶函数.

【例 1】 设 $f(x)=e^{\sin x}-e^{-\sin x}$,判断其奇偶性.

【解】 显然 $x\in(-\infty,+\infty)$,且

$$f(-x)=e^{\sin(-x)}-e^{-\sin(-x)}=e^{-\sin x}-e^{\sin x}=-f(x),$$

故 $f(x)$ 为奇函数.

【例 2】 设 $f(x)$ 为连续函数,判断 $F(x)=\int_a^x[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$ 的奇偶性.

【解】 令 $g(t)=f(t)-f(-t)$,则 $F(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$,

由 $g(-t)=f(-t)-f(t)=-[f(t)-f(-t)]=-g(t)$,得 $g(t)$ 为奇函数;

$$F(-x)=\int_a^{-x}g(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}\int_{-a}^{x}g(-u)(-\mathrm{d}u)$$
$$=\int_{-a}^{x}g(u)\mathrm{d}u=\int_{-a}^{a}g(u)\mathrm{d}u+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u,$$

因为 $g(t)$ 为奇函数,所以$\int_{-a}^{a}g(u)\mathrm{d}u=0$,于是 $F(-x)=\int_a^x g(u)\mathrm{d}u=F(x)$,

故 $F(x)$ 为偶函数.

4. 周期性 —— 设 $y=f(x)(x\in D)$,若存在 $T>0$,对任意的 $x\in D$,$x+T\in D$,有 $f(x+T)=f(x)$,称 $y=f(x)$ 为周期函数,T 称为 $y=f(x)$ 的周期.

三、特殊函数

1. 符号函数——称 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, x<0,\\0, \quad x=0,\\1, \quad x>0\end{cases}$ 为符号函数，显然 $|x|=x\operatorname{sgn}x$.

2. 狄利克雷函数——称 $D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\0, x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$ 为狄利克雷函数.

3. 取整函数——称 $y=[x]$ 为取整函数，其函数值为 x 左侧最大的整数值；若 x 为整数，则函数值即为 x，如：$[-\sqrt{2}]=-2,[\sqrt{5}]=2,[3]=3$.

【注解】

(1) $[x]\leqslant x$.

(2) $[x+y]=[x]+[y]$ 不是总成立的，但 $[x+m]=[x]+m$（其中 m 为整数）是一定成立的.

第二节　极　限

一、基本概念

1. 极限的定义

情形	定义
数列极限的定义($\varepsilon-N$)	若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\vert a_n-A\vert<\varepsilon$，称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.
函数自变量趋于有限值的极限定义($\varepsilon-\delta$)	若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\vert x-a\vert<\delta$ 时，有 $\vert f(x)-A\vert<\varepsilon$，称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to a$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.
函数自变量趋于无穷大的极限定义($\varepsilon-X$)	若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，有 $\vert f(x)-A\vert<\varepsilon$，称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.
	若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $\vert f(x)-A\vert<\varepsilon$，称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.
	若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $\vert x\vert>X$ 时，有 $\vert f(x)-A\vert<\varepsilon$，称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

【例 1】　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-2}{3n}=\dfrac{1}{3}$.

【证明】　对任意的 $\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n-2}{3n}-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{2}{3n}<\varepsilon$ 等价于 $n>\dfrac{2}{3\varepsilon}$，

取 $N=\left[\dfrac{2}{3\varepsilon}\right]+1$，则对任意的 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{n-2}{3n}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$，

由数列极限的定义，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-2}{3n}=\dfrac{1}{3}$.

【例 2】 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$,反之不对.

【证明】 对任意的$\varepsilon>0$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,所以存在$N>0$,当$n>N$时,有$|a_n-A|<\varepsilon$.

因为$||a_n|-|A||\leqslant|a_n-A|$,

所以当$n>N$时,有$||a_n|-|A||<\varepsilon$,

由数列极限的定义得$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.

设$a_n=(-1)^n$,显然$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$,但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

【注解】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$的本质:即当$n\to\infty$时,$a_n$与常数$A$无限接近.故"若对任意的$\varepsilon>0$,总存在自然数$N>0$,当$n>N$时,有

$$|a_n-A|<M\varepsilon\text{(其中}M\text{为正常数)"}$$

为数列$\{a_n\}$以常数A为极限的定义.

(2)$x\to a$包含$\begin{cases}x\neq a,\\x\to a^-,x\to a^+,\end{cases}$如:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^2}=0$.

(3) 极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在与$f(a)$存在与否无关,如:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x+1}=-\frac{1}{2},$$

但函数$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$在$x=1$处没有定义.

(4) 若对任意的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,当$x\in(a-\delta,a)$时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

称A为$f(x)$在$x=a$的左极限,记为$f(a-0)$;

若对任意的$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,当$x\in(a,a+\delta)$时,有

$$|f(x)-B|<\varepsilon,$$

称B为$f(x)$在$x=a$的右极限,记为$f(a+0)$,

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在的充分必要条件是$f(a-0)$,$f(a+0)$都存在且相等.

(5) 对$\lim\limits_{x\to b}f(x)$,若$f(x)$的表达式中含$a^{\frac{h(x)}{x-b}}$或$a^{\frac{h(x)}{b-x}}$时,一定要讨论左、右极限,

如:$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$,研究$\lim\limits_{x\to1}f(x)$,

当$x\to1^-$时,$\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$,从而$e^{\frac{1}{x-1}}\to0$,于是$f(1-0)=0$;

当$x\to1^+$时,$\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$,从而$e^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty$,于是$f(1+0)=1$,

因为$f(1-0)\neq f(1+0)$,所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

2. 无穷小

(1) 无穷小的定义　若$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$,称$\alpha(x)$当$x\to a$时为无穷小.

(2) 无穷小的比较

设 $\alpha \to 0, \beta \to 0$，则

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=0$，称 β 为 α 的高阶无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=k(k \neq 0,\infty)$，称 β 为 α 的同阶无穷小，记为 $\beta=O(\alpha)$，

特别地，若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，称 β 为 α 的等价无穷小，记为 $\alpha \sim \beta$.

二、极限性质

(一) 极限的一般性质

定理 1(极限的唯一性)　若极限存在，则极限一定是唯一的.

定理 2(极限的保号性)　设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$(或 $A<0$)，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

证明　不妨设 $A>0$，取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$，

因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，所以存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$|f(x)-A|<\dfrac{A}{2}$，或 $-\dfrac{A}{2}<f(x)-A<\dfrac{A}{2}$，

从而 $f(x)>\dfrac{A}{2}>0$.

推论 1　设 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$) 且 $\lim f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

推论 2　设 $f(x)\geqslant g(x)$ 且 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则 $A\geqslant B$.

【注解】

(1) 极限第一保号性口诀"函数极限正，则去心邻域正；函数极限负，则去心邻域负".

(2) 极限第二保号性口诀"函数不负，极限不负；函数不正，极限不正".

(3) 极限第三保号性"函数的大小次序与极限的大小次序一致".

(4) 若 $f(x)>0$，且 $\lim f(x)=A$，则 $A>0$ 不一定正确. 如：$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

【例 1】　设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}=-1$，$x=0$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点？

【解】　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}=-1$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，再由 $f(x)$ 连续得 $f(0)=1$；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}=-1<0$，所以存在 $\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，

$\dfrac{f(x)-1}{x^2}<0$，即 $f(x)<1=f(0)$，

故 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点.

【例 2】　设 $f(x)$ 连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{\sin\pi x}=1$，$x=1$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点？

【解】 由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{\sin\pi x}=1$得$\lim\limits_{x\to1}f'(x)=0$，再由$f(x)$连续可导得$f'(1)=0$.

因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{\sin\pi x}=1>0$，所以存在$\delta>0$，当$0<|x-1|<\delta$时，$\dfrac{f'(x)}{\sin\pi x}>0$，

当$x\in(1-\delta,1)$时，由$\sin\pi x>0$得$f'(x)>0$；

当$x\in(1,1+\delta)$时，由$\sin\pi x<0$得$f'(x)<0$，

故$x=1$为函数$f(x)$的极大值点.

定理3(有界性)

(1)(数列极限的有界性) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，则数列$\{a_n\}$有界，反之不对.

(2)(函数极限的局部有界性) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则存在$\delta>0$及$M>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，$|f(x)|\leqslant M$.

证明 (1) 令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，取$\varepsilon=1$，则存在$N>0$，当$n>N$时，有

$|a_n-A|<1$，从而$|a_n|<1+|A|$，

取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1+|A|\}$，则对一切的$n$，有$|a_n|\leqslant M$；

反之，取$a_n=1+(-1)^n$，显然$|a_n|\leqslant2$，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$不存在.

(2) 取$\varepsilon=1$，因为$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，所以存在$\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，有

$|f(x)-A|<1$，从而$|f(x)|<1+|A|$，

取$M=1+|A|$，则当$0<|x-a|<\delta$时，有$|f(x)|\leqslant M$.

定理4(列极限与子列极限的关系)

(1) 若列极限存在，则该列的任一子列存在相同的极限.

(2) 若某一子列极限存在，则该列极限不一定存在.

【注解】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}$与$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}$都存在且相等；类似地，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}a_{3n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{3n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{3n+2}$都存在且相等.

(2) 若列极限存在，则该列的任一子列极限存在，如：

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}\text{，则}\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}=\frac{1}{6}；$$

反之，若某一个子列极限存在，则列极限不一定存在，如：$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$，

取$x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to0(n\to\infty)$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos2n\pi=1$；

但因为$x=0$为$\cos\dfrac{1}{x}$的振荡间断点，所以$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

(二) 极限的运算性质

1. 四则运算性质

设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；

(2)$\lim f(x)g(x)=AB$；

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

【注解】

若 $\lim f(x)$ 或 $\lim g(x)$ 不存在，则极限的四则运算性质不成立.

2. 复合函数极限运算性质

(1) 设 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$ 且 $\varphi(x) \neq a$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A$.

(2) 设 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = f(a)$，又 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(a)$.

【注解】

设 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$，

$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$，其中 $a_0 b_0 \neq 0$，

则
$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ 0, & m > n, \\ \infty, & m < n. \end{cases}$$

(三) 极限存在准则

1. 迫敛定理(夹逼定理)

(1)(数列型) 设 $\begin{cases} a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \\ \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = A, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = A$.

(2)(函数型) 设 $\begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x), \\ \lim f(x) = \lim h(x) = A, \end{cases}$ 则 $\lim g(x) = A$.

【注解】

夹逼定理中，$\lim f(x) = \lim h(x) = A$ 不可用 $\lim[h(x) - f(x)] = 0$ 代替.
如：$e^x - e^{-x} \leqslant e^x \leqslant e^x + e^{-x}$，且 $\lim\limits_{x \to +\infty}[h(x) - f(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^{-x} = 0$，但 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

【例 1】 设 $a > 0, b > 0, c > 0$，求极限 $\lim\limits_{n \to \infty}(a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}}$.

【解】 不妨设 a, b, c 中最大的数为 a，

由 $a^n \leqslant a^n + b^n + c^n \leqslant 3a^n$ 得 $a \leqslant (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} \leqslant 3^{\frac{1}{n}} a$，

因为 $\lim\limits_{n \to \infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$，所以由夹逼定理得 $\lim\limits_{n \to \infty}(a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = a$，

一般地，有 $\lim\limits_{n \to \infty}(a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a, b, c\}$.

【例 2】 求极限 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

【解】 令 $b_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$，显然 $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant b_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$，

因为 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$，所以由夹逼定理得

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right) = 1.$$

2. 单调有界的数列必有极限

【注解】

(1) 若存在 $M>0$,使得 $|a_n|\leqslant M$,称数列$\{a_n\}$有界.

(2) 若存在 M_1,使得 $a_n\geqslant M_1$,称数列$\{a_n\}$有下界;若存在 M_2,使得 $a_n\leqslant M_2$,称数列$\{a_n\}$有上界,数列有界的充分必要条件是数列有上界和下界.

(3) 情形一:$\{a_n\}$单调递增

若数列$\{a_n\}$无上界,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$;

若数列$\{a_n\}$有上界,即存在 M,使得 $a_n\leqslant M$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

情形二:$\{a_n\}$单调递减

若数列$\{a_n\}$无下界,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$;

若数列$\{a_n\}$有下界,即存在 M,使得 $a_n\geqslant M$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(四) 无穷小的性质

1. 无穷小的基本性质

(1) 设 $\alpha\to0,\beta\to0$,则$\begin{cases}\alpha\pm\beta\to0,\\ \alpha\beta\to0,\\ k\alpha\to0,\end{cases}$ 即有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小,常数与无穷小之积仍是无穷小.

(2) 设 $|\alpha|\leqslant M,\beta\to0$,则 $\alpha\beta\to0$,即有界函数与无穷小之积还是无穷小.

如:$\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

(3)$\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 $\alpha\to0$.

2. 等价无穷小的性质

(1)$\begin{cases}\alpha\sim\alpha,\\ \alpha\sim\beta\Rightarrow\beta\sim\alpha,\\ \alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma\Rightarrow\alpha\sim\gamma.\end{cases}$

(2) 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$ 且 $\lim\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}=A$,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=A$.

(3)$\alpha\sim\beta$ 的充分必要条件是 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

3. $x\to0$ 时,常用的等价无穷小

(1)$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$;

(2)$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,$1-\cos^a x\sim\dfrac{a}{2}x^2$;

(3)$(1+x)^a-1\sim ax$;

(4)$a^x-1\sim x\ln a$.

三、两个重要极限

利用两个极限存在准则,可以得到在极限计算过程中非常重要的两个极限:

1. $\lim\limits_{\Delta\to0}\dfrac{\sin\Delta}{\Delta}=1$.

2. $\lim\limits_{\Delta\to0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=e$.

【例 1】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x^2)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin x^2)^{\frac{1}{\sin x^2}}\right]^{\frac{\sin x^2}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x}}=e^2$.

【例 2】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

【解】 $$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

【例 3】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

【解】 $$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}-1}}\right\}^{x^2\cdot\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

【例 4】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 $$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^x-1}}\right]^{\frac{1}{x}\cdot\frac{2^x-1}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2^x-1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}}=e^{\frac{\ln 2}{2}}=\sqrt{2}.$$

【注解】

(1) 如图 1-1 所示，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，由 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\sin x$，$S_{扇AOB}=\dfrac{1}{2}x$，$S_{\mathrm{Rt}\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}\tan x$，得 $\sin x<x<\tan x$.

(2) 记住如下三个常见的不等式：

① 当 $x\geqslant 0$ 时，$\sin x\leqslant x$；

② 当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$；

③ 当 $x\neq 0$ 时，$e^x>1+x$.

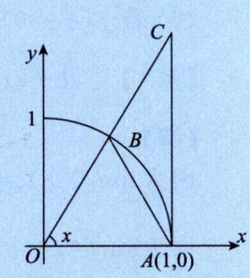


图 1-1

第三节　连续与间断

一、基本概念

1. 函数连续性概念

(1) 函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续 —— 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，称函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

(2) 函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续 —— 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上有定义，若满足：

①$f(x)$ 在(a,b)内点点连续；

②$f(a)=f(a+0)$，$f(b)=f(b-0)$，称函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，记为 $f(x)\in C[a,b]$.

【注解】

(1) 函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续的充分必要条件是 $f(a-0)=f(a)=f(a+0)$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续,则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处连续,反之不对.

若函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续,即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$,

显然 $0\leqslant||f(x)|-|f(a)||\leqslant|f(x)-f(a)|$,

由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$,即函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处连续.

反之,设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ 对任意的一点 $x=a$,显然 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在,即 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处不连续,但 $|f(x)|\equiv 1$ 处处连续.

(3) 若函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续,则 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的去心邻域内不一定连续,如:$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ x^2, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$,即 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,但对任意的 $x=a\neq 0$,因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在,所以 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处不连续.

2. 间断点及分类

若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)$,称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续,且 $x=a$ 为 $f(x)$ 的间断点.间断点的分类如下:

(1) 若 $f(a-0)$,$f(a+0)$ 都存在,称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点,其中

① 若 $f(a-0)=f(a+0)(\neq f(a))$,称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的可去间断点;

② 若 $f(a-0)\neq f(a+0)$,称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

(2) 若 $f(a-0)$,$f(a+0)$ 至少有一个不存在,称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

【例 1】 设 $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}$,求 $f(x)$ 的间断点并分类.

【解】 $x=-1$,$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点,

因为 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\infty$,所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点;

因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-3}{2x}=0$,所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

【例 2】 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-1}$,求 $f(x)$ 的间断点并分类.

【解】 $x=-1$,$x=0$,$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

由 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{\ln(-x)}{x+1}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln[1-(x+1)]}{x+1}=\dfrac{1}{2}$ 得 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点;

由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ 得 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点;

由 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ 得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

【例 3】 设 $f(x)=\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$,求 $f(x)$ 的间断点并分类.

【解】 $x=0$,$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

由 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}=0$,

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ 得 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点;

由 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}=e\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}=e$,

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}\cdot e^{\frac{1}{x}}=e\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-1}}}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}=-e$ 得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

二、闭区间上连续函数的性质

1.(最值定理) 若 $f(x)\in C[a,b]$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最小值和最大值.

2.(有界定理) 若 $f(x)\in C[a,b]$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界.

3.(零点定理) 若 $f(x)\in C[a,b]$,且 $f(a)f(b)<0$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

4.(介值定理) 若 $f(x)\in C[a,b]$,对任意的 $\eta\in[m,M]$,存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\eta$.

【注解】

(1) 设 $f(x)\in C[a,b]$,证明关于 $\xi\in(a,b)$ 的命题时,一般使用零点定理.

(2) 设 $f(x)\in C[a,b]$,证明关于 $\xi\in[a,b]$ 的命题时,一般使用介值定理.

(3) 设 $f(x)\in C[a,b]$,若出现函数值相加的条件时,一般使用介值定理.

【例 1】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $f(0)=0,f(1)=1$,证明:存在 $c\in(0,1)$,使得
$$f(c)=1-2c.$$

【证明】 令 $\varphi(x)=f(x)-1+2x$,显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,
$$\varphi(0)=-1,\quad \varphi(1)=2,$$
因为 $\varphi(0)\varphi(1)<0$,所以存在 $c\in(0,1)$,使得 $\varphi(c)=0$,即 $f(c)=1-2c$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,在 $(0,2)$ 内可导,且 $f(0)=1,f(1)+2f(2)=3$,证明:存在 $\xi\in(0,2)$,使得 $f'(\xi)=0$.

【证明】 因为函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上取到最小值 m 和最大值 M,由 $3m\leqslant f(1)+2f(2)\leqslant 3M$,得 $m\leqslant1\leqslant M$,再由介值定理,存在 $c\in[1,2]$,使得 $f(c)=1$.因为 $f(0)=f(c)=1$,所以由罗尔定理,存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,2)$,使得 $f'(\xi)=0$.

重点题型讲解

题型一　极限的概念与性质

【例 1】 "对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n\geqslant N$ 时,$|a_n-A|\leqslant3\varepsilon$"是数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A 的(　　).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

【解】 本题考查对数列极限定义本质的理解，事实上对任意的$\varepsilon>0$，$3\varepsilon>0$也是任意的，$|a_n-A|\leqslant 3\varepsilon$ 表示当n趋于无穷大时，a_n与A无限接近，与数列极限的原始定义本质相同，应选(C).

【例 2】 下列结论正确的是（　　）.

(A) 若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都无界，则$\{a_nb_n\}$无界

(B) 若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都无界，则$\{a_n\pm b_n\}$无界

(C) 若数列$\{a_n\}$趋于无穷大，$\{b_n\}$无界，则$\{a_nb_n\}$趋于无穷大

(D) 若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都趋于无穷大，则$\{a_nb_n\}$趋于无穷大

【解】 取$a_n=\begin{cases}n, n=1,3,5,\cdots,\\0, n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$ $b_n=\begin{cases}0, n=1,3,5,\cdots,\\n, n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$显然$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都无界，但$a_nb_n=0$，(A)不对；取$a_n=\dfrac{1+n}{2}$，$b_n=\dfrac{1-n}{2}$，显然$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都无界，但$a_n+b_n=1$，(B)不对；取$a_n=n^2$，$b_n=\begin{cases}0, n=1,3,5,\cdots,\\n, n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$显然$\{a_n\}$趋于无穷大，$\{b_n\}$无界，但$\{a_nb_n\}$无界而不趋于无穷大，(C)不对，应选(D).

【例 3】 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，$\{a_n\}$为数列，下列命题正确的是（　　）.

(A) 若$\{a_n\}$收敛，则$\{f(a_n)\}$收敛　　(B) 若$\{a_n\}$单调，则$\{f(a_n)\}$收敛

(C) 若$\{f(a_n)\}$收敛，则$\{a_n\}$收敛　　(D) 若$\{a_n\}$有界，则$\{f(a_n)\}$收敛

【解】 因为$f(x)$单调有界，所以若$\{a_n\}$单调，则$\{f(a_n)\}$单调有界，故$\{f(a_n)\}$收敛，应选(B).

【例 4】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 等于（　　）.

(A)0　　(B)1　　(C)∞　　(D) 不存在但不是∞

【解】 本题考查列与子列极限的关系，若存在两个子列极限不同，则列极限不存在.

取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}\cos\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}2n\pi\cos 2n\pi=\infty$；

取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}\cos\dfrac{1}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$不存在但不是$\infty$，应选(D).

题型二　左、右极限

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan 3x+e^{ax}-1}{x}, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ \dfrac{(1+\sin x)^{\tan 5x}-1}{x\arcsin x}, & x>0,\end{cases}$ 且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，求a的值.

【解】 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\arctan 3x+e^{ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\arctan 3x}{x}+\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=3+a$，

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+\sin x)^{\tan 5x}-1}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\tan 5x\ln(1+\sin x)}-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan5x\cdot\ln(1+\sin x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{5x\cdot\sin x}{x^2}=5\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=5,$$

因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在,所以$3+a=5$,故$a=2$.

【例 2】 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^3-x|}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$研究$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

【解】 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}\cdot|x^2-1|=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1,$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}\cdot|x^2-1|=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=1,$

因为$f(0-0)\neq f(0+0)$,所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

【例 3】 设$f(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$,研究$\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

【解】 由$\lim\limits_{x\to1^-}2^{\frac{1}{x-1}}=0$,得$f(1-0)=1$;由$\lim\limits_{x\to1^+}2^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,得$f(1+0)=-1$,

因为$f(1-0)\neq f(1+0)$,所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

【例 4】 设极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}-a[x]\right)$存在,其中$[x]$为对$x$取整,求$a$的值.

【解】 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}-a[x]\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}-1-a(-1)=2+a-1=a+1,$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}-a[x]\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+1=1,$

因为$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}-a[x]\right)$存在,所以$a=0$.

题型三　不定型极限的计算问题

【思路分析】

(1) 不定型极限的计算应该是极限计算中最重要的类型. 不定型极限的分类:

基本不定型:$\dfrac{0}{0}$型、1^∞型.

其他不定型:$\dfrac{\infty}{\infty}$型、$0\times\infty$型、$\infty-\infty$型、∞^0型、0^0型.

(2) $\dfrac{0}{0}$型极限计算常用方法有:等价无穷小替换、洛必达法则、麦克劳林公式等.

$\dfrac{0}{0}$型极限计算注意如下习惯:

出现$u(x)^{v(x)}$时,一般化为$e^{v(x)\ln u(x)}$;

出现 $\ln(1+\Delta)$ 时，一般使用 $\ln(1+\Delta)\sim\Delta$；

出现 $\Delta-1$ 时，一般使用 $e^{\varphi}-1\sim\varphi$ 及 $(1+\varphi)^{a}-1\sim a\varphi$；

$x,\sin x,\tan x,\arcsin x,\arctan x$ 中任两个函数之差为三阶无穷小.

(3) 1^{∞} 型极限计算时按如下两个步骤进行：

第一步，凑 $(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$ 的形式；第二步，恒等变形.

【例 1】 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{\sin x}-1}{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x^2}+\cos x-2}{x\arcsin x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\arcsin x}-e^{x}}{x^3}$；　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{x}{\sin x}}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{x}-1}{x^3}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^{\sin x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x\cdot\ln(1+2x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot\ln(1+2x)}{x^2}=2.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

(3)
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}+\cos x-2}{x\arcsin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}+\cos x-2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{-x^2}-1)-(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{3}{2}.$$

(4)
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+x}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+x}}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

(5)
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\arcsin x}-e^{x}}{x^3}=\lim_{x\to0}e^{x}\cdot\frac{e^{\arcsin x-x}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)(-x^2)}{x^2}=\frac{1}{6}.$$

(6)
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\dfrac{x}{\sin x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x-\sin x}{\sin x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

$$(7)\ \lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^x-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\cdot\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\ln\frac{1+\cos x}{2}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

【例 2】 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos2x}{x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}$； (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cos^2x-\sin^2x}{x^4}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\cos x\cdot\frac{1-\cos2x}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=\frac{5}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4x}$

$$\xlongequal{\sin x=t}\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$,

由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{\sin^3x}\xlongequal{\sin x=t}\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6}$,

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$ 得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cos^2x-\sin^2x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{2}{3}.$$

【例 3】 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0,f'(0)=\pi$，求

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{x^3}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}$.

【解】

(1) 由 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{6}f'(0)=\frac{\pi}{6}.$$

(2) 由 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)\xlongequal{x^2-t^2=u}\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot f(x^2)}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=\frac{1}{4}f'_+(0)=\frac{\pi}{4}.$$

【例 4】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x-\ln(1+x)}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-\sin^2 x}$.

【解】 (1) 由 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得 $x-\ln(1+x)\sim\frac{x^2}{2}$，

由 $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$ 得 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$，

再由 $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ 得 $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2)$，

于是 $\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sim-\frac{x^2}{4}$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x-\ln(1+x)}=-\frac{1}{2}$.

(2) 由 $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ 得 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$，

由 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$ 得 $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\sim\frac{1}{12}x^4$，

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^2-\sin^2 x}=\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-\sin^2 x}=\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+\sin x}\cdot\frac{x^3}{x-\sin x}$

$$=\frac{1}{24}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{1}{4}.$$

【例 5】 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\mathrm{e}}\right]^x$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\arcsin x-x}}\right]^{\frac{\arcsin x-x}{x^3}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{3x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(-x^2)}{3x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(1+\sin x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

(3) **方法一** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}\right]^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{e}\right]^x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{e}\right]^{\frac{e}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}}\right\}^{x\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{e}}$$

$$=e^{\frac{1}{e}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{\frac{1}{x}}}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}e^{\frac{1}{e}\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}}$$

其中$\dfrac{1}{e}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-\frac{1}{2},$$

所以原极限$=e^{-\frac{1}{2}}$.

方法二 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}\right]^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{e^x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

【例 6】 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+4x+2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin 2x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2+\sqrt{4x^2+2x-1}}{\sqrt{x^2-2x+4}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\ln(1-x)$;　　(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-x^2}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

(2) **方法一** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+4x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x-2}{2x+\sqrt{4x^2+4x+2}}=-1.$

方法二 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+4x+2}\right)=-2\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}}-1\right)$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t}-2\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{t},$$

由$(1+x)^a-1\sim ax(x\to 0)$，得$\left(1+t+\dfrac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{t^2}{2}\right)$，

故$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2+4x+2})=-2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{t^2}{2}\right)}{t}=-1.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin 2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin 2x\ln x}=e^{2\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot x\ln x}=e^{2\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^0=1.$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2+\sqrt{4x^2+2x-1}}{\sqrt{x^2-2x+4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}-\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}}$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0}\frac{1+2t-\sqrt{4+2t-t^2}}{-\sqrt{1-2t+4t^2}}=1.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x\cdot\dfrac{\ln(1-x)}{x}=-\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1-x)}{-x}$

$$=-\lim_{x\to 0^+}x\ln x=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}x=0.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot x\ln x}$

$$=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^0=1.$$

【例 7】 设$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+2^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+2^{\frac{1}{x}})}+k[x]\right\}$存在，求$k$的值.（其中$[x]$表示$x$的取整函数）

【解】 由$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+2^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+2^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{\ln(1+2^{2t})}{\ln(1+2^t)}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2\cdot 2^{2t}\ln 2}{1+2^{2t}}}{\dfrac{2^t\cdot\ln 2}{1+2^t}}$

$$=2\lim_{t\to-\infty}2^t\cdot\frac{1+2^t}{1+2^{2t}}=0,$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}k[x]=k\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-k$，得$\lim\limits_{x\to 0^-}\left\{\dfrac{\ln(1+2^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+2^{\frac{1}{x}})}+k[x]\right\}=-k.$

由$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+2^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+2^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+2^{2t})}{\ln(1+2^t)}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2\cdot 2^{2t}\ln 2}{1+2^{2t}}}{\dfrac{2^t\ln 2}{1+2^t}}=2\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2^t+2^{2t}}{1+2^{2t}}=2$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}k[x]=k\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$，得$\lim\limits_{x\to 0^+}\left\{\dfrac{\ln(1+2^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+2^{\frac{1}{x}})}+k[x]\right\}=2$，

因为$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+2^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+2^{\frac{1}{x}})}+k[x]\right\}$存在，所以 $k=-2$.

题型四　n 项和或积的极限计算

【思路分析】

n 项和或积的极限计算的一般方法：

(1) 先计算和或积，再计算极限.

(2) 夹逼定理(分子或分母次数不齐时，一般使用夹逼定理).

(3) 定积分的定义(分子及分母次数都齐时，使用定积分定义求极限).

【例 1】　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}\right]^{n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}(x\neq 0)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})(|x|<1)$.

【解】　(1) 因为$\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，所以原式$=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}$，所以原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}=e^{-1}$.

(3) $$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot 2^n\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(4) $$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

【例 2】　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

【解】　(1) 因为$\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+i}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}(i=1,2,\cdots,n)$，

所以$\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}} \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$,

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}}=\dfrac{1}{2}$,所以由夹逼定理,得原式$=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为$\dfrac{i}{n^2+n+n} \leqslant \dfrac{i}{n^2+n+i} \leqslant \dfrac{i}{n^2+n+1}(i=1,2,\cdots,n)$,

所以$\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \leqslant \dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n} \leqslant \dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$,

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$,所以由夹逼定理,得原式$=\dfrac{1}{2}$.

【例 3】 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2}).$$

(3) 显然$\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n} \leqslant \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}$,

且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{\pi i}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

所以由夹逼定理，得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{\pi}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}=e^{\int_0^1\ln x\,dx}$,

而$\int_0^1\ln x\,dx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 dx=-1$，所以原式$=e^{-1}$.

(5) 因为$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2}{n}}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$,

又因为$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2}{n}}-\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}+\dfrac{1}{n+\frac{(n+1)^2}{n}}$,

且$\dfrac{1}{n+\frac{(n+1)^2}{n}}\to 0(n\to\infty)$，$\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}\to 0(n\to\infty)$,

所以由夹逼定理，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

题型五　极限存在性问题

【思路分析】

数列极限存在性证明通常分为：

情形一：不存在递推关系$a_{n+1}=f(a_n)$；

情形二：存在递推关系$a_{n+1}=f(a_n)$.

证明数列$\{a_n\}$单调性证明通常有如下方法：

(1) 数学归纳法；

(2) 使用重要不等式；

(3) 判断$a_{n+1}-a_n$的符号；

(4) 若$a_{n+1}=f(a_n)$，令$y=f(x)$，若$f'(x)\geqslant 0$，则$\{a_n\}$单调，其中若$a_1\leqslant a_2$，则数列$\{a_n\}$单调递增；若$a_1\geqslant a_2$，则数列$\{a_n\}$单调递减；

(5) 若$a_{n+1}=f(a_n)$中$f(a_n)$具有中值的形式，可以使用中值定理.

【例 1】 $a_1>0$，且$a_{n+1}=\ln(1+a_n)(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求此极限； (2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}}{a_n}$.

【解】 (1) 已知$a_1>0$，设$a_k>0$，则$a_{k+1}=\ln(1+a_k)>0$，由数学归纳法得

$$a_n>0(n=1,2,\cdots);$$

因为$x>0$时，$\ln(1+x)<x$，所以$a_{n+1}=\ln(1+a_n)<a_n$，即数列$\{a_n\}$单调递减，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$两边取极限得$A=\ln(1+A)$，解得$A=0$.

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{a_n}{\ln(1+a_n)}}{a_n}\xlongequal{a_n=t}\lim_{t\to0}\frac{\ln\dfrac{t}{\ln(1+t)}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln\left[1+\dfrac{t-\ln(1+t)}{\ln(1+t)}\right]}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}.$$

【例 2】 设$a_1\in(0,\pi)$，$a_{n+1}=\sin a_n$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求此极限.

【证明】 因为$a_1\in(0,\pi)$，所以$a_n\in(0,1](n=2,3,\cdots)$，即数列$\{a_n\}$有界.

因为当$x\geqslant0$时，$\sin x\leqslant x$，所以$a_{n+1}=\sin a_n\leqslant a_n$，即数列$\{a_n\}$单调减少，根据极限存在准则得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由$a_{n+1}=\sin a_n$得$A=\sin A$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

【例 3】 设$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，…，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在并求之.

【证明】 显然$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，令$y=\sqrt{2+x}$，因为$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}>0$，又因为$a_1<a_2$，所以数列$\{a_n\}$单调增加.

现证明$a_n\leqslant2$.

$a_1=\sqrt{2}\leqslant2$，设$a_k\leqslant2$，则$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}\leqslant\sqrt{2+2}=2$，由数学归纳法得$a_n\leqslant2$，即$\{a_n\}$单调增加有上界，根据极限存在准则得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，由$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，得$A=\sqrt{2+A}$，得$A=-1$（舍去），$A=2$.

【例 4】 设$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

【证明】 由$a_n+\dfrac{1}{a_n}\geqslant2$得$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant1$，即数列$\{a_n\}$有下界；

再由$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)-a_n=\dfrac{1-a_n^2}{2a_n}\leqslant0$，得数列$\{a_n\}$单调减少，

故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

【例 5】 设$0<a_1<2$，又$a_{n+1}=\sqrt{a_n(2-a_n)}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

【证明】 由$a_{n+1}=\sqrt{a_n(2-a_n)}\leqslant\dfrac{a_n+(2-a_n)}{2}=1$，得数列$\{a_n\}$有上界；

再由$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n(2-a_n)}-a_n=\dfrac{2a_n(1-a_n)}{\sqrt{a_n(2-a_n)}+a_n}\geqslant0$得数列$\{a_n\}$单调增加，

故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

【例 6】 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少、非负、连续，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

【证明】 $$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x,$$

因为 $f(x)$ 单调减少，所以 $\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_n^{n+1} f(n+1)\mathrm{d}x = f(n+1)$，于是 $a_{n+1}-a_n \leqslant 0$，即数列 $\{a_n\}$ 单调减少.

又 $a_n = [f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x] + [f(2)-\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x] + \cdots + [f(n-1)-\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x] + f(n)$，因为 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(1)\mathrm{d}x = f(1)$，所以 $f(1)-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$，同理 $f(2)-\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0, \cdots, f(n-1)-\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$，且 $f(n)\geqslant 0$，所以 $a_n \geqslant 0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

【例 7】 (1) 证明：当 $x>0$ 时，$\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$；

(2) 设 $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

【证明】 (1) 令 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$，$f(0)=0$，

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}>0(x>0)$，

由 $\begin{cases} f(0)=0, \\ f'(x)>0(x>0) \end{cases}$ 得 $f(x)>0(x>0)$，故当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$.

(2) $a_{n+1}-a_n = \dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，

由 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) > \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n+1}$ 得 $a_{n+1}<a_n$，即 $\{a_n\}$ 单调减少.

由 $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n} > \int_1^2 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x + \int_2^3 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x + \cdots + \int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(n+1)$ 得

$a_n > \ln(n+1)-\ln n > 0$，即 $\{a_n\}$ 单调递减有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

题型六 含参数的极限问题

【例 1】 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-b)\sin x}{\mathrm{e}^x-a}=3$，求 a,b 的值.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-b)\sin x}{\mathrm{e}^x-a}=3$，得 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x-a)=0$，于是 $a=1$.

由 $3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-b)\sin x}{\mathrm{e}^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}\cdot(\cos x-b)=1-b$，得 $b=-2$.

【注解】

(1) 若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在且 $\lim g(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$.

(2) 若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，若 $\lim g(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$；反之亦然.

【例 2】 设$\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x+ax^{-2}+b)=0$,求 a,b 的值.

【解】 方法一:洛必达法则

由 $0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos 3x+a+3bx^2}{3x^2}$,得$\lim\limits_{x\to 0}(3\cos 3x+a+3bx^2)=0$,于是 $a=-3$.

再由 $0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos 3x+a+3bx^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-9\sin 3x+6bx}{6x}=-\dfrac{9}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}+b$,得 $b=\dfrac{9}{2}$.

方法二:麦克劳林公式

$x^{-3}\sin 3x+ax^{-2}+b=\dfrac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}$,

由 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$,得 $\sin 3x=3x-\dfrac{9}{2}x^3+o(x^3)$,则

$\sin 3x+ax+bx^3=(a+3)x+(b-\dfrac{9}{2})x^3+o(x^3)$,

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+ax+bx^3}{x^3}=0$,所以 $a=-3,b=\dfrac{9}{2}$.

【例 3】 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$,求 a,b 的值.

【解】 $\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b=\dfrac{(1-a)x^2+(b-a)x+1+b}{x+1}$,

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$,所以$\begin{cases}1-a=0,\\ b-a=3,\end{cases}$故 $a=1,b=4$.

题型七　中值定理法求极限问题

【例 1】 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{\pi}{n}-\arctan\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

【解】 令 $f(x)=\arctan x$,则

$\arctan\dfrac{\pi}{n}-\arctan\dfrac{\pi}{n+1}=f\left(\dfrac{\pi}{n}\right)-f\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)=\dfrac{1}{1+\xi^2}\cdot\dfrac{\pi}{n(n+1)}$,其中$\xi\in\left(\dfrac{\pi}{n+1},\dfrac{\pi}{n}\right)$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{\pi}{n}-\arctan\dfrac{\pi}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\dfrac{1}{1+\xi^2}\cdot\dfrac{\pi}{n(n+1)}=\pi$.

【例 2】 求$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{2x-1}}-e^{\frac{1}{2x+1}})$.

【解】 令 $f(t)=e^t$,则 $e^{\frac{1}{2x-1}}-e^{\frac{1}{2x+1}}=f\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)-f\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)=e^{\xi}\cdot\dfrac{2}{4x^2-1}$,其中 $\xi\in\left(\dfrac{1}{2x+1},\dfrac{1}{2x-1}\right)$. 于是$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(e^{\frac{1}{2x-1}}-e^{\frac{1}{2x+1}})=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{\xi}\cdot\dfrac{2}{4x^2-1}=\dfrac{1}{2}$.

【例 3】 求$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\ln\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)-\ln\left(1+\sin\dfrac{1}{x+1}\right)\right]$.

【解】 令 $f(t)=\ln(1+t)$,$f'(t)=\dfrac{1}{1+t}$,则

$$\ln\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)-\ln\left(1+\sin\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{1+\xi}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x+1}\right),$$

其中 $\sin\dfrac{1}{x+1}<\xi<\sin\dfrac{1}{x}$，

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x+1}\right)$，

令 $g(t)=\sin t, g'(t)=\cos t$，则

$\sin\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x+1}=\cos\eta\cdot\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$，其中$\dfrac{1}{x+1}<\eta<\dfrac{1}{x}$，

则原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\eta\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=1$.

【例 4】 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(0)=0, f''(0)=2$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}$.

【解】 由拉格朗日中值定理得

$f(x)-f[\ln(1+x)]=f'(\xi)[x-\ln(1+x)]$，其中 $\ln(1+x)<\xi<x$.

则
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\frac{f'(\xi)}{x}.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}=f''(0)\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}.$$

当 $x<0$ 时，由 $\ln(1+x)<\xi<x$ 得 $1<\dfrac{\xi}{x}<\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\xi}{x}=1$；

当 $x>0$ 时，由 $\ln(1+x)<\xi<x$ 得$\dfrac{\ln(1+x)}{x}<\dfrac{\xi}{x}<1$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\xi}{x}=1$，

于是$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi}{x}=1$，故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}=\dfrac{1}{2}\cdot2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi}{x}=1$.

题型八 含变积分限的函数极限问题

【例 1】 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{x+1}-1)}$.

【解】 由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sec^2x}{3x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$，得 $x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3$，

再由$\sqrt{1+x}-1=(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\dfrac{x}{2}$，得$(x-\tan x)(\sqrt{x+1}-1)\sim-\dfrac{x^4}{6}$，于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\frac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{x+1}-1)}=-6\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\frac{x^2}{2}}{x^4}$$
$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^x\cos x-1-x}{x^3},$$

由 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$，得 $e^x\cos x=1+x-\dfrac{1}{3}x^3+$

$o(x^3)$,于是 $e^x\cos x-1-x\sim-\frac{1}{3}x^3$.故原式$=-\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{2}$.

【例 2】 设 $f(x)$ 连续,且 $f(1)=1$,求$\lim\limits_{x\to1}\frac{\int_1^{\frac{1}{x}}f(xt)\mathrm{d}t}{x^3-1}$.

【解】 $\int_1^{\frac{1}{x}}f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_1^{\frac{1}{x}}f(xt)\mathrm{d}(xt)\xlongequal{u=xt}\frac{1}{x}\int_x^1 f(u)\mathrm{d}u=-\frac{\int_1^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$,

则
$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^{\frac{1}{x}}f(xt)\mathrm{d}t}{x^3-1}=-\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(u)\mathrm{d}u}{x(x^2+x+1)(x-1)}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(u)\mathrm{d}u}{x-1}$$
$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to1}f(x)=-\frac{1}{3}f(1)=-\frac{1}{3}.$$

【例 3】 设 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=0,f'(0)=2$,求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}$.

【解】
$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)$$
$$\xlongequal{x^2-t^2=u}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u,$$

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

由
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x^2)\cdot2x}{4x^3}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=\frac{1}{4}f'(0)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)=1\text{ 得}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{x^4}}{\frac{x^2\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{x^4}}=\frac{1}{2}.$$

【例 4】 设 $f(x)$ 连续,且 $f(0)=0,f'(0)=2$,求$\lim\limits_{x\to0}\left[\cos x+\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{x^2}}$.

【解】 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

$$\lim_{x\to0}\left[\cos x+\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left[\cos x+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\cos x-1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{\cos x-1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}}\right\}^{\frac{\cos x-1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

题型九 间断点及其分类

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0,\end{cases}$

讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 $f(0)=0, f(0+0)=1$,

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1,$$

因为 $f(0+0)=f(0-0)\neq f(0)$,所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

【例 2】 讨论 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{2}{x}}+1}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{2}{x}}+1}=-1, f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{2}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-2^{-\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}+2^{-\frac{1}{x}}}=0$,

因为 $f(0-0)\neq f(0+0)$,所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x>0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{\mathrm{e}^{ax}-ax-1+x^2}{x\sin\frac{x}{4}}, & x<0,\end{cases}$ 就 a 的不同取值,讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}\xlongequal{x=\sin t}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t-t}{\sin^3 t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\cos t-1}{3t^2}=-\dfrac{1}{6}$ 得 $x-\arcsin x\sim-\dfrac{1}{6}x^3$,于是 $f(0+0)=-6a$.

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{ax}-ax-1+x^2}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{ax}-ax-1+x^2}{x^2}=4\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a\mathrm{e}^{ax}-a+2x}{2x}=2a^2+4$ 得 $f(0-0)=2a^2+4$,又 $f(0)=6$.

(1) 当 $2a^2+4=-6a=6$,即 $a=-1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $2a^2+4=-6a\neq 6$,即 $a=-2$ 时,$x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

(3) 当 $2a^2+4\neq -6a$，即 $a\neq -1$ 且 $a\neq -2$ 时，$x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

【例 4】 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\dfrac{\ln|x|}{x^2-1}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

【解】 当 $x=0,x=\pm 1,x=2$ 时，$f(x)$ 间断.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

由 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=e^{-\frac{1}{3}}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(-x)}{x^2-1}=e^{-\frac{1}{3}}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln[1-(x+1)]}{(x-1)(x+1)}$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)}{x+1}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}$$

得 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

由 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=e^{-1}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=e^{-1}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}e^{-1}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}e^{-1}$

得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

由 $f(2-0)=0,f(2+0)=+\infty$ 得 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

【例 5】 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin x}{\sin t}\right)^{\frac{t}{\sin x-\sin t}}$，

(1) 求 $f(x)$；

(2) 讨论 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

【解】 (1) $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin x}{\sin t}\right)^{\frac{t}{\sin x-\sin t}}=\lim\limits_{t\to x}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-\sin t}{\sin t}\right)^{\frac{\sin t}{\sin x-\sin t}}\right]^{\frac{t}{\sin t}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$.

(2) $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为 $f(x)$ 的间断点，

由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e$ 得 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

由 $\lim\limits_{x\to \pi^-}f(x)=+\infty$ 得 $x=\pi$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点，

同理 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

题型十　闭区间上连续函数性质

【例 1】 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【证明】 令 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，取 $\varepsilon_0=1$，存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，$|f(x)-A|<1$，于是

$$|f(x)|\leqslant|A|+1;$$

因为 $f(x)\in C[a,X_0]$，所以存在 $k>0$，对一切的 $x\in[a,X_0]$，有 $|f(x)|\leqslant k$.

取 $M=\max\{|A|+1,k\}$，则对一切的 $x\in[a,+\infty)$，$|f(x)|\leqslant M$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，任取 $p>0,q>0$，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi).$$

【证明】 因为 $f(x)\in C[a,b]$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 和最大值 M.

因为 $m\leqslant\dfrac{pf(a)+qf(b)}{p+q}\leqslant M$，所以由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$f(\xi)=\dfrac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$，即 $pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi)$.

第二章　导数与微分

考查要求

1. 理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系，理解导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量，理解函数的可导性与连续性之间的关系.

2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式. 了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.

4. 会求分段函数的导数，会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

第一节　导数与微分的基本概念

一、基本概念

1. 导数 —— 设函数 $y=f(x)(x\in D)$，其中 $x_0\in D$ 且 $x_0+\Delta x\in D$，称

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的增量.

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，称函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，极限值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记为 $f'(x_0)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

若对任意的 $x\in D$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，称函数 $y=f(x)$ 在 D 内可导，极限记为 $f'(x)$，称为导函数或导数.

【注解】

(1) 设 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处导数的等价定义为

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

(2) 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$）存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$；

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$）存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$.

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充分必要条件是 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

(3) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续,反之不对.

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在,

则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$,或 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$,即 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续;

如:$f(x)=x+|x|$,显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-x}{x}=0$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+x}{x}=2$,

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导;

又如:$f(x)=\sqrt[3]{x}$,显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$ 不存在,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(4) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$,则 $f(a)=b,f'(a)=A$.

(5) 设函数 $f(x)$ 可导,若 $f(x)$ 为奇函数,则 $f'(x)$ 为偶函数;若 $f(x)$ 为偶函数,则 $f'(x)$ 为奇函数.

(6) 函数 $f(x)$ 可导与 $f(x)$ 连续可导不同,前者表示 $f(x)$ 处处有导数,后者表示 $f'(x)$ 为连续函数,如:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$;

当 $x=0$ 时,$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,即 $f(x)$ 处处可导,且

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在,所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

所以函数 $f(x)$ 可导,但 $f(x)$ 不连续可导.

(7) 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数即曲线 $y=f(x)$ 对应图象上在点 $x=a$ 处的切线斜率,且切线方程为

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a).$$

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处的可导性如下:

若 $f(a)\neq 0$,则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导;

若 $f(a)=0$,则当 $f'(a)=0$ 时,$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导;当 $f'(a)\neq 0$ 时,$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导.

【例 1】 研究函数 $f(x)=x+|\sin x|$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+|\sin x|}{x}=1-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1-1=0$ 得 $f'_-(0)=0$;

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+|\sin x|}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1+1=2$ 得 $f'_+(0)=2$，因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+ax)+b, & x>0,\\ e^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 且 $f'(0)$ 存在，求 a,b 的值.

【解】 $f(0+0)=b,f(0)=f(0-0)=1$，

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $b=1$，即 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+ax)+1, & x>0,\\ e^{2x}, & x\leqslant 0.\end{cases}$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+ax)+1-1}{x}=a$，

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f'_-(0)=f'_+(0)$，故 $a=2$.

【例 3】 (1) 若 $f'(a)$ 存在，求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$；

(2) 若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在，问 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处是否可导？

【解】

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right]=2f'(a)$.

(2) 不一定. 如：$f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x\neq 1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 取 $a=1$，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h-(-2h)}{h}=4,$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0\neq f(1)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

2. 高阶导数 —— 设 $f(x)$ 在 D 内可导，导数为 $f'(x)$，若对任意的 $x\in D$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$ 存在，称 $y=f(x)$ 在 D 内二阶可导，极限记为 $f''(x)$，称为二阶导数，类似可以定义各阶导数，二阶及二阶以上的导数称为高阶导数.

3. 可微 —— 设 $y=f(x)(x\in D)$，$x_0\in D$，且 $x_0+\Delta x\in D$，称 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数在 $x=x_0$ 处的增量. 若 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，其中 $A\Delta x$ 称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分，记为 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x$，或 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\mathrm{d}x$.

【注解】

(1) $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导与可微等价.

(2) $A=f'(x_0)$.

(3) 设 $y=f(x)$ 处处可微，则 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$ 为 $y=f(x)$ 的微分.

(4) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微，则 $\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$.

二、连续、可导、可微的关系

1. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处连续，反之不对.

如：$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}.\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在每个点处都不连续，但 $|f(x)|=1$ 为连续函数.

2. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导（或可微），则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，反之不对.

第二节　求导公式与法则

一、求导及求微分的基本公式

导数基本公式	微分基本公式
1. $(C)'=0$.	1. $\mathrm{d}(C)=0$.
2. $(x^a)'=ax^{a-1}$ 特别地，$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.	2. $\mathrm{d}(x^a)=ax^{a-1}\mathrm{d}x$ 特别地，$\mathrm{d}(\sqrt{x})=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.
3. $(a^x)'=a^x\ln a$，$(a>0,a\neq 1)$ 特别地，$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.	3. $\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\,\mathrm{d}x$，$(a>0,a\neq 1)$ 特别地，$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.
4. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，$(a>0,a\neq 1)$ 特别地，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.	4. $\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$，$(a>0,a\neq 1)$ 特别地，$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.
5. (1) $(\sin x)'=\cos x$， (2) $(\cos x)'=-\sin x$， (3) $(\tan x)'=\sec^2 x$， (4) $(\cot x)'=-\csc^2 x$， (5) $(\sec x)'=\sec x\tan x$， (6) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.	5. (1) $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x$， (2) $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\,\mathrm{d}x$， (3) $\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$， (4) $\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\,\mathrm{d}x$， (5) $\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\,\mathrm{d}x$， (6) $\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\,\mathrm{d}x$.
6. (1) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， (2) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， (3) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$， (4) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.	6. (1) $\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$， (2) $\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$， (3) $\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$， (4) $\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

二、求导四则运算法则

设 $u(x)$，$v(x)$ 可导，则

四则求导法则	四则求微分法则
1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$.	1. $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$.
2. (1) $(uv)'=u'v+uv'$， (2) $(ku)'=ku'$（k 为常数）， (3) $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$.	2. (1) $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$， (2) $\mathrm{d}(ku)=k\mathrm{d}u$（$k$ 为常数）， (3) $\mathrm{d}(uvw)=vw\mathrm{d}u+uw\mathrm{d}v+uv\mathrm{d}w$.
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.	3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$.

三、复合函数求导法则——链式法则

设 $y=f(u)$ 可导，$u=\varphi(x)$ 可导，且 $\varphi'(x)\neq 0$，则 $y=f[\varphi(x)]$ 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x)=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

四、反函数求导法则

1. 设 $y=f(x)$ 可导且 $f'(x)\neq 0$，又 $x=\varphi(y)$ 为其反函数，则 $x=\varphi(y)$ 可导，且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

2. 设 $y=f(x)$ 二阶可导且 $f'(x)\neq 0$，又 $x=\varphi(y)$ 为其反函数，则 $x=\varphi(y)$ 二阶可导，且

$$\varphi''(y)=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}.$$

第三节　隐函数与参数方程确定的函数的求导

一、隐函数的导函数

定义——设 x,y 满足方程 $F(x,y)=0$（其中 x 的取值范围为 D），若对任意的 $x\in D$，由方程 $F(x,y)=0$ 确定唯一的 y 值与之对应，称方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 为 x 的隐函数.

隐函数存在定理——设函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则在 (x_0,y_0) 某一邻域内由方程 $F(x,y)=0$ 恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

【例 1】　设 $\mathrm{e}^{x+y}=x^2+y^2+1$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【解】　$\mathrm{e}^{x+y}=x^2+y^2+1$ 两边对 x 求导得

$\mathrm{e}^{x+y}\left(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-2y}$.

【例 2】　设 $y=y(x)$ 由 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【解】　$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 两边对 x 求导得

$\dfrac{x+y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\dfrac{x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y}{x^2}$，解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

二、参数方程确定的函数求导（数学三不要求）

设 $y=y(x)$ 是由 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定的函数，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，由 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定的函数称为参数方程确定的函数，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};$$

若 $\varphi(t),\psi(t)$ 二阶可导且 $\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}=\frac{\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

【例 1】 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 确定,求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)'}{1-\cos t}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

【注解】

以下两种情形也归结为参数方程的导数:

(1) 由 $\begin{cases}F(x,t)=0,\\ G(y,t)=0\end{cases}$ 确定的 $y=y(x)$,求 $\frac{dy}{dx}$.

【例 2】 设 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln(1+t^2),\end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d(2t)/dt}{dx/dt}=\frac{2}{\frac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2).$$

【例 3】 设 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ e^{yt}=y+t^2+1,\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$.

【解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$,且 $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t+1}=\frac{t}{t+1}$,

$e^{yt}=y+t^2+1$ 两边对 t 求导得

$e^{yt}\left(y+t\frac{dy}{dt}\right)=\frac{dy}{dt}+2t$,解得 $\frac{dy}{dt}=\frac{2t-ye^{yt}}{te^{yt}-1}$,

故 $\frac{dy}{dx}=\frac{(2t-ye^{yt})(t+1)}{(te^{yt}-1)t}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 对应的极坐标形式为 $r=r(\theta)$,求 $\frac{dy}{dx}$.

先将 $r=r(\theta)$ 转化为参数形式 $\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta,\\ y=r(\theta)\sin\theta,\end{cases}$ 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}.$$

【例 4】 设 $L:r=2\theta$,求 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的切线方程.

【解】　曲线 L 的参数方程形式为 $L:\begin{cases}x=2\theta\cos\theta,\\ y=2\theta\sin\theta,\end{cases}$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 对应的曲线上的点为 $M_0\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)$，

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$，则切线斜率为 $k=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{4+\pi}{4-\pi}$，

故切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi=\dfrac{4+\pi}{4-\pi}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)$.

重点题型讲解

题型一　导数与微分的基本概念

【例 1】　设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{\sin x}=1$，求 $f'(0)$.

【解】　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{\sin x}=1$，得 $f(0)=2$.

再由 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$，得 $f'(0)=1$.

【例 2】　设 $f(x)=x(x-1)(x+2)(x-3)\cdots(x-99)(x+100)$，求 $f'(0)$.

【解】　方法一：导数的定义

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x-1)(x+2)\cdots(x-99)(x+100)=100!$.

方法二：求导乘法公式

由 $f'(x)=(x-1)(x+2)\cdots(x-99)(x+100)+x\varphi(x)$，得 $f'(0)=100!$.

【例 3】　设 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\cos h)-f(1)}{h^2}=-2$，问 $f'(1)$ 是否存在？

【解】　不一定.

$$\begin{aligned}\text{由 }-2&=\lim_{h\to0}\frac{f(\cos h)-f(1)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f[1+(\cos h-1)]-f(1)}{\cos h-1}\cdot\frac{\cos h-1}{h^2}\\&=-\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f[1+(\cos h-1)]-f(1)}{\cos h-1}=-\frac{1}{2}f'_-(1),\end{aligned}$$

得 $f'_-(1)=4$，故 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\cos h)-f(1)}{h^2}=-2$ 只能保证 $f'_-(1)$ 存在，而不能保证 $f'(1)$ 也存在.

【例 4】　设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

【解】　因为 $1-\cos h\to0^+$ $(h\to0)$，所以 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1-\cos h}{h^2}\cdot$

$\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}=\frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}$ 存在只能保证 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右可导,不能保证可导,(A) 不对;

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}$,因为 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h-\sin h}{h^2}=0$,所以 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}$ 不一定存在,故 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在不能保证 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,(C) 不对;

取 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=1$,因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,所以也不可导,(D) 不对,应选(B).

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,得 $f(0)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,得 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=0$,再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,得 $2f(0)=0$,即 $f(0)=0$.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,得 $f(0)=0$,于是 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 存在,故(A),(B),(C) 正确,应选(D).

【注解】

利用导数的定义研究函数在一点处的可导性时,注意如下三个条件:

(1) 保两侧,即改变量 Δx 要保证从 0 的左右两侧趋于 0.

(2) 不能跨,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 中 $f(a)$ 不能有增量.

(3) 阶相同,即 $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{f(a+\Delta)-f(a)}{\Delta_1}$ 中,Δ 与 Δ_1 必须为同阶无穷小.

【例 6】 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$,

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ 得 $f'_-(0)=0$；由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$ 得 $f'_+(0)=1$，

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

【例 7】 设 $f(x)$ 连续，且对一切的 x 有 $f(x+1)=2f(x)$，又当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x(1-x^2)$. 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

【解】 当 $x\in[-1,0]$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)[1-(x+1)^2]=-\frac{1}{2}x(x+1)(x+2),$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{2}x(x+1)(x+2)}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-x^2)-0}{x}=1,$$

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

【例 8】 设 $f(x)=|x^3-x|\sqrt[3]{x+1}$，求 $f(x)$ 的不可导点.

【解】 $f(x)=|x^3-x|\sqrt[3]{x+1}=|x|\cdot|x-1|\cdot|x+1|\sqrt[3]{x+1}$，

由 $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{|x+1|}{x+1}\cdot|x|\cdot|x-1|\cdot\sqrt[3]{x+1}=0$ 得 $f'_-(-1)=0$；

由 $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=0$，得 $f'_+(-1)=0$，所以 $f'(-1)=0$；

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}\cdot|x-1|\cdot|x+1|\cdot\sqrt[3]{x+1}=-1$ 得 $f'_-(0)=-1$，

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\cdot|x-1|\cdot|x+1|\cdot\sqrt[3]{x+1}=1$ 得 $f'_+(0)=1$，

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的不可导点；

由 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot|x|\cdot|x+1|\cdot\sqrt[3]{x+1}=-2^{\frac{4}{3}}$ 得 $f'_-(1)=-2^{\frac{4}{3}}$，

由 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|}{x-1}\cdot|x|\cdot|x+1|\cdot\sqrt[3]{x+1}=2^{\frac{4}{3}}$ 得 $f'_+(1)=2^{\frac{4}{3}}$，

因为 $f'_-(1)\neq f'_+(1)$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的不可导点.

【例 9】 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，则 $f(x)\pm g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导

(B) 若 $f(x),g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导

(C) 若 $f(x),g(x)$ 不可导，则 $f[g(x)]$ 不可导

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，$g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导

【解】 取 $f(x)=x+|x|,g(x)=x-|x|$，显然 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，但 $f(x)+g(x)=2x$ 在 $x=0$ 处可导，(A) 不对；

取 $f(x)=|x|,g(x)=|x|$，显然 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，但 $f(x)g(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处可导，(B) 不对；

设 $f(x)=\begin{cases}1,x\in\mathbf{Q},\\-1,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1,x\in\mathbf{Q},\\0,x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$ 显然 $f(x),g(x)$ 不可导，但 $f[g(x)]\equiv 1$ 处处可导，(C) 不对；应选(D).

【例 10】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=f(x)f(y)$，又 $f'(0)=1$，求 $f(x)$.

【解】 取 $x=0,y=0$，得 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

若 $f(0)=0$，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)=0$，于是 $f'(x)\equiv 0$，与 $f'(0)=1$ 矛盾，故 $f(0)=1$.

$$\text{由 } f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)=f(x),$$

得 $f'(x)-f(x)=0$，解得 $f(x)=Ce^{-\int -dx}=Ce^{x}$，由 $f(0)=1$，得 $C=1$，于是 $f(x)=e^{x}$.

【例 11】 设 $f(x)$ 可导，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))$ 的切线与直线 $x+y=3$ 垂直，则在 $x=a$ 处 dy 与 Δx 是(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但非等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

【解】 显然 $f'(a)=1$，而 $dy\big|_{x=a}=f'(a)\Delta x=\Delta x$，于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{\Delta x}=1$，故 dy 与 Δx 为等价无穷小，应选(D).

【例 12】 设 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\frac{y}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(0)=\pi$，求 $y(x)$.

【解】 由 $\Delta y=\frac{y}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，得 $y=y(x)$ 可导，且 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}$.

由 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1+x^2}y=0$，得 $y=Ce^{-\int -\frac{1}{1+x^2}dx}=Ce^{\arctan x}$，再由 $y(0)=\pi$，得 $C=\pi$，于是

$$y(x)=\pi e^{\arctan x}.$$

题型二　基本求导类型

情形一：显函数求导

【例 1】 设 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}+\frac{1+x}{1-x}e^{\sqrt{x}}$，求 y'.

【解】 $y'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}+\frac{2}{(1-x)^2}e^{\sqrt{x}}+\frac{1+x}{1-x}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

【例 2】 设 $y=(\sin x)^x$，求 y'.

【解】 由 $y=e^{x\ln\sin x}$ 得 $y'=(\sin x)^x\cdot\left(\ln\sin x+\frac{x\cos x}{\sin x}\right)$.

【例 3】 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$，求 y'.

【解】 由 $y=x^{a^a}+e^{x^a\ln a}+e^{a^x\ln a}$，得 $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\cdot ax^{a-1}\ln a+a^{a^x}\cdot a^x\ln^2 a$.

【例 4】 设 $y=\ln^2\tan(x^2+1)$，求 y'.

【解】 $y'=2\ln\tan(x^2+1)\cdot\frac{1}{\tan(x^2+1)}\cdot\sec^2(x^2+1)\cdot 2x$.

【例 5】 设 $f(x)$ 可导且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(2x-1)-2}{x-1}=2$，又 $y=f^3(x^2)$，求 $y'(1)$.

【解】 由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(2x-1)-2}{x-1}=2$,得 $f(1)=2$.

又由 $2=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(2x-1)-2}{x-1}=2\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f[1+2(x-1)]-f(1)}{2(x-1)}=2f'(1)$,得 $f'(1)=1$,而 $y'(x)=3f^2(x^2)\cdot f'(x^2)\cdot 2x=6xf'(x^2)f^2(x^2)$,故 $y'(1)=24$.

情形二:隐函数求导

【例 1】 设 $x^y=y^x(x>0,y>0)$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

【解】 由 $x^y=y^x$,得 $y\ln x=x\ln y$,两边对 x 求导,

得$\dfrac{dy}{dx}\ln x+\dfrac{y}{x}=\ln y+\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}$,解得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{y}{x}-\ln y}{\dfrac{x}{y}-\ln x}$.

【例 2】 设 $e^{xy}+\tan(xy)=y$,求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

【解】 当 $x=0$ 时,$y=1$.

$e^{xy}+\tan(xy)=y$ 两边对 x 求导,得 $e^{xy}\cdot\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)+\sec^2(xy)\cdot\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{dy}{dx}$,

将 $x=0,y=1$ 代入,得$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=2$.

【例 3】 设 $2^{xy}+x=y$,求 $dy\mid_{x=0}$.

【解】 当 $x=0$ 时,$y=1$.

$2^{xy}+x=y$ 两边对 x 求导,得 $2^{xy}\ln2\cdot\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)+1=\dfrac{dy}{dx}$,

将 $x=0,y=1$ 代入,得$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1+\ln2$,于是 $dy\mid_{x=0}=(1+\ln2)dx$.

【例 4】 设$\displaystyle\int_x^{x+x^2+y}e^{-(t-x)^2}dt=xy$,求$\dfrac{dy}{dx}$.

【解】 $\displaystyle\int_x^{x+x^2+y}e^{-(t-x)^2}dt=\int_x^{x+x^2+y}e^{-(t-x)^2}d(t-x)\xlongequal{t-x=u}\int_0^{x^2+y}e^{-u^2}du$,

原式化为$\displaystyle\int_0^{x^2+y}e^{-u^2}du=xy$,两边对 x 求导得

$e^{-(x^2+y)^2}\cdot\left(2x+\dfrac{dy}{dx}\right)=y+x\dfrac{dy}{dx}$,解得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xe^{-(x^2+y)^2}-y}{x-e^{-(x^2+y)^2}}$.

【例 5】 设 $xe^y+ye^x=xy+1$,求 $y''(0)$.

【解】 $x=0$ 代入得 $y=1$,

$xe^y+ye^x=xy+1$ 两边对 x 求导得

$$e^y+xe^y\cdot y'+y'e^x+ye^x=y+xy'.$$

将 $x=0,y=1$ 代入得 $y'(0)=-e$;

$e^y+xe^y\cdot y'+y'e^x+ye^x=y+xy'$ 两边对 x 求导得

$$2e^y\cdot y'+xe^y\cdot y'^2+xe^y\cdot y''+y''e^x+2y'e^x+ye^x=2y'+xy''.$$

将 $x=0,y=1,y'(0)=-e$ 代入得 $y''(0)=2e^2-1$.

情形三:参数方程确定的函数的导数(数学三不要求)

【例 1】 设$\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^2,\end{cases}$求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t}{1-\frac{1}{1+t}}=2(t+1)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{2(t+1)}{t}.$$

【例 2】 设$\begin{cases}x=te^t,\\ e^{ty}=y+t^2+1,\end{cases}$求$\dfrac{dy}{dx}$.

分析:本题x是关于t的显函数,y是关于t的隐函数,先分别求出x,y关于t的导数,再利用参数方程求导的公式即可.

【解】 $\dfrac{dx}{dt}=(t+1)e^t$.

$e^{ty}=y+t^2+1$两边对t求导,得$e^{ty}\left(y+t\dfrac{dy}{dt}\right)=\dfrac{dy}{dt}+2t$,解得$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t-ye^{ty}}{te^{ty}-1}$.

于是$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t-ye^{ty}}{(t+1)e^t(te^{ty}-1)}$.

情形四:分段函数求导数

【例 1】 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

(1) 求$f'(x)$;

(2) 讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

【解】 (1) 当$x\neq 0$时,$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$;

当$x=0$时,由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x}=0$,得$f'(0)=0$,

于是$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\sin x}{2x}=0=f'(0)$,所以$f'(x)$在$x=0$处连续.

【例 2】 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos t^2\,dt, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}, & x<0,\end{cases}$求$f'(x)$.

【解】 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\cos x^2=1$,

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}=1$,

因为 $f(0+0)=f(0-0)=f(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $x>0$ 时,$f'(x)=\dfrac{x\cos x^2-\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x^2}$;

当 $x<0$ 时,$f'(x)=\dfrac{2x\sin x-4(1-\cos x)}{x^3}$;

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos x^2-1}{2x}=0$,得 $f'_+(0)=0$,

由 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2\sin x-2x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=0$,

得 $f'_-(0)=0$,从而 $f'(0)=0$.

于是 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x^2-\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{2x\sin x-4(1-\cos x)}{x^3}, & x<0.\end{cases}$

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处一阶连续可导,求 a 的取值范围.

【解】 当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{a-1}\sin\dfrac{1}{x}$,显然当 $a>1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$,

即当 $a>1$ 时,$f'(x)=\begin{cases}ax^{a-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{a-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

显然当 $a>2$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$,所以 $a>2$.

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导且 $f(a)=0$,证明:$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $f'(a)=0$.

【证明】 令 $F(x)=|f(x)|$,则 $F(a)=0$.

$F'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=|f'(a)|$,

$F'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{|f(x)|}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a^-}\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=-|f'(a)|$,

则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $|f'(a)|=-|f'(a)|$,即 $f'(a)=0$.

【注解】

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则

(1) 当 $f(a)\neq 0$ 时，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导.

(2) 当 $f(a)=0$ 时，若 $f'(a)=0$，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导；若 $f'(a)\neq 0$，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导.

【例 5】 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>0, \\ e^{2x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 且 $f'(0)$ 存在，求 a,b 的值.

【解】 因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由 $f(0+0)=b, f(0)=f(0-0)=1$，得 $b=1$.

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax}{x}=a, f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2.$

因为 $f'(0)$ 存在，所以 $a=2$.

【例 6】 设 $f(x)=\int_0^1 t|x^2-t^2|\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$，并研究 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

【解】 当 $0<x<1$ 时，

$$f(x)=\int_0^1 t\,|x^2-t^2|\,\mathrm{d}t=\int_0^x t(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t^2-x^2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{1-x^4}{4}-\frac{x^2(1-x^2)}{2}=\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4};$$

当 $x\geqslant 1$ 时，

$f(x)=\int_0^1 t(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}$，即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{4}, & 0<x<1, \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=2x^3-x$；

当 $x>1$ 时，$f'(x)=x$；

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-}x^2\cdot\frac{x^2-1}{x-1}=1;$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}}{x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=1,$$

则 $f'(1)=1$，故

$$f'(x)=\begin{cases}2x^3-x, & 0<x<1, \\ x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=f'(1)=1$，所以 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

情形五：变积分限函数的导数

【例 1】 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t^3 f(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$ ________.

【解】 $\int_0^x t^3 f(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\int_0^x t^2 f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)$

$$\xlongequal{x^2-t^2=u} -\frac{1}{2}\int_{x^2}^{0}(x^2-u)f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{0}^{x^2}(x^2-u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}x^2\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\int_0^{x^2}uf(u)\mathrm{d}u,\text{则}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t^3 f(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u+x^3f(x^2)-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot x^2f(x^2)=x\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u.$$

【例 2】 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0,f'(0)=2$，且 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(x)$，并研究 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续性.

【解】 当 $x=0$ 时，$\varphi(0)=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}(xt)\xlongequal{xt=u}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$，即

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时，$\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$；

当 $x=0$ 时，$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)=1,$$

即
$$\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)=1=\varphi'(0),$$

所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

题型三　导数的几何应用

【例 1】 设 $y=x^n$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴交于点$(x_n,0)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{2n^2+1}{n}}$.

【解】 由 $y'=nx^{n-1}$，得 $y'(1)=n$，则切线方程为 $y-1=n(x-1)$.

令 $y=0$，得 $x_n=1-\dfrac{1}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{2n^2+1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-\frac{2n^2+1}{n^2}}=\mathrm{e}^{-2}$.

【例 2】 设 $f(x)$ 是以 5 为周期的连续函数，在 $x=0$ 的邻域内满足 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$，且 $f'(1)$ 存在，求 $y=f(x)$ 在$(6,f(6))$处的切线方程.

【解】 令 $x=0$ 得 $f(1)=0$.

$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$ 两边同除以 $\sin x$ 并对 $x\to 0$ 时取极限，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{\sin x}=8,$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1)}{\sin x}+3\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}$$
$$=4f'(1),$$

于是 $f'(1)=2$.

因为 $f(x)$ 以 5 为周期，所以 $f(6)=f(1)=0, f'(6)=f'(1)=2$.

于是曲线 $y=f(x)$ 在 $(6,f(6))$ 处的切线方程为 $y=2(x-6)$，即 $y=2x-12$.

【例 3】 设 $y=f(x)$ 是由 $\begin{cases}x=e^t,\\ y=2t+3t^2\end{cases}$ 确定的函数，求 $t=0$ 对应的曲线上的点处的切线方程.

【解】 当 $t=0$ 时，$x=1, y=0$.

又 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{2+6t}{e^t}$，切线的斜率为 $k=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=2$.

于是切线方程为 $y=2(x-1)$，即 $y=2x-2$.

【例 4】 设曲线 $L: r=e^{\theta}$，求 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 对应的 L 上点处的切线方程.

【解】 曲线 L 的参数方程为 $L:\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta,\\ y=e^{\theta}\sin\theta.\end{cases}$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，L 上对应点处的直角坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{6}},\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\right)$.

又 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$，切线的斜率为 $k=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=2+\sqrt{3}$，切线方程为

$$y-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}=(2+\sqrt{3})\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{6}}\right).$$

题型四　高阶导数

【思路分析】

求高阶导数需要掌握如下几个公式：

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$.

(2) $(uv)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^nuv^{(n)}$.

(3) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$，　$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

(4) $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!\,a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

需要掌握如下几种常见的方法：

(1) 公式法.

(2) 归纳法.

(3) 泰勒公式法.

【例 1】 设 $f(x)=x^2\sin3x$，求 $f^{(5)}(x)$.

【解】 $f^{(5)}(x)=C_5^0x^2(\sin3x)^{(5)}+C_5^1 2x(\sin3x)^{(4)}+C_5^2 2(\sin3x)^{(3)}$

$$=3^5x^2\sin\left(3x+\frac{5\pi}{2}\right)+10\times3^4x\sin\left(3x+\frac{4\pi}{2}\right)+20\times3^3\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=3^5x^2\cos3x+10\times3^4x\sin3x-20\times3^3\cos3x.$$

【例 2】 设 $f(0)=0$，又 $f'(x)=e^{f(x)}$，求 $f^{(n)}(0)$.

【解】 $f''(x)=f'(x)e^{f(x)}=e^{2f(x)}$，

$f'''(x)=2f'(x)e^{2f(x)}=2e^{3f(x)}$，

由归纳法得 $f^{(n)}(x)=(n-1)!\ e^{nf(x)}$，故 $f^{(n)}(0)=(n-1)!\ e^{nf(0)}=(n-1)!$.

【例 3】 设 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，求 $y^{(n)}$.

【解】 $y=(2x+3)^{-1}$，

$y'=(-1)\times(2x+3)^{-2}\times2$，

$y''=(-1)(-2)(2x+3)^{-3}\times2^2$，

由归纳法得 $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!\ 2^n}{(2x+3)^{n+1}}$.

【例 4】 设 $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$，求 $y^{(n)}$.

【解】 $y=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}\right)$，

则 $y^{(n)}=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

【例 5】 设 $f(x)=x^2\ln(1+2x)$，求 $f^{(18)}(0)$.

【解】 方法一:公式法

$f^{(18)}(x)=C_{18}^0x^2[\ln(1+2x)]^{(18)}+C_{18}^1 2x[\ln(1+2x)]^{(17)}+C_{18}^2 2[\ln(1+2x)]^{(16)}$，

$[\ln(1+2x)]'=\dfrac{2}{1+2x}$，$[\ln(1+2x)]''=-\dfrac{2^2}{(1+2x)^2}$，由归纳法得

$$[\ln(1+2x)]^{(16)}=\frac{(-1)^{15}15!\ 2^{16}}{(1+2x)^{16}}.$$

于是 $f^{(18)}(0)=-15!\ C_{18}^2\times2^{17}=-18!\times2^{12}$.

方法二:泰勒公式法

由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots-\dfrac{x^{16}}{16}+o(x^{16})$，

得 $\ln(1+2x)=2x-\dfrac{2^2}{2}x^2+\cdots-\dfrac{2^{16}}{16}x^{16}+o(x^{16})$，

于是 $f(x)=2x^3-\dfrac{2^2}{2}x^4+\cdots-\dfrac{2^{16}}{16}x^{18}+o(x^{18})$.

因为 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(18)}(0)}{18!}x^{18}+o(x^{18})$ 及麦克劳林公式的唯一性，得

$$\frac{f^{(18)}(0)}{18!}=-\frac{2^{16}}{16},$$

于是 $f^{(18)}(0)=-18!\times2^{12}$.

第三章　一元函数微分学的应用

考查要求

1. 理解并会用罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理，了解并会用柯西(Cauchy)中值定理.

2. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

3. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.

4. 会用导数判断函数图形的凹凸性(注：在区间(a,b)内，设函数$f(x)$具有二阶导数. 当$f''(x)>0$时，$f(x)$的图形是凹的；当$f''(x)<0$时，$f(x)$的图形是凸的)，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形.

5. 了解曲率、曲率圆与曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径(数学三不要求).

第一节　中值定理

一、中值定理引导知识

1. 极值点的概念

(1) 设$y=f(x)(x\in D)$，$x_0\in D$，若存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)<f(x_0)$，则称x_0为$f(x)$的极大值点.

(2) 设$y=f(x)(x\in D)$，$x_0\in D$，若存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>f(x_0)$，则称x_0为$f(x)$的极小值点. 极大值点和极小值点统称为极值点.

2. 讨论 $f'(a)$ 的两种情况

情形一　$f'(a)>0$，因为$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，所以存在$\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$.

当$x\in(a-\delta,a)$时，因为$x-a<0$，所以$f(x)<f(a)$(左低)；

当$x\in(a,a+\delta)$时，因为$x-a>0$，所以$f(x)>f(a)$(右高)；

即：$f'(a)>0\Rightarrow$左低右高，$x=a$不是$f(x)$的极值点.

情形二　$f'(a)<0$，因为$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$，所以存在$\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$.

当 $x \in (a-\delta, a)$ 时，因为 $x-a<0$，所以 $f(x)>f(a)$（左高）；

当 $x \in (a, a+\delta)$ 时，因为 $x-a>0$，所以 $f(x)<f(a)$（右低）；

即：$f'(a)<0 \Rightarrow$ 左高右低，$x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

结论 1　设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极值，则 $f'(a)=0$ 或 $f'(a)$ 不存在，反之不对.

【例 1】　如图 3-1，设 $f(x)=x^3$，由 $f'(x)=3x^2=0$，得 $x=0$，但 $x=0$ 不是 $f(x)=x^3$ 的极值点.

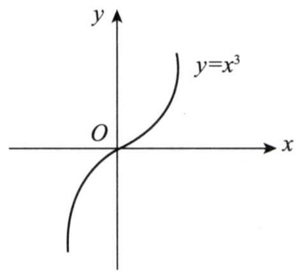


图 3-1

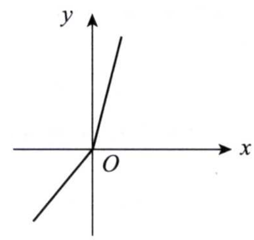


图 3-2

【例 2】　如图 3-2，设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ 2x, & x \geqslant 0, \end{cases}$

$f'_{-}(0)=\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$，$f'_{+}(0)=\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$，

因为 $f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的不可导点，但 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

结论 2　设 $f(x)$ 可导且在 $x=a$ 处取极值，则 $f'(a)=0$.

【注解】

(1) $f'_{+}(a)>0 \Rightarrow$ 右高 $\Rightarrow \exists x_0>a$，使得 $f(x_0)>f(a)$.

(2) $f'_{+}(a)<0 \Rightarrow$ 右低 $\Rightarrow \exists x_0>a$，使得 $f(x_0)<f(a)$.

(3) $f'_{-}(a)>0 \Rightarrow$ 左低 $\Rightarrow \exists x_0<a$，使得 $f(x_0)<f(a)$.

(4) $f'_{-}(a)<0 \Rightarrow$ 左高 $\Rightarrow \exists x_0<a$，使得 $f(x_0)>f(a)$.

二、中值定理

（一）罗尔定理

定理 1　设 $f(x) \in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi)=0.$$

证明　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 和最大值 M.

情形一：$m=M$

显然 $f(x) \equiv C_0$，则任取 $\xi \in (a,b)$，有 $f'(\xi)=0$；

情形二：$m<M$

因为 $f(a)=f(b)$，所以 m, M 至少有一个在 (a,b) 内取到，

不妨设 M 在 (a,b) 内取到，即存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=M$，

因为 $x=\xi$ 为 $f(x)$ 的极大值点，所以 $f'(\xi)=0$ 或 $f'(\xi)$ 不存在，又因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，所以有 $f'(\xi)=0$.

【注解】

(1) 罗尔定理的几何意义：即曲线段 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 上至少存在一点，且过该点的切线水平，如图 3-3.

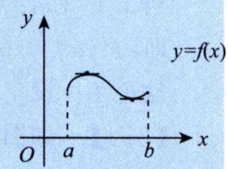


图 3-3

(2) 罗尔定理的中值 ξ 位于区间 (a,b) 内，即 $\xi\in(a,b)$，且中值 ξ 至少存在一点.

(3) 罗尔定理的条件只是罗尔定理成立的充分条件，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不满足罗尔定理的条件，ξ 也可能存在，例如：

$$f(x)=\begin{cases}x^2, -2\leqslant x<1,\\4x, 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，但 $f'(0)=0$，即 ξ 存在，且 $\xi=0$.

【例 3】 验证函数 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的条件，并求中值 ξ.

【解】 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 内可导，

且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，则 $f(x)=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的条件.

令 $f'(x)=\cos x=0$，得 $\xi=\frac{\pi}{2}$.

（二）拉格朗日中值定理

定理 2 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明 令 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，显然 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，

而 $\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，故 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

【注解】

(1) 拉格朗日中值定理中的 ξ 在开区间 (a,b) 内不一定唯一.

(2) 若满足 $f(a)=f(b)$，则拉格朗日中值定理为罗尔中值定理，即罗尔中值定理为拉格朗日中值定理的特例.

(3) 若 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)\equiv C(a\leqslant x\leqslant b)$.

(4) 拉格朗日中值定理的其他形式有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)，其中 a<\xi<b,$$

$$f(b)-f(a)=f'[a+(b-a)\theta](b-a)，其中 0<\theta<1.$$

(5) 拉格朗日中值定理中 ξ 与端点 a,b 有关，若

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),$$

则 ξ 是一个与 x 有关的函数.

（三）柯西中值定理

定理 3 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0(a<x<b)$，则存在

$\xi \in (a,b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

【注解】

(1) 若 $g'(x)\neq 0(a<x<b)$，则$\begin{cases} g(a)\neq g(b), \\ g'(\xi)\neq 0. \end{cases}$

(2) 柯西中值定理中只要 $g'(x)$ 在(a,b)内不等于零，即使 $g'(a)=0$ 或 $g'(b)=0$，柯西中值定理也成立.

(四) 洛必达法则

法则 1 设

(1) $f(x),g(x)$ 在 $x=x_0$ 的去心邻域内可导且 $g'(x)\neq 0$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，

则
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

法则 2 设

(1) $f(x),g(x)$ 在 $x=x_0$ 的去心邻域内可导且 $g'(x)\neq 0$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，

则
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

【注解】

(1) 洛必达法则 1 中，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，只能说明洛必达法则不适用，不能确定 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，例如：$f(x)=2x+x^2\sin\dfrac{1}{x},g(x)=x$，

显然$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在，

但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=2.$

(2) 洛必达法则 2 中，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，只能说明洛必达法则不适用，不能确定 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，例如：$f(x)=2x+\sin x,g(x)=x$，

显然$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}(2+\cos x)$不存在，

但$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=2.$

（五）泰勒中值定理

定理 4 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内 $n+1$ 阶可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间，称 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉格朗日型余项．余项 $R_n(x)$ 也可表示为 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$，称 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 为佩亚诺型余项．

【注解】

(1) 当 $x_0=0$ 时，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$ 称为 $f(x)$ 的麦克劳林公式．

(2) 常用的麦克劳林公式：

①$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$．

②$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$．

③$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$．

④ $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$．

⑤ $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)$．

⑥$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$．

⑦$(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$．

⑧$\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$．

（六）中值定理的几个推广形式

推论 1（导数零点定理） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$．

证明 不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$．

因为 $f'_+(a)>0$，所以存在 $x_1\in(a,b)$，使得 $f(x_1)>f(a)$；

因为 $f'_-(b)<0$，所以存在 $x_2\in(a,b)$，使得 $f(x_2)>f(b)$．

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 的最大值在 (a,b) 内取到，即存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)$ 最大，故 $f'(\xi)=0$．

推论 2（导数介值定理） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$，不妨设 $f'_+(a)<f'_-(b)$，对任意的 $\eta\in(f'_+(a),f'_-(b))$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\eta$．

证明 令 $\varphi(x)=f(x)-\eta x$，$\varphi'(x)=f'(x)-\eta$．

$$\varphi'_+(a)=f'_+(a)-\eta<0,\ \varphi'_-(b)=f'_-(b)-\eta>0,$$

因为 $\varphi'_+(a)\varphi'_-(b)<0$，所以由导数零点定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，即

$f'(\xi)=\eta$.

推论 3(泰勒中值定理的推广) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内 n 阶连续可导,则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

第二节 单调性与极值、凹凸性与拐点、函数作图

一、单调性与极值

(一)单调性与极值的概念

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义,若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$,称 $f(x)$ 在区域 D 上为严格的增函数;若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)>f(x_2)$,称 $f(x)$ 在区域 D 上为严格的减函数.

设 $x_0\in D$,若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右去心邻域的函数值小于 $f(x_0)$,称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点,$f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 的极大值;若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右去心邻域的函数值大于 $f(x_0)$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点,$f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 的极小值.

(二)单调性判别法

定理 若在区间 I 内有 $f'(x)>0$,则函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上严格增加;若在区间 I 内有 $f'(x)<0$,则函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上严格减少.

【注解】

(1) 若在区间 I 内有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 I 上严格增加,反之不对;若在区间 I 内有 $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 I 上严格减少,反之不对.

(2) 若在区间 I 内除了有限个点外有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 I 上仍为严格增函数.

(三)极值点的判别步骤与方法

1. 确定函数的定义域 $x\in D$;

2. 求 $f'(x)$,求出 $f(x)$ 的驻点及不可导点;

3. 判别法

方法一:第一充分条件

定理 1 若存在 $\delta>0$,当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时有 $f'(x)>0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时有 $f'(x)<0$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点;若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时有 $f'(x)<0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时有 $f'(x)>0$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

方法二:第二充分条件

定理 2 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导,且 $f'(x_0)=0$,则

(1) 当 $f''(x_0)>0$ 时,$x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点;

(2) 当 $f''(x_0)<0$ 时,$x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

方法三:泰勒公式判别法

定理 3 设 $f(x)$ 具有 n 阶导数(n 为偶数),且 $f^{(k)}(x_0)=0(k=1,2,\cdots,n-1)$,则

(1) 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点;

(2) 当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

二、凹凸性与拐点

（一）基本概念

1. 凹凸性的概念——如图 3-4，设 $y=f(x)$ 定义于区间 I 上，若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$ 有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，称 $y=f(x)$ 在 I 上为凸函数.

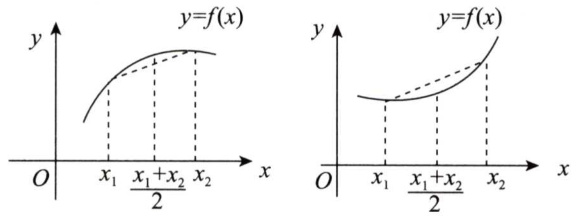


图 3-4

若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1\neq x_2$ 有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，称 $y=f(x)$ 在 I 上为凹函数.

2. 拐点——设 $y=f(x)$ 定义于区间 I 上，若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 两侧凹凸性不同，称 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（二）曲线凹凸性判别法

定理 1　若当 $x\in I$ 时，$f''(x)>0$（个别点除外），则 $y=f(x)$ 在 I 内为凹函数；若当 $x\in I$ 时，$f''(x)<0$（个别点除外），则 $y=f(x)$ 在 I 内为凸函数.

定理 2　设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f''(x_0)=0$，但 $f'''(x_0)\neq 0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

三、渐近线

1. 水平渐近线——若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，称 $y=A$ 为 $L:y=f(x)$ 的水平渐近线.

【例 1】　求 $y=\arctan x$ 的水平渐近线.

【解】　由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，得 $y=-\frac{\pi}{2}$ 为曲线 $y=\arctan x$ 的一条水平渐近线；

再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，得 $y=\frac{\pi}{2}$ 也为曲线 $y=\arctan x$ 的水平渐近线.

【例 2】　求 $y=e^{-(x-2)^2}+1$ 的水平渐近线.

【解】　由 $\lim\limits_{x\to\infty}y=1$，得 $y=1$ 为曲线 $y=e^{-(x-2)^2}+1$ 的水平渐近线.

2. 铅直渐近线——若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ 或 $f(a-0)=\infty$ 或 $f(a+0)=\infty$，称 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

【例 3】　求曲线 $y=\frac{x+1}{x^2-1}$ 的铅直渐近线.

【解】　由 $\lim\limits_{x\to-1}y=-\frac{1}{2}$，得 $x=-1$ 不是曲线 $y=\frac{x+1}{x^2-1}$ 的铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to1}y=\infty$，得 $x=1$ 为曲线 $y=\frac{x+1}{x^2-1}$ 的铅直渐近线.

【例 4】　求曲线 $y=e^{\frac{1}{x-2}}$ 的铅直渐近线.

【解】　因为 $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty$,所以 $x=2$ 为曲线 $y=e^{\frac{1}{x-2}}$ 的铅直渐近线.

【注解】

(1) 若 $x=a$ 为 $y=f(x)$ 的铅直渐近线,则 $x=a$ 为 $y=f(x)$ 的间断点.反之,若 $x=a$ 为 $y=f(x)$ 的间断点,则 $x=a$ 不一定为 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

(2) $f(a+0),f(a-0)$ 只有一个为无穷大时,$x=a$ 也为 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

3. 斜渐近线——若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a(\neq 0,\infty)$,$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$,称 $y=ax+b$ 为 $L:y=f(x)$ 的斜渐近线.

【例 5】　求曲线 $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x+1}$ 的斜渐近线.

【解】　由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+x}=1$,

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+4}{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x+4}{x+1}=-3$,得

曲线 $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x+1}$ 的斜渐近线为 $y=x-3$.

【例 6】　求曲线 $y=(2x+1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

【解】　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}=2$,

$$\lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}\left[(2x+1)e^{\frac{1}{x}}-2x\right]=2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=3,$$

所以曲线 $y=(2x+1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 $y=2x+3$.

四、弧微分、曲率与曲率半径(数学三不要求)

(一) 弧微分

弧微分的基本公式:$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$,其中:

(1) 设 $L:y=f(x)$,则 $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$;

(2) 设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ 则 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$;

(3) 设 $L:r=r(\theta)$,则 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$.

(二) 曲率与曲率半径

1. 曲率计算公式:$k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2. 曲率半径计算公式:$R=\dfrac{1}{k}$.

五、函数作图步骤

1. 求函数 $y=f(x)$ 的定义域；

2. 求 $f'(x)$，并求出驻点及不可导点；

3. 求 $f''(x)$，并求出二阶导数的零点及二阶不可导点；

4. 确定函数在各小区间上 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的符号，从而确定函数在各小区间上的单调性与凹凸性；

5. 求出函数的水平、铅直、斜渐近线；

6. 找出关键点(极值点、拐点)，再描图.

重点题型讲解

题型一　证明 $f^{(n)}(\xi)=0$

【例 1】 设 $f(x)\in C[0,2]$，在 $(0,2)$ 内可导，且 $3f(0)=f(1)+2f(2)$，证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

【证明】 因为 $f(x)\in C[1,2]$，所以 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上存在最小值 m 和最大值 M，

因为 $3m\leqslant f(1)+2f(2)\leqslant 3M$，

所以 $m\leqslant f(0)\leqslant M$，

由介值定理，存在 $c\in[1,2]$，使得 $f(0)=f(c)$，

再由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

【例 2】 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$，又 $f(1)=1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f''(\xi)=0.$$

【证明】 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$ 得 $f(0)=1,f'(0)=0$，

因为 $f(0)=f(1)=1$，所以存在 $c\in(0,1)$，使得 $f'(c)=0$，

因为 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(0)=f'(c)=0$，所以存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使得

$$f''(\xi)=0.$$

【例 3】 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(1)=0$，令 $F(x)=x^2f(x)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$F''(\xi)=0.$$

【证明】 $F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $F'(c)=0$；

又 $F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$，

$F'(0)=F'(c)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使得 $F''(\xi)=0$.

【例 4】 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【证明】 不妨设 $f'_+(a)>0,f'_-(b)>0$，则存在 $x_1,x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)>f(a)=0,\ f(x_2)<f(b)=0;$$

由零点定理，存在 $c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f(c)=0$，因为 $f(a)=f(c)=f(b)=0$，所以由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【例 5】 设曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，连接点 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$ 的直线交曲线于点 $C(c,f(c))(a<c<b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【证明】 由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\ f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

因为 A,B,C 三点位于同一条直线上，所以 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

因为 $f(x)$ 二阶可导，所以由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内二阶可导，且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3),$$

证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

分析：本题的关键是对已知条件的解读，显然对 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ 使用推广的积分中值定理，对 $f(2)+f(3)$ 使用介值定理.

【证明】 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$.

由拉格朗日中值定理得

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)=F'(x_0)(2-0)=2f(x_0)\text{，其中 } x_0\in(0,2).$$

因为 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，

因为 $m\leqslant\frac{f(2)+f(3)}{2}\leqslant M$，所以由介值定理，存在 $c\in[2,3]$，使得 $f(c)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$ 或 $f(2)+f(3)=2f(c)$，于是 $f(0)=f(x_0)=f(c)$.

由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(0,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,c)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【例 7】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【证明】 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，显然 $F'(x)=f(x)$.

因为 $F(a)=F(b)=0$，所以由罗尔定理，存在 $c\in(a,b)$，使得 $F'(c)=0$，即 $f(c)=0$.

因为 $f(a)=f(c)=f(b)=0$，所以由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，再由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【例 8】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=-1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$f(1)=\frac{1}{2}$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

【证明】 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上取到最大值，

又因为 $f(0)=-1$，$f(\frac{1}{2})=1$，$f(1)=\frac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 的最大值在 $(0,1)$ 内取到，

即存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)$ 为最大值，故 $f'(\xi)=0$.

题型二　待证结论中只有一个中值 ξ，不含其他字母

【思路分析】

这类问题通常有如下三种方法构造辅助函数：

方法一：还原法

1. 若待证结论为 $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$，则辅助函数构造如下：

(1) 将 $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$ 写为 $f'(x)+f^2(x)=0$.

(2) 将 $f'(x)+f^2(x)=0$ 改写为 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+f(x)=0$.

(3) 将 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+f(x)=0$ 还原得 $[\ln f(x)]'+\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=0$

或 $[\ln f(x)]'+\left[\ln e^{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\right]'=0$，即 $\left[\ln f(x)e^{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\right]'=0$.

则辅助函数为 $\varphi(x)=f(x)e^{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$.

2. 若待证结论为 $f'(\xi)+2f(\xi)=0$，则辅助函数构造如下：

(1) 将 $f'(\xi)+2f(\xi)=0$ 写为 $f'(x)+2f(x)=0$.

(2) 将 $f'(x)+2f(x)=0$ 改写为 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2=0$.

(3) 将 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+2=0$ 还原得 $[\ln f(x)]'+(2x)'=0$ 或 $[\ln f(x)]'+(\ln e^{2x})'=0$，

即 $[\ln e^{2x}f(x)]'=0$，故辅助函数为 $\varphi(x)=e^{2x}f(x)$.

【例 1】 设 $f(x)\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 内可导，$f(1)=0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

分析：将结论改写为 $2f(x)+xf'(x)=0$ 或 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{2}{x}=0$，还原得 $[\ln f(x)]'+(\ln x^2)'=0$，合并得 $[\ln x^2f(x)]'=0$，辅助函数为 $\varphi(x)=x^2f(x)$.

【证明】 令 $\varphi(x)=x^2f(x)$，因为 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$，所以由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$.

而 $\varphi'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]$，于是 $\xi[2f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0$，注意到 $\xi\neq0$，故 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

【例 2】 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)-2f(\xi)=0$.

分析：将 $f'(\xi)-2f(\xi)=0$ 改写为 $f'(x)-2f(x)=0$ 或 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}-2=0$，还原得 $[\ln f(x)]'+(\ln e^{-2x})'=0$，合并得 $[\ln e^{-2x}f(x)]'=0$，辅助函数为 $\varphi(x)=e^{-2x}f(x)$.

【证明】 令 $\varphi(x)=e^{-2x}f(x)$，因为 $f(a)=f(b)=0$，所以 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，而 $\varphi'(x)=e^{-2x}[f'(x)-2f(x)]$ 且 $e^{-2x}\neq0$，所以 $f'(\xi)-2f(\xi)=0$.

【例 3】 设 $f(x)\in C[1,2]$,在 $(1,2)$ 内可导,且 $f(1)=\dfrac{1}{2}$,$f(2)=2$,证明:存在 $\xi\in(1,2)$,使得 $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

【证明】 令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$,显然 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,在 $(1,2)$ 内可导,且 $\varphi(1)=\varphi(2)=\dfrac{1}{2}$.

由罗尔定理,存在 $\xi\in(1,2)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,而 $\varphi'(x)=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$,所以 $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$.

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且 $f(0)=f(1)$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

分析:将 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 改写为 $f''(x)=\dfrac{2f'(x)}{1-x}$,进一步化为 $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}+\dfrac{2}{x-1}=0$,还原得 $[\ln f'(x)]'+[\ln(x-1)^2]'=0$,合并得 $[\ln(x-1)^2f'(x)]'=0$,辅助函数为

$$\varphi(x)=(x-1)^2f'(x).$$

【证明】 令 $\varphi(x)=(x-1)^2f'(x)$,$\varphi(1)=0$.

因为 $f(0)=f(1)$,所以由罗尔定理,存在 $c\in(0,1)$,使得 $f'(c)=0$,于是 $\varphi(c)=0$.

因为 $\varphi(c)=\varphi(1)=0$,所以由罗尔定理,存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,于是

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

【例 5】 设 $f(x)\in C[0,1]$,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)\mathrm{d}x$.证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

分析:将 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$ 化为 $xf'(x)+2f(x)=0$,从而 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{2}{x}=0$,还原得 $[\ln f(x)]'+(\ln x^2)'=0$,合并得 $[\ln x^2f(x)]'=0$,辅助函数为 $\varphi(x)=x^2f(x)$.

【证明】 令 $\varphi(x)=x^2f(x)$.

由积分中值定理得 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)\mathrm{d}x=c^2f(c)$,其中 $c\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$,即 $\varphi(c)=\varphi(1)$.

由罗尔定理,存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,而 $\varphi'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]$,于是 $\xi[2f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0$,注意到 $\xi\neq0$,故 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

方法二:分组构造法

所谓分组构造法,就是将所证结论进行适当分组,然后使用还原法构造辅助函数.

1. 若所证结论为 $f'(\xi)-f(\xi)+2\xi=2$,则辅助函数构造法如下:

(1) 将 $f'(\xi)-f(\xi)+2\xi=2$ 改写为 $f'(x)-f(x)+2x=2$;

(2) 将 $f'(x)-f(x)+2x=2$ 分组为 $[f(x)-2x]'-[f(x)-2x]=0$,

则辅助函数为 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}[f(x)-2x]$.

2. 若所证结论为 $f''(\xi)-f(\xi)=0$,则辅助函数构造法如下:

(1) 将 $f''(\xi)-f(\xi)=0$ 改写为 $f''(x)-f(x)=0$;

(2) 将 $f''(x)-f(x)=0$ 分组为 $f''(x)+f'(x)-f'(x)-f(x)=0$,

即$[f'(x)+f(x)]'-[f'(x)+f(x)]=0$,

辅助函数为$\varphi(x)=e^{-x}[f'(x)+f(x)]$.

也可以进行如下构造:

(1) 将$f''(\xi)-f(\xi)=0$改写为$f''(x)-f(x)=0$;

(2) 将$f''(x)-f(x)=0$分组为$f''(x)-f'(x)+f'(x)-f(x)=0$,即$[f'(x)-f(x)]'+[f'(x)-f(x)]=0$,辅助函数为$\varphi(x)=e^{x}[f'(x)-f(x)]$.

3. 若所证结论为$f''(\xi)+f'(\xi)=2$,辅助函数构造法如下:

(1) 将$f''(\xi)+f'(\xi)=2$改写为$f''(x)+f'(x)=2$;

(2) 将$f''(x)+f'(x)=2$分组为$[f'(x)-2]'+[f'(x)-2]=0$,

则辅助函数为$\varphi(x)=e^{x}[f'(x)-2]$.

【例 6】 设$f(x)\in C[0,1]$,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=1,f(1)=\frac{1}{2}$.

(1) 证明:存在$c\in(0,1)$,使得$f(c)=c$;

(2) 对任意的实数k,存在$\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)+k[f(\xi)-\xi]=1$.

【证明】 (1) 令$\varphi(x)=f(x)-x,\varphi(0)=0,\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\varphi(1)=-\frac{1}{2}$.

因为$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\varphi(1)<0$,所以由零点定理,存在$c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得$\varphi(c)=0$,故$f(c)=c$.

(2) 令$h(x)=e^{kx}[f(x)-x]$,因为$\varphi(0)=\varphi(c)=0$,所以$h(0)=h(c)=0$.

由罗尔定理,存在$\xi\in(0,1)$,使得$h'(\xi)=0$,故$f'(\xi)+k[f(\xi)-\xi]=1$.

【例 7】 设$f(x)\in C[a,b]$,在(a,b)内二阶可导,$f(a)=f(b)=0,f'_+(a)f'_-(b)>0$.

(1) 证明:存在$\xi_1,\xi_2\in(a,b)(\xi_1<\xi_2)$,使得$f(\xi_1)+f'(\xi_1)=0,f(\xi_2)+f'(\xi_2)=0$;

(2) 证明:存在$\eta_1,\eta_2\in(a,b)(\eta_1<\eta_2)$,使得$f'(\eta_1)-f(\eta_1)=0,f'(\eta_2)-f(\eta_2)=0$;

(3) 证明:存在$\xi\in(a,b)$,使得$f''(\xi)=f(\xi)$;

(4) 证明:存在$\eta\in(a,b)$,使得$f''(\eta)-3f'(\eta)+2f(\eta)=0$.

【证明】 (1) 不妨设$f'_+(a)>0,f'_-(b)>0$,则存在$c_1\in(a,b),c_2\in(a,b)$,使得

$$f(c_1)>f(a)=0,\quad f(c_2)<f(b)=0.$$

因为$f(c_1)f(c_2)<0$,所以由零点定理,存在$c\in(a,b)$,使得$f(c)=0$.

令$\varphi(x)=e^{x}f(x)$,因为$f(a)=f(c)=f(b)=0$,所以$\varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(b)=0$,由罗尔定理,存在$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$,使得$\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$.

而$\varphi'(x)=e^{x}[f'(x)+f(x)]$且$e^{x}\neq 0$,故$f'(\xi_1)+f(\xi_1)=0,f'(\xi_2)+f(\xi_2)=0$.

(2) 令$\varphi(x)=e^{-x}f(x)$,因为$f(a)=f(c)=f(b)=0$,所以$\varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(b)=0$,由罗尔定理,存在$\eta_1\in(a,c),\eta_2\in(c,b)$,使得$\varphi'(\eta_1)=\varphi'(\eta_2)=0$.

而$\varphi'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]$且$e^{-x}\neq 0$,故$f'(\eta_1)-f(\eta_1)=0,f'(\eta_2)-f(\eta_2)=0$.

(3) 令$h(x)=e^{-x}[f'(x)+f(x)]$,因为$h(\xi_1)=h(\xi_2)=0$,所以存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$,使得$h'(\xi)=0$.而$h'(x)=e^{-x}[f''(x)-f(x)]$且$e^{-x}\neq 0$,于是$f''(\xi)=f(\xi)$.

(4) 令$h(x)=e^{-2x}[f'(x)-f(x)]$,因为$h(\eta_1)=h(\eta_2)=0$,所以由罗尔定理,存在$\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$,使得$h'(\eta)=0$.

而$h'(x)=e^{-2x}[f''(x)-3f'(x)+2f(x)]$且$e^{-2x}\neq 0$,故$f''(\eta)-3f'(\eta)+2f(\eta)=0$.

方法三：凑微法

所谓凑微法构造辅助函数，即先将结论中 ξ 变成 x，再去分母、移项，整理成 $g(x)=0$ 的形式，再找出 $\varphi'(x)=g(x)$，则 $\varphi(x)$ 即为辅助函数.

【例 8】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$g(x)\neq 0,g''(x)\neq 0(a<x<b)$，且 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

分析：将 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 改写为 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$，整理得 $f(x)g''(x)-f''(x)g(x)=0$，还原得 $[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]'=0$，辅助函数为 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$.

【证明】 令 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，而 $\varphi'(x)=f(x)g''(x)-f''(x)g(x)$ 且 $g(x)\neq 0,g''(x)\neq 0(a<x<b)$，所以 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

题型三　结论中含 ξ，含 a,b

情形一：a,b 与 ξ 可分离

【思路分析】

该类问题通常有两种解法，一种是将 a,b 与 ξ 分离，关于 a,b 的式子使用拉格朗日中值定理或柯西中值定理；另一种方法是将 a,b 与 ξ 的式子还原为一个原函数，并对原函数使用中值定理.

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，证明：存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f(a)-\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

分析：将 $f(a)-\xi f'(\xi)=f(\xi)$ 改写为 $f(a)-[xf'(x)+f(x)]=0$，还原得 $[f(a)x-xf(x)]'=0$，辅助函数为 $\varphi(x)=x[f(a)-f(x)]$.

【证明】 令 $\varphi(x)=x[f(a)-f(x)]$，

因为 $\varphi(0)=\varphi(a)=0$，所以存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，

而 $\varphi'(x)=f(a)-f(x)-xf'(x)$，故 $f(a)-\xi f'(\xi)=f(\xi)$.

【例 2】 设 $ab>0(a<b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $a\mathrm{e}^b-b\mathrm{e}^a=(a-b)(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}$.

【证明】 $a\mathrm{e}^b-b\mathrm{e}^a=(a-b)(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}$ 等价于 $\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^b}{b}-\dfrac{\mathrm{e}^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi}$.

令 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x},F(x)=\dfrac{1}{x},F'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\neq 0$，

由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}，即\frac{\dfrac{\mathrm{e}^b}{b}-\dfrac{\mathrm{e}^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=(1-\xi)\mathrm{e}^{\xi},$$

故 $$ae^{b}-be^{a}=(a-b)(1-\xi)e^{\xi}.$$

情形二：a,b 与 ξ 不可分离

【思路分析】

若 ξ 与 a,b 不可分离时，一般采用凑微法，即将结论中 ξ 改为 x，去分母、移项，整理成 $g(x)=0$ 的形式，再找出 $\varphi'(x)=g(x)$，则 $\varphi(x)$ 即为辅助函数.

【例 1】 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得
$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

分析：将 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 改写为 $\dfrac{f(a)-f(x)}{g(x)-g(b)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 或 $f(a)g'(x)-f(x)g'(x)-f'(x)g(x)+f'(x)g(b)=0$，还原得
$$[f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)]'=0,$$
故辅助函数为
$$\varphi(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b).$$

【证明】 令 $\varphi(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)$.

因为 $\varphi(a)=\varphi(b)=f(a)g(b)$，所以由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，整理得
$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得
$$f(\xi)\int_a^{\xi}g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)\int_{\xi}^{b}f(t)\mathrm{d}t.$$

分析：将 $f(\xi)\int_a^{\xi}g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)\int_{\xi}^{b}f(t)\mathrm{d}t$ 改写为 $f(x)\int_a^{x}g(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_b^{x}f(t)\mathrm{d}t=0$，还原得 $\left[\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right]'=0$，辅助函数为 $\varphi(x)=\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.

【证明】 令 $\varphi(x)=\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.

因为 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，所以由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，整理得
$$f(\xi)\int_a^{\xi}g(t)\mathrm{d}t=g(\xi)\int_{\xi}^{b}f(t)\mathrm{d}t.$$

题型四　结论中含两个或两个以上中值的问题

情形一：结论中只含 $f'(\xi),f'(\eta)$

【思路分析】

若待证结论中只含 $f'(\xi)$ 和 $f'(\eta)$，先找出函数 $f(x)$ 的三个点，两次使用拉格朗日中值定理即可.

【例 1】 设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$，$f'_{+}(a)>0$，证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0$，$f'(\eta)<0$.

【证明】 因为 $f'_{+}(a)>0$，所以存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>f(a)=f(b)$.

由拉格朗日中值定理,存在 $\xi \in (a,c),\eta \in (c,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\quad f'(\eta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$$

【例 2】 设 $f(x)\in C[0,1]$,在$(0,1)$ 内可导,$f(0)=0,f(1)=1$.

(1) 证明:存在 $c\in(0,1)$,使得 $f(c)=1-c$;

(2) 证明:存在 $\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)$,使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

【证明】 (1) 令 $\varphi(x)=f(x)-1+x,\varphi(0)=-1,\varphi(1)=1$.

因为 $\varphi(0)\varphi(1)<0$,所以存在 $c\in(0,1)$,使得 $\varphi(c)=0$,即 $f(c)=1-c$.

(2) 由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(0,c),\eta\in(c,1)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{1-c}{c},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{c}{1-c},$$

显然 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.

【例 3】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$.

(1) 证明:存在 $0<c<1$,使得 $f(c)=\dfrac{1}{2}$;

(2) 证明:存在 $\xi\in(0,c),\eta\in(c,1)$,使得$\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$.

【证明】 (1) 令 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{1}{2},\varphi(0)=-\dfrac{1}{2},\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$.

因为 $\varphi(0)\varphi(1)<0$,所以由零点定理,存在 $c\in(0,1)$,使得 $\varphi(c)=0$,即 $f(c)=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(0,c),\eta\in(c,1)$,使得

$$f(c)-f(0)=f'(\xi)c \text{ 及 } f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c),$$

即$\dfrac{1}{f'(\xi)}=2c,\dfrac{1}{f'(\eta)}=2(1-c)$,两式相加得$\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$.

【例 4】 设 $f(x)\in C[0,1]$,在$(0,1)$ 内可导,$f(0)=0,f(1)=1$,且 $f(x)$ 在$[0,1]$上严格递增,证明:存在 $\xi_i\in(0,1)(1\leqslant i\leqslant n)$,使得$\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\cdots+\dfrac{1}{f'(\xi_n)}=n$.

【证明】 因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,所以 $f(x)$ 在$[0,1]$上取到最小值 m 和最大值M,显然 $m\leqslant f(0)=0<\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{n}<\cdots<\dfrac{n-1}{n}<\dfrac{n}{n}=f(1)\leqslant M$.

又因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上单调增加,所以存在 $0<c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}<1$,使得

$$f(c_1)=\frac{1}{n},f(c_2)=\frac{2}{n},\cdots,f(c_{n-1})=\frac{n-1}{n}.$$

由拉格朗日中值定理,存在 $\xi_1\in(0,c_1),\xi_2\in(c_1,c_2),\cdots,\xi_n\in(c_{n-1},1)$,使得

$$\begin{cases}f(c_1)-f(0)=f'(\xi_1)c_1,\\ f(c_2)-f(c_1)=f'(\xi_2)(c_2-c_1),\\ \vdots\\ f(1)-f(c_{n-1})=f'(\xi_n)(1-c_{n-1}),\end{cases}$$

即$\dfrac{1}{f'(\xi_1)}=nc_1,\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=n(c_2-c_1),\cdots,\dfrac{1}{f'(\xi_n)}=n(1-c_{n-1})$,相加得

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{1}{f'(\xi_n)}=n.$$

情形二:结论中含两个中值 ξ,η,但关于两个中值的项复杂度不同

【思路分析】

解决这类问题通常的做法是,先将复杂中值的项取出,一般有两种情形,一种是复杂中值项为某函数的导数,如:复杂项为 $e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]$,该项显然为 $e^{-x}f(x)$ 的导数,此时使用拉格朗日中值定理;另一种情形是两个函数导数之商,如:复杂项为 $\eta^2 f'(\eta)=\dfrac{f'(\eta)}{1/\eta^2}$,该项显然为 $f(x),F(x)=-\dfrac{1}{x}$ 的导数之商,此时使用柯西中值定理.

【例 1】 设 $f(x)\in C[a,b]$,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=1$,证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $e^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$.

分析:复杂中值项为 $e^{\eta}[f'(\eta)+f(\eta)]$,该项为 $e^x f(x)$ 的导数,对 $e^x f(x)$ 使用拉格朗日中值定理.

【证明】 令 $\varphi(x)=e^x f(x)$,由拉格朗日中值定理,存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\varphi'(\eta)$,整理得 $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f'(\eta)+f(\eta)]$.

令 $h(x)=e^x$,由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}=h'(\xi)$,即 $\dfrac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi}$,于是 $e^{\eta}[f'(\eta)+f(\eta)]=e^{\xi}$,故 $e^{\eta-\xi}[f'(\eta)+f(\eta)]=1$.

【例 2】 设 $f(x)\in C[a,b]$,在 (a,b) 内可导 $(a>0)$,证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=(a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}.$$

分析:复杂中值项为 $\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$,该项为 $f(x)$ 与 $F(x)=x^2$ 的导数之商,对 $f(x),F(x)=x^2$ 使用柯西中值定理.

【证明】 令 $F(x)=x^2,F'(x)=2x\neq 0$.由柯西中值定理,存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\eta)}{F'(\eta)}$,即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$ 或 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$,于是

$$f'(\xi)=(a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}.$$

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f'(x)\neq 0$,证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

分析:结论中复杂项为 $\dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$,令 $F(x)=e^x$,显然本题对 $f(x),F(x)$ 使用柯西中值定理.

【证明】 令 $F(x)=e^x,F'(x)=e^x\neq 0$.由柯西中值定理,存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\eta)}{F'(\eta)}$,即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$ 或 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot\dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}$.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

于是 $f'(\xi)=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$，故$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$.

【例 4】 设 $f(x)\in C[a,b]$，在(a,b) 内可导$(a\geqslant 0)$，证明：存在 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$，使

$$f'(\xi_1)=(a+b)\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}.$$

【证明】 令 $F(x)=x^2, F'(x)=2x\neq 0(a<x<b)$. 由柯西中值定理，存在 $\xi_2\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}$，或$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a+b)\dfrac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}$；

令 $G(x)=x^3, G'(x)=3x^2\neq 0(a<x<b)$，由柯西中值定理，存在 $\xi_3\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\dfrac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}$，或$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a^2+ab+b^2)\dfrac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}$.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，故

$$f'(\xi_1)=(a+b)\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}.$$

情形三：结论中含中值 ξ,η（不仅仅只含 $f'(\xi),f'(\eta)$），两者对应的项完全对等

【思路分析】

该类问题一般先就 ξ 构造一个辅助函数（还原法），再两次使用拉格朗日中值定理.

【例 1】 设 $f(x)\in[0,1]$，$f(x)$ 在$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\dfrac{1}{4}$，证明：

存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$.

【证明】 令 $\varphi_1(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2,\varphi_2(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2$，

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得

$$\varphi_1'(\xi)=\frac{\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)-\varphi_1(0)}{\frac{1}{2}-0}=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\right],$$

$$\varphi_2'(\eta)=\frac{\varphi_2(1)-\varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\left[f(1)-\frac{1}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\right]=-2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\right],$$

从而有 $\varphi_1'(\xi)+\varphi_2'(\eta)=0$，

而 $\varphi_1'(\xi)=f'(\xi)+\xi,\varphi_2'(\eta)=f'(\eta)-\eta$，

故 $f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$.

题型五　中值定理中关于 θ 的问题

【例 1】 设 $f(x)=\arctan x\in C[0,a]$，$f(a)-f(0)=f'(\theta a)a$，求 $\lim\limits_{a\to 0}\theta^2$.

【解】 $f(a)-f(0)=f'(\theta a)a$，即 $\arctan a=\dfrac{a}{1+a^2\theta^2}$，解得

$$\theta^2=\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}.$$

于是 $\lim\limits_{a\to 0}\theta^2=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a-\arctan a}{a^3}=\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+a^2}}{3a^2}=\dfrac{1}{3}$.

【例 2】 设 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $f''(x)\neq 0$，又 $f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h\ (0<\theta<1)$. 证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

【证明】 因为 $f(x)$ 二阶连续可导，所以 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(x)}{2!}h^2+o(h^2)$.

再由 $f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h$，得

$$f(x)+f'(x+\theta h)h=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+o(h^2),$$

整理得 $\theta\cdot\dfrac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{\theta h}=\dfrac{f''(x)}{2!}+\dfrac{o(h^2)}{h^2}$，两边取极限得 $f''(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{f''(x)}{2}$，因为 $f''(x)\neq 0$，所以 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可导且 $f'(0)\neq 0$.

(1) 证明对任意的 $x\in(0,a]$，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)];$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

【证明】 (1) 由 $\displaystyle\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)=-\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t$，得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t.$$

由推广的积分中值定理，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)],$$

于是
$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

(2) $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$ 两边同除以 x^2，得

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}.$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]=f'(0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}=\lim_{x\to 0}\theta\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{f(\theta x)-f(0)}{\theta x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(-\theta x)-f(0)}{-\theta x}\right]$$
$$=2f'(0)\lim_{x\to 0}\theta,$$

得$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

题型六　拉格朗日中值定理的两种惯性思维

【思路分析】

若函数 $f(x)\in C[a,b]$,在(a,b)内可导,以下三种情形常使用拉格朗日中值定理:

(1) 出现 $f(b)-f(a)$;

(2) 出现 $f(a),f(c),f(b)$;

(3) 出现 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 之间的关系式(也有可能使用牛顿—莱布尼茨公式).

【例 1】 设$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$,且$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}$,求 c.

【解】 由拉格朗日中值定理得

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)(x-1<\xi<x),$$

则$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{x\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}$,又

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c},$$

由 $\mathrm{e}=\mathrm{e}^{2c}$ 得 $c=\dfrac{1}{2}$.

【例 2】 设$f''(x)>0$,取$x=x_0$,$\Delta x>0$,令$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$,$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,比较 $\mathrm{d}y$ 与 Δy 的大小.

【解】 由拉格朗日中值定理得

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x(x_0<\xi<x_0+\Delta x),$$

因为 $f''(x)>0$,且 $x_0<\xi$,所以 $f'(x_0)<f'(\xi)$,

再由 $\Delta x>0$ 得 $f'(x_0)\Delta x<f'(\xi)\Delta x$,即 $\mathrm{d}y<\Delta y$.

【例 3】 设 $f''(x)>0$,比较 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 的大小.

【解】 $f(1)-f(0)=f'(c)(0<c<1)$.

因为 $f''(x)>0$,所以 $f'(x)$ 单调递增,

由 $0<c<1$ 得 $f'(0)<f'(c)<f'(1)$,即 $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$.

【例 4】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导,且 $|f'(x)|\leqslant M$,又 $f(x)$ 在(a,b)内至少有一个零点,证明:$|f(a)|+|f(b)|\leqslant M(b-a)$.

【证明】 由题意,存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=0$.

由拉格朗日中值定理得

$$f(c)-f(a)=f'(\xi_1)(c-a),\text{其中 }\xi_1\in(a,c),$$
$$f(b)-f(c)=f'(\xi_2)(b-c),\text{其中 }\xi_2\in(c,b),$$

因为 $|f'(x)|\leqslant M$,所以 $|f(a)|\leqslant M(c-a)$, $|f(b)|\leqslant M(b-c)$,

两式相加得 $|f(a)|+|f(b)|\leqslant M(b-a)$.

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取最小值，证明：

$$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M.$$

【证明】 因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取最小值，所以存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)$ 为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的最小值，于是 $f'(c)=0$.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,1)$，使得

$$f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)(c-0),\xi_1\in(0,c),$$

$$f'(1)-f'(c)=f''(\xi_2)(1-c),\xi_2\in(c,1),$$

于是 $|f'(0)|=|f''(\xi_1)|c\leqslant Mc$，$|f'(1)|=|f''(\xi_2)|(1-c)\leqslant M(1-c)$，

两式相加得 $$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M.$$

【例 6】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，又 $|f'(x)|\leqslant p|f(x)|\,(0<p<1)$，证明：$f(x)\equiv 0\,(0\leqslant x\leqslant 1)$.

【证明】 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上连续，

令 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|=|f(c)|\,(0\leqslant c\leqslant 1)$，

则 $M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|=|f'(\xi)|c\leqslant|f'(\xi)|\leqslant p|f(\xi)|\leqslant pM$，

由 $0<p<1$ 得 $M=0$，故 $f(x)\equiv 0\,(0\leqslant x\leqslant 1)$.

题型七　泰勒公式的常规证明问题

【思路分析】

使用泰勒公式进行证明时，最关键的是如何确定 x_0 和 x，一般地，有：

1.x_0 的选取标准：(1) 与一阶导数相关的点；(2) 区间中点；(3) 其他.

2.x 的选取标准：(1) 与函数值相关的点；(2) 区间的端点；(3) 其他.

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$，证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

【证明】 由泰勒公式得

$$f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}(-1-0)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1-0)^3,\text{其中 }\xi_1\in(-1,0),$$

$$f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(1-0)^3,\text{其中 }\xi_2\in(0,1),$$

即 $$f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}-\frac{f'''(\xi_1)}{3!},\quad f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2!}+\frac{f'''(\xi_2)}{3!},$$

两式相减得 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$. 因为 $f'''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续，所以 $f'''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上取到最小值 m 和最大值 M，因为 $m\leqslant\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\leqslant M$，即 $m\leqslant 3\leqslant M$，所以由介值定理，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，且 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

【证明】 由已知条件，存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=-1$，$f'(c)=0$，由泰勒公式得

$$f(0)=f(c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2, 其中 \xi_1 \in (0,c),$$

$$f(1)=f(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2, 其中 \xi_2 \in (c,1),$$

解得 $f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2}, f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2}$.

(1) 当 $c\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时，$f''(\xi_1)\geqslant 8$，此时 $\xi=\xi_1$.

(2) 当 $c\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ 时，$f''(\xi_2)\geqslant 8$，此时 $\xi=\xi_2$.

【例 3】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，对任意的 $c\in(0,1)$，证明：$|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

【证明】 由泰勒公式得

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2, 其中 \xi_1\in(0,c),$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2, 其中 \xi_2\in(c,1),$$

两式相减，得 $f'(c)=f(1)-f(0)+\frac{1}{2}[f''(\xi_1)c^2-f''(\xi_2)(1-c)^2]$，取绝对值，得

$$\begin{aligned}|f'(c)|&\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}[|f''(\xi_1)|c^2+|f''(\xi_2)|(1-c)^2]\\&\leqslant 2a+\frac{b}{2}[c^2+(1-c)^2].\end{aligned}$$

因为 $c^2\leqslant c,(1-c)^2\leqslant 1-c$，所以 $c^2+(1-c)^2\leqslant 1$，故 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

【例 4】 一辆汽车从开始启动（速度为零）到刹车停止用单位时间走完单位路程，证明：至少有一个时间点其加速度的绝对值不小于 4.

【证明】 设运动规律为 $S=S(t)$，则 $S(0)=0,S'(0)=0,S(1)=1,S'(1)=0$，由泰勒公式得

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=S(0)+S'(0)\left(\frac{1}{2}-0\right)+\frac{S''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{1}{2}-0\right)^2, 其中 \xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=S(1)+S'(1)\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{S''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2, 其中 \xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right),$$

两式相减得 $S''(\xi_1)-S''(\xi_2)=8$，于是 $|S''(\xi_1)|+|S''(\xi_2)|\geqslant 8$.

(1) 当 $|S''(\xi_1)|\geqslant|S''(\xi_2)|$ 时，$|S''(\xi_1)|\geqslant 4$，即 $t=\xi_1$ 处加速度绝对值不小于 4.

(2) 当 $|S''(\xi_1)|<|S''(\xi_2)|$ 时，$|S''(\xi_2)|\geqslant 4$，即 $t=\xi_2$ 处加速度绝对值不小于 4.

【例 5】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}.$$

【证明】 由泰勒公式得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2, 其中 \xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2,\text{其中 }\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right),$$

两式相减,得 $f(b)-f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$,取绝对值,得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|].$$

(1) 当 $|f''(\xi_1)|\geqslant|f''(\xi_2)|$ 时,$|f''(\xi_1)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$,取 $\xi=\xi_1$.

(2) 当 $|f''(\xi_1)|<|f''(\xi_2)|$ 时,$|f''(\xi_2)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$,取 $\xi=\xi_2$.

【例 6】 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内四阶可导,且 $|f^{(4)}(x)|\leqslant M(M>0)$,证明:对此邻域内任一不同于 x_0 的 a,有 $\left|f''(x_0)-\dfrac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\leqslant\dfrac{M}{12}(a-x_0)^2$,其中 b 是 a 关于 x_0 的对称点.

【证明】 由泰勒公式得

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(a-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}(a-x_0)^4,\text{其中 }\xi_1\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }a\text{ 之间}.$$

$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(b-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}(b-x_0)^4,\text{其中 }\xi_2\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }b\text{ 之间}.$$

两式相加,得

$$f(a)+f(b)-2f(x_0)=f''(x_0)(a-x_0)^2+\frac{(a-x_0)^4}{24}[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)]\text{ 或}$$

$$\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}-f''(x_0)=\frac{(a-x_0)^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)],\text{取绝对值得}$$

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\leqslant\frac{(a-x_0)^2}{12}M.$$

题型八　二阶导数保号性问题

【思路分析】

若题中出现 $f''(x)>0(<0)$ 时,一般有如下两种解题思路:

(1) 若 $f''(x)>0(<0)$,则 $f'(x)$ 单调增加(单调减少).

(2) 若 $f''(x)>0(<0)$,则 $f(x)\geqslant(\leqslant)f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

【例 1】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导,$f(a)=g(a)$,$f'(a)=g'(a)$,且 $f''(x)>g''(x)(x>a)$,证明:$f(x)>g(x)(x>a)$.

【证明】 令 $F(x)=f(x)-g(x)$,$F(a)=0$,$F'(a)=0$,$F''(x)>0(x>a)$.

由 $\begin{cases}F'(a)=0,\\F''(x)>0(x>a)\end{cases}$ 得 $F'(x)>0(x>a)$.

再由$\begin{cases}F(a)=0,\\F'(x)>0(x>a)\end{cases}$得 $F(x)>0(x>a)$,即当 $x>a$ 时,$f(x)>g(x)$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上二阶可导,$f(0)=0$,且 $f''(x)>0$,证明:对任意的 $a>0$,$b>0$,有 $f(a)+f(b)<f(a+b)$.

【证明】 不妨设 $a\leqslant b$,由拉格朗日中值定理得

$$f(a)-f(0)=f'(\xi_1)a\text{,其中 }\xi_1\in(0,a),$$
$$f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)a\text{,其中 }\xi_2\in(b,a+b),$$

因为 $f''(x)>0$,所以 $f'(x)$ 严格递增,从而 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$,于是 $f'(\xi_1)a<f'(\xi_2)a$,故 $f(a)+f(b)<f(a+b)$.

【例 3】 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,$f''(x)>0$,证明:$f(x)\geqslant x$.

【证明】 **方法一** 由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 得 $f(0)=0,f'(0)=1$.

由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2\text{,其中 }\xi\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间},$$

因为 $f''(x)>0$,所以 $f(x)\geqslant f(0)+f'(0)x$,即 $f(x)\geqslant x$.

方法二 由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 得 $f(0)=0,f'(0)=1$.

由拉格朗日中值定理得 $f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x$(ξ 介于 0 与 x 之间),

当 $x<0$ 时,由 $x<\xi<0$ 及 $f''(x)>0$ 得 $f'(\xi)<f'(0)=1$,

于是 $f'(\xi)x>x$,即 $f(x)>x$;

当 $x>0$ 时,由 $0<\xi<x$ 及 $f''(x)>0$ 得 $f'(\xi)>f'(0)=1$,

于是 $f'(\xi)x>x$,即 $f(x)>x$;

当 $x=0$ 时,$f(0)=0=x$.综上,有 $f(x)\geqslant x$.

【例 4】 设 $f(x)\in C[a,b]$,且 $f''(x)>0$,取 $x_i\in[a,b](1\leqslant i\leqslant n)$,设 $k_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$ 且 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$,证明:

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n).$$

【证明】 令 $x_0=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n$.

因为 $f''(x)>0$,所以 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$,从而有

$$\begin{cases}f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0),\\f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0),\\\vdots\\f(x_n)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0),\end{cases}$$

于是$\begin{cases}k_1f(x_1)\geqslant k_1f(x_0)+k_1f'(x_0)(x_1-x_0),\\k_2f(x_2)\geqslant k_2f(x_0)+k_2f'(x_0)(x_2-x_0),\\\vdots\\k_nf(x_n)\geqslant k_nf(x_0)+k_nf'(x_0)(x_n-x_0),\end{cases}$

相加得 $f(x_0)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)$,即

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n).$$

题型九　不等式证明

【思路分析】

不等式证明是十分重要的考查内容，常见的证明方法有：

(1) 利用中值定理证明不等式；

(2) 利用单调性证明不等式；

(3) 利用凹凸性证明不等式；

(4) 利用最值证明不等式.

【例 1】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$，又 $f(x)$ 在 (a,b) 内取到最小值，证明：$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(b-a)$.

【证明】　因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内取到最小值，所以存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 上的最小值，于是 $f'(c)=0$.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$\begin{cases}f'(c)-f'(a)=f''(\xi_1)(c-a),\\ f'(b)-f'(c)=f''(\xi_2)(b-c),\end{cases}\text{即}\begin{cases}-f'(a)=f''(\xi_1)(c-a),\\ f'(b)=f''(\xi_2)(b-c),\end{cases}$$

取绝对值，得　$|f'(a)|\leqslant M(c-a)$，$|f'(b)|\leqslant M(b-c)$，

两式相加，得　$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(b-a)$.

【例 2】　设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$，且 $f(x)$ 不是常数，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0$.

【证明】　因为 $f(x)$ 不为常数且 $f(a)=f(b)$，所以存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)\neq f(a)$.

不妨设 $f(c)>f(a)$，则存在 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$.

【例 3】　设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，且曲线 $y=f(x)$ 非直线，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f'(\xi)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

【证明】　令 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

因为 $y=f(x)$ 非直线，所以 $\varphi(x)$ 不恒为零，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $\varphi(c)\neq0$.

不妨设 $\varphi(c)>0$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a}>0,\quad \varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(b)-\varphi(c)}{b-c}<0.$$

而 $\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，所以 $f'(\xi_1)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$f'(\xi_2)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(1) 当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$ 时，$|f'(\xi_1)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$，此时 $\xi=\xi_1$；

(2) 当 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 时，$|f'(\xi_2)|>\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$，此时 $\xi=\xi_2$.

【例 4】　设 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

【证明】　因为 $f'_+(a)>0$，所以存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>f(a)=f(b)=0$.

由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\quad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$$

再由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使得 $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$.

【例 5】 设 $0<a<b$,证明:$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$.

【证明】 令 $f(x)=\ln x$,由拉格朗日中值定理得

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi},\text{其中 }\xi\in(a,b).$$

因为$\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$,所以$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$.

【例 6】 设 $a<b$,证明:$\arctan b-\arctan a\leqslant b-a$.

【证明】 令 $f(x)=\arctan x$,由拉格朗日中值定理,得

$$\arctan b-\arctan a=f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)=\frac{b-a}{1+\xi^2},\text{其中 }\xi\in(a,b),$$

于是

$$\arctan b-\arctan a=\frac{b-a}{1+\xi^2}\leqslant b-a.$$

【例 7】 证明:当 $x>0$ 时,$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

【证明】 **方法一:单调性**

令 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$,$f(0)=0$,$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}>0(x>0)$.

由$\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(x>0),\end{cases}$得 $f(x)>0(x>0)$,即当 $x>0$ 时,$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$.

令 $g(x)=x-\ln(1+x)$,$g(0)=0$,$g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}>0(x>0)$.

由$\begin{cases}g(0)=0,\\ g'(x)>0(x>0),\end{cases}$得 $g(x)>0(x>0)$,即当 $x>0$ 时,$\ln(1+x)<x$.

方法二:中值定理

令 $f(t)=\ln(1+t)$,由拉格朗日中值定理,得

$$\ln(1+x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x=\frac{x}{1+\xi},\text{其中 }\xi\in(0,x).$$

因为$\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$,所以$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

【例 8】 证明:当 $x>0$ 时,$e^x>1+x$.

【证明】 **方法一:单调性**

令 $f(x)=e^x-1-x$,$f(0)=0$,$f'(x)=e^x-1>0(x>0)$.

由$\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(x>0),\end{cases}$得 $f(x)>0(x>0)$,即当 $x>0$ 时,$e^x>1+x$.

方法二:中值定理

令 $f(t)=e^t$,由拉格朗日中值定理,得

$$e^x-1=f(x)-f(0)=f'(\xi)x=e^{\xi}x,\text{其中 }\xi\in(0,x).$$

于是 $e^x-1=e^{\xi}x>x$,即 $e^x>1+x$.

【例 9】 设 $e < a < b$，证明：$a^b > b^a$.

【证明】 $a^b > b^a$ 等价于 $b\ln a - a\ln b > 0$.

令 $f(x) = x\ln a - a\ln x$，$f(a) = 0$，$f'(x) = \ln a - \dfrac{a}{x} > 0(x > a)$.

由 $\begin{cases} f(a) = 0, \\ f'(x) > 0(x > a), \end{cases}$ 得 $f(x) > 0(x > a)$，因为 $b > a$，所以 $f(b) > 0$，即 $a^b > b^a$.

【例 10】 证明：$1 + x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geqslant \sqrt{1 + x^2}$.

【证明】 令 $f(x) = 1 + x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$，$f(0) = 0$.

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),\ f'(0) = 0,\ f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} > 0.$$

由 $\begin{cases} f'(0) = 0, \\ f''(x) > 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} f'(x) < 0, x < 0, \\ f'(x) > 0, x > 0, \end{cases}$ 从而 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的最小值点.

因为 $f(0) = 0$，所以 $f(x) \geqslant 0$，即 $1 + x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geqslant \sqrt{1 + x^2}$.

【例 11】 设 $b > a > 0$，证明：$\ln\dfrac{b}{a} > \dfrac{2(b - a)}{a + b}$.

【证明】 $\ln\dfrac{b}{a} > \dfrac{2(b - a)}{a + b}$ 等价于 $(a + b)(\ln b - \ln a) - 2(b - a) > 0$.

令 $f(x) = (a + x)(\ln x - \ln a) - 2(x - a)$，$f(a) = 0$.

$$f'(x) = \ln x - \ln a + \frac{a}{x} - 1,\ f'(a) = 0,\ f''(x) = \frac{x - a}{x^2} > 0(x > a).$$

由 $\begin{cases} f'(a) = 0, \\ f''(x) > 0(x > a), \end{cases}$ 得 $f'(x) > 0(x > a)$. 由 $\begin{cases} f(a) = 0, \\ f'(x) > 0(x > a), \end{cases}$ 得 $f(x) > 0$ $(x > a)$. 而 $b > a$，所以 $f(b) > 0$，即 $\ln\dfrac{b}{a} > \dfrac{2(b - a)}{a + b}$.

【例 12】 证明：当 $x > 0$ 时，有 $(x^2 - 1)\ln x \geqslant (x - 1)^2$.

【证明】 令 $f(x) = (x^2 - 1)\ln x - (x - 1)^2$，$f(1) = 0$.

$$f'(x) = 2x\ln x - x - \frac{1}{x} + 2,\ f'(1) = 0.$$

$$f''(x) = 2\ln x + 1 + \frac{1}{x^2},\ f''(1) = 2 > 0,\ f'''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}.$$

由 $\begin{cases} f'''(x) < 0, & 0 < x < 1, \\ f'''(x) > 0, & x > 1, \end{cases}$ 得 $x = 1$ 为 $f''(x)$ 的最小值点，因为 $f''(1) = 2 > 0$，所以 $f''(x) > 0$.

由 $\begin{cases} f'(1) = 0, \\ f''(x) > 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} f'(x) < 0, & 0 < x < 1, \\ f'(x) > 0, & x > 1, \end{cases}$ 于是 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的最小值点.

因为 $f(1) = 0$，所以 $f(x) \geqslant 0$，即 $(x^2 - 1)\ln x \geqslant (x - 1)^2$.

【例 13】 当 $x > 0$ 时，证明：$\dfrac{\arctan x}{\ln(1 + x)} \leqslant \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

【证明】 令 $f(x) = \arctan x$，$F(x) = \ln(1 + x)$，$F'(x) = \dfrac{1}{1 + x} \neq 0$，由柯西中值定理，存在 $c \in (0, x)$，使得 $\dfrac{\arctan x}{\ln(1 + x)} = \dfrac{f(x) - f(0)}{F(x) - F(0)} = \dfrac{f'(c)}{F'(c)} = \dfrac{1 + c}{1 + c^2}$.

令 $\varphi(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}(x>0)$，由 $\varphi'(x)=\dfrac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}=0$ 得 $x=\sqrt{2}-1$.

当 $x\in(0,\sqrt{2}-1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，当 $x>\sqrt{2}-1$ 时，$\varphi'(x)<0$，则 $x=\sqrt{2}-1$ 为 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值点，最大值为 $\varphi(\sqrt{2}-1)=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，于是 $\dfrac{1+c}{1+c^2}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

故
$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}\leqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

【例 14】 设 $e<a<b<e^2$，证明：$\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\dfrac{4}{e^2}$.

【证明】 **方法一：单调性**

令 $\varphi(x)=(\ln^2 x-\ln^2 a)-\dfrac{4}{e^2}(x-a)$，$\varphi(a)=0$.

$$\varphi'(x)=\frac{2\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},\varphi''(x)=2\times\frac{1-\ln x}{x^2}<0(x>e).$$

由 $\begin{cases}\varphi'(e^2)=0,\\ \varphi''(x)<0(x>e),\end{cases}$ 得 $\varphi'(x)>0(e<x<e^2)$.

再由 $\begin{cases}\varphi(a)=0,\\ \varphi'(x)>0(e<x<e^2),\end{cases}$ 得 $\varphi(x)>0(e<a<x<b<e^2)$，于是 $\varphi(b)>0$，

故 $(\ln^2 b-\ln^2 a)-\dfrac{4}{e^2}(b-a)>0$，即 $\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\dfrac{4}{e^2}$.

方法二：中值定理

令 $f(x)=\ln^2 x$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=f'(\xi)=\dfrac{2\ln\xi}{\xi}$.

令 $\varphi(x)=\dfrac{2\ln x}{x}(e<x<e^2)$，$\varphi'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}<0$，则 $\varphi(x)$ 在 (e,e^2) 内单调减少，于是 $\varphi(x)>\varphi(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$，故 $\dfrac{2\ln\xi}{\xi}>\dfrac{4}{e^2}$，即 $\dfrac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\dfrac{4}{e^2}$.

【例 15】 证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

【证明】 令 $f(x)=x-\sin x$，$f(0)=0$，
$$f'(x)=1-\cos x>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

由 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right),\end{cases}$ 得 $f(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，即当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x$；

令 $g(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$，$g(0)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

由 $\begin{cases}g(0)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\\ g''(x)<0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right),\end{cases}$ 根据凹凸性得 $g(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，即当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x$.

故当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\pi}{2}x < \sin x < x$.

题型十　函数的零点或方程根的个数问题

【思路分析】

解答函数零点或方程的根问题一般有如下三个思路：

(1) 若 $f(x) \in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b) < 0$，则使用零点定理.

(2) 设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，若 $F(a) = F(b)$，则由罗尔定理，存在 $c \in (a,b)$，使得 $F'(c) = 0$，即 $f(c) = 0$.

(3) 单调性方法：

第一步，给出 $y = f(x)(x \in D)$；

第二步，求 $f'(x) = 0$ 的根及 $f(x)$ 的不可导点，求出 $f(x)$ 的极值点与极值；

第三步，求出 $y = f(x)$ 两侧的变化趋势，从而求出 $f(x)$ 的零点个数.

【例 1】 设 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$，证明：方程 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ 至少有一个正根.

【证明】 令 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，

$f(x)$ 的原函数为 $F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，

因为 $F(0) = F(1) = 0$，所以由罗尔定理，存在 $c \in (0,1)$，使得 $F'(c) = 0$，从而 $f(c) = 0$，即 $x = c$ 为原方程的一个正根.

【例 2】 讨论方程 $xe^{-x} = a(a > 0)$ 根的个数.

【解】 方法一　令 $f(x) = xe^{-x} - a$，由 $f'(x) = (1-x)e^{-x} = 0$，得 $x = 1$.

当 $x < 1$ 时，$f'(x) > 0$，当 $x > 1$ 时，$f'(x) < 0$，则 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的最大值点，最大值为 $M = f(1) = \frac{1}{e} - a$.

(1) 当 $a > \frac{1}{e}$ 时，$M < 0$，$f(x)$ 无零点，则方程无解；

(2) 当 $a = \frac{1}{e}$ 时，$M = 0$，$f(x)$ 有唯一的零点 $x = 1$，则方程有唯一解 $x = 1$；

(3) 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时，$M > 0$，因为 $f(0) = -a < 0$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -a < 0$，所以 $f(x)$ 有且仅有两个零点，则方程有且仅有两个根，分别位于 $(0,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 内.

方法二　令 $f(x) = xe^{-x}$，由 $f'(x) = (1-x)e^{-x} = 0$ 得 $x = 1$，

当 $x < 1$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x > 1$ 时，$f'(x) < 0$，则 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的最大值点，最大值为 $M = f(1) = \frac{1}{e}$，

又 $f(0) = 0$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$，故

(1) 当 $a > \frac{1}{e}$ 时，原方程无解；

(2) 当 $a = \frac{1}{e}$ 时，原方程有唯一解 $x = 1$；

(3) 当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时,原方程有且仅有两个解.

【例 3】 讨论方程 $x^2=ae^x(a>0)$ 有几个根.

【解】 方程 $x^2=ae^x$ 等价于 $x^2e^{-x}-a=0$.

令 $f(x)=x^2e^{-x}-a$,由 $f'(x)=x(2-x)e^{-x}=0$ 得 $x=0,x=2$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点,极小值为 $f(0)=-a<0$,$x=2$ 为 $f(x)$ 的极大值点,极大值为 $f(2)=\frac{4}{e^2}-a$,又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a<0$.

(1) 当 $f(2)=\frac{4}{e^2}-a<0$,即 $a>\frac{4}{e^2}$ 时,方程只有一个根;

(2) 当 $f(2)=\frac{4}{e^2}-a=0$,即 $a=\frac{4}{e^2}$ 时,方程只有两个根;

(3) 当 $f(2)=\frac{4}{e^2}-a>0$,即 $0<a<\frac{4}{e^2}$ 时,方程只有三个根.

【例 4】 设在$[0,+\infty)$ 内有 $f''(x)\geqslant 0$,且 $f(0)=-1,f'(0)=2$,证明:$f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个根.

【证明】 由 $\begin{cases}f'(0)=2,\\ f''(x)\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $f'(x)\geqslant 2(x\geqslant 0)$,由拉格朗日中值定理,得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x,\text{其中 } 0<\xi<x.$$

于是 $f(x)\geqslant f(0)+2x=2x-1$,两边取极限得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

因为 $f(0)=-1<0$,所以 $f(x)=0$ 至少有一个根.

又因为 $f'(x)\geqslant 2>0$,所以 $f(x)$ 为单调增函数,故根是唯一的.

【例 5】 证明方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在$(0,+\infty)$ 内有且仅有两个根.

【证明】 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=2\sqrt{2},$$

令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+2\sqrt{2}(x>0)$,由 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0$ 得 $x=e$,因为 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,所以 $x=e$ 为 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 的最大值点,最大值为 $M=f(e)=2\sqrt{2}>0$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以原方程有且仅有两个正根.

题型十一　函数的单调性与极值、渐近线

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=2$,则(　　).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【解】 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=2$，得 $f(0)+f'(0)=0$，于是 $f'(0)=0$.

由 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f'(0)+f''(0)$，得 $f''(0)=2>0$，故 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值，应选(B).

【例 2】 设 $f(x)$ 二阶连续可导，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{(x-2)^3}=\dfrac{2}{3}$，则(　　).

(A) $f(2)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B) $f(2)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(2,f(2))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(2)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点，$(2,f(2))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【解】 由$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{(x-2)^3}=\dfrac{2}{3}$，得 $f'(2)=0$，再根据极限的保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$\dfrac{f'(x)}{(x-2)^3}>0$，于是$\begin{cases}f'(x)<0, x\in(2-\delta,2),\\ f'(x)>0, x\in(2,2+\delta),\end{cases}$故 $x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点，应选(A).

【例 3】 设 $f(x)$ 二阶连续可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=-1$，则(　　).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点但不是极值点

【解】 因为 $f(x)$ 二阶连续可导且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=-1$，得 $f''(0)=0$，再根据极限保号性，存在 $\delta>0$，当 $0<|x|<\delta$ 时，$\dfrac{f''(x)}{x}<0$，于是$\begin{cases}f''(x)>0, x\in(-\delta,0),\\ f''(x)<0, x\in(0,\delta),\end{cases}$故 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，应选(C).

【例 4】 设 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$，求 $f(x)$ 的单调区间与极值.

【解】 $f(x)=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$.

由 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt=0$，得 $x=0$，$x=\pm1$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,-1)$，$(0,1)$；$f(x)$ 的单调增区间为 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$；

$f(x)$ 的极小值为 $f(\pm1)=0$，$f(x)$ 的极大值为

$$f(0)=-\int_1^0 te^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1-e^{-1}}{2}.$$

【例 5】 设 $f(x)$ 二阶可导，满足 $f'(x)+x^2f(x)=xe^x$，且 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，判断其为极大值点还是极小值点.

【解】 因为 $f(x)$ 可导且 $x=0$ 为极值点，所以 $f'(0)=0$，

$f'(x)+x^2f(x)=xe^x$ 两边对 x 求导得

$$f''(x)+2xf(x)+x^2f'(x)=(x+1)e^x,$$

将 $x=0$ 代入得 $f''(0)=1>0$,故 $x=0$ 为极小值点.

【例 6】 求曲线 $y=f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

【解】 $x=-1,0,1$ 为曲线的间断点,

由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}=2$,得 $y=2$ 为曲线的水平渐近线;

由 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$,得 $x=-1$ 为曲线的铅直渐近线;

由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$,得 $x=0$ 为曲线的铅直渐近线;

由 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}=e\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{2x}=\dfrac{3e}{2}$,得 $x=1$ 不是曲线的铅直渐近线.

【例 7】 求曲线 $y=\sqrt{x^2-4x+12}+x$ 的斜渐近线.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=2$,

$$\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+12}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+12}{\sqrt{x^2-4x+12}+x}=-2,$$

所以 $y=2x-2$ 为曲线 $y=\sqrt{x^2-4x+12}+x$ 的一条斜渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=0$,所以曲线 $y=\sqrt{x^2-4x+12}+x$ 只有一条斜渐近线.

第四章　不定积分

考查要求

1. 理解原函数与不定积分的概念.
2. 掌握不定积分的基本公式、不定积分的性质及换元积分法与分部积分法.
3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的不定积分(数学三不要求).

第一节　不定积分的概念与基本性质

一、原函数与不定积分的基本概念

1. 原函数 —— 设 $f(x)$,$F(x)$ 为定义于 I 上的函数,若对一切的 $x\in I$,有 $F'(x)=f(x)$,称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

【注解】

(1) 连续函数一定存在原函数,反之不对.

(2) 有第一类间断点的函数一定不存在原函数,但有第二类间断点的函数可能有原函数,如:$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 显然 $F'(x)=f(x)$,但 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3) 若 $f(x)$ 有原函数,则一定有无数个原函数,且任意两个原函数之间相差常数.

(4) 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,则有如下结论成立:

若 $f(x)$ 为偶函数,则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 不一定是奇函数,如:$f(x)=\cos x$ 为偶函数,$F(x)=\sin x+C$ 不一定是奇函数,但 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 一定是奇函数;

若 $f(x)$ 为奇函数,则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 一定为偶函数.

(5) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$,　$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

2. 不定积分 —— 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,则 $f(x)$ 的所有原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分,记为 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

二、不定积分的基本性质

1. $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

2. $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x\,(k\neq 0)$.

第二节 不定积分基本公式与积分法

一、不定积分基本公式

1. $\int k\mathrm{d}x=kx+C$(k 为常数).

2. (1) $\int x^{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C(a\neq -1)$;　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C(x\neq 0)$.

3. (1) $\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C(a>0,a\neq 1)$;　(2) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$.

4. (1) $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$;　(2) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$;

(3) $\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$;　(4) $\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$;

(5) $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$;　(6) $\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$;

(7) $\int\sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$;　(8) $\int\csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$;

(9) $\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$;　(10) $\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$.

5. (1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$;　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\frac{x}{a}+C(a>0)$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\arctan x+C$;　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C(a\neq 0)$;

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$;　(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}=\ln(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}})+C$;

(7) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}=\ln|x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}|+C$;

(8) $\int\sqrt{a^{2}-x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{a^{2}}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}+C$.

二、不定积分的积分法

(一) 换元积分法

1. 第一类换元积分法(凑微分法)

设 $f(u)$ 的原函数为 $F(u)$,又 $\varphi(t)$ 为可导函数,则

$$\begin{aligned}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x &= \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}[\varphi(x)]\\ &\xlongequal{u=\varphi(x)} \int f(u)\mathrm{d}u\\ &= F(u)+C = F[\varphi(x)]+C.\end{aligned}$$

【注解】

以下凑微分法需要熟练掌握：

(1) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)(a\neq 0)$.

(2) $\int \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

(3) $\int \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(4) $\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$.

(5) $\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$.

(6) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)f\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int f\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

(7) $\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

(8) $\int (1+\ln x)f(x\ln x)\mathrm{d}x = \int f(x\ln x)\mathrm{d}(x\ln x)$.

(9) $\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$.

(10) $\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$.

(11) $\int f(\tan x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$.

(12) $\int f(\cot x)\csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$.

(13) $\int f(\sec x)\sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \int f(\sec x)\mathrm{d}(\sec x)$.

(14) $\int f(\csc x)\csc x\cot x\,\mathrm{d}x = -\int f(\csc x)\mathrm{d}(\csc x)$.

(15) $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$.

(16) $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$.

2. 第二类换元积分法

设 $\varphi(t)$ 单调可导且 $\varphi'(t)\neq 0$，$f(x)$ 有原函数，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int g(t)\mathrm{d}t = G(t)+C = G[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

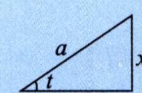
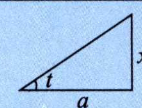
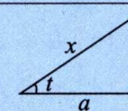
【注解】

第二类换元积分法常用于如下三种情形：

(1) 将被积函数从无理函数转化为有理函数，但无理函数的不定积分不一定需要转化为有理函数. 如：$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+4x)}=2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(2\sqrt{x})^2}=\int \frac{\mathrm{d}(2\sqrt{x})}{1+(2\sqrt{x})^2}$

$$=\arctan 2\sqrt{x}+C.$$

(2) 被积函数含平方和或平方差时，一般采用三角代换，具体换元方法如下：

表达式	替换式	三角形
a^2-x^2	令 $x=a\sin t$，则 $a^2-x^2=a^2\cos^2 t$	
x^2+a^2	令 $x=a\tan t$，则 $x^2+a^2=a^2\sec^2 t$	
x^2-a^2	令 $x=a\sec t$，则 $x^2-a^2=a^2\tan^2 t$	

(3) 倒数变换 $x=\frac{1}{t}$.

【例 1】 计算不定积分 $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\mathrm{d}x$.

【解】 $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\mathrm{d}x=2\int \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\mathrm{d}x=2\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}(\sqrt{x})$

$$=2\int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\sqrt{x}-4\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}(\sqrt{x}+1)$$

$$=2\sqrt{x}-4\ln(\sqrt{x}+1)+C.$$

【例 2】 计算不定积分 $\int x\sqrt{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

【解】 $\int x\sqrt{2x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2x^2+1)$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{6}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

【例 3】 计算 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解】 令 $\sqrt{x}=t$，或 $x=t^2$，则

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2(t-\ln|1+t|)+C=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

【例 4】 计算 $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

【解】 $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} \int \frac{\cos t}{1+\cos t}\mathrm{d}t = \int\left(1-\frac{1}{1+\cos t}\right)\mathrm{d}t$

$$=t-\int \frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2\frac{t}{2}}=t-\int \sec^2\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)=t-\tan\frac{t}{2}+C$$

$$=\arcsin x-\tan\frac{\arcsin x}{2}+C.$$

（二）分部积分法

设 $u(x),v(x)$ 连续可导，则分部积分公式为 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$.

【注解】

以下六种情况使用分部积分公式：

(1) $\int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，即被积函数为幂函数与指数函数之积.

(2) $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x$，即被积函数为幂函数与对数函数之积.

(3) 被积函数为幂函数与三角函数之积.

(4) 被积函数为幂函数与反三角函数之积.

(5) 被积函数为指数函数与三角函数之积.

(6) 被积函数为 $\sec^n x$ 或 $\csc^n x$（n 为奇数）.

【例 1】 求下列不定积分：

(1) $\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$； (2) $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$； (3) $\int x\sin^2 2x\,\mathrm{d}x$； (4) $\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-x^2\mathrm{e}^{-x}+2\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-x^2\mathrm{e}^{-x}-2\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})$

$$=-x^2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}+2\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}+C.$$

(2) $\displaystyle\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x=\int \ln^2 x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\ln^2 x)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}\int \ln x\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C.$$

(3) $\displaystyle\int x\sin^2 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 4x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}\int x\,\mathrm{d}(\sin 4x)$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}\sin 4x+\frac{1}{8}\int \sin 4x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{8}\sin 4x-\frac{1}{32}\cos 4x+C.$$

(4) $\displaystyle\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \arctan x\,\mathrm{d}(x^3)=\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

【例 2】 计算 $I=\int e^{-x}\cos x\,dx$.

【解】 $I=\int e^{-x}\cos x\,dx=\int e^{-x}d(\sin x)=e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x\,dx=e^{-x}\sin x-\int e^{-x}d(\cos x)$

$$=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx,$$

得 $\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$.

第三节　两类重要函数的不定积分——有理函数与三角有理函数(数学三不要求)

一、有理函数的积分

1. 有理函数的概念——设 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$,其中 $P(x),Q(x)$ 为多项式,称 $R(x)$ 为有理函数.

当 $\deg P(x)<\deg Q(x)$ 时,称 $R(x)$ 为真分式;

当 $\deg P(x)\geqslant\deg Q(x)$ 时,称 $R(x)$ 为假分式.

2. $\int R(x)dx$ 的积分方法

情形一:当 $R(x)$ 为真分式时,将 $R(x)$ 拆成部分和的形式.

情形二:当 $R(x)$ 为假分式时,将 $R(x)$ 拆成多项式与真分式之和,再将真分式拆成部分和的形式.

【例 1】 计算下列不定积分:

(1) $\int\frac{1}{x^2-x-12}dx$;　　(2) $\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

(3) $\int\frac{5x-1}{x^2-x-2}dx$;　　(4) $\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$.

【解】 (1) $\int\frac{1}{x^2-x-12}dx=\int\frac{1}{(x+3)(x-4)}dx=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$$=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+3}\right|+C.$$

(2) $\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{d(x+1)}{1+(x+1)^2}=\arctan(x+1)+C$.

(3) 令 $\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$,

由 $A(x-2)+B(x+1)=5x-1$ 得 $\begin{cases}A+B=5,\\-2A+B=-1,\end{cases}$ 解得 $A=2,B=3$,则

$$\int\frac{5x-1}{x^2-x-2}dx=2\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{x-2}=2\ln|x+1|+3\ln|x-2|+C.$$

(4) $\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

【例 2】 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{3x+2}{x(1+x^2)}dx$； (2) $\int \frac{x^3+3}{x^2(1+x)}dx$.

【解】 (1) 令 $\frac{3x+2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$,

由 $A(1+x^2)+x(Bx+C)=3x+2$ 得 $\begin{cases} A+B=0, \\ A=2, \\ C=3. \end{cases}$ 解得 $A=2,B=-2,C=3$,

于是 $\int \frac{3x+2}{x(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{2x-3}{1+x^2}\right)dx = \ln x^2 - \ln(1+x^2) + 3\arctan x + C.$

(2) 令 $\frac{x^3+3}{x^2(1+x)} = 1 + \frac{3-x^2}{x^2(1+x)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$,

由 $Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=3-x^2$ 得 $\begin{cases} A+C=-1, \\ A+B=0, \\ B=3, \end{cases}$ 解得 $A=-3,B=3,C=2$,

于是 $\int \frac{x^3+3}{x^2(1+x)}dx = \int\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x+1}\right)dx = x - 3\ln|x| - \frac{3}{x} + 2\ln|x+1| + C.$

二、三角有理函数的不定积分

1. 三角有理函数的概念 —— 设 $R(x,y)$ 为二元有理函数，称 $R(\sin x,\cos x)$ 为三角有理函数.

2. 万能公式法计算三角有理函数的不定积分

令 $\tan\frac{x}{2}=u$，则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$，$dx = \frac{2}{1+u^2}du$，则

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}du.$$

【注解】

三角有理函数的积分针对特定类型有特定的方法进行积分，一般不采用万能公式法.

重点题型讲解

题型一　不定积分的基本概念与性质

【例 1】 设 $\frac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的原函数，则 $\int xf'(x)dx =$ ________.

【解】 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=x\left(\frac{\sin x}{x}\right)'-\frac{\sin x}{x}+C$

$$=\frac{x\cos x-2\sin x}{x}+C.$$

【例 2】 设 $f'(\ln x)=x^2\ln x$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$ ______.

【解】 由 $f'(\ln x)=x^2\ln x=\mathrm{e}^{2\ln x}\ln x$，得 $f'(x)=x\mathrm{e}^{2x}$.

于是 $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})=\frac{x}{2}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+C.$

题型二 换元积分法

【例 1】 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2x)}$； (2) $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$； (3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$；

(4) $\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\ (x>0)$； (5) $\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x\ (x>0)$； (6) $\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x\ (x>0)$；

(7) $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$； (8) $\int\frac{1+\ln x}{x\ln x(1+x\ln x)}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2x)}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+\ln^2x}=\arctan(\ln x)+C.$

(2) $$\int\frac{\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}(1+x)}=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x})$$

$$=2\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})=\arctan^2\sqrt{x}+C.$$

(3) 方法一 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=2\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}}=2\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{2^2-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$$

方法二 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C.$$

(4) $$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{(\sqrt{2})^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C.$$

(5) $$\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

(6) $$\int\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int\frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x-\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

(7) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

$$=\int\frac{d(x^2+x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x+1}\right]+C.$$

(8) $\int\frac{1+\ln x}{x\ln x(1+x\ln x)}dx=\int\frac{d(x\ln x)}{x\ln x(1+x\ln x)}=\int\frac{d(x\ln x)}{x\ln x}-\int\frac{d(x\ln x)}{1+x\ln x}$

$$=\ln\left|\frac{x\ln x}{1+x\ln x}\right|+C.$$

【例 2】 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$； (2) $\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}+e^{2x}+1}dx$.

【解】 (1) 方法一 $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1-e^{-x}}}=\int\frac{e^{-\frac{x}{2}}dx}{\sqrt{1-e^{-x}}}=-2\int\frac{d(e^{-\frac{x}{2}})}{\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}}$

$$=-2\arcsin e^{-\frac{x}{2}}+C.$$

方法二 令$\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(1+t^2)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

(2) $\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}+e^{2x}+1}dx=\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}+1}dx=\int\frac{d(e^x-e^{-x})}{(\sqrt{3})^2+(e^x-e^{-x})^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{3}}+C.$$

【例 3】 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$； (2) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$；

(3) $\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$； (4) $\int x\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

【解】 (1) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx\xlongequal{x=\tan t}\int\frac{\tan^3 t\sec^2 t}{\sec t}dt=\int\tan^3 t\sec t\,dt=\int\tan^2 t\,d(\sec t)$

$$=\int(\sec^2 t-1)d(\sec t)=\frac{1}{3}\sec^3 t-\sec t+C$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.$$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \xlongequal{x=\tan t} \int \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}\mathrm{d}t = \int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

(3) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x \xlongequal{x=2\sin t} \int \frac{2\cos t}{16\sin^4 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \cot^2 t\cdot\csc^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\int \cot^2 t\,\mathrm{d}(\cot t)$

$$= -\frac{1}{12}\cot^3 t + C = -\frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{12x^3} + C.$$

(4) $\int x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int [(x-1)+1]\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)$

$$\xlongequal{x-1=\sin t} \int (\sin t+1)\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t + \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\int \cos^2 t\,\mathrm{d}(\cos t) + \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C$$

$$= -\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\arcsin(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + C.$$

【例 4】 计算下列积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$； (2) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \xlongequal{x=t^6} \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C.$$

(2) 令 $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$，解得 $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$，则

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2+1}{t^2-1}\cdot t\cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t = \int \frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + 2\arctan t + C$$

$$= \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

题型三 分部积分法

【例 1】 计算下列不定积分：

(1) $\int x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$； (2) $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$； (4) $\int \arcsin x\arccos x\,\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x}) = -\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C.$

(2) $\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}\int x\,\mathrm{d}(\sin2x)=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin2x-\frac{1}{8}\cos2x+C.$$

(3) $\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,\mathrm{d}x$

$$=\int\arctan x\,\mathrm{d}x-\int\arctan x\,\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\arctan^2x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\arctan^2x+C.$$

(4) $\int\arcsin x\arccos x\,\mathrm{d}x=x\arcsin x\arccos x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(\arccos x-\arcsin x)\mathrm{d}x$

$$=x\arcsin x\arccos x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\,\mathrm{d}x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x$$

$$=x\arcsin x\arccos x+\int\arccos x\,\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})-\int\arcsin x\,\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$$

$$=x\arcsin x\arccos x+\sqrt{1-x^2}\arccos x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+2x+C.$$

【例 2】 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int\frac{(1+\sin x)\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$； (3) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{(x+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\int\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}-\int\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}+C.$$

(2) $\int\frac{(1+\sin x)\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+\sin x)\mathrm{e}^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

$$=\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}-\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

(3) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x-\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C.$$

题型四　两类特殊函数的不定积分
——有理函数与三角有理函数的不定积分(数学三不要求)

【例 1】 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{x}{(1+2x^2)^{100}}\mathrm{d}x$； (2) $\int\frac{1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$； (3) $\int\frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$；

(4) $\int \frac{x+4}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$； (5) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$； (6) $\int \frac{5x^2+5x+6}{x^2(x^2+x+3)}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $\int \frac{x}{(1+2x^2)^{100}}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1+2x^2)^{-100}\mathrm{d}(1+2x^2) = -\frac{1}{396(1+2x^2)^{99}}+C$.

(2) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$.

(3) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\sqrt{2})^2+(x+1)^2}\mathrm{d}(x+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

【注解】

(2)、(3) 是不同的问题，(2) 中分母可因式分解，此时将分母因式分解，拆成部分和的形式；(3) 中分母不可因式分解，将分母配方，再用不定积分公式.

(4) 令 $\frac{x+4}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}$，得 $A(x+3)+B(x+2)=x+4$，

于是 $\begin{cases} A+B=1, \\ 3A+2B=4, \end{cases}$ 解得 $A=2, B=-1$.

故 $\int \frac{x+4}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x+2| - \ln|x+3|+C$.

(5) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)+4}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}+2\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{1+(x+1)^2}$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+2\arctan(x+1)+C.$$

(6) 令 $\frac{5x^2+5x+6}{x^2(x^2+x+3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+3}$，

则 $Ax(x^2+x+3)+B(x^2+x+3)+x^2(Cx+D)=5x^2+5x+6$，

即 $\begin{cases} A+C=0, \\ A+B+D=5, \\ 3A+B=5, \\ 3B=6, \end{cases}$ 解得 $A=1, B=2, C=-1, D=2$.

于是 $\int \frac{5x^2+5x+6}{x^2(x^2+x+3)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}+2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}-\int \frac{x-2}{x^2+x+3}\mathrm{d}x$

$$= \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-5}{x^2+x+3}\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+3)}{x^2+x+3}+\frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+3}$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+3)+\frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+3)+\frac{5}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C.$$

【例 2】 计算下列三角有理函数的不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$； (2) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$； (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$；

(4) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$； (5) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$； (6) $\int \frac{\cos 2x\,dx}{3+\sin x\cos x}$；

(7) $\int \frac{dx}{1+2\tan x}$； (8) $\int \frac{dx}{\sin x\sin 2x}$； (9) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx\ (a\neq b)$.

【解】 (1) $\int \frac{dx}{1+\cos x}=\int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\frac{x}{2}+C.$

【注解】

若积分中出现 $1+\cos x$，一般套用公式 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$.

(2) 方法一 $\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{d\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C.$

方法二 $\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{dx}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx$

$$=2\int \frac{d\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}=\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

(4) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int \frac{\sec^2 x\,dx}{1+\sec^2 x}=\int \frac{d(\tan x)}{(\sqrt{2})^2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C.$

【注解】

不定积分的被积函数分子分母中出现 $\sin^2 x$ 及 $\cos^2 x$ 和常数时，一般分子分母同除以 $\cos^2 x$.

(5) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\frac{x}{2}}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(6) $\int\frac{\cos 2x\,\mathrm{d}x}{3+\sin x\cos x}=\int\frac{2\cos 2x\,\mathrm{d}x}{6+\sin 2x}=\int\frac{\mathrm{d}(6+\sin 2x)}{6+\sin 2x}=\ln(6+\sin 2x)+C.$

(7) **方法一**　$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}=\int\frac{\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，

令 $\cos x=a(2\sin x+\cos x)+b(2\sin x+\cos x)'$，则 $\begin{cases}2a-b=0,\\a+2b=1,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{1}{5},b=\frac{2}{5}$，

于是 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}=\frac{1}{5}\int\mathrm{d}x+\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}(2\sin x+\cos x)}{2\sin x+\cos x}=\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\ln|2\sin x+\cos x|+C.$

方法二　令 $\tan x=u$，则 $x=\arctan u,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}=\int\frac{\mathrm{d}u}{(1+2u)(1+u^2)}$.

令 $\frac{1}{(1+2u)(1+u^2)}=\frac{A}{1+2u}+\frac{Bu+C}{1+u^2}$，则 $A(1+u^2)+(Bu+C)(1+2u)=1$，解得

$$A=\frac{4}{5},B=-\frac{2}{5},C=\frac{1}{5}.$$

于是 $\int\frac{\mathrm{d}u}{(1+2u)(1+u^2)}=\frac{2}{5}\ln|1+2u|-\frac{1}{5}\ln(1+u^2)+\frac{1}{5}\arctan u+C$，

故 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2\tan x}=\frac{2}{5}\ln|1+2\tan x|-\frac{1}{5}\ln(1+\tan^2 x)+\frac{1}{5}x+C$

$$=\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\ln|2\sin x+\cos x|+C.$$

【注解】

当被积函数为 $\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}$ 时，一般令

$$a\sin x+b\cos x=A(c\sin x+d\cos x)+B(c\sin x+d\cos x)'.$$

(8) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}+\frac{1}{2}\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sec x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\csc x\cot x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|-\frac{1}{2}\csc x+C.$$

【注解】

不定积分中当三角函数角度不统一时，一般先统一角度.

(9) 因为 $(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)'=(a^2-b^2)\sin 2x$，

所以 $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{a^2-b^2}\int\frac{(a^2-b^2)\sin 2x}{2\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{a^2-b^2}\int\frac{\mathrm{d}(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)}{2\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}=\frac{2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}+C.$$

【注解】

若不定积分的被积函数中出现 $\sin^2 x,\cos^2 x$ 及 $\sin 2x$ 时，一般使用 $(\sin^2 x)'=\sin 2x,(\cos^2 x)'=-\sin 2x$，如：

对不定积分 $\int\frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x-2\cos^2 x}$，因为 $(\sin^2 x-2\cos^2 x)'=3\sin 2x$，所以

$$\int\frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x-2\cos^2 x}=\frac{1}{3}\int\frac{3\sin 2x\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x-2\cos^2 x}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(\sin^2 x-2\cos^2 x)}{\sin^2 x-2\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\sin^2 x-2\cos^2 x|+C.$$

题型五　分段函数的积分

【例】 计算：(1) $\int\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 由 $\mathrm{e}^{|x|}=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x<0,\end{cases}$ 得 $\int\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}\mathrm{e}^x+C_1, & x\geqslant 0,\\ -\mathrm{e}^{-x}+C_2, & x<0.\end{cases}$

取 $C_1=C$，由 $1+C=-1+C_2$，得 $C_2=C+2$.

于是 $\int\mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}\mathrm{e}^x+C, & x\geqslant 0,\\ -\mathrm{e}^{-x}+C+2, & x<0.\end{cases}$

(2) 由 $\max\{1,x^2\}=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ x^2, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 得 $\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x\leqslant -1,\\ x+C_2, & -1<x<1,\\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x\geqslant 1,\end{cases}$

取 $C_2=C$，由 $-\frac{1}{3}+C_1=-1+C,1+C=\frac{1}{3}+C_3$，得 $C_1=C-\frac{2}{3},C_3=C+\frac{2}{3}$.

于是 $\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C-\frac{2}{3}, & x\leqslant -1,\\ x+C, & -1<x<1,\\ \frac{1}{3}x^3+C+\frac{2}{3}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

题型六　综合型不定积分(数学三不要求)

【例 1】 计算 $\int\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

【解】 令 $x=t^2$，则

$$\int\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=2\int t^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)=2t^2\mathrm{e}^t-4\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$=2t^2\mathrm{e}^t-4\int t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)=2t^2\mathrm{e}^t-4t\mathrm{e}^t+4\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

$$=2(t^2-2t+2)\mathrm{e}^t+C=2(x-2\sqrt{x}+2)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C.$$

【例 2】 计算 $\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

【解】 令 $x=\tan t$，则

$$I=\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{e^t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,dt=\int e^t\cos t\,dt$$

$$=\int e^t d(\sin t)=e^t\sin t-\int e^t\sin t\,dt=e^t\sin t+\int e^t d(\cos t)=e^t\sin t+e^t\cos t-I,$$

则 $\displaystyle\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{e^t}{2}(\sin t+\cos t)+C=\frac{e^{\arctan x}}{2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

【例 3】 计算 $\displaystyle\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx.$

【解】 令 $\displaystyle\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，则 $\displaystyle x=\frac{1}{t^2-1}.$

于是 $\displaystyle\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx=\int\ln(1+t)d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{dt}{(t+1)^2(t-1)}.$

令 $\displaystyle\frac{1}{(t+1)^2(t-1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2}$，则 $A(t+1)^2+B(t-1)(t+1)+C(t-1)=1$，

于是 $\begin{cases}A+B=0,\\2A+C=0,\\A-B-C=1,\end{cases}$ 解得 $A=\dfrac{1}{4},B=-\dfrac{1}{4},C=-\dfrac{1}{2}.$

故 $\displaystyle\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{2(t+1)}+C$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}+C.$$

第五章　定积分及其应用

考查要求

1. 理解定积分的概念.
2. 掌握定积分的性质及定积分中值定理，掌握定积分的换元积分法与分部积分法.
3. 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨公式.
4. 理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，会计算反常积分.
5. 掌握定积分的几何应用(包括面积、体积、弧长).
6. 掌握定积分的物理应用(数学三不要求).

第一节　定积分的概念与基本性质

一、从两个实际问题谈定积分产生的实际背景

1. 运动问题的路程计算 —— 设物体运动速度为 $v=v(t)(t\in[T_1,T_2])$，求物体经过的路程.

(1) 取 $T_1=t_0<t_1<\cdots<t_n=T_2$，则 $[T_1,T_2]=[t_0,t_1]\cup[t_1,t_2]\cup\cdots\cup[t_{n-1},t_n]$，其中 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n)$；

(2) 任取 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$，$\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $s\approx\sum\limits_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$；

(3) 取 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$，则路程 $s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$.

2. 曲边梯形的面积问题 —— 设 $L: y=f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$，求由直线 $x=a, x=b, y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形的面积.

(1) 取 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则 $[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\cdots\cup[x_{n-1},x_n]$，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n)$；

(2) 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $A\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$；

(3) 取 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，则 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

二、定积分的定义

设 $y=f(x)(x\in[a,b])$ 有界，

(1) 取 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则 $[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\cdots\cup[x_{n-1},x_n]$，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n)$；

(2) 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$；

(3) 取 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，称 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，称极限为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的积分，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

【注解】

(1)$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续或只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

(3) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 与区间$[a,b]$的分法及点 ξ_i 的取法无关.

(4)$f(x)$ 在$[a,b]$上有界是 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积的必要条件，如：

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}, \end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

若 $\xi_i \in \mathbf{Q}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = b-a$；

若 $\xi_i \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = -(b-a)$，

即 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，故 $f(x)$ 在$[a,b]$上不可积.

(5) 若 $\lambda\to 0$，则 $n\to\infty$，反之不对.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{i}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{i-1}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{kn} f\left(\dfrac{i}{n}\right) = \int_0^k f(x)\mathrm{d}x$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left[a + \dfrac{i}{n}(b-a)\right] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(7) 定积分的几何意义为：

若 $f(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是由 $y=f(x)$、$x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积；

若 $f(x)\leqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是由 $y=f(x)$、$x=a$、$x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积的相反数.

【例 1】 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$.

【例 2】 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

三、定积分的基本性质

1. 设 $f(x),g(x)$ 可积,则 $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)$ 可积,则 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$($k$ 为常数).

3. 设 $f(x)$ 可积,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

4. $\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a$.

5. (1) 设 $f(x)$ 可积且 $f(x)\geqslant 0(x\in[a,b])$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$;

(2) 设 $f(x),g(x)$ 可积且 $f(x)\geqslant g(x)(x\in[a,b])$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

(3) 设 $f(x)\in C[a,b]$,则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 可积且 $m\leqslant f(x)\leqslant M(x\in[a,b])$,则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$.

7. (积分中值定理) 设 $f(x)\in C[a,b]$,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

【注解】

设 $f(x)\in C[a,b]$,称 $\overline{f}=\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值.

四、定积分基本性质的推广

定理1(积分中值定理的推广) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

证明 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,因为 $f(x)$ 连续,所以 $F(x)$ 可导且 $F'(x)=f(x)$.

由牛顿-莱布尼茨公式得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$,由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)$,于是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

定理2(积分第一中值定理) 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$ 且 $g(x)\geqslant 0$,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 和最大值 M,由

$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$,得 $m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(1) 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$,则对任意的 $\xi \in [a,b]$,有$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

(2) 若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$,则 $m \leqslant \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M$,由介值定理,存在 $\xi \in [a,b]$,使得

$f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$,故$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

定理 3 (1) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$f(x) \geqslant 0$ 且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$,则 $f(x) \equiv 0(a \leqslant x \leqslant b)$;

(2) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$f(x) \geqslant 0$ 且 $f(x)$ 不恒为零,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$;

(3) 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续,$f(x) \geqslant g(x)$ 且 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理 4(柯西不等式) 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续,则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证明 对任意的 $t \in \mathbf{R}$,有$[tf(x)+g(x)]^2 \geqslant 0$,即 $f^2(x)t^2 + 2f(x)g(x)t + g^2(x) \geqslant 0$,两边关于 x 在$[a,b]$上积分得

$$\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]t^2 + 2\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]t + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

(1) 若$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$,则 $f(x) \equiv 0$,结论显然成立;

(2) 若$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x > 0$,由 $\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$,得

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

第二节 基本理论

一、积分基本定理

定理 1 设 $f(x) \in C[a,b]$,令 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $\Phi'(x) = f(x)$.

证明 $\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)\Delta x$,其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间.

于是$\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi)$,两边取极限得 $\Phi'(x) = f(x)$.

【注解】

(1) 连续函数一定存在原函数.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x)$.

(4) $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 中积分表达式的 x 与积分限所含的 x 不同；$\int_a^x f(x,t)\mathrm{d}t$ 中积分表达式的 x 与积分限所含的 x 相同.

(5) 变积分限函数在极限计算、变积分限的函数求导、定积分计算、微分方程等中都有非常重要的应用.使用时首先将表达式中所含的积分限变量处理掉,再求导数.

(6) 设 $f(x)$ 连续或有有限个第一类间断点,令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则:当 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点时,$F(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续;当 x_0 为 $f(x)$ 的连续点时,$F(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导.

【例 1】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\cos t\mathrm{d}t - x}{x^3}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\cos t\mathrm{d}t - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}\cos x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}(\cos x - 1) + (\mathrm{e}^{-x^2} - 1)}{x^2}$

$$= \frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\frac{\cos x - 1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x^2} - 1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}\left[1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)\right] = -\frac{1}{2}.$$

【例 2】 设 $f(x)=\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t$,求 $f'(x)$.

【解】 $f(x)=\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 \sin u^2(-\mathrm{d}u) = \int_0^x \sin u^2\mathrm{d}u$,则 $f'(x)=\sin x^2$.

定理 2(牛顿-莱布尼茨公式) 设 $f(x)\in C[a,b]$,且 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证明 令 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 与 $\Phi(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数,所以 $F(x)-\Phi(x)\equiv C_0$.由 $F(a)-\Phi(a)=F(b)-\Phi(b)$,且 $\Phi(a)=0$,得 $\Phi(b)=F(b)-F(a)$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

【注解】

可积与函数存在原函数不同,如:$f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ \mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有第一类间断点,所以 $f(x)$ 没有原函数,但 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可积,且

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-1} + x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-1} + \ln 2 - \int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

二、定积分的特殊性质

1. 对称区间上函数的定积分性质

设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$，特别地，

(1) 若 $f(-x)=-f(x)$，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$；

(2) 若 $f(-x)=f(x)$，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

证明 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$，

因为 $\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} \int_{a}^{0} f(-t)(-\mathrm{d}t)=\int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$，

所以 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$.

2. 三角函数定积分性质

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，

特别地，$I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$，且 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$，$I_1=1$，$I_0=\frac{\pi}{2}$.

当 $n=2k$ 时，$I_n=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$；

当 $n=2k+1$ 时，$I_n=\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，

即 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$，特别地，$\int_{0}^{\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x=2I_n$.

注意：$\int_{0}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，特别地，

$$\int_{0}^{\pi}\cos^n x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}2I_n, & n=2,4,6,\cdots\\ 0, & n=1,3,5,\cdots\end{cases}$$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

(4) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则

$$\int_{0}^{2\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x,\int_{0}^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

3. 周期函数定积分的性质

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

(1) $\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$(周期函数定积分的平移性质).

(2) $\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

4. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}a^2$.

5. $\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^n \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n=1,3,5,\cdots \\ 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^n \mathrm{d}x, & n=2,4,6,\cdots \end{cases}$

三、定积分的积分法

1. 换元积分法

定理 1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $x=\varphi(t)$ 单调、连续可导且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

2. 分部积分法

定理 2 设 $u(x),v(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，则 $\int_a^b u\mathrm{d}v = vu\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$.

第三节 广义积分

广义积分是相对于正常积分而言的. 若积分区间有限且被积函数 $f(x)$ 在积分区间上连续或只有有限个第一类间断点，这种类型的积分称为正常积分，若积分区间无限或被积函数 $f(x)$ 在积分区间上有无穷间断点，则积分为广义积分或反常积分.

一、广义积分敛散性的概念

(一) 积分区间无限的广义积分敛散性概念

定义 1 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$，

若 $\lim\limits_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]=A$，称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 A，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = A$；

若 $\lim\limits_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]$ 不存在，称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

【例 1】 判断 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

【解】 $\int_1^b \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan x^2\Big|_1^b = \frac{1}{2}\left(\arctan b^2 - \frac{\pi}{4}\right)$，

因为 $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\arctan b^2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$，所以 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$.

定义 2 设 $f(x)\in C(-\infty,a]$，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a)-F(b)$，

若 $\lim\limits_{b\to-\infty}[F(a)-F(b)]=A$，称广义积分 $\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于 A，记为 $\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x = A$；

若 $\lim\limits_{b\to-\infty}[F(a)-F(b)]$ 不存在，称广义积分 $\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 3 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，则广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是广义积分 $\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 2】 判断 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

【解】 $\int_{0}^{b}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{b}=\frac{1}{2}\ln(1+b^2)$，

因为 $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+b^2)=+\infty$，所以广义积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散，故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

（二）积分区间有限的广义积分

定义 4 设 $f(x)\in C(a,b]$，且 $f(a+0)=\infty$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a+\varepsilon)$，若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F(b)-F(a+\varepsilon)]=A$，称广义积分 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，记为 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=A$；若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F(b)-F(a+\varepsilon)]$ 不存在，称广义积分 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

【例 3】 判断 $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$ 的敛散性.

【解】 对 $\forall\varepsilon>0$，$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=2\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}=2\left(\frac{\pi}{4}-\arcsin\sqrt{\varepsilon}\right)$，

因为 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}2\left(\frac{\pi}{4}-\arcsin\sqrt{\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}$，所以广义积分 $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$ 收敛，且 $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{\pi}{2}$.

定义 5 设 $f(x)\in C[a,b)$，且 $f(b-0)=\infty$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x=F(b-\varepsilon)-F(a)$，若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F(b-\varepsilon)-F(a)]=A$，称广义积分 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，记为 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=A$；若 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}[F(b-\varepsilon)-F(a)]$ 不存在，称广义积分 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

【例 4】 判断 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 的敛散性.

【解】 对 $\forall\varepsilon>0$，$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}=\arcsin(1-\varepsilon)-\frac{\pi}{6}$，

因为 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left[\arcsin(1-\varepsilon)-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\pi}{3}$，所以广义积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ 收敛，且 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{3}$.

定义 6 设 $f(x)\in C[a,c)\cup(c,b]$ 且 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，则广义积分 $\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分

必要条件是广义积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$与$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$都收敛,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【注解】

(1) 广义积分的奇偶性不能随便使用,只有广义积分收敛时才可以使用奇偶性.

(2) 积分区间单侧无限或无穷间断点为积分区间的端点时,广义积分可以当正常积分计算,若积分值存在则收敛,若积分值不存在则发散.

【例 5】 判断$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$的敛散性.

【解】 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2(x^2+1)}\xlongequal{x^2=t}\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{t+1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(0-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

故广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$收敛.

【例 6】 判断$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}$的敛散性.

【解】 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$

故广义积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}$收敛.

二、广义积分敛散性判别法

定理 1 设$f(x)\in C[a,+\infty)$且$f(x)\geqslant 0$,则

(1) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha f(x)$存在且$\alpha>1$时,广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(2) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha f(x)=k>0$或$\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha f(x)=+\infty$且$\alpha\leqslant 1$时,广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散.

定理 2 设$f(x)\in C(-\infty,a]$且$f(x)\geqslant 0$,则

(1) 若$\lim\limits_{x\to-\infty}x^\alpha f(x)$存在且$\alpha>1$时,广义积分$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(2) 若$\lim\limits_{x\to-\infty}x^\alpha f(x)=k\neq 0$或$\lim\limits_{x\to-\infty}x^\alpha f(x)=\infty$且$\alpha\leqslant 1$时,广义积分$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$发散.

定理 3 设$f(x)\in C(a,b]$,$f(x)\geqslant 0$,且$f(a+0)=\infty$,则

(1) 若$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^\alpha f(x)$存在且$\alpha<1$时,广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(2) 若$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^\alpha f(x)=k>0$或$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^\alpha f(x)=+\infty$且$\alpha\geqslant 1$时,广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

定理 4 设$f(x)\in C[a,b)$,$f(x)\geqslant 0$且$f(b-0)=\infty$,则

(1) 若$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^\alpha f(x)$存在且$\alpha<1$时,广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^\alpha f(x)=k>0$ 或 $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^\alpha f(x)=+\infty$ 且 $\alpha\geqslant 1$ 时，广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

【例 7】 判断广义积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x-1}}$ 的敛散性，若收敛计算其值.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(1+x)\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$，所以广义积分 $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x-1}}$ 收敛，且

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x-1}}=2\int_1^3 \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x-1})}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{x-1})^2}=\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}\bigg|_1^3=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

【例 8】 判断广义积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$ 的敛散性，若收敛计算其值.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-0)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=1$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$，

又因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}=1$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$，

所以广义积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$ 收敛，且

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}\bigg|_0^1=\pi.$$

【例 9】 判断 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$ 的敛散性.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(x-1)\sqrt{x(x-2)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$，

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{(x-1)\sqrt{x(x-2)}}=1$ 且 $\alpha=2>1$，

所以广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$ 收敛，且

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}=\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}=\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\xlongequal{x=\sec t}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

定理 5 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$，则

(1) 若 $f(x)\leqslant g(x)$ 且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若 $f(x)\geqslant g(x)$ 且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 6 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，反之不对.

【注解】

(1)Γ 函数的定义如下：

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

(2)Γ 函数有如下三个常见的性质：

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)；\Gamma(n+1)=n!；\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

【例 10】 计算下列广义积分：

(1)$\int_0^{+\infty} x^9e^{-x^2}dx$； (2)$\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx$.

【解】 (1)$\int_0^{+\infty} x^9e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^8e^{-x^2}d(x^2)\xlongequal{x^2=t}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(5)=12.$

(2)$\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}(2x)^2e^{-2x}d(2x)\xlongequal{2x=t}\frac{1}{8}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt=\frac{1}{8}\Gamma(3)=\frac{1}{4}.$

第四节 定积分的应用

一、定积分的几何应用

1. 面积

(1) 设 D 由 $y=f(x)\geqslant 0, x=a$ 及 $x=b(a<b)$ 围成，则 D 的面积为 $A=\int_a^b f(x)dx$.

(2) 设 D 由曲线 $y=f(x), y=g(x), x=a$ 及 $x=b(a<b)$ 围成，则 D 的面积为

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$$

(3) 设 D 由 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 围成，则用元素法求 D 的面积，如下：

取 $d\theta\subset[\alpha,\beta]$，则 $dA=\frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$，于是 D 的面积为 $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$.

(4) 设 D 由 $r=r_1(\theta), r=r_2(\theta)(r_1(\theta)\leqslant r_2(\theta), \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 围成，则 D 的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]d\theta.$$

(5)(旋转曲面的面积) 设 $L: y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则 L 绕 x 轴旋转所得旋转体侧面积的求法如下：

取 $[x,x+dx]\subset[a,b]$，则 $dA=2\pi|f(x)|ds$，于是侧面积为

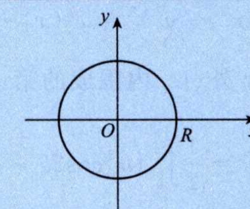
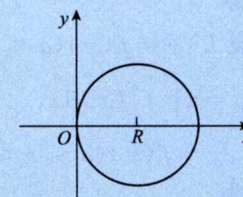
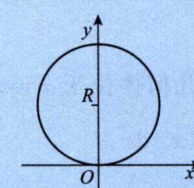
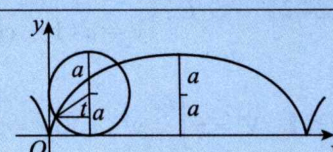
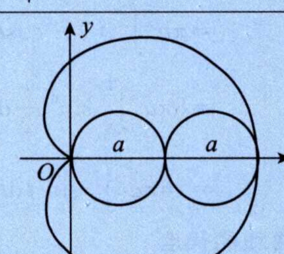
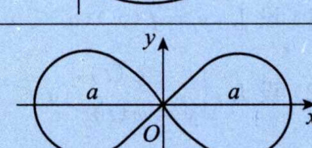
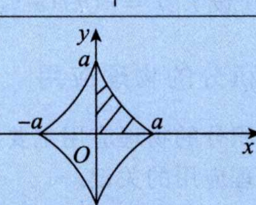
$$\begin{aligned}A&=2\pi\int_a^b |f(x)|ds\\&=2\pi\int_a^b |f(x)|\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}dx；\end{aligned}$$

若 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则 L 绕 x 轴旋转所得的侧面积为

$$A=2\pi\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\cdot\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

【注解】

定积分几何应用中经常使用如下特殊曲线：

曲线名称	直角坐标形式	极坐标或参数形式	图形
圆	(1)$x^2+y^2=R^2$	$r=R$	
	(2)$x^2+y^2=2Rx$	$r=2R\cos\theta$	
	(3)$x^2+y^2=2Ry$	$r=2R\sin\theta$	
摆线		$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t).\end{cases}$	
心形线		$r=a(1+\cos\theta)$	
双纽线	$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$	$r^2=a^2\cos2\theta$	
星形线	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$	$\begin{cases}x=a\cos^3t,\\y=a\sin^3t.\end{cases}$	

【例 1】 求由 $x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$ 外、$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内所围成区域的面积.

【解】 $L_1:x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$ 的极坐标形式为 $L_1:r^2=\frac{a^2}{2}$;

$L_2:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的极坐标形式为 $L_2:r^2=a^2\cos 2\theta$.

设 L_1 外、L_2 内围成的第一象限区域为 D_1,由 $\frac{a^2}{2}=a^2\cos 2\theta$,得 $\theta=\frac{\pi}{6}$,

则 $A_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(a^2\cos 2\theta-\frac{a^2}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{24}a^2$,由对称性得 $A=4A_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)a^2$.

2. 体积

(1) 设 $L:y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则 L 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

(2) $L:y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)(ab\geqslant 0)$,则 L 与 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b |x||f(x)|\mathrm{d}x.$$

(3) 设几何体位于 $x=a$ 与 $x=b$ 之间,对 $x\in[a,b]$,截口面积为 $A(x)$,则几何体的体积为 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$.

【例 2】 设 $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,求 L 绕 x 轴旋转而成的几何体的体积.

【解】
$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{2\pi a}y^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=8\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos t}{2}\right)^3\mathrm{d}t\\&=8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\mathrm{d}t=16\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)\\&=16\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6 t\,\mathrm{d}t=32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,\mathrm{d}t=5\pi^2a^3.\end{aligned}$$

3. 曲线的长度

(1) 设 $L:y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则曲线 L 的长度为 $l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$.

(2) 设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,则曲线 L 的长度为 $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$.

(3) 设 $L:r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$,则曲线 L 的长度为 $l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$.

二、定积分的物理应用

定积分的物理应用主要是计算功和力,其中力主要为压力和引力,掌握好微元法是解决定积分物理应用的关键.

【例 3】 有一电荷量为 q_1 带正电的固定质点位于原点,在距离原点 a 处有一电荷量为 q_2 带正电的活动质点,若固定质点将活动质点从距离 a 处排斥到 b 处,求排斥力所做的功.

【解】　取微元$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[a,b]$,则 $\mathrm{d}W=k\dfrac{q_1q_2}{x^2}\mathrm{d}x$.

于是 $W=\int_a^b\mathrm{d}W=kq_1q_2\int_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=kq_1q_2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$.

【例 4】　圆柱形水桶盛一半的水,底面半径为R,将圆柱水平放置,求水对底面的压力.

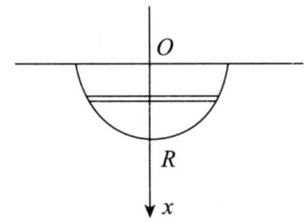


图 5-1

【解】　建立如图 5-1 所示的坐标系,

取微元$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,R]$,$\mathrm{d}S=2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,

$\mathrm{d}F=\rho gx\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$,

$F=2\rho g\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\rho gR^3$.

重点题型讲解

题型一　定积分的概念与性质

【例 1】　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$.

【解】　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x},$$

因为$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{1+x}\mathrm{d}x=2\ln2-1=\ln\dfrac{4}{\mathrm{e}}$,所以原式$=\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

【例 2】　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin^2\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【解】　$\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2\dfrac{i\pi}{n}\leqslant\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin^2\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2\dfrac{i\pi}{n}$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2\dfrac{i\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2\dfrac{i\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2\dfrac{i\pi}{n}$

$$=\int_0^1\sin^2\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

所以原式$=\dfrac{1}{2}$.

【例 3】　设 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$,求 $f(x)$.

【解】 令$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx = A$，则 $f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + A$，

$f(x)\sin x = \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x} + A\sin x$，等式两边在$[-\pi,\pi]$上积分得

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = 2\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$
$$= -\pi\int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2},$$

故
$$f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + \frac{\pi^2}{2}.$$

【例 4】 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx$，$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx$，$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\,dx$，则(　　).

(A)$I < J < K$　　(B)$I > J > K$　　(C)$J < I < K$　　(D)$J > I > K$

【解】 当 $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$\sin x \leqslant \cos x \leqslant \cot x$，则 $\ln\sin x \leqslant \ln\cos x \leqslant \ln\cot x$ 且三个函数不恒等，所以 $I < J < K$，应选(A).

【注解】

比较定积分的大小是一种常考题型，若积分区间相同，则比较定积分的大小转化为比较被积函数的大小.

题型二　变积分限的函数问题

【思路分析】

涉及变积分限的函数是考查的重点内容，一般有如下题型：

(1) 求极限；

(2) 求导数；

(3) 计算定积分；

(4) 与几何问题、微分方程问题结合.

处理变积分限函数一般有两个步骤：第一步，将积分限中的字母从被积表达式中处理掉；第二步，对变积分限的函数求导.

【例 1】 设 $f(x)$ 连续，且$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$，$F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n)dt$，求$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$，得 $f(0) = 0$，$f'(0) = 2$.

$$F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n)dt = -\frac{1}{n}\int_0^x f(x^n - t^n)d(x^n - t^n)$$
$$\xlongequal{x^n - t^n = u} -\frac{1}{n}\int_{x^n}^0 f(u)du = \frac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)du,$$

于是$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x^{2n}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{n-1} f(x^n)}{2nx^{2n-1}} = \dfrac{1}{2n}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x^n) - f(0)}{x^n} = \dfrac{1}{2n}f'(0) = \dfrac{1}{n}$.

【例 2】 设 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}$.

【解】 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 (x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$,

于是
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}+f(x)}{\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}},$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}=2$.

【问题】 设 $f(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}$(答案:3).

【例 3】 设 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$,求 $\varphi'(x)$.

【解】 $\varphi(x)=-\dfrac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2) \xlongequal{x^2-t^2=u} -\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u$,

则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2)$.

【例 4】 设 $f(x)$ 连续,且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$,又 $f(1)=1$,求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

【解】 由 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{2x-t=u} \int_{2x}^x (2x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u$,

得 $2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$,两边求导数,得
$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u+2x[2f(2x)-f(x)]-[4xf(2x)-xf(x)]=\frac{x}{1+x^4},$$

整理得 $2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$,取 $x=1$,得 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$.

【例 5】 设 $D:x^2+y^2\leqslant t^2(t>0)$,$f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,求
$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint\limits_D f(t-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t-\arctan t}.$$

【解】 $\iint\limits_D f(t-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t rf(t-r)\mathrm{d}r$

$$\xlongequal{t-r=u}2\pi\int_t^0(t-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=2\pi\left[t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u-\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u\right],$$

因为$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\arctan t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{3t^2}=\dfrac{1}{3}$，所以$t-\arctan t\sim\dfrac{1}{3}t^3$.

于是$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\iint\limits_D f(t-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t-\arctan t}=6\pi\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t\int_0^t f(u)\mathrm{d}u-\int_0^t uf(u)\mathrm{d}u}{t^3}$

$$=2\pi\lim_{t\to0}\frac{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}{t^2}=\pi\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\pi.$$

【例 6】 设$f(x)$二阶可导，$f(x)-\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x-1$，求$f(x)$.

【解】 由$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，

得$f(x)-x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x-1$，两边求导，得$f'(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x$，再求导，得$f''(x)-f(x)=\mathrm{e}^x$，解微分方程，得$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^x$，由$f(0)=0$，$f'(0)=1$，得$C_1=-\dfrac{1}{4}$，$C_2=\dfrac{1}{4}$，于是$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{4}+\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^x$.

题型三　定积分的计算

情形一：定积分的常规计算

【例 1】 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin2x}{1+\sin^4x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\ln2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^1\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

【解】

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin2x}{1+\sin^4x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}(\sin^2x)}{1+\sin^4x}=\arctan(\sin^2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\int_0^{\ln2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x\xlongequal{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t}\int_0^1 t\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

$$=2-2\arctan t\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}.$$

(3) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)=\dfrac{1}{2}\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\left(x\ln x\Big|_1^2-1\right)=\frac{1}{2}(2\ln2-1).$$

(4) $\int_0^1\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{t}{\sec^4t}\cdot\sec^2t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\cos^2t\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{t^2}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{d}(\sin 2t)$$

$$=\frac{\pi^2}{64}+\frac{1}{4}\left(t\sin 2t\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,\mathrm{d}t\right)=\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}.$$

【例 2】 计算$\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2[(x-1)+1]^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)$

$$=\int_{-1}^1(x+1)^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(1+x^2)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\sin t}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 t)\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 t)(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^4 t)\mathrm{d}t=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5\pi}{8}.$$

【例 3】 计算$\int_0^{\pi^2}\sin^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^{\pi^2}\sin^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{\sqrt{x}=t}2\int_0^{\pi}t\sin^2 t\,\mathrm{d}t=2\times\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$

$$=2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

【例 4】 (1) 设 $f(x),g(x)\in C[-a,a]$,$f(-x)+f(x)=A$,$g(-x)=g(x)$,证明:

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arctan e^x\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

【解】 (1)$\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(-x)g(-x)+f(x)g(x)]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^a[f(-x)+f(x)]g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x.$$

(2)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arctan e^x\cdot\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\arctan e^{-x}+\arctan e^x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$,

因为$(\arctan e^{-x}+\arctan e^x)'=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0$,所以 $\arctan e^{-x}+\arctan e^x$ 为常数,取 $x=0$,得 $\arctan e^{-x}+\arctan e^x=\frac{\pi}{2}$,于是原式$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$.

【例 5】 计算$\int_0^{2\pi}(x-\sin x)(1+\cos x)^2\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^{2\pi}(x-\sin x)(1+\cos x)^2\mathrm{d}x\xlongequal{x-\pi=t}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+t+\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$

$$=\pi\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=2\pi\int_0^{\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$=4\pi\int_0^{\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\xlongequal{\frac{t}{2}=u}16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,\mathrm{d}u=16\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi^2.$$

情形二:分段函数求定积分

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}(x-1)=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-1}^0+x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+2\ln 2-1.$$

【例 2】 设 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$,$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$,当 $x\in[0,\pi]$ 时,$f(x)=x$,求 $\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_\pi^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]\mathrm{d}x=\int_\pi^{3\pi}f(x-\pi)\mathrm{d}(x-\pi)+\int_\pi^{3\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}+\int_\pi^{2\pi}[f(x-\pi)+\sin x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\int_\pi^{2\pi}f(x-\pi)\mathrm{d}(x-\pi)+\int_\pi^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\pi^2-2.$$

情形三:变换保持区间计算定积分

【例 1】 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

【解】 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$,

则 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

【例 2】 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x$.

【解】 由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{-\mathrm{d}t}{1+\cot^{\sqrt{2}}t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{1}{\tan^{\sqrt{2}}t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\sqrt{2}}x}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x$,得

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{\sqrt{2}}x}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

【例 3】 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$.

【解】 由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln(\cos t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$,得

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,d(2x)$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I,$$

于是$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

情形四:分部积分法计算定积分

【例 1】 设 $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$,求$\int_0^1 x^2 f(x)dx$.

分析:$f(x)$ 是以变积分限的函数表示,且 $f(x)$ 无法积分出来,这种类型的定积分计算一般采用分部积分法.

【解】 $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)d(x^3)=\frac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx=-\frac{1}{6}\int_0^1 x^2 e^{-x^2}d(x^2)\xlongequal{x^2=t}-\frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}dt=\frac{1}{6}\int_0^1 t\,d(e^{-t})$$

$$=\frac{1}{6}te^{-t}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-t}dt=\frac{1}{6e}+\frac{1}{6}e^{-t}\Big|_0^1=\frac{1}{3e}-\frac{1}{6}.$$

【例 2】 设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt$,求$\int_0^{\pi}f(x)dx$.

【解】 $\int_0^{\pi}f(x)dx=xf(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}xf'(x)dx=\pi f(\pi)-\int_0^{\pi}\frac{x}{\pi-x}\sin x\,dx$

$$=\pi f(\pi)+\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)-\pi}{\pi-x}\sin x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}dx+\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=2.$$

【例 3】 设$\int_0^2 f(x)dx=4, f(2)=1, f'(2)=0$,计算$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$.

【解】 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=\frac{1}{8}\int_0^1(2x)^2 f''(2x)d(2x)=\frac{1}{8}\int_0^2 x^2 f''(x)dx$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2 x^2 d[f'(x)]=\frac{1}{8}x^2 f'(x)\Big|_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 xf'(x)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^2 x\,d[f(x)]=-\frac{1}{4}xf(x)\Big|_0^2+\frac{1}{4}\int_0^2 f(x)dx$$

$$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

【例 4】 设 $f(x), g(x)$ 满足:$f'(x)=g(x), g'(x)-f(x)=2e^x$,又 $f(0)=0$, $g(0)=3$,计算

$$\int_0^1\left[\frac{g(x)}{x+1}-\frac{f(x)}{(x+1)^2}\right]dx.$$

【解】 由 $f'(x)=g(x)$ 及 $g'(x)-f(x)=2e^x$ 得 $f''(x)-f(x)=2e^x$,

特征方程为 $\lambda^2-1=0$，特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，

方程 $f''(x)-f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x$；

方程 $f''(x)-f(x)=2e^x$ 的特解为 $f_0(x)=axe^x$，代入得 $a=1$，

故方程 $f''(x)-f(x)=2e^x$ 的通解为 $f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x+xe^x$.

由 $f(0)=0,g(0)=3$ 得 $f(0)=0,f'(0)=3$，即 $\begin{cases}C_1+C_2=0,\\-C_1+C_2+1=3,\end{cases}$ 解得 $C_1=-1,C_2=1$，

即 $f(x)=-e^{-x}+e^x+xe^x$.

$$\int_0^1\left[\frac{g(x)}{x+1}-\frac{f(x)}{(x+1)^2}\right]dx=\int_0^1\frac{g(x)}{x+1}dx+\int_0^1 f(x)d\left(\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\int_0^1\frac{g(x)}{x+1}dx+\frac{f(x)}{x+1}\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{g(x)}{x+1}dx=\frac{1}{2}f(1)=\frac{2e-e^{-1}}{2}.$$

题型四　定积分的证明

【思路分析】

定积分的证明是定积分部分的重点和难点，一般分为如下几种情形：

(1)$f(x)$ 为连续函数

对 $f(x)$ 只给出连续性的定积分证明问题，一般使用定积分的一些基本性质、特殊性质解决问题.

(2)$f(x)$ 为连续且单调函数

对 $f(x)$ 既具有连续性又具有单调性，除可以使用定积分的基本性质和特殊性质之外，经常使用单调函数特有的性质，如构造辅助函数，构造辅助函数通常有如下两种方法：

方法一：若结论是关于 a,b 的定积分等式或不等式，一般可以将其两边相减，将 b 改为 x 构造出辅助函数.

方法二：若 $f(x)$ 单调增加，则对任意的 $x,y\in[a,b]$，$(x-y)[f(x)-f(y)]\geqslant 0$；若 $f(x)$ 单调减少，则对任意的 $x,y\in[a,b]$，$(x-y)[f(x)-f(y)]\leqslant 0$.

(3)$f(x)$ 为周期函数

若 $f(x)$ 为周期函数，一般采用周期函数的两个特有性质.

(4)$f(x)$ 连续可导

一般使用两大工具，即拉格朗日中值定理和牛顿-莱布尼茨公式.

(5)$f(x)$ 高阶可导

一般使用泰勒公式.

情形一：$f(x)$ 连续

【例 1】 设 $f(x)$ 连续，证明：

(1)$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$；

(2)$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx$.

分析：若证明一个定积分与另一个定积分相等，且两个定积分区间相同，一般使用变换 $x+t=a+b$；若证明一个定积分等于另一个定积分，且另一个定积分积分区间为 $[0,1]$，一般使用变换 $x=a+(b-a)t$.

【证明】 (1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x+t=a+b} \int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)$

$$=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=a+(b-a)t} \int_0^1 f[a+(b-a)t](b-a)\mathrm{d}t$

$$=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]\mathrm{d}t=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x.$$

【例 2】 设 $f(x)\in C[0,a^2](a>1)$，证明：$\int_0^a xf(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 $\int_0^a xf(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a f(x^2)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} f(x)\mathrm{d}x$.

【例 3】 设 $f(x)\in C[a,b]$，且对任意的 $x,y\in[a,b]$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant 2|x-y|$，证明：$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(a)(b-a)\right|\leqslant(b-a)^2$.

【证明】 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(a)\right|=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(a)\mathrm{d}x\right|$

$$=\left|\int_a^b [f(x)-f(a)]\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)-f(a)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b 2(x-a)\mathrm{d}(x-a)=(b-a)^2.$$

【注解】

(1) 若一个式子一项为定积分，另一项不含定积分，一般常用两种方法处理：

方法一：两个式子都含有定积分，如：

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f(a)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(a)\mathrm{d}t=\int_a^x [f(t)-f(a)]\mathrm{d}t.$$

方法二：将含定积分的项利用积分中值定理处理成不含定积分的项，如：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-f(c)=f(\xi)-f(c)，其中\ \xi\in[a,b].$$

(2) 定积分证明过程中，若定积分含绝对值，一般情况下，一定会采用如下性质：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

【证明】 由 $\frac{[f(x)-m][M-f(x)]}{f(x)}\geqslant 0$ 得 $f(x)+\frac{mM}{f(x)}\leqslant m+M$，两边积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+mM\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant m+M.$$

因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+mM\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\sqrt{mM\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x}$，

所以 $$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

【例 5】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内至少有两个不同零点.

【证明】 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$F(a)=F(b)=0$.

由罗尔定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $F'(x_0)=0$，即 $f(x_0)=0$.

不妨设 $f(x)$ 在(a,b)内除 x_0 外无其他零点，则 $f(x)$ 在(a,x_0)与(x_0,b)内异号.

设当 $x\in(a,x_0)$ 时，$f(x)<0$，当 $x\in(x_0,b)$ 时，$f(x)>0$，

$$\int_a^b (x-x_0)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_0}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b (x-x_0)f(x)\mathrm{d}x,$$

当 $x\in[a,x_0]$ 时，$(x-x_0)f(x)\geqslant 0$ 且$(x-x_0)f(x)\not\equiv 0$，则$\int_a^{x_0}(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x>0$；

当 $x\in[x_0,b]$ 时，$(x-x_0)f(x)\geqslant 0$ 且$(x-x_0)f(x)\not\equiv 0$，所以$\int_{x_0}^b(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x>0$；

于是$\int_a^b(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x>0$，事实上由已知条件得$\int_a^b(x-x_0)f(x)\mathrm{d}x=0$，矛盾，故 $f(x)$ 在(a,b)内至少有两个不同的零点.

【例 6】 设 $f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t\,(x>0)$，证明：$f(x)\leqslant\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

【证明】 由 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x=0$，得 $x=1$，$x=k\pi(k=1,2,\cdots)$.

因为当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上的最大值点，最大值 $M=f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$，

故 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

【例 7】 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，证明：

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也为偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 为非增函数，则 $F(x)$ 为非减函数.

【证明】 (1) 设 $f(-x)=f(x)$，则

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}\int_0^x(-x+2u)f(-u)(-\mathrm{d}u)$$
$$=\int_0^x(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

于是 $F(x)$ 为偶函数.

(2) $F(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，

$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)]$（$\xi$ 介于 0 与 x 之间），

当 $x<0$ 时，因为 $x<\xi<0$ 且 $f(x)$ 为非增函数，所以 $F'(x)\geqslant 0$；

当 $x\geqslant 0$ 时，因为 $0<\xi<x$ 且 $f(x)$ 为非增函数，所以 $F'(x)\geqslant 0$，故 $F(x)$ 非减.

【例 8】 设 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

分析：本题为含 a,b 及 ξ 的式子，需要构造辅助函数，构造方法如下：

将 $f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$ 化为 $g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+f(x)\int_b^x g(t)\mathrm{d}t=0$，还原得$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_b^x g(t)\mathrm{d}t\right)'=0$，辅助函数为 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_b^x g(t)\mathrm{d}t$.

【证明】 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_b^x g(t)\mathrm{d}t$，$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，故 $f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

情形二：设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(x)$ 单调增加或单调减少

【例 1】 设 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(x)$ 单调增加，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 **方法一：辅助函数法**

令 $\varphi(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，　$\varphi(a)=0$，

$$\varphi'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x-a}{2}[f(x)-f(\xi)]，其中\ \xi\in[a,x]，$$

因为 $f(x)$ 单调增加，所以 $\varphi'(x)\geqslant 0$.

由 $\begin{cases}\varphi(a)=0,\\ \varphi'(x)\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $\varphi(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$，于是 $\varphi(b)\geqslant 0$，即 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

方法二：辅助函数法

令 $\varphi(x)=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$，因为 $f(x)$ 单调增加，所以 $\varphi(x)\geqslant 0$，于是

$$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

而 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x，$$

故
$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【例 2】 设 $f(x)\in C[0,1]$ 且 $f(x)$ 单调减少，对任意的 $\alpha\in(0,1)$，证明：

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】 **方法一：变换法**

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\alpha t}\alpha\int_0^1 f(\alpha t)\mathrm{d}t=\alpha\int_0^1 f(\alpha x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

方法二：中值定理法

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x-\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x-\alpha\int_\alpha^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$=(1-\alpha)\alpha f(\xi_1)-\alpha(1-\alpha)f(\xi_2)$$

$$=\alpha(1-\alpha)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\geqslant 0，其中\ \xi_1\in[0,\alpha]，\xi_2\in[\alpha,1].$$

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且单调减少，证明：

$$\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^n f(k)\leqslant f(1)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

【证明】 因为 $f(x)$ 为单调减函数，

所以 $\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$

$$\leqslant \int_1^2 f(1)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(2)\mathrm{d}x + \cdots + \int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

又由$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x$

$$\geqslant \int_1^2 f(2)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(3)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(n)\mathrm{d}x = f(2)+f(3)+\cdots+f(n),$$

得$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，于是$\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.

情形三：$f(x)$ 为周期函数

【例 1】 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$，则（　　）.

(A) $F(x)$ 是与 x 有关的函数　　(B) $F(x)$ 为正常数

(C) $F(x)$ 为负常数　　(D) $F(x) \equiv 0$

【解】 由周期函数的平移性质得

$$F(x) = \int_x^{x+2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (\mathrm{e}^{\sin t} - \mathrm{e}^{-\sin t})\sin t\,\mathrm{d}t,$$

因为$(\mathrm{e}^{\sin t} - \mathrm{e}^{-\sin t})\sin t$ 在$[0,\pi]$上连续、非负且不恒为零，所以 $F(x) > 0$，即 $F(x)$ 为正常数，应选(B).

【例 2】 设 $f(x)$ 为以 T 为周期的非负连续函数，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

【证明】 对任意的 $x > 0$，存在 n，使得 $nT \leqslant x \leqslant (n+1)T$.

由 $f(x) \geqslant 0$ 得$\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t$，即

$$n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant (n+1)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t,$$

于是 $$\frac{n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{(n+1)T} \leqslant \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} \leqslant \frac{(n+1)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{nT},$$

注意到当 $x \to +\infty$ 时，$n \to \infty$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x} = \dfrac{\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{T}$.

【例 3】 设 $S(x) = \int_0^x |\cos t|\,\mathrm{d}t\ (x \geqslant 0)$，证明：

(1) 当 $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$ 时，$2n \leqslant S(x) \leqslant 2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{x}$.

【证明】 (1) 因为 $|\cos t| \geqslant 0$，所以$\int_0^{n\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x |\cos t|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{(n+1)\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t$，

而$\int_0^{n\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t = n\int_0^{\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t = n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = 2n$，

同理$\int_0^{(n+1)\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t = 2(n+1)$，于是 $2n \leqslant S(x) \leqslant 2(n+1)$.

(2) 由$\dfrac{2n}{(n+1)\pi} \leqslant \dfrac{S(x)}{x} \leqslant \dfrac{2(n+1)}{n\pi}$，注意到 $x \to +\infty$ 时，$n \to \infty$，由夹逼定理得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

情形四：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导

【注解】

若所证明的积分等式或不等式涉及 f, f'，一般有两个工具需要使用：

(1) 拉格朗日中值定理：$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)$，其中 $\xi\in(a,x)$.

(2) 牛顿-莱布尼茨公式：$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

具体使用方法为：

(1) 若所证明的式子中，定积分的被积函数不含 $f'(x)$，则一般使用拉格朗日中值定理.

(2) 若所证明的式子中，定积分的被积函数含 $f'(x)$，则一般使用牛顿-莱布尼茨公式.

【例 1】 设 $f'(x)\in C[0,a]$，$f(0)=0$，$|f'(x)|\leqslant M$，证明：$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{2}a^2$.

分析：本题是关于 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 关系的不等式，具有如下几个特点：

(1) 定积分被积函数中不含函数导数，则使用 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，其中 $\xi\in(0,x)$.

(2) 定积分含绝对值，则使用 $\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x$.

【证明】 由拉格朗日中值定理，得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，其中 $\xi\in(0,x)$，即 $f(x)=f'(\xi)x$，取绝对值得 $|f(x)|=|f'(\xi)|x\leqslant Mx$.

于是 $\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a Mx\,\mathrm{d}x=\frac{M}{2}a^2$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\max_{0\leqslant x\leqslant1}|f'(x)|.$$

【证明】 令 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}|f'(x)|=M$，由拉格朗日中值定理，得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)x,\text{其中 }\xi\in(0,x),$$
$$f(x)-f(1)=f'(\eta)(x-1),\text{其中 }\eta\in(x,1),$$

从而 $|f(x)|\leqslant Mx$ 及 $|f(x)|\leqslant M(1-x)$，

于是 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}Mx\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 M(1-x)\mathrm{d}x=\frac{M}{4}$.

【例 3】 设 $f'(x)\in C[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，$c\in(a,b)$，证明：

$$|f(c)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

分析：本题是关于 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 关系的不等式，具有如下特点：

(1) 定积分的被积函数中含导数，则使用牛顿-莱布尼茨公式.

(2) 定积分含绝对值，则需要使用 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

【证明】 由牛顿-莱布尼茨公式，得

$$\begin{cases}f(c)-f(a)=\int_a^c f'(x)\mathrm{d}x,\\ f(b)-f(c)=\int_c^b f'(x)\mathrm{d}x,\end{cases}\text{即}\begin{cases}f(c)=\int_a^c f'(x)\mathrm{d}x,\\ -f(c)=\int_c^b f'(x)\mathrm{d}x,\end{cases}$$

取绝对值得$\begin{cases} |f(c)| \leqslant \int_a^c |f'(x)| \mathrm{d}x, \\ |f(c)| \leqslant \int_c^b |f'(x)| \mathrm{d}x, \end{cases}$

两式相加得 $|f(c)| \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x$.

【例 4】 设 $f'(x) \in C[a,b]$,$c \in (a,b)$,证明:

$$|f(c)| \leqslant \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x.$$

【证明】 由积分中值定理得$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(x_0)$,其中 $x_0 \in [a,b]$.

由牛顿-莱布尼茨公式得 $f(c) - f(x_0) = \int_{x_0}^c f'(x)\mathrm{d}x$,或 $f(c) = f(x_0) + \int_{x_0}^c f'(x)\mathrm{d}x$,取绝对值,得 $|f(c)| \leqslant |f(x_0)| + \left|\int_{x_0}^c f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |f(x_0)| + \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x$,

即
$$|f(c)| \leqslant \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x.$$

【注解】

定积分的证明过程中,若 $f(x)$ 连续且定积分积分区间的长度与定积分前面的常数为倒数关系时,一般使用积分中值定理.

【例 5】 设 $f(x) \in C[0,1]$,在$(0,1)$内可导,且 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{1-x^2} f(x)\mathrm{d}x$,证明:存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

【证明】 令 $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2} f(x)$,由积分中值定理得 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{1-x^2} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{1-c^2} f(c)$,其中 $c \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$,于是 $\mathrm{e}^{-1} f(1) = \mathrm{e}^{-c^2} f(c)$,即 $\varphi(c) = \varphi(1)$.

由罗尔定理,存在 $\xi \in (c,1) \subset (0,1)$,使得 $\varphi'(\xi) = 0$,而 $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}[f'(x) - 2xf(x)]$ 且 $\mathrm{e}^{-x^2} \neq 0$,故 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

【例 6】 设 $f(x) \in C[0,2]$,在$(0,2)$内二阶可导,$f(0) < f(1)$,$f(1) > \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$,证明:存在 $\xi \in (0,2)$,使得 $f''(\xi) < 0$.

【证明】 由推广的积分中值定理,存在 $c \in (1,2)$,使得$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = f(c)$.

由拉格朗日中值定理,存在 $\xi_1 \in (0,1)$,$\xi_2 \in (1,c)$,使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} > 0,$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(c) - f(1)}{c-1} < 0.$$

再由拉格朗日中值定理,存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,2)$,使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0.$$

【注解】

(1) 已知条件中若出现函数值与定积分的条件时，定积分一般采用推广的积分中值定理.

(2) 若 $f(x)$ 可导，条件中出现至少三个点的函数值时，一般使用拉格朗日中值定理.

情形五：$f(x)$ 高阶可导

【思路分析】

若关于定积分的等式或不等式中出现二阶以上的导数，一般使用泰勒公式证明，证明过程中注意如下几点：

(1) 使用泰勒公式的函数可能是 $f(x)$ 或 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，究竟是对 $f(x)$ 还是对 $F(x)$ 使用泰勒公式要看具体情况，有两种情况一般对 $F(x)$ 使用泰勒公式：

① 结论中出现 $\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}$； ② 结论中 $\xi\in(a,b)$.

(2) 使用泰勒公式时，x_0 与 x 的选取原则与微分相同.

【例 1】 设 $f''(x)\in C[2,4]$，$f(3)=0$，证明：存在 $\xi\in(2,4)$，使得 $f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 令 $F(x)=\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$，且 $F'(3)=f(3)=0$，由泰勒公式得

$$F(2)=F(3)+\frac{F''(3)}{2!}(2-3)^2+\frac{F'''(\xi_1)}{3!}(2-3)^3\text{，其中 }\xi_1\in(2,3)\text{，}$$

$$F(4)=F(3)+\frac{F''(3)}{2!}(4-3)^2+\frac{F'''(\xi_2)}{3!}(4-3)^3\text{，其中 }\xi_2\in(3,4)\text{，}$$

即 $F(2)=F(3)+\dfrac{f'(3)}{2!}-\dfrac{f''(\xi_1)}{6}$，$F(4)=F(3)+\dfrac{f'(3)}{2!}+\dfrac{f''(\xi_2)}{6}$，两式相减得

$$F(4)-F(2)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{6}\text{ 或}\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{6}.$$

因为 $f''(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，所以 $f''(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上有最小值 m 和最大值 M，因为 $m\leqslant\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant M$，所以由介值定理，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(2,4)$，使得 $\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=f''(\xi)$，故 $f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在$[-a,a](a>0)$上二阶连续可导，且 $f(0)=0$.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明：存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$.

【证明】 (1) $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式为

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$，其中 ξ 位于 0 与 x 之间.

(2) 将 $f(x)=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$ 两边积分，得 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^a\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2\mathrm{d}x$.

因为 $f''(x)$ 在$[-a,a]$上连续，所以 $f''(x)$ 在$[-a,a]$上取到最小值 m 和最大值 M，由

$\frac{m}{2}x^2 \leqslant \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \leqslant \frac{M}{2}x^2$，得

$$\frac{m}{3}a^3 \leqslant \int_{-a}^{a} \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{3}a^3.$$

从而 $m \leqslant \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \mathrm{d}x \leqslant M$，由介值定理，存在 $\eta \in [-a,a]$，使得 $\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = f''(\eta)$，故 $a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

【例 3】 设 $f(x) \in C[0,1]$，且 $f''(x) > 0$，证明：$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x \geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

分析： 本题涉及二阶导数，一般使用泰勒公式，显然 $x_0 = \frac{1}{3}$，涉及二阶导数的保号性一般有两种思路：一阶导数的单调性及重要不等式，本题使用第二种用法.

【证明】 因为 $f''(x) > 0$，所以 $f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$，

从而 $f(x^2) \geqslant f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$，两边积分得 $\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x \geqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

题型五　广义积分

【例 1】 计算下列广义积分：

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^{x+1} + e^{3-x}}$；　　(2) $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$；

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$；　　(4) $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

【解】 (1) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^{x+1} + e^{3-x}} = \frac{1}{e^2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^{x-1} + e^{1-x}} = \frac{1}{e^2}\int_1^{+\infty} \frac{e^{x-1}\mathrm{d}x}{1 + (e^{x-1})^2}$

$$= \frac{1}{e^2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(e^{x-1})}{1 + (e^{x-1})^2} = \frac{1}{e^2}\arctan e^{x-1}\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4e^2}.$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\lim\limits_{x\to3^-}(3-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，

且 $\frac{1}{2} < 1$，所以广义积分 $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\mathrm{d}x$ 收敛.

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{-3+4x-x^2}}\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$$

$$= \arcsin(x-2)\Big|_1^3 = \pi.$$

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x-1}} = 1$ 且 $\frac{1}{2} < 1$，又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x-1}} = 1$ 且 $\frac{3}{2} > 1$，

所以广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$ 收敛.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = 2\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x-1})}{1+(\sqrt{x-1})^2} = 2\arctan\sqrt{x-1}\Big|_1^{+\infty} = \pi.$$

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 \cdot \dfrac{1}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=1$ 且 $5>1$，所以 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$ 收敛，

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-1}}$$

$$\xlongequal{x=\sec t}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{\sec^4 t\tan t}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

【例 2】 计算 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

【解】 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$，

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}=1$ 且 $\dfrac{1}{2}<1$，

所以广义积分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$ 与 $\displaystyle\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$ 都收敛.

方法一　$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}\bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\pi}{2}$，

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=2\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{(\sqrt{x})^2-1}}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})\bigg|_{1}^{\frac{3}{2}}=2\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\ln(2+\sqrt{3}),$$

于是 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$.

方法二　$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$$=\arcsin(2x-1)\bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x}\right]\bigg|_{1}^{\frac{3}{2}}=\ln(2+\sqrt{3}),$$

于是　$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$.

题型六　定积分的应用

情形一：几何应用

【例 1】 设 $y=f(x)$ 为区间 $[0,1]$ 上的非负连续函数.

(1) 证明存在 $c\in(0,1)$，使得在区间 $[0,c]$ 上以 $f(c)$ 为高的矩形面积，等于区间 $[c,1]$ 上

以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积；

(2) 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，证明(1) 中的 c 是唯一的.

【证明】 (1) 令 $S_1(c)=cf(c),S_2(c)=\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t$.

令 $\varphi(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，再令 $F(x)=x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，$F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $F'(c)=0$，即 $\varphi(c)=0$，即 $cf(c)=\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t$.

(2) 因为 $\varphi'(x)=xf'(x)+2f(x)=x\left[f'(x)+\dfrac{2f(x)}{x}\right]>0(0<x<1)$，所以 $\varphi(x)$ 在$[0,1]$上单调增加，故(1) 中的 c 是唯一的.

【注解】

证明或讨论连续函数零点问题一般有如下几种思路：

(1) 零点定理.

(2) 广义零点定理.

设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，若 $f(a)<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$，则 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$ 内至少有一个零点.

(3) 罗尔定理.

设 $f(x)$ 连续，要证明 $f(x)$ 在(a,b) 内有零点，可以找 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，若 $F(a)=F(b)$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$.

如：证明 $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$ 至少有一个正零点，取 $F(x)=x^4-x^3+x^2-x$，显然 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且 $F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$，故 $f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$ 至少有一个正零点 ξ.

【例 2】 求双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围成的面积.

【解】 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos2\theta$.

由对称性得
$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\,\mathrm{d}(2\theta)=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=a^2.$$

【例 3】 设 $f(x)$ 满足 $xf'(x)-2f(x)=-x$，由 $y=f(x)$，$x=1$ 及 x 轴$(x\geqslant0)$ 所围成的平面区域为 D，若 D 绕 x 轴旋转一周所围成的几何体体积最小，求：

(1) 曲线 $y=f(x)$ 的方程；

(2) 曲线的原点处的切线与曲线及直线 $x=1$ 围成的图形面积.

【解】 (1) 由 $xf'(x)-2f(x)=-x$，得 $f'(x)-\dfrac{2}{x}f(x)=-1$，解得
$$f(x)=\left(\int(-1)\mathrm{e}^{\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=Cx^2+x,$$
$$V(C)=\pi\int_0^1(Cx^2+x)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{C^2}{5}+\frac{C}{2}+\frac{1}{3}\right),$$
由 $V'(C)=\pi\left(\dfrac{2C}{5}+\dfrac{1}{2}\right)=0$ 得 $C=-\dfrac{5}{4}$.

因为 $V''(C)=\frac{2\pi}{5}>0$,所以当 $C=-\frac{5}{4}$ 时,$V(C)$ 最小,于是 $f(x)=x-\frac{5}{4}x^2$.

(2) 因为 $f'(0)=1$,所以曲线在原点处的切线为 $y=x$,围成的面积为

$$A=\int_0^1\left[x-\left(x-\frac{5}{4}x^2\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{5}{12}.$$

【例 4】 设 $L:y=\sqrt{x-1}$,求:

(1) 过原点且与 L 相切的直线;

(2) 由 L,切线与 x 轴所围成的几何体绕 x 轴旋转所成几何体的表面积.

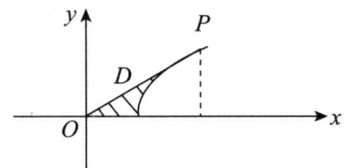


图 5-2

【解】 (1) 如图 5-2,设切点为 $P(a,\sqrt{a-1})$.

由 $\frac{1}{2\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a-1}}{a}$ 得 $a=2$,则切线方程为 $y=\frac{1}{2}x$.

(2) $S_1=2\pi\int_0^2\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi$,

$$S_2=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1),$$

则 $S=\frac{11\sqrt{5}-1}{6}\pi$.

【例 5】 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$,求:

(1) 区域 D 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积;

(2) 区域 D 绕直线 $x=3$ 旋转而成的几何体的体积.

【解】 (1) **方法一**

取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,2]$, $\mathrm{d}V=2\pi x(y_2-y_1)\mathrm{d}x$,

由 $x^2+y^2=2x$,得 $y_1=-\sqrt{2x-x^2}$,$y_2=\sqrt{2x-x^2}$,则 $\mathrm{d}V=4\pi x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$,

所求的体积为

$$V=4\pi\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=4\pi\int_0^2[(x-1)+1]\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)$$

$$=4\pi\int_{-1}^1(x+1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=8\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\sin t}8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=8\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=2\pi^2.$$

方法二

取 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset[-1,1]$, $\mathrm{d}V=(\pi x_2^2-\pi x_1^2)\mathrm{d}y$,

由 $x^2+y^2=2x$ 得 $x_1=1-\sqrt{1-y^2}$,$x_2=1+\sqrt{1-y^2}$,则

$$\mathrm{d}V=\pi[(1+\sqrt{1-y^2})^2-(1-\sqrt{1-y^2})^2]\mathrm{d}y=4\pi\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y,$$

所求的体积为

$$V=4\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y=8\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\xlongequal{y=\sin t}8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2\pi^2.$$

(2) 取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,2]$, $\mathrm{d}V=2\pi(3-x)(y_2-y_1)\mathrm{d}x$,

由 $x^2+y^2=2x$ 得 $y_1=-\sqrt{2x-x^2}$,$y_2=\sqrt{2x-x^2}$,则

$\mathrm{d}V=4\pi(3-x)\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$,所求体积为

$$V=4\pi\int_0^2(3-x)\sqrt{2x-x^2}\,dx=4\pi\int_0^2[2-(x-1)]\sqrt{1-(x-1)^2}\,d(x-1)$$

$$=4\pi\int_{-1}^1(2-x)\sqrt{1-x^2}\,dx=16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\xlongequal{x=\sin t}16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=16\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=4\pi^2.$$

【例 6】 求由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 围成的区域绕 $x=2$ 旋转而成的几何体的体积.

【解】 取 $[x,x+dx]\subset[0,1]$，则 $dv=2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$.

于是 $V=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)dx$

$$=2\pi\int_0^1(2-x)\sqrt{2x-x^2}\,dx-2\pi\int_0^1(2x-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_0^1[1-(x-1)]\sqrt{1-(x-1)^2}\,d(x-1)-\frac{4\pi}{3}$$

$$=2\pi\int_{-1}^0(1-x)\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{4\pi}{3}$$

$$=2\pi\int_{-1}^0\sqrt{1-x^2}\,dx+\pi\int_{-1}^0\sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2)-\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.$$

情形二：物理应用（数学三不要求）

【例 1】 一打桩机每次击打所做的功相等，桩的深度与土的阻力成正比，比例系数为 k，已知第一次击打桩下降深度为 1 m，求第二次击打的下降深度.

【解】 取 $[x,x+dx]\subset[0,1]$，$dW_1=kx\cdot dx$，$W_1=\int_0^1 kx\,dx=\frac{k}{2}$.

设第二次下降深度为 h，取 $[x,x+dx]\subset[1,1+h]$，$dW_2=kx\,dx$，

$$W_2=\int_1^{1+h}kx\,dx=\frac{k}{2}[(1+h)^2-1].$$

因为 $W_1=W_2$，所以 $h=\sqrt{2}-1$(m).

【例 2】 为清除井底污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥提出井口. 设井深 30 米，斗自重 400 牛，缆绳每米重 50 牛，抓斗盛污泥 2 000 牛，提升速度为 3 米 / 秒，在提升过程中，污泥以 20 牛 / 秒的速度从抓斗中漏掉. 现将抓斗从井底提升至井口，问克服重力做功多少？

【解】 如图 5－3，设拉力对空斗做功为 W_1，

则 $W_1=400\times 30=12\ 000$(J)；

设拉力对绳所做的功为 W_2，取 $[x,x+dx]\subset[0,30]$，

则 $dW_2=50(30-x)dx$，$W_2=50\int_0^{30}(30-x)dx=22\ 500$(J)；

设拉力对泥所做的功为 W_3，取 $[t,t+dt]\subset[0,10]$，

则 $dW_3=(2\ 000-20t)\times 3dt$，$W_3=3\int_0^{10}(2\ 000-20t)dt=57\ 000$(J)，

故拉力所做的功为 $W=91\ 500$(J).

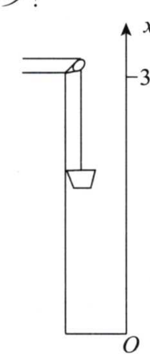


图 5－3

第六章　多元函数微分学

考查要求

1. 理解多元函数的概念,理解二元函数的几何意义(数学二、三作为了解).

2. 了解二元函数的极限与连续的概念以及有界闭区域上连续函数的性质.

3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念,会求全微分,了解全微分存在的必要条件和充分条件,了解全微分形式的不变性.

4. 理解方向导数与梯度的概念,并掌握其计算方法(数学二、三不要求).

5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.

6. 了解隐函数存在定理,会求多元隐函数的偏导数.

7. 了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它们的方程(数学二、三不要求).

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式(数学二、三不要求).

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值,并会解决一些简单的应用问题.

第一节　多元函数微分学的基本概念

1. 多元函数的极限 —— 设 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$,若对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立,称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$.

【例 1】 设 $f(x,y)=\left(\dfrac{\sin xy}{xy}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}f(x,y)$.

【解】 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\left(\dfrac{\sin xy}{xy}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\left[\left(1+\dfrac{\sin xy-xy}{xy}\right)^{\frac{xy}{\sin xy-xy}}\right]^{\frac{\sin xy-xy}{x^3y}}$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}\frac{\sin xy-xy}{x^3y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to2}}y^2\frac{\sin xy-xy}{(xy)^3}}\xlongequal{xy=t}e^{4\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}}=e^{\frac{4}{3}\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos t-1}{t^2}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

【例 2】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 是否存在.

【解】 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=x}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$,　$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0\\y=-x}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x^2+x^2}=-\dfrac{1}{2}$,

所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

【例 3】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$是否存在.

【解】 因为$0\leqslant|f(x,y)|=\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$,且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$,所以由夹逼定理得$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$.

【注解】

一元函数在一点处极限存在的充分必要条件是其左、右极限都存在且相等,但多元函数在一点处极限存在,要求$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$存在,即函数$f(x,y)$沿所有可能的路径趋于点$(x_0,y_0)$时,函数值趋于同一个值,若函数$f(x,y)$沿两个不同方向趋于点$(x_0,y_0)$时,函数值趋于两个不同值,则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$不存在,所以多元函数的极限比较复杂.

2. 多元函数的连续 —— 设$z=f(x,y)((x,y)\in D)$,且$(x_0,y_0)\in D$,若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$,称函数$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处连续.

【注解】

一元函数$f(x)$在$x=a$连续的充要条件是$f(a-0)=f(a+0)=f(a)$,多元函数在一点连续无类似结论.

3. 偏导数 —— 设函数$z=f(x,y)((x,y)\in D)$,$(x_0,y_0)\in D$,称

$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$(或$\Delta z_x=f(x,y_0)-f(x_0,y_0)$)为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$关于$x$的偏增量;

$\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$(或$\Delta z_y=f(x_0,y)-f(x_0,y_0)$)为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$关于$y$的偏增量;

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$(或$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)$)为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处的全增量.

若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\left(\text{或}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}\right)$存在,称$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$关于$x$可偏导,极限即为$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处关于$x$的偏导数,记为$f'_x(x_0,y_0)$或$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$;

若$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\left(\text{或}\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}\right)$存在,称$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$关于$y$可偏导,极限即为$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处关于$y$的偏导数,记为$f'_y(x_0,y_0)$或$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$.

4. 高阶偏导数 —— 设$z=f(x,y)$为二元函数,若$z=f(x,y)$的偏导数$f'_x(x,y)$,$f'_y(x,y)$

仍然可偏导，称 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 的偏导数为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，二阶偏导数有：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y),$$

其中$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为二阶混合偏导数.

5. 全微——设 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$，$(x_0,y_0)\in D$，若 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，称 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可全微，简称可微，记 $A\Delta x+B\Delta y=\mathrm{d}z$，习惯上记 $\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y$.

【注解】

(1) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可偏导是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的必要非充分条件.

(2) $A=f'_x(x_0,y_0)$，　$B=f'_y(x_0,y_0)$.

(3) 函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的充分必要条件是 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\rho}=0$.

(4) 设 $z=f(x,y)$ 可微，则其全微分为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.

6. 方向导数(数学二、三不要求)

(1) 二维空间方向导数　设 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$，$M_0(x_0,y_0)\in D$，在 xOy 平面内过点 M_0 作射线 l，$M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in l$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，称极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 M_0 处沿射线 l 的方向导数，记为$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$，若射线 l 的方向角为 α,β，则$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta$.

(2) 三维空间方向导数　设 $u=f(x,y,z)((x,y,z)\in\Omega)$，$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$，过点 M_0 作射线 l，$M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\in l$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，称极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 M_0 处沿射线 l 的方向导数，记为$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$，若射线 l 的方向角为 α,β,γ，则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma.$$

【注解】

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}&=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma\\&=\left.\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\right|_{M_0}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},\end{aligned}$$

其中$\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}\Bigg|_{M_0}$为一个固定向量，$\boldsymbol{e}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$为射线 l 对应的单位向量.

设两个向量的夹角为 θ，则

$$\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{M_0}=\left|\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\right|_{M_0}\cos\theta=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\,\Bigg|_{M_0}\cdot\cos\theta,$$

当 $\theta=0$，即射线的方向与固定向量$\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}\Bigg|_{M_0}$方向相同时，方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{M_0}$取最大值，且最大值为$\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\,\Bigg|_{M_0}$，称固定向量为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 M_0 处的梯度.

7. 梯度（数学二、三不要求）——设 $u=f(x,y,z)$ 可偏导，称 $\mathbf{grad}u=\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 的梯度.

第二节　多元函数基本理论

一、有界闭区域上连续的多元函数的性质

设 D 为 xOy 平面上的有界闭区域，$f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则有

定理 1（最值定理）　函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上取到最小值和最大值.

定理 2（有界定理）　函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界.

定理 3（介值定理）　设 m 和 M 为函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的最小值和最大值，则 $f(x,y)$ 在 D 上可取到介于 m 和 M 之间的任何值.

二、连续、可偏导、可微的关系

定理 1　若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处既连续又可偏导，反之不对.

证明　设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则

$f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，等式两边取极限，得 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，取 $\Delta y=0$，得 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$，于是$\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，两边取极限，得$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A$，即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 可偏导，且 $f'_x(x_0,y_0)=A$，同理 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 可偏导，且 $f'_y(x_0,y_0)=B$.

定理 2　设 $f(x,y)$ 两个偏导数连续，则 $f(x,y)$ 一定可微，反之不对.

定理 3 设 $f(x,y)$ 具有二阶连续的偏导数，则 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

【反例 1】 研究函数 $z=\sqrt{x^2+y^4}$ 在$(0,0)$处的连续性与可偏导性.

【解】 显然 $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ 在$(0,0)$处连续.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$不存在，所以函数 $z=\sqrt{x^2+y^4}$ 在$(0,0)$处对 x 不可偏导.

因为$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2}{y}=0$，所以函数 $z=\sqrt{x^2+y^4}$ 在$(0,0)$处对 y 可偏导，且 $f'_y(0,0)=0$.

【反例 2】 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 研究 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处的连续性与可偏导性.

【解】 因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在，所以 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处不连续.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$，所以 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处对 x 可偏导，且 $f'_x(0,0)=0$.

同理 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处对 y 可偏导，且 $f'_y(0,0)=0$.

【反例 3】 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 研究 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处的连续性、可偏导性和可微性.

【解】 因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处连续.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x\,|x|}=0$，所以 $f'_x(0,0)=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$，即 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处可偏导.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{xy}{\rho^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处不可微.

三、求偏导的类型

（一）显函数求偏导

所谓显函数求偏导，即形如 $z=f(x,y)$ 的显函数分别对 x,y 求偏导，显函数求偏导与求导数相同，若求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，只需要将 y 看成常数即可.

【例 1】 设 $z=\arctan\dfrac{x-y}{x+y}$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^2}\cdot\dfrac{2y}{(x+y)^2}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}\cdot\frac{-2x}{(x+y)^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

【例 2】 设 $z=(x^2+y^2)^{xy}$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 由 $z=e^{xy\ln(x^2+y^2)}$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy\ln(x^2+y^2)}\cdot\left[y\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right]=(x^2+y^2)^{xy}\cdot\left[y\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right],$$

由对称性，得$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+y^2)^{xy}\cdot\left[x\ln(x^2+y^2)+\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right]$.

（二）复合函数求偏导

情形一 设 $z=f(u,v)$，且$\begin{cases}u=\varphi(t),\\v=\psi(t),\end{cases}$其中 $f(u,v)$ 连续可偏导，$\varphi(t),\psi(t)$ 可导，则

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}=f'_1\cdot\varphi'(t)+f'_2\cdot\psi'(t).$$

【例 1】 设 $z=e^{u+v^2}$，其中$\begin{cases}u=\ln t,\\v=\sin t,\end{cases}$求$\frac{dz}{dt}$.

【解】 **方法一** 由 $z=e^{u+v^2}=e^{\ln t+\sin^2 t}$，得$\frac{dz}{dt}=e^{\ln t+\sin^2 t}\cdot\left(\frac{1}{t}+\sin 2t\right)$.

方法二 $\frac{dz}{dt}=e^{u+v^2}\cdot\frac{du}{dt}+2ve^{u+v^2}\cdot\frac{dv}{dt}=e^{\ln t+\sin^2 t}\cdot\left(\frac{1}{t}+\sin 2t\right)$.

【例 2】 设 $f(u,v)$ 二阶连续可偏导，且 $z=f(t,\sin t)$，求$\frac{d^2z}{dt^2}$.

【解】 $\frac{dz}{dt}=f'_1+f'_2\cos t$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2}&=f''_{11}+f''_{12}\cos t-f'_2\sin t+(f''_{21}+f''_{22}\cos t)\cos t\\&=f''_{11}+2f''_{12}\cos t-f'_2\sin t+f''_{22}\cos^2 t.\end{aligned}$$

情形二 设 $z=f(u,v)$，且$\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y),\end{cases}$其中 $f(u,v)$ 及 u,v 连续可偏导，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f'_1\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f'_2\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f'_1\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f'_2\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

【例 3】 设 $z=e^{u+v}$，其中$\begin{cases}u=xy,\\v=\dfrac{y}{x},\end{cases}$求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 **方法一** 由 $z=e^{xy+\frac{y}{x}}$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy+\frac{y}{x}}\cdot\left(y-\frac{y}{x^2}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy+\frac{y}{x}}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

方法二 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=e^{u+v}\cdot y+e^{u+v}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=e^{xy+\frac{y}{x}}\cdot\left(y-\frac{y}{x^2}\right)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^{u+v}\cdot x+\mathrm{e}^{u+v}\cdot\frac{1}{x}=\mathrm{e}^{xy+\frac{y}{x}}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

【例 4】 设 $z=f(xy,x+y)$，其中 f 二阶连续可偏导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+f'_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y(xf''_{11}+f''_{12})+xf''_{21}+f''_{22}=f'_1+xyf''_{11}+(x+y)f''_{12}+f''_{22}.$$

情形三 设 $z=f[u,v,\varphi(x)]$，$\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y),\end{cases}$ 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f'_2\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+f'_3\cdot\varphi'(x),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_1\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f'_2\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

【例 5】 设 $z=f(x+y,xy,2x)$，其中 f 二阶连续可偏导，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+yf'_2+2f'_3$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f''_{11}+xf''_{12}+f'_2+y(f''_{21}+xf''_{22})+2(f''_{31}+xf''_{32})\\&=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+f'_2+xyf''_{22}+2f''_{31}+2xf''_{32}.\end{aligned}$$

（三）隐函数存在定理及隐函数或隐函数组求偏导常见类型

定理 1 设 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某个邻域内连续可偏导，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则在点 $P(x_0,y_0)$ 的邻域内由 $F(x,y)=0$ 能唯一确定连续可导的函数 $y=f(x)$，满足 $y_0=f(x_0)$ 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

定理 2 设 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某个邻域内连续可偏导，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则在点 (x_0,y_0,z_0) 的邻域内由 $F(x,y,z)=0$ 能唯一确定连续可偏导的函数 $z=f(x,y)$，满足 $z_0=f(x_0,y_0)$ 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

定理 3 设 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某个邻域内连续可偏导，且 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且

$$J=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{M_0}=\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u}&\frac{\partial F}{\partial v}\\\frac{\partial G}{\partial u}&\frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{M_0}\neq 0,$$

则在点 $M_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的邻域内由 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 能唯一确定连续可偏导的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，满足 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$ 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}&\frac{\partial F}{\partial v}\\\frac{\partial G}{\partial x}&\frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y}&\frac{\partial F}{\partial v}\\\frac{\partial G}{\partial y}&\frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}.$$

【例 1】 设 $z=z(x,y)$ 由 $\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=xyz+1$ 确定,求$\frac{\partial z}{\partial x}$.

【解】 $\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=xyz+1$ 两边对 x 求偏导得

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=yz+xy\frac{\partial z}{\partial x},\text{整理得}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz(x^2+y^2+z^2)-x}{z-xy(x^2+y^2+z^2)}.$$

【例 2】 设$\begin{cases}x^2+2y^2+3z^2=21,\\ x-3y+2z=5,\end{cases}$求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【解】 **方法一** $\begin{cases}x^2+2y^2+3z^2=21,\\ x-3y+2z=5,\end{cases}$两边对 x 求导,得$\begin{cases}2x+4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ 1-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}$即

$$\begin{cases}2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x,\\ 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3z-2x}{4y+9z},\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{3x+2y}{4y+9z}.\end{cases}$$

方法二 令 $F=x^2+2y^2+3z^2-21,\quad G=x-3y+2z-5$,

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}4y & 6z\\ -3 & 2\end{vmatrix}=8y+18z,$$

则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=-\frac{1}{8y+18z}\cdot\begin{vmatrix}2x & 6z\\ 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{3z-2x}{4y+9z}$,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}=-\frac{1}{8y+18z}\cdot\begin{vmatrix}4y & 2x\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-\frac{3x+2y}{4y+9z}.$$

【例 3】 设 $u=f(z)$,z 是由 $z=y+x\varphi(z)$ 确定的 x,y 的函数,f,φ 皆可微,证明:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

分析:本题出现两个约束条件 $u=f(z)$ 及 $z=y+x\varphi(z)$,同时出现四个变量,则其中有两个变量为函数,另两个变量充当自变量,即确定两个二元函数,显然 u 及 z 为 x,y 的二元函数.

【证明】 $u=f(z)$ 和 $z=y+x\varphi(z)$ 两边对 x 求偏导,得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=f'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z)+x\varphi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\end{cases}\text{解得}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\varphi(z)}{1-x\varphi'(z)},\text{于是}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f'(z)\varphi(z)}{1-x\varphi'(z)};$$

$u=f(z)$ 和 $z=y+x\varphi(z)$ 两边对 y 求偏导,得$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y},\\\dfrac{\partial z}{\partial y}=1+x\varphi'(z)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y},\end{cases}$

解得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1-x\varphi'(z)}$,于是$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{f'(z)}{1-x\varphi'(z)}$,则有$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

(四)变换求偏导

设 $z=f(x,y)$ 为二元函数,在偏导数计算时,有时在变换下对新的函数或自变量求偏导,常见变换的情形有:

情形一 $\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y),\end{cases}$ 则$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\\\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}.\end{cases}$

【例 1】 设 $z=z(x,y)$ 满足:$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$,又$\begin{cases}u=x+y,\\v=xy\end{cases}$将方程化为 z 关于 u,v 的方程.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+y\dfrac{\partial z}{\partial v}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+x\dfrac{\partial z}{\partial v}$,

代入$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$得

$2\dfrac{\partial z}{\partial u}+(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$,即 $2\dfrac{\partial z}{\partial u}+u\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u^2-2v}{v}$.

【例 2】 设 $z=f(x,y)$ 二阶连续可偏导,且满足 $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,确定常数 a,b,使得在变换$\begin{cases}u=x+ay,\\v=x+by\end{cases}$下原等式化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=a\dfrac{\partial z}{\partial u}+b\dfrac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a+b)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+b\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2ab\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

将上述等式代入 $4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

于是$\begin{cases}5a^2+12a+4=0,\\5b^2+12b+4=0,\\10ab+12(a+b)+8\neq 0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-2,\\b=-\dfrac{2}{5},\end{cases}$或$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{5},\\b=-2.\end{cases}$

情形二 $w=w(x,y,z)$，$\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y),\end{cases}$ $w=w(x,y,z)$ 两边对 x,y 求偏导，将 z 对 x，y 的偏导数转化为 w 关于 x,y 的偏导数，利用$\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y),\end{cases}$将对 x,y 的偏导数转化为对 u,v 的偏导数.

【例 3】 设 $z=z(x,y)$ 满足：$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y$，又 $w=z-\ln(x+y)$，$\begin{cases}u=x+y,\\v=y,\end{cases}$试将方程化为 w 关于 u,v 的方程.

【解】 由 $w=z-\ln(x+y)$，得$\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{x+y}$， $\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{1}{x+y}$，

解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{1}{x+y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{1}{x+y}$，代入得$\dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial w}{\partial y}=x+y$.

又$\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial u}$， $\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}$，

故原方程化为$\dfrac{\partial w}{\partial v}=-u$.

第三节　多元函数微分学的应用

一、多元函数微分学的代数应用——无条件极值与条件极值

（一）二元函数的无条件极值

1. 二元函数极值的定义

设二元函数 $z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$，$M_0(x_0,y_0)\in D$，若存在 $\delta>0$，当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，称点(x_0,y_0)为 $z=f(x,y)$ 的极大值点，$f(x_0,y_0)$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值；若当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，称点(x_0,y_0) 为 $z=f(x,y)$ 的极小值点，$f(x_0,y_0)$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 的极小值，极小值点和极大值点统称为极值点，极小值和极大值统称为极值.

2. 二元函数求无条件极值的步骤

(1) 求 $z=f(x,y)$ 的定义域 D(开区域)；

(2) 由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 求出 $z=f(x,y)$ 的驻点；

(3) 利用判别法判断驻点是否为极值点

判别法：设(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点，令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则

① 当 $AC-B^2>0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极值点，其中当 $A>0$ 时，(x_0,y_0)

为函数 $z=f(x,y)$ 的极小值点；当 $A<0$ 时，(x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值点；

② 当 $AC-B^2<0$ 时，(x_0,y_0) 不是函数 $z=f(x,y)$ 的极值点.

（二）条件极值

多元函数(以二元函数为例)的条件极值

所谓二元函数的条件极值，即二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，一般有如下三种方法：

(1) 拉格朗日乘数法

令 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，由 $\begin{cases} F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0, \\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0, \\ F'_\lambda=\varphi(x,y)=0, \end{cases}$ 求出 (x,y) 的值，并确定最优解.

(2) 转化为一元函数的极值

由 $\varphi(x,y)=0$ 求出 $y=y(x)$，代入 $z=f(x,y)$，得 $z=f[x,y(x)]$，再求一元函数 $z=f[x,y(x)]$ 的极值.

(3) 参数方程法

由 $\varphi(x,y)=0$，得 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ 代入 $z=f(x,y)$，得 $z=f[x(t),y(t)]$，再求一元函数的极值.

第四节　多元函数微分学的物理与几何应用(数学二、三不要求)

一、方向导数与梯度

1. 二维空间的方向导数 —— 设 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义，过点 $M_0(x_0,y_0)$ 作射线 l，任取 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in l$，令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

若 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$ 存在，称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿射线 l 的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0}$.

计算公式：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为射线 l 的方向余弦.

2. 三维空间的方向导数 —— 设 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域内有定义，过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 作射线 l，任取 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\in l$，令

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}.$$

若 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$ 存在，称此极限为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿射线 l 的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$.

计算公式：$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为射线 l 的方向余弦.

3. 梯度 —— 三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿射线 l 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma=\left.\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\right|_{M_0}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 l 的方向余弦.

令 $\left.\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\right|_{M_0}=\left.\mathbf{grad}u\right|_{M_0}$，而 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\boldsymbol{e}$ 为射线 l 对应的单位向量,其模为 1,方向与 l 相同.

设 $\mathbf{grad}u\,|_{M_0}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 θ,则

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\mathbf{grad}u\,|_{M_0}\cdot\boldsymbol{e}=|\mathbf{grad}u\,|_{M_0}|\cdot|\boldsymbol{e}|\cos\theta=\left.\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\right|_{M_0}\cos\theta,$$

当且仅当 $\theta=0$ 时,$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$ 取最大值,此时 $\mathbf{grad}u\,|_{M_0}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 方向相同,称 $\mathbf{grad}u\,|_{M_0}=\left.\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\right|_{M_0}$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 M_0 处的梯度,即梯度的方向即为方向导数取最大值的方向或函数增长速度最快的方向.

一般地,$\mathbf{grad}u=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$.

二、多元函数微分学的几何应用

(一) 空间曲面的切平面与法线

设 $\Sigma:F(x,y,z)=0$ 为空间曲面,$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$,则曲面 Σ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0)\},$$

过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲面 Σ 的切平面为

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

法线为
$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

(二) 空间曲线的切线与法平面

1. 设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\\z=\omega(t),\end{cases}$ 取参数 $t=t_0$,对应的曲线上的点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$,其中 $x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0),z_0=\omega(t_0)$.

曲线 L 在点 M_0 处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\}$;

曲线 L 在点 M_0 处的切线为 $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$;

曲线 L 在点 M_0 处的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

2. 设 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$ 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$,则切线的方向向量为

$$\boldsymbol{T}=(\{F'_x,F'_y,F'_z\}\times\{G'_x,G'_y,G'_z\})|_{M_0}.$$

重点题型讲解

题型一 多元函数极限、连续、可偏导、可微等基本概念的问题

【例 1】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}(1+xy)^{\frac{\sin(xy)}{x^2}}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+4}-2}{x^2y^2}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}(1+xy)^{\frac{\sin(xy)}{x^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{y\sin(xy)}{x}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{y\sin(xy)}{x}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{y^2\sin(xy)}{xy}}=e^{a^2}$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2y^2+4}-2}{x^2y^2}\xlongequal{x^2y^2=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t+4}-2}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{t+4}+2}=\dfrac{1}{4}$.

【例 2】 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处的连续性、可偏导性.

【解】 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=x^2}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}$， $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=-x^2}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^4}{x^4+x^4}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在，于是 $f(x,y)$ 在(0,0)处不连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$，所以 $f'_x(0,0)=0$，同理可得 $f'_y(0,0)=0$，即 $f(x,y)$ 在(0,0)处可偏导.

【例 3】 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 在点(0,0)处的连续性、可偏导性与可微性.

【解】 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，所以 $f'_x(0,0)=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$，即 $f(x,y)$ 在(0,0)处可偏导.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{xy}{\rho}\sin\dfrac{1}{\rho}$，

因为 $0\leqslant\left|\dfrac{xy}{\rho}\sin\dfrac{1}{\rho}\right|\leqslant\dfrac{|xy|}{\rho}\leqslant\dfrac{\rho}{2}$ 且 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\rho}{2}=0$，所以 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{xy}{\rho}\sin\dfrac{1}{\rho}=0$，于是 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微.

【例 4】 设 $f(x,y)$ 在点(0,0)的邻域内有定义，$f(0,0)=1$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-1}{x^2+y^2}=2$，则 $f(x,y)$ 在点(0,0)处(　　).

(A) 连续，但不可偏导　　(B) 可偏导但不连续

(C) 既连续又可偏导，但不可微　　(D) 可微

【解】 由$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-1}{x^2+y^2}=2$,得$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=1=f(0,0)$,所以$f(x,y)$在$(0,0)$处连续.

取$y=0$,由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=2$,

得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,即$f'_x(0,0)=0$,同理$f'_y(0,0)=0$,即$f(x,y)$在$(0,0)$处对$x$,$y$都可偏导.

令$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,由$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x,y)-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-1}{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=2\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$,得$f(x,y)$在$(0,0)$处可微,应选(D).

【例5】 设$f(x,y)$连续可偏导,且$f'_x(x,y)>0$,$f'_y(x,y)<0$,下列条件中,可使得不等式$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$成立的是(　　).

(A)$x_1<x_2,y_1<y_2$　　(B)$x_1>x_2,y_1>y_2$

(C)$x_1<x_2,y_1>y_2$　　(D)$x_1>x_2,y_1<y_2$

【解】 因为$f'_x(x,y)>0$,所以当$x_1<x_2$时,$f(x_1,y)<f(x_2,y)$,于是$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)$;因为$f'_y(x,y)<0$,所以当$y_1>y_2$时,$f(x,y_1)<f(x,y_2)$,于是$f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$.

故当$x_1<x_2,y_1>y_2$时,$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$,应选(C).

【例6】 设$f(x,y)=2x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2})$,求$f'_x(1,-1)$,$f'_y(1,-1)$.

【解】 令$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$,则

$$f(x,y)=2x-y+o(\rho)=2(x-1)-(y+1)+3+o(\rho),$$

于是$f(x,y)-3=2(x-1)-(y+1)+o(\rho)$,由可微的定义得

$$f'_x(1,-1)=2,\quad f'_y(1,-1)=-1.$$

题型二　各种偏导数求法

情形一:显函数求偏导

【例】 设$z=e^{\arctan^2\frac{x+y}{x-y}}$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\arctan^2\frac{x+y}{x-y}}\cdot 2\arctan\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$=e^{\arctan^2\frac{x+y}{x-y}}\cdot 2\arctan\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\arctan^2\frac{x+y}{x-y}}\cdot 2\arctan\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}$$

$$=e^{\arctan^2\frac{x+y}{x-y}}\cdot 2\arctan\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}.$$

情形二:复合函数求偏导

【例1】 设f,g二阶连续可微,$u=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$,求$x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)$,

于是 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right)=0$.

【例 2】 设 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中 φ 二阶可导,ψ 可导,则( ).

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)$,

因为$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,所以应选(A).

【例 3】 设 $f(t)$ 二阶可导,$g(u,v)$ 二阶连续可偏导,且 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=2f'(2x-y)+g'_1+yg'_2$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''(2x-y)+xg''_{12}+g'_2+xyg''_{22}$.

【例 4】 设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y,x^2+y^2)$,且 f 二阶连续可偏导,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y\cdot f'_1+2xf'_2$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f'_1+\mathrm{e}^x\sin y(\mathrm{e}^x\cos y\cdot f''_{11}+2yf''_{12})+2x(\mathrm{e}^x\cos y\cdot f''_{21}+2yf''_{22})$

$=\mathrm{e}^x\cos y\cdot f'_1+\mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y\cdot f''_{11}+2\mathrm{e}^x(x\cos y+y\sin y)f''_{12}+4xyf''_{22}$.

【例 5】 设 $z=f(x^2+y^2,xy)$,其中 $f(u,v)$ 二阶连续可偏导,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_1+yf'_2$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'_1+2x(2xf''_{11}+yf''_{12})+y(2xf''_{21}+yf''_{22})$

$=2f'_1+4x^2f''_{11}+4xyf''_{12}+y^2f''_{22}$.

【例 6】 设 $z=f(x+y,xy,x)$，其中 f 二阶连续可偏导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1+yf'_2+f'_3$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}+xf''_{12}+f'_2+y(f''_{21}+xf''_{22})+f''_{31}+xf''_{32}$$
$$=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+f'_2+xyf''_{22}+f''_{31}+xf''_{32}.$$

【例 7】 设 $z=xyf(x^2+y^2)+g(xy,x^2+y^2,x)$，其中 f 二阶可导，g 二阶连续可偏导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf+2x^2yf'+yg'_1+2xg'_2+g'_3$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f+2y^2f'+2x^2f'+4x^2y^2f''+g'_1+y(xg''_{11}+2yg''_{12})+$$
$$2x(xg''_{21}+2yg''_{22})+xg''_{31}+2yg''_{32}$$
$$=f+2(x^2+y^2)f'+4x^2y^2f''+g'_1+xyg''_{11}+2(x^2+y^2)g''_{12}+4xyg''_{22}+$$
$$xg''_{31}+2yg''_{32}.$$

【例 8】 设 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$；

(1) 验证 $f(u)$ 满足 $f''(u)+\dfrac{1}{u}f'(u)=0$；

(2) 若 $f(1)=0,f'(1)=1$，求 $f(u)$ 的表达式.

(1)**【证明】** 令 $\sqrt{x^2+y^2}=u$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{u}f'(u)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{u-\dfrac{x^2}{u}}{u^2}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u)=\frac{y^2}{u^3}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u),$$

由对称性得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^2}{u^3}f'(u)+\dfrac{y^2}{u^2}f''(u)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2}{u^3}f'(u)+\frac{x^2}{u^2}f''(u)+\frac{x^2}{u^3}f'(u)+\frac{y^2}{u^2}f''(u)=f''(u)+\frac{1}{u}f'(u),$$

故由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得 $f''(u)+\dfrac{1}{u}f'(u)=0$.

(2)**【解】** 由 $f''(u)+\dfrac{1}{u}f'(u)=0$，得 $uf''(u)+f'(u)=0$ 或 $[uf'(u)]'=0$，即 $uf'(u)=C_1$.

由 $f'(1)=1$，得 $C_1=1$，于是 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$.

由 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$，得 $f(u)=\ln u+C_2$，由 $f(1)=0$，得 $C_2=0$，故 $f(u)=\ln u$.

情形三：隐函数(组)求偏导

【例 1】 设 $y=f(x,t)$ 及 $F(x,y,t)=0$ 连续可导，求 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$.

分析:本题有两个约束条件 $y=f(x,t)$ 及 $F(x,y,t)=0$,同时出现三个变量,则其中有两个变量为函数,一个变量为自变量,两个约束条件确定两个一元函数,显然 y 和 t 为 x 的一元函数.

【解】 $y=f(x,t)$ 和 $F(x,y,t)=0$ 对 x 求导,得 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'_x+f'_t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \\ F'_x+F'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0, \end{cases}$

解得
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x+f'_xF'_y}{F'_t+f'_tF'_y}.$$

【例 2】 设 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 且 F 可微,证明:$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

【证明】 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边对 x 求偏导,得 $F'_1\cdot\left(1+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+F'_2\cdot\dfrac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}=0$,

解得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{z}{x^2}F'_2-F'_1}{\dfrac{1}{y}F'_1+\dfrac{1}{x}F'_2};$$

$F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边对 y 求偏导,得 $F'_1\cdot\dfrac{y\dfrac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}+F'_2\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$,

解得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{z}{y^2}F'_1-F'_2}{\dfrac{1}{y}F'_1+\dfrac{1}{x}F'_2}.$$

于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{z}{x}F'_2-xF'_1}{\dfrac{1}{y}F'_1+\dfrac{1}{x}F'_2}+\dfrac{\dfrac{z}{y}F'_1-yF'_2}{\dfrac{1}{y}F'_1+\dfrac{1}{x}F'_2}=z-xy.$

【例 3】 设 $u=f(x,y,z)$ 连续可偏导,且 $z=z(x,y)$ 由 $xe^x-ye^y=ze^z$ 确定,求 $\mathrm{d}u$.

分析:本题给出两个约束条件,同时含四个变量,则两个约束条件确定两个二元函数,显然 u,z 为 x,y 的二元函数.

【解】 **方法一** $u=f(x,y,z)$ 和 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两边对 x 求偏导,

得 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_x+f'_z\dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ (x+1)e^x=(z+1)e^z\dfrac{\partial z}{\partial x}, \end{cases}$ 解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_x+\dfrac{x+1}{z+1}e^{x-z}f'_z$;

$u=f(x,y,z)$ 和 $xe^x-ye^y=ze^z$ 两边对 y 求偏导,得 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_y+f'_z\dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ -(y+1)e^y=(z+1)e^z\dfrac{\partial z}{\partial y}, \end{cases}$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'_y-\dfrac{y+1}{z+1}e^{y-z}f'_z$.

于是 $\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(f'_x+\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}f'_z\right)\mathrm{d}x+\left(f'_y-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}f'_z\right)\mathrm{d}y$.

方法二 $u=f(x,y,z)$ 求微分，得 $\mathrm{d}u=f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y+f'_z\mathrm{d}z$；

$x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 两边求微分，得 $\mathrm{d}(x\mathrm{e}^x)-\mathrm{d}(y\mathrm{e}^y)=\mathrm{d}(z\mathrm{e}^z)$，即 $(x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-(y+1)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=(z+1)\mathrm{e}^z\mathrm{d}z$，解得 $\mathrm{d}z=\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}\mathrm{d}x-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}\mathrm{d}y$.

故 $\mathrm{d}u=\left(f'_x+\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}f'_z\right)\mathrm{d}x+\left(f'_y-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}f'_z\right)\mathrm{d}y$.

情形四：变换求偏导

【例 1】 已知方程 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$，引入变换 $\begin{cases}u=x^2+y^2,\\ v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\end{cases}$ $w=\ln z-(x+y)$，且 $w=w(u,v)$，求变换后方程的形式.

【解】 由 $w=\ln z-(x+y)$，得 $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-1$，$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}-1$，解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(\frac{\partial w}{\partial x}+1\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(\frac{\partial w}{\partial y}+1\right)$.

而 $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}$,

$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}$,

代入原方程整理，得 $\frac{\partial w}{\partial v}=0$.

【例 2】 $f(x,y)$ 满足方程 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，利用 $x=uv,y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$ 把函数 $f(x,y)$ 变成 $g(u,v)$，且满足 $a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$，求常数 a,b 的值.

【解】 $g(u,v)=f\left[uv,\frac{1}{2}(u^2-v^2)\right]$，$\frac{\partial g}{\partial u}=v\frac{\partial f}{\partial x}+u\frac{\partial f}{\partial y}$，$\frac{\partial g}{\partial v}=u\frac{\partial f}{\partial x}-v\frac{\partial f}{\partial y}$,

代入已知关系式，得 $a\left(v\frac{\partial f}{\partial x}+u\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-b\left(u\frac{\partial f}{\partial x}-v\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=u^2+v^2$，即

$$(av^2-bu^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+(2a+2b)uv\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+(au^2-bv^2)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=u^2+v^2,$$

则 $2a+2b=0,a=-b$，于是 $a(u^2+v^2)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=u^2+v^2$，从而

$$a=\frac{1}{4},\quad b=-\frac{1}{4}.$$

题型三　求偏导的反问题

【思路分析】

所谓求偏导的反问题，即已知偏导数的条件反求函数.

【例 1】 设 $z=f(x,y)$ 满足 $f(x,1)=0, f'_y(x,0)=\sin x, f''_{yy}(x,y)=2x$，求 $f(x,y)$.

【解】 由 $f''_{yy}(x,y)=2x$，得 $f'_y(x,y)=2xy+\varphi(x)$，则 $f'_y(x,0)=\varphi(x)$.

又 $f'_y(x,0)=\sin x$，则 $\varphi(x)=\sin x$，即 $f'_y(x,y)=2xy+\sin x$.

于是 $f(x,y)=xy^2+y\sin x+\psi(x)$，则 $f(x,1)=x+\sin x+\psi(x)$，

解得 $\psi(x)=-x-\sin x$，故 $f(x,y)=xy^2+y\sin x-x-\sin x$.

【例 2】 设 $z=f(x,y)$ 满足 $f(x,0)=x, f(0,y)=y^2, f''_{xy}(x,y)=x+y$，求 $f(x,y)$.

【解】 由 $f''_{xy}(x,y)=x+y$，得 $f'_x(x,y)=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$，于是

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t+\psi(y).$$

由 $f(0,y)=y^2$，得 $\psi(y)=y^2$，再由 $f(x,0)=x$，得 $\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}x=x$，故

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2.$$

【例 3】 设 $(axy+y^2+3)\mathrm{d}x+(x^2+bxy-12)\mathrm{d}y$ 为二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，$u(x,y)$ 二阶连续可偏导且 $u(0,0)=2$，求常数 a,b 的值及函数 $u(x,y)$ 的表达式.

【解】 因为 $(axy+y^2+3)\mathrm{d}x+(x^2+bxy-12)\mathrm{d}y$ 为函数 $u(x,y)$ 的全微分，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=axy+y^2+3,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^2+bxy-12,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=ax+2y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=2x+by,$$

由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，得 $a=2, b=2$.

因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+y^2+3$，所以 $u(x,y)=x^2y+xy^2+3x+\varphi(y)$.

$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+2xy+\varphi'(y)$，由 $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+2xy-12$，得 $\varphi'(y)=-12$，$\varphi(y)=-12y+C$，即 $u(x,y)=x^2y+xy^2+3x-12y+C$，由 $u(0,0)=2$，得 $C=2$.

故 $u(x,y)=x^2y+xy^2+3x-12y+2$.

题型四　偏导数的代数应用

【例 1】 求函数 $z=f(x,y)=x^4+y^4-4xy+5$ 的极值.

【解】 显然 $z=f(x,y)$ 在 xOy 平面上有定义，

由 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-4y=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-4x=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2,$$

当 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 时，$A=0, B=-4, C=0$，因为 $AC-B^2=-16<0$，所以 $(0,0)$ 不是极值点.

当 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1\end{cases}$ 时，$A=12, B=-4, C=12$，因为 $AC-B^2=128>0$ 且 $A>0$，所以 $(-1,-1)$ 为极小值点，极小值为 $f(-1,-1)=3$.

当$\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$时，$A=12,B=-4,C=12$，因为$AC-B^2=128>0$且$A>0$，所以$(1,1)$也为极小值点，极小值为$f(1,1)=3$.

【例 2】 求由方程$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$所确定的函数$z=z(x,y)$的极值.

【解】 由$z'_x=\dfrac{-4x-8z}{2z+8x-1}=0, z'_y=\dfrac{-4y}{2z+8x-1}=0$，得$x=-2z,y=0$，代入原方程得$z_1=1,z_2=-\dfrac{8}{7}$，所以驻点为$(-2,0)$，$\left(\dfrac{16}{7},0\right)$.

在$(-2,0)$处，$A=z''_{xx}=\dfrac{4}{15},B=z''_{xy}=0,C=z''_{yy}=\dfrac{4}{15},AC-B^2=\dfrac{16}{225}>0,A>0$，函数在点$(-2,0)$处取极小值$z=1$；

在$\left(\dfrac{16}{7},0\right)$处，$A=z''_{xx}=-\dfrac{4}{15},B=z''_{xy}=0,C=z''_{yy}=-\dfrac{4}{15},AC-B^2=\dfrac{16}{225}>0,A<0$，函数在点$\left(\dfrac{16}{7},0\right)$处取极大值$z=-\dfrac{8}{7}$.

【例 3】 求函数$z=x^2+12xy+2y^2$在区域$D:4x^2+y^2\leqslant 25$上的最大值和最小值.

分析： 该问题是无条件极值与条件极值的混合题型，在区域的内部为无条件极值，在区域的边界上是条件极值，需要分两步进行.

【解】 当$4x^2+y^2<25$时，由$\begin{cases}z'_x=2x+12y=0,\\z'_y=12x+4y=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=0;\end{cases}$

当$4x^2+y^2=25$时，令$F=x^2+12xy+2y^2+\lambda(4x^2+y^2-25)$，

由$\begin{cases}F'_x=2x+12y+8\lambda x=0,\\F'_y=12x+4y+2\lambda y=0,\\F'_\lambda=4x^2+y^2-25=0,\end{cases}$即$\begin{cases}F'_x=(1+4\lambda)x+6y=0,\\F'_y=6x+(2+\lambda)y=0,\\F'_\lambda=4x^2+y^2-25=0,\end{cases}$

因为$\begin{cases}F'_x=(1+4\lambda)x+6y=0,\\F'_y=6x+(2+\lambda)y=0\end{cases}$有非零解，所以$\begin{vmatrix}1+4\lambda & 6\\6 & 2+\lambda\end{vmatrix}=0$，解得$\lambda_1=2,\lambda_2=-\dfrac{17}{4}$.

当$\lambda_1=2$时，$y=-\dfrac{3}{2}x$，代入$4x^2+y^2-25=0$中，得$\begin{cases}x=2,\\y=-3\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\y=3.\end{cases}$

当$\lambda_2=-\dfrac{17}{4}$时，$y=\dfrac{8}{3}x$，代入$4x^2+y^2-25=0$中，得$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2},\\y=-4.\end{cases}$

当$\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$时，$z=0$；当$\begin{cases}x=2,\\y=-3\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\y=3\end{cases}$时，$z=-50$；当$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2},\\y=-4\end{cases}$时，$z=106\dfrac{1}{4}$，故函数的最小值为$m=-50$，最大值为$M=106\dfrac{1}{4}$.

【例 4】 设$2x\,dx-2y\,dy$为二元函数$u(x,y)$的全微分，且$u(0,0)=3$，求函数$u(x,y)$在区域$x^2+4y^2\leqslant 4$上的最小值和最大值.

【解】 因为$2x\,dx-2y\,dy$为$u(x,y)$的全微分，所以$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$.

由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x$，得$u(x,y)=x^2+\varphi(y)$，对$y$求偏导，得$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)$.

由$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y$，得 $\varphi'(y)=-2y$，解得 $\varphi(y)=-y^2+C$，即 $u(x,y)=x^2-y^2+C$.

由 $u(0,0)=3$，得 $C=3$，故 $u(x,y)=x^2-y^2+3$.

当 $x^2+4y^2<4$ 时，由$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$此时 $u(0,0)=3$；

当 $x^2+4y^2=4$ 时，

方法一：拉格朗日乘数法

令
$$F=x^2-y^2+3+\lambda(x^2+4y^2-4),$$

由$\begin{cases}F'_x=2x+2\lambda x=0,\\ F'_y=-2y+8\lambda y=0,\\ F'_\lambda=x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=2,\\ y=0,\end{cases}\begin{cases}x=-2,\\ y=0,\end{cases}\begin{cases}x=0,\\ y=1,\end{cases}\begin{cases}x=0,\\ y=-1.\end{cases}$

由 $u(2,0)=u(-2,0)=7$，$u(0,1)=u(0,-1)=2$，得 $u(x,y)=x^2-y^2+3$ 在 $x^2+4y^2\leqslant 4$ 上的最小值为 $m=2$，最大值为 $M=7$.

方法二　由 $x^2+4y^2=4$，得$\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}$代入 $u(x,y)=x^2-y^2+3$ 中，得
$$u=4\cos^2 t-\sin^2 t+3=5\cos^2 t+2.$$

当 $\cos t=0$ 时，$u_{\min}=2$，当 $\cos t=\pm1$ 时，$u_{\max}=7$，

故 $u(x,y)=x^2-y^2+3$ 在 $x^2+4y^2\leqslant 4$ 上的最小值为 $m=2$，最大值为 $M=7$.

【例 5】　求椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$内接长方体的最大体积.

【解】　设内接长方体在第一卦限的顶点坐标为(x,y,z)，则 $V=8xyz$.

令
$$F=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

由$\begin{cases}F'_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ F'_y=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ F'_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ F'_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$

得 $x=\dfrac{a}{\sqrt3}$，$y=\dfrac{b}{\sqrt3}$，$z=\dfrac{c}{\sqrt3}$，则最大体积为 $V_{\max}=\dfrac{8}{9}\sqrt3 abc$.

题型五　多元函数微分学在几何上的应用（数学二、三不要求）

【例 1】　求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x+y+z=0\end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线与法平面方程.

【解】　令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，　$G(x,y,z)=x+y+z$，

$\boldsymbol{n}_1=\{F'_x,F'_y,F'_z\}_{(1,-2,1)}=\{2x,2y,2z\}_{(1,-2,1)}=\{2,-4,2\}$，

$\boldsymbol{n}_2=\{G'_x,G'_y,G'_z\}_{(1,-2,1)}=\{1,1,1\}$,

则切向量为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{2,-4,2\}\times\{1,1,1\}=\{-6,0,6\}$,

则曲线 L 上点 $(1,-2,1)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$,

法平面方程为 $x-z=0$.

【例 2】 过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面,求此切平面方程.

【解】 $F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$,则 $\boldsymbol{n}=\{6x,2y,-2z\}$,过直线的平面束为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0,$$

其法向量为 $\{10+\lambda,2+\lambda,-2-\lambda\}$.

设所求的切点为 (x_0,y_0,z_0),则有 $\begin{cases}(10+\lambda)/6x_0=(2+\lambda)/2y_0=(2+\lambda)/2z_0,\\3x_0^2+y_0^2-z_0^2-27=0,\\(10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0=27,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1),\\\lambda=-1.\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}(x_0,y_0,z_0)=(-3,-17,-17),\\\lambda=-19.\end{cases}$

故所求的切平面方程为 $9x+y-z-27=0$ 或者 $9x+17y-17z+27=0$.

【例 3】 曲面 $4z=x^2+y^2$ 上一点 M 的切平面为 π,若过 π 的曲线 Γ:$\begin{cases}x=t^2,\\y=t,\\z=3(t-1)\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线为 L,且 $L\subset\pi$,求平面 π 的方程.

【解】 切线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{3}$,曲面上点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left\{-\frac{x_0}{2},-\frac{y_0}{2},1\right\},$$

则切平面方程为 $\dfrac{x_0}{2}(x-x_0)+\dfrac{y_0}{2}(y-y_0)-(z-z_0)=0$,即 $xx_0+yy_0-2z=2z_0$.

因为 $L\subset\pi$,而 $(1,1,0),(3,2,3)\in L$,所以 $\begin{cases}x_0+y_0=2z_0,\\3x_0+2y_0-6=2z_0,\\x_0^2+y_0^2=4z_0,\end{cases}$ 解得切点的坐标为 $\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{6}{5},\dfrac{9}{5}\right)$ 或者 $(2,2,2)$,故平面 π 的方程为:$6x+3y-5z=9$ 或者 $x+y-z=2$.

【例 4】 设曲面 S:$\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$,平面 π:$2x+2y+z+5=0$.

(1) 求曲面 S 上与 π 平行的切平面;

(2) 求曲面 S 与平面 π 之间的最短距离.

【解】 (1) S 上 M 处切平面法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\left\{x,2y,\dfrac{z}{2}\right\}$,平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\{2,2,1\}$.

由 $\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2$ 得 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{2y}{2}=\dfrac{z}{2}=t$ 或 $x=2t,y=t,z=2t$,代入 S 得 $t=\pm\dfrac{1}{2}$,则 $M_1\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$,$M_2\left(-1,-\dfrac{1}{2},-1\right)$,切平面方程为 $2x+2y+z-4=0$ 或者 $2x+2y+z+4=0$.

(2)$d_1=3,d_2=\frac{1}{3}$,所以曲面 S 与平面 π 之间的最短距离为$\frac{1}{3}$.

题型六 场论的概念(数学二、三不要求)

【例】 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量,求 $u=\frac{1}{z}\sqrt{6x^2+8y^2}$ 在 P 点处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

【解】 令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$,

则 $\{F'_x,F'_y,F'_z\}\big|_P=\{4x,6y,2z\}\big|_P=\{4,6,2\}$.

取 $\boldsymbol{n}=\{2,3,1\}$,则 $\boldsymbol{n}^0=\left\{\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right\}$,

而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$, $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}$, $\quad\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}\sqrt{6x^2+8y^2}$,

所以 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_P=\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_P\times\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_P\times\frac{3}{\sqrt{14}}+\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_P\times\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}$.

第七章　微分方程

考查要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.

2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法,会解齐次微分方程.

3. 会解伯努利方程和全微分方程,会用简单的变量代换解某些微分方程(数学二、三不要求).

4. 会用降阶法解下列形式的微分方程:$y^{(n)}=f(x)$,$y''=f(x,y')$和$y''=f(y,y')$(数学三不要求).

5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构.

6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法,并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.

7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.

8. 会解欧拉方程(数学二、三不要求).

9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

第一节　微分方程的基本概念

1. 微分方程——含导数或微分的方程称为微分方程,其一般形式为$f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$.

2. 微分方程的阶数——微分方程中所含的导数或微分的最高阶数称为微分方程的阶数.

3. 微分方程的解——使得微分方程成立的函数称为微分方程的解,不含任意常数的解称为微分方程的特解;若微分方程的解中所含的相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相等,称此解为微分方程的通解.

【例】　设$f(x)$为微分方程$y''-y'-e^{\sin x}=0$的解,且$f'(x_0)=0$,则$f(x)$在(　　).

(A)x_0的某邻域内单调增加　　(B)x_0的某邻域内单调减少

(C)x_0处取极小值　　(D)x_0处取极大值

【解】　因为$f(x)$为微分方程$y''-y'-e^{\sin x}=0$的解,所以$f''(x)-f'(x)=e^{\sin x}$.

因为$f'(x_0)=0$,所以$f''(x_0)=e^{\sin x_0}>0$,由极值点判别法得$x=x_0$为$f(x)$的极小值点,应选(C).

第二节　一阶微分方程的种类及解法

一、可分离变量的微分方程

1. 可分离变量的微分方程的定义

对一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$,若$f(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$,称$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$为可分离变量

的微分方程.

2. 可分离变量的微分方程的解法

(1) 分离变量；(2) 两边积分. 即

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\varphi_1(x)\varphi_2(y)\Rightarrow\frac{dy}{\varphi_2(y)}=\varphi_1(x)dx$，两边积分得$\int\frac{dy}{\varphi_2(y)}=\int\varphi_1(x)dx+C$.

【例 1】 求$\frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$的通解.

【解】 由$\frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$，得$\frac{dy}{dx}=(1+x)(1+y^2)$，分离变量得

$\frac{dy}{1+y^2}=(1+x)dx$，两边积分，得通解为 $\arctan y=x+\frac{1}{2}x^2+C$($C$ 为任意常数).

【例 2】 求$\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

【解】 $y=0$ 显然是方程$\frac{dy}{dx}=2xy$ 的特解.

当 $y\neq 0$ 时，由$\frac{dy}{dx}=2xy$ 分离变量，得$\frac{dy}{y}=2x\,dx$，积分得 $\ln|y|=x^2+C_1$，

解得 $y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$，令 $\pm e^{C_1}=C$，则 $y=Ce^{x^2}(C\neq 0)$.

故方程$\frac{dy}{y}=2x\,dx$ 的通解为 $y=Ce^{x^2}$(C 为任意常数).

二、齐次微分方程

1. 齐次微分方程的定义

设$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，若 $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，称$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 为齐次微分方程.

【注解】

所谓齐次微分方程即 $f(tx,ty)=f(x,y)$，称$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 为齐次微分方程.

2. 齐次微分方程的解法

令 $u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，代入原方程得 $u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$，于是有

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C.$$

【例】 求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}\,(x>0)$ 满足 $y(1)=0$ 的特解.

【解】 $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$ 两边同除以 x，得$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

令 $u=\frac{y}{x}$，则$\frac{du}{dx}=\frac{\sqrt{1+u^2}}{x}$，分离变量得$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$，积分得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln x+\ln C$，即 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$.

由 $y(1)=0$ 得 $C=1$，即 $u+\sqrt{1+u^2}=x$.

由$\begin{cases}\sqrt{1+u^2}+u=x,\\ \sqrt{1+u^2}-u=\dfrac{1}{x},\end{cases}$得 $u=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$,则特解为 $y=\dfrac{x^2-1}{2}$.

三、一阶齐次线性微分方程

1. 一阶齐次线性微分方程的定义

形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的方程称为一阶齐次线性微分方程.

2. 一阶齐次线性微分方程的通解公式

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

【例】 求微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=0$ 的满足初始条件 $y(0)=\pi$ 的解.

【解】 由$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-xy=0$,得 $y=C\mathrm{e}^{-\int -x\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$,由 $y(0)=\pi$,得 $C=\pi$,于是 $y=\pi\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

四、一阶非齐次线性微分方程

1. 一阶非齐次线性微分方程的定义

形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的方程称为一阶非齐次线性微分方程.

2. 一阶非齐次线性微分方程的通解公式

$$y=\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

【例 1】 求 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解.

【解】 方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为

$$y=\left(\int\cos x\cdot\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}=(x+C)\cos x.$$

【例 2】 求微分方程 $y\mathrm{d}x-(x-4y)\mathrm{d}y=0(y>0)$ 的通解.

【解】 微分方程 $y\mathrm{d}x-(x-4y)\mathrm{d}y=0$ 化为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x-4y}{y}$ 或$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}x=-4$,原方程的通解为

$$x=\left[\int(-4)\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{y}\mathrm{d}y}=(-4\ln y+C)y.$$

五、伯努利方程(数学二、三不要求)

1. 伯努利方程的定义

形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq 0,1)$ 的方程称为伯努利方程.

2. 伯努利方程的解法

令 $z=y^{1-n}$,代入原方程得$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,求解该一阶非齐次线性微分方程即可.

【例】 求 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

【解】 **方法一** 方程 $x^2y'+xy=y^2$ 化为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x^2}y^2$,令 $y^{-1}=z$,

则原方程化为$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{x^2}$，解得

$$z=\left[\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]e^{-\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=\left(\frac{1}{2x^2}+C\right)x,$$

即$\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{2x^2}+C\right)x$，由 $y(1)=1$ 得 $C=\frac{1}{2}$，故特解为 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

方法二 将方程 $x^2y'+xy=y^2$ 化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}$.

令$\frac{y}{x}=u$，则原方程化为 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2-2u$，变量分离得$\frac{\mathrm{d}u}{u^2-2u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 或$\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{2}{x}\mathrm{d}x$，两边积分得 $\ln\left|\frac{2-u}{u}\right|=\ln x^2+\ln C$，即$\frac{2-u}{u}=Cx^2$，由 $y(1)=1$ 得 $C=1$，

于是$\frac{2-u}{u}=x^2$，解得原方程的特解为 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

六、全微分方程(数学二、三不要求)

1. 全微分方程的定义

设 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 满足$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则称 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程.

2. 全微分方程的解法

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以存在二元函数 $u(x,y)$，所以 $\mathrm{d}u=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，其中 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$，于是原方程的通解为 $u(x,y)=C$.

【例】 求微分方程$(e^x\sin y-xy^2)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-x^2y+1)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

【解】 **方法一** 令 $P(x,y)=e^x\sin y-xy^2$，$Q(x,y)=e^x\cos y-x^2y+1$，因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-2xy$，所以该方程为全微分方程.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(e^x\sin y-xy^2)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-x^2y+1)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x0\mathrm{d}x+\int_0^y(e^x\cos y-x^2y+1)\mathrm{d}y=e^x\sin y-\frac{x^2y^2}{2}+y,$$

故原方程的通解为 $e^x\sin y-\frac{x^2y^2}{2}+y=C$.

方法二 $(e^x\sin y-xy^2)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-x^2y+1)\mathrm{d}y=0$ 化为

$e^x\sin y\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y-(xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y)+\mathrm{d}y=0$ 或

$\mathrm{d}(e^x\sin y)-\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2y^2)+\mathrm{d}y=0$，即 $\mathrm{d}(e^x\sin y-\frac{1}{2}x^2y^2+y)=0$，

故原方程通解为 $e^x\sin y-\frac{x^2y^2}{2}+y=C$.

第三节　可降阶的高阶微分方程(数学三不要求)

一、形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的方程

解法: 对方程 $y^{(n)}=f(x)$ 进行 n 次不定积分即可求解.

二、形如 $f(x,y',y'')=0$ 的方程(缺 y 型)

解法:

(1) 令 $y'=\frac{dy}{dx}=p$,则 $y''=\frac{dp}{dx}$,原方程化为 $f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0$;

(2) 解出 $p=\varphi(x,C_1)$,则原方程通解为 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$.

三、形如 $f(y,y',y'')=0$ 的方程(缺 x 型)

解法:

(1) 令 $y'=p$,则 $y''=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy}$,原方程化为 $f\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0$;

(2) 解出 $p=\varphi(y,C_1)$ 或 $\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$,两边积分得 $\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$,进而求出原方程的通解.

【例】 求 $yy''=y'^2$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解.

【解】 令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,代入原方程得 $yp\frac{dp}{dy}=p^2$.

因为 $p\neq 0$,所以 $\frac{dp}{dy}-\frac{1}{y}p=0$,解得 $p=C_1e^{-\int-\frac{1}{y}dy}=C_1y$,由 $y(0)=y'(0)=1$ 得 $C_1=1$.

再由 $\frac{dy}{dx}-y=0$ 得 $y=C_2e^{-\int-dx}=C_2e^x$,由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$,故 $y=e^x$.

第四节　高阶微分方程

一、高阶线性微分方程

(一) 高阶线性微分方程的基本概念

1. n 阶齐次线性微分方程

称
$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \tag{1}$$
为 n 阶齐次线性微分方程,其中 $a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x)$ 为 x 的函数.

2. n 阶非齐次线性微分方程

称
$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \tag{2}$$
为 n 阶非齐次线性微分方程,其中 $a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x)$ 为 x 的函数.

若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，则(2) 可分解为如下两个方程：

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_1(x) \tag{2.1}$$

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_2(x) \tag{2.2}$$

（二）高阶线性微分方程解的结构与性质

1. 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_s(x)$ 为(1) 的一组解，则 $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ 也为方程(1) 的解.

2. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 分别为(1)、(2) 的两个解，则 $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 为(2) 的一个解.

3. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 为(2) 的两个解，则 $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ 为(1) 的解.

4. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 分别为(2.1) 及(2.2) 的两个解，则 $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ 为(2) 的解.

5. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_s(x)$ 为(2) 的一组解，则 $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ 为(2) 的解的充分必要条件是 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.

6. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_s(x)$ 为(2) 的一组解，则 $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_s\varphi_s(x)$ 为(1) 的解的充分必要条件是 $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$.

7. 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 为(1) 的 n 个线性无关解，则 $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x)$ 为(1) 的通解.

8. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 为(1) 的 n 个线性无关解，$\varphi_0(x)$ 为(2) 的一个特解，则 $k_1\varphi_1(x)+k_2\varphi_2(x)+\cdots+k_n\varphi_n(x)+\varphi_0(x)$ 为(2) 的通解.

（三）高阶常系数线性微分方程

1. 二阶常系数齐次线性微分方程的解法

形如 $y''+py'+qy=0$(其中 p,q 为常数) 的方程称为二阶常系数齐次线性微分方程，其求解步骤如下：

(1) 求解方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$；

(2) 根据特征方程根的不同分为如下三种情形：

① 当 $\Delta=p^2-4q>0$ 时，两特征值为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则原方程的通解为 $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$；

② 当 $\Delta=p^2-4q=0$ 时，特征方程有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$，则原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x};$$

③ 当 $\Delta=p^2-4q<0$ 时，特征方程有两个共轭虚根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则原方程的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

【例 1】 求 $y''-y'-6y=0$ 的通解.

【解】 方程 $y''-y'-6y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-\lambda-6=0$，特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=3$，原方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$.

【例 2】 求 $y''-4y'+4y=0$ 的通解.

【解】 方程 $y''-4y'+4y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4=0$，特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

【例 3】 求 $y''-2y'+2y=0$ 的通解.

【解】 方程 $y''-2y'+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0$，特征值为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$，原方程的通解为 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

【注解】

超过二阶(一般为三、四阶)的高阶常系数齐次线性微分方程的求解一般也需要掌握,其求解方法类似于二阶常系数齐次线性微分方程.对 $y'''+py''+qy'+ry=0$,其特征方程为 $\lambda^3+p\lambda^2+q\lambda+r=0$,根据特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的不同情形通解如下:

(1)$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}$ 且两两不等,则通解为 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+C_3e^{\lambda_3x}$;

(2)$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}$ 且 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$,则通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1x}+C_3e^{\lambda_3x}$;

(3)$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}$ 且 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$,则通解为 $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{\lambda_1x}$;

(4)$\lambda_1\in\mathbf{R},\lambda_{2,3}=\alpha\pm i\beta(\beta\neq0)$,则通解为 $y=C_1e^{\lambda_1x}+e^{\alpha x}(C_2\cos\beta x+C_3\sin\beta x)$.

2. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

形如 $y''+py'+qy=f(x)$(其中 p,q 为常数)的方程称为二阶常系数非齐次线性微分方程,根据 $f(x)$ 的不同形式可将求特解方程分为如下两种情况:

(1)$f(x)=P_n(x)e^{kx}$

情形一 若 k 非特征值,令 $y_0=(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)e^{kx}=Q(x)e^{kx}$.如:$y''-y'-2y=(x+1)e^x$,令 $y_0=(ax+b)e^x$;

情形二 若 k 与一个特征值相同,令 $y_0=x(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)e^{kx}=xQ(x)e^{kx}$.如:$y''-y'-2y=(x+1)e^{2x}$,令 $y_0=x(ax+b)e^{2x}=(ax^2+bx)e^{2x}$;

情形三 若 k 与两个特征值都相同,令 $y_0=x^2(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)e^{kx}=x^2Q(x)e^{kx}$.如:$y''-4y'+4y=(2x-1)e^{2x}$,令 $y_0=x^2(ax+b)e^{2x}=(ax^3+bx^2)e^{2x}$.

代入原方程整理后的式子为:$Q''+(2k+p)Q'+(k^2+pk+q)Q=P_n(x)$,特别地,若 k 与一个特征值相同,则 $Q''+(2k+p)Q'=P_n(x)$;若 k 与两个特征值相同,则 $Q''=P_n(x)$.

(2)$f(x)=e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+P_s(x)\sin\beta x]$

令 $n=\max\{l,s\}$,

情形一 若 $\alpha+i\beta$ 不是特征值,则令 $y_0(x)=e^{\alpha x}[Q_n^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_n^{(2)}(x)\sin\beta x]$;

情形二 若 $\alpha+i\beta$ 是特征值,则令 $y_0(x)=xe^{\alpha x}[Q_n^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_n^{(2)}(x)\sin\beta x]$.

【注解】

假设特解的两个要点:

(1)按右边形式假设,且正弦与余弦都需要,多项式以最高次为准;

(2)若 $\alpha+i\beta$ 为特征值,则多乘一个 x.

【例】 设 $y''-2y'+2y=xe^x\cos x$,求该方程的特解形式.

【解】 由 $\lambda^2-2\lambda+2=0$ 得特征值为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$,因为 $\alpha=1,\beta=1$ 且 $\alpha+i\beta=1+i$ 为特征值,所以该方程的特解形式为 $y_0(x)=xe^x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]$.

二、欧拉方程(数学二、三不要求)

1. 欧拉方程的定义

形如 $x^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1xy'+a_0y=f(x)$ 的方程称为欧拉方程,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为常数.

2. 欧拉方程的解法

令 $x=\mathrm{e}^t$，则有

$$xy'=\mathrm{D}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},x^2y''=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\cdots,x^ny^{(n)}=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-n+1)y,$$

代入原方程可得高阶常系数线性微分方程.

重点题型讲解

题型一　微分方程的基本概念与性质

【例 1】 设 $y=f(x)$ 满足 $\Delta y=\frac{xy}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(0)=2$，求 $f(x)$.

【解】 由 $\Delta y=\frac{xy}{1+x^2}\Delta x+o(\Delta x)$，得 $y'=\frac{xy}{1+x^2}$，即 $y'-\frac{x}{1+x^2}y=0$，其通解为 $y=C\mathrm{e}^{-\int -\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x}=C\sqrt{x^2+1}$，再由 $y(0)=2$，得 $y=2\sqrt{x^2+1}$.

【例 2】 设 y_1,y_2 是一阶非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个解，若常数 λ,μ 使得 $\lambda y_1+\mu y_2$ 为 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解，而 $\lambda y_1-\mu y_2$ 为 $y'+P(x)y=0$ 的解，则(　　).

(A)$\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$　　(B)$\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$

(C)$\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$　　(D)$\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$

【解】 根据线性微分方程解的结构与性质得 $\begin{cases}\lambda+\mu=1,\\ \lambda-\mu=0,\end{cases}$ 解得 $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$，应选(A).

【例 3】 已知 $y_1=x-\sqrt{1+x^2}$ 与 $y_2=x+\sqrt{1+x^2}$ 为方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个解，求 $P(x),Q(x)$.

【解】 $y_2-y_1=2\sqrt{1+x^2}$ 为方程 $y'+P(x)y=0$ 的解，代入得

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+P(x)\cdot 2\sqrt{1+x^2}=0,$$

解得 $P(x)=-\frac{x}{1+x^2}$；

又 $\frac{y_1+y_2}{2}=x$ 为方程 $y'-\frac{x}{1+x^2}y=Q(x)$ 的解，代入解得

$$Q(x)=1-\frac{x}{1+x^2}\cdot x=\frac{1}{1+x^2}.$$

题型二　一阶微分方程的求解

【例 1】 求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的通解.

【解】 $x=0$ 时，$y=0$，下面讨论 $x\neq 0$ 时：

方法一 由 $x\,\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y-x}{x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2}{x}y=-1$，解得

$$y=\left[\int(-1)\mathrm{e}^{\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=Cx^2+x.$$

方法二 由 $x\,\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-1$.

令 $\dfrac{y}{x}=u$，得 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-1$，变量分离得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u-1}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分得 $\ln(u-1)=\ln x+\ln C$，即 $u-1=Cx$，故原方程通解为 $y=Cx^2+x$.

【例 2】 求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 的满足初始条件 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的特解.

【解】 将方程 $xy'+2y=x\ln x$ 化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2}{x}y=\ln x$，则原方程的通解为

$$y=\left(\int\ln x\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=\left(\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x+C\right)\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{x}{3}\ln x-\frac{x}{9}+\frac{C}{x^2},$$

由 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 得 $C=0$，故满足初始条件的特解为 $y=\dfrac{x}{3}\ln x-\dfrac{x}{9}$.

【例 3】 求下列微分方程的通解：

(1) $(x+1)y'-ny=(1+x)^{n+1}\mathrm{e}^x\sin x$； (2) $y'+\sin y+x\cos y+x=0$.

【解】 (1) $x+1=0$ 时，$x=-1$，$y=0$；$x+1\neq0$ 时，$(x+1)y'-ny=(1+x)^{n+1}\mathrm{e}^x\sin x$ 化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{n}{x+1}y=(1+x)^n\mathrm{e}^x\sin x$，解得

$$y=\left(\int(1+x)^n\mathrm{e}^x\sin x\cdot\mathrm{e}^{\int-\frac{n}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-\int-\frac{n}{x+1}\mathrm{d}x}=\left(\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x+C\right)(x+1)^n.$$

则原方程的通解为 $y=\left[\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C\right](x+1)^n$.

(2) 由 $y'+\sin y+x\cos y+x=0$，得 $y'+\sin y+x(1+\cos y)=0$ 或 $y'+2\sin\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{y}{2}+2x\cos^2\dfrac{y}{2}=0$，两边除以 $2\cos^2\dfrac{y}{2}$ 得 $\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{y}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\tan\dfrac{y}{2}=-x$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\tan\dfrac{y}{2}\right)}{\mathrm{d}x}+\tan\dfrac{y}{2}=-x$，令 $u=\tan\dfrac{y}{2}$，原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=-x$，解得

$$u=\left[\int(-x)\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\cdot\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}=[-(x-1)\mathrm{e}^x+C]\mathrm{e}^{-x},$$

原方程的通解为

$$\tan\frac{y}{2}=C\mathrm{e}^{-x}+1-x.$$

【例 4】 微分方程 $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$ 的通解为__________.

【解】 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2x-y^2$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-2x=-y^2$.

解得 $x=\left[\int(-y^2)\mathrm{e}^{\int-2\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]\mathrm{e}^{-\int-2\mathrm{d}y}=\left[\int(-y^2)\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y+C\right]\mathrm{e}^{2y}$，故原方程的通解为

$$x=C\mathrm{e}^{2y}+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{4}.$$

【例 5】 设 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$，则 $f(x)=$__________.

【解】 由 $\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t=2\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)=2\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t$，得 $f(x)=2\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t+\ln 2$，两边求导得 $f'(x)-2f(x)=0$，解得 $f(x)=C\mathrm{e}^{-\int -2\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{2x}$.

因为 $f(0)=\ln 2$，所以 $C=\ln 2$，于是 $f(x)=\ln 2\cdot \mathrm{e}^{2x}$.

【例 6】 求微分方程 $xy'+y=x^2y^2\ln x$ 的通解.

【解】 方程 $xy'+y=x^2y^2\ln x$ 化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=x\ln x\cdot y^2$.

令 $u=y^{-1}$，则原方程化为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}u=-x\ln x$，解得

$$u=\left[\int(-x\ln x)\mathrm{e}^{\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=Cx+x^2(1-\ln x),$$

故原方程通解为

$$\frac{1}{y}=Cx+x^2(1-\ln x).$$

题型三 非特定类型微分方程或变换下微分方程的求解

【思路分析】

(1) 非特定类型即微分方程不属于任何一种特定类型的方程，求这类方程一般有两种思路：即经过恒等变形或变换化为特定类型微分方程，从而求出其解.

(2) 若给定一个微分方程，再给出一个自变量或函数的变换，求该微分方程的解时，先利用求导数或偏导数的规则求出微分方程变换后的形式，再求变换后微分方程的解，最后用原自变量和函数代替变换变量即得原方程的解.

【例 1】 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+2y}$ 的解.

【解】 方法一 将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+2y}$ 化为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-x=2y$，解得通解为

$$x=\left(\int 2y\cdot\mathrm{e}^{\int -\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)\mathrm{e}^{-\int -\mathrm{d}y}=C\mathrm{e}^{y}-2(y+1).$$

方法二 令 $x+2y=u$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1\right)$，代入原方程得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u+2}{u}$，变量分离得 $\left(1-\frac{2}{u+2}\right)\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，积分得 $u-2\ln|u+2|=x+C$，故通解为 $y-\ln|x+2y+2|=C$.

【例 2】 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x+y)^2}$ 的通解.

【解】 令 $x+y=u$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$，代入原方程得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\frac{1}{u^2}$，即 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u^2}{u^2}$，变量分离得 $\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，积分得 $u-\arctan u=x+C$，故通解为 $y-\arctan(x+y)=C$.

【例 3】 设 $x=x(y)$ 可导，$x'(y)\neq 0$ 且满足方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$.

(1) 将方程化为 y 关于 x 的方程；

(2) 求满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的特解 $y(x)$.

【解】 (1) 由 $x'(y)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'(x)}$,得 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}\left[\frac{1}{y'(x)}\right]}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\left[\frac{1}{y'(x)}\right]\Big/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}=-\frac{y''(x)}{y'^3(x)}$,代入原方程整理得 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y=\sin x$.

(2) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$,特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$,则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}$.

令 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y=\sin x$ 的特解为 $y_0(x)=a\cos x+b\sin x$,代入原方程得 $a=0,b=-\frac{1}{2}$.

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-y=\sin x$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\sin x$,由 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$ 得 $C_1=-1$, $C_2=1$,故 $y=-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\sin x$.

题型四　可降阶的高阶微分方程求解(数学三不要求)

【例 1】 求微分方程 $y''+2xy'^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=-\frac{1}{2}$ 的特解.

【解】 令 $y'=p$,则 $y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,原方程化为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+2xp^2=0$,因为 $p\neq 0$,所以变量分离得 $-\frac{\mathrm{d}p}{p^2}=2x\,\mathrm{d}x$,两边积分得 $\frac{1}{p}=x^2+C_1$.

由 $y'(0)=-\frac{1}{2}$,得 $C_1=-2$,即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2-2}$,积分得 $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C_2$,再由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$,原方程的满足初始条件的特解为 $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+1$.

【例 2】 求微分方程 $yy''+y'^2=y'$ 的通解.

【解】 由 $yy''+y'^2=y'$ 得 $\mathrm{d}(yy')=\mathrm{d}y$,解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+C_1}{y}$,故原方程的通解为

$$y-C_1\ln|y+C_1|=x+C_2.$$

【例 3】 求微分方程 $y'''=\frac{3x^2}{1+x^3}y''$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=1,y''(0)=4$ 的特解.

【解】 令 $y''=p$,则有 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{3x^2}{1+x^3}\mathrm{d}x$,解得 $p=C_1(1+x^3)$.

因为 $y''(0)=4$,所以 $C_1=4$,即 $y''=4(1+x^3)$,积分得 $y'=4x+x^4+C_2$,因为 $y'(0)=1$,所以 $C_2=1$,从而 $y'=4x+x^4+1$,再积分得 $y=2x^2+\frac{x^5}{5}+x+C_3$.

由 $y(0)=0$ 得 $C_3=0$,所求解为 $y=2x^2+\frac{x^5}{5}+x$.

题型五 高阶线性微分方程求解

【例 1】 具有特解 $y_1=e^{-x}$,$y_2=2xe^{-x}$,$y_3=3e^x$ 的三阶齐次线性微分方程是( ).

(A)$y'''-y''-y'+y=0$ (B)$y'''+y''-y'-y=0$

(C)$y'''-6y''+11y'-6y=0$ (D)$y'''-2y''-y'+2y=0$

【解】 因为 $y_1=e^{-x}$,$y_2=2xe^{-x}$,$y_3=3e^x$,所以三阶常系数齐次线性微分方程的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$,$\lambda_3=1$,对应的特征方程为$(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$,即 $\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$,故原方程为 $y'''+y''-y'-y=0$,应选(B).

【例 2】 求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解.

【解】 特征方程为 $\lambda^2+2\lambda-3=0$,特征值为 $\lambda_1=-3$,$\lambda_2=1$.

$y''+2y'-3y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$.

令 $y_0(x)=axe^{-3x}$,代入原方程得 $a=-\dfrac{1}{4}$,故原方程的通解为

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-\frac{1}{4}xe^{-3x}.$$

【例 3】 求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^x$ 的通解.

【解】 特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,特征值为 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=2$,$y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

令 $y_0(x)=x(ax+b)e^x=(ax^2+bx)e^x$,代入原方程得 $a=-\dfrac{1}{2}$,$b=-1$,故原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)e^x$.

【例 4】 求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

【解】 特征方程为 $\lambda^2+1=0$,特征值为 $\lambda_{1,2}=\pm i$,

$y''+y=0$ 的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

令
$$y''+y=x \tag{1}$$
$$y''+y=\cos x \tag{2}$$

显然(1)有特解 $y_1(x)=x$,令(2)的特解为 $y_2(x)=x(a\cos x+b\sin x)$,代入原方程得 $a=0$,$b=\dfrac{1}{2}$,故原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\dfrac{1}{2}x\sin x$.

【例 5】 设二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 有一个特解 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$,求 a,b,c 及该方程的通解.

【解】 因为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 为方程的一个特解,所以 $y_1=e^x$,$y_2=e^{2x}$ 为对应的齐次方程的两个解,且原方程有一特解 $y_0=xe^x$,于是原方程的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,从而 $a=-3$,$b=2$,把 $y_0=xe^x$ 代入原方程得 $c=-1$,即原方程为 $y''-3y'+2y=-e^x$,通解为

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x.$$

【例 6】 设 $f(x)$ 连续且 $f(x)=\sin x-\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$,则原方程化为 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$,两边求导得 $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

再求导得 $f''(x)+f(x)=-\sin x$.

$f''(x)+f(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征值为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，$f''(x)+f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

令 $f''(x)+f(x)=-\sin x$ 的特解为 $y_0(x)=x(a\cos x+b\sin x)$，代入原方程得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=0$，故 $f''(x)+f(x)=-\sin x$ 的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}x\cos x$.

由 $f(0)=0,f'(0)=1$ 得 $C_1=0,C_2=\dfrac{1}{2}$，于是 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$.

【例 7】 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的二阶可微函数，且 $f(x)+f'(x+\pi)=\sin x$，求 $f(x)$.

【解】 由 $\begin{cases} f(x)+f'(x+\pi)=\sin x, \\ f'(x+\pi)+f''(x)=-\cos x, \end{cases}$ 得 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)$.

因为函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)$.

【例 8】 设 $u=f(v),v=\ln r,r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^3}$，且 $u(0)=1$，$u'(0)=0$，求 $f(v)$.

【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(v)\cdot\dfrac{x}{r^2}$，　$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=f''(v)\cdot\dfrac{x^2}{r^4}+f'(v)\cdot\dfrac{y^2+z^2-x^2}{r^4}$.

由对称性得 $\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=f''(v)\cdot\dfrac{y^2}{r^4}+f'(v)\cdot\dfrac{x^2+z^2-y^2}{r^4}$，

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=f''(v)\cdot\frac{z^2}{r^4}+f'(v)\cdot\frac{x^2+y^2-z^2}{r^4},$$

则 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^2}f''(v)+\dfrac{1}{r^2}f'(v)$.

由 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=\dfrac{1}{r^3}$ 得 $f''(v)+f'(v)=e^{-v}$，通解为 $f(v)=C_1+C_2e^{-v}-ve^{-v}$.

由 $f(0)=1,f'(0)=0$ 得 $C_1=2,C_2=-1$，故 $f(v)=2-(v+1)e^{-v}$.

题型六　微分方程的应用

【例 1】 在 xOy 平面的第一象限内求一曲线，使由其上任一点 P 处的切线、x 轴及线段 OP 所围成的三角形面积为常数 k，且曲线经过点(1,1).

【解】 设所求曲线为 $y=f(x)$，该曲线在 $P(x,y)$ 点处的切线为 $Y-y=y'(X-x)$.

令 $Y=0$ 得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，则该切线与 x 轴交点为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$，根据题意得 $\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)y=k$，或 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=-\dfrac{2k}{y^2}$，解得 $x=Cy+\dfrac{k}{y}$.

因为曲线经过点(1,1)，所以所求曲线为 $xy=(1-k)y^2+k$.

【例 2】 在上半平面内求一条上凹的曲线，其上任意一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点法线段 PQ 长的倒数(Q 为法线与 x 轴的交点)，且曲线在点(1,1)处的切线与 x 轴平行.

【解】 曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x,y)$ 处的法线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$，令 $Y=0$ 得

$X=x+yy'$，则点 Q 的坐标为 $Q(x+yy',0)$，于是 $|PQ|=\sqrt{(x+yy'-x)^2+(0-y)^2}=\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$，由题意得 $\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}$，整理得 $yy''=1+y'^2$.

令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，原方程化为 $yp\dfrac{dp}{dy}=1+p^2$，分离变量得 $\dfrac{2p}{1+p^2}dp=\dfrac{2}{y}dy$，两边积分得 $\ln(1+p^2)=\ln y^2+\ln C_1$，即 $1+p^2=C_1y^2$，由 $y'(1)=0$ 得 $C_1=1$，于是 $p^2=y^2-1$，或 $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y^2-1}$，分离变量得 $\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$，两边积分得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x+C_2$，再由 $y(1)=1$ 得 $C_2=\mp 1$，即 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x\mp 1$，解得 $y=\dfrac{e^{x-1}+e^{1-x}}{2}$.

【例 3】 设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发，以速度 v（常数）沿 y 轴正向运动，物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发，其速度为 $2v$，方向始终指向 A，建立物体 B 运动轨迹所满足的微分方程及初始条件.

【解】 设 t 时刻物体 B 位于 (x,y)，则有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+vt-y}{-x}$，整理得 $x\dfrac{dy}{dx}=y-1-vt$，两边对 x 求导数得 $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+v\dfrac{dt}{dx}=0$.

因为 $2v=\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\dfrac{dx}{dt}$，所以 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{2v}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$，代入原方程得

$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=0$，初始条件为 $y(-1)=0,y'(-1)=1$.

【例 4】 某飞机降落时，为减少滑行距离，在触地的瞬间飞机尾部张开减速伞增加阻力，现有一质量为 9 000 kg 的飞机，着陆时水平速度为 700 km/h，减速伞张开后，飞机阻力与飞机速度成正比（比例系数为 $k=6\times10^6$），从着陆点开始，飞机滑行的距离为多少？

【解】 从飞机着陆开始 t 时刻，飞机的速度为 $v(t)$，滑行的距离为 $S(t)$，由牛顿第二定律得 $m\dfrac{dv}{dt}=-kv$.

由 $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dS}\cdot\dfrac{dS}{dt}=v\dfrac{dv}{dS}$，代入得 $dS=-\dfrac{m}{k}dv$，两边积分得 $S(t)=-\dfrac{m}{k}v+C$.

由 $S(0)=0,v(0)=700$ 得 $C=700\dfrac{m}{k}$，即 $S(t)=-\dfrac{m}{k}v+700\dfrac{m}{k}$，取 $v=0$ 得

$S=700\dfrac{m}{k}=1.05(\text{km})$，故飞机滑行的距离为 1.05 (km).

【例 5】 一半球体的雪堆，其体积融化的速度与半球表面积 S 成正比例，比例系数为 $k>0$，设在融化过程中雪堆始终保持半球形状，设半径为 r_0 的雪堆在开始融化 3 小时内融化其体积的 $\dfrac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时？

【解】 在 t 时刻雪堆体积为 $V(t)=\dfrac{2\pi r^3}{3}$，侧面积为 $S(t)=2\pi r^2$.

根据题意得 $\dfrac{dV}{dt}=-kS$，即 $2\pi r^2\dfrac{dr}{dt}=-k2\pi r^2$，解得 $r=-kt+C$，因为 $r(0)=r_0$，所以 $C=r_0$，即 $r=r_0-kt$.

因为 $V(3)=\frac{1}{8}V(0)$，所以 $k=\frac{1}{6}r_0$，从而 $r=r_0-\frac{1}{6}r_0t$，令 $r=0$，得 $t=6$，即雪堆全部融化需要 6 小时.

【例 6】 某湖泊水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含污染物 A 的水量为 $\frac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$. 设 1999 年湖泊中污染物 A 的含量为 $5m_0$，严重超过国家标准，为治理污染，从 2000 年起，限制排入湖中含污染物 A 的污水浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$，问需要多少年时间，湖泊中污染物 A 的含量降到 m_0 内？

【解】 设从 2000 年起第 t 年湖中污染物 A 的含量为 $m(t)$，浓度为 $\frac{m}{V}$，

在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内，排入湖泊中污染物 A 为 $\frac{m_0}{V}\frac{V}{6}\mathrm{d}t=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t$，

流出湖泊的污染物 A 含量为 $\frac{m}{V}\frac{V}{3}\mathrm{d}t=\frac{m}{3}\mathrm{d}t$，

则 $\mathrm{d}m=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t$，解得 $m=\frac{m_0}{2}-C\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}$，

由 $m(0)=5m_0$，得 $C=-\frac{9}{2}m_0$，从而 $m=\frac{m_0}{2}(1+9\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}})$，

令 $m=m_0$ 得 $t=6\ln 3$，即最多经过 7 年，湖中 A 的含量在 m_0 以下.

题型七　欧拉方程求解(数学二、三不要求)

【例 1】 求微分方程 $x^2y''+4xy'+2y=x$ 的通解.

【解】 令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $xy'=\mathrm{D}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$x^2y''=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=\mathrm{e}^t.$$

该方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{6}\mathrm{e}^t$，故原方程的通解为 $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{x}{6}$.

【例 2】 求微分方程 $x^2y''+3xy'-3y=x^3$ 的通解.

【解】 令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $xy'=\mathrm{D}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$x^2y''=\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，代入原方程得

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-3y=\mathrm{e}^{3t}$，通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-3t}+C_2\mathrm{e}^t+\frac{1}{12}\mathrm{e}^{3t}$.

从而原方程的通解为 $y=C_1x^{-3}+C_2x+\frac{1}{12}x^3$.

第八章　重积分

考查要求

1. 理解二重积分的概念，了解二重积分的性质，了解二重积分的中值定理.
2. 理解三重积分的概念，了解三重积分的性质(数学二、三不要求).
3. 掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)
4. 会计算三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标)(数学二、三不要求).
5. 了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算(数学一、二不要求).
6. 会用重积分求一些几何量与物理量(数学二、三不要求).

第一节　二重积分

一、二重积分的概念与基本性质

(一)实际应用背景

1. 平面薄片的质量

设平面有限闭区域 D 的面密度为 $\rho(x,y)$，求其质量 m 的步骤如下：

(1) 将 D 划分成 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$；

(2) 任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $m\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$；

(3) 令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}$，其中 λ_i 表示小区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径，则 $m=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

2. 曲顶柱体的体积

设 $\Sigma:z=f(x,y)\geqslant0$，其中 $(x,y)\in D$，求曲顶柱体的体积的步骤如下：

(1) 将 D 划分成 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$；

(2) 任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $V\approx\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$；

(3) 令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}$，其中 λ_i 表示小区域 $\Delta\sigma_i$ 的直径，则 $V=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

(二) 二重积分的概念

设函数 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上有界，

(1) 将 D 划分成小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$；

(2) 任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i(1\leqslant i\leqslant n)$，作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$；

(3) 令 $\lambda=\max\{\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n\}$，若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，称此极限为函数 $f(x,y)$

在平面区域 D 上的二重积分，记为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

【注解】

(1) 若 $f(x,y)$ 在有限闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上一定可积，反之不成立.

(2) 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

（三）二重积分的性质

设函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上可积，则

1. $\iint\limits_D[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\pm\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 k 为常数.

3. $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=D_1+D_2$ 且 D_1,D_2 没有交集.

4. $\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，$A$ 为区域 D 的面积.

5. 若在平面有界闭区域 D 上有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，特别地，若 $f(x,y),g(x,y)$ 在 D 上连续，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$ 且不恒等，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

6. （二重积分中值定理）设 D 为平面有限闭区域，$f(x,y)$ 在 D 上连续，A 表示区域 D 的面积，则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)A$.

证明　因为 $f(x,y)$ 在 D 上连续，所以 $f(x,y)$ 在 D 上取到最小值 m 和最大值 M，因为 $mA\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant MA$，所以 $m\leqslant\frac{1}{A}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant M$.

由二元连续函数的介值定理，存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $f(\xi,\eta)=\frac{1}{A}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)A.$$

【例】　设 $D:x^2+y^2\leqslant t^2$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\iint\limits_D\cos(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】　由积分中值定理，存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D\cos(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos(\xi+2\eta)\cdot\pi t^2,$$

于是 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\iint\limits_D\cos(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\lim\limits_{t\to 0}\cos(\xi+2\eta)=\pi$.

7. 二重积分对称性性质

(1) 设 D 关于 y 轴对称（即关于变量 x 对称），其中位于 y 轴右侧区域为 D_1，则

当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 设 D 关于 x 轴对称(即关于变量 y 对称)，其中位于 x 轴上侧区域为 D_1，则

当 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；

当 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) 设 D 关于直线 $y=x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(4) 若区域 D 关于直线 $y=-x$ 对称，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(-y,-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

二、二重积分的计算方法

(一) 直角坐标法

1. 若区域 D 表示为 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2. 若区域 D 表示为 $D=\{(x,y)\mid \varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【例 1】 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=x,x=1$ 及 x 轴围成.

【解】 **方法一** $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$，则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{8}.$$

方法二 $D=\{(x,y)\mid y\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_y^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 y(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}.$$

【注解】

本题使用 X 型区域与 Y 型区域计算二重积分都可进行，且运算量相差不大.

【例 2】 计算 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $x=y^2$ 与 $y=x-2$ 围成.

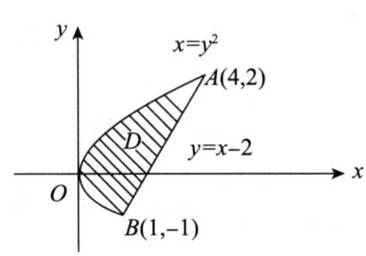


图 8－1

【解】 如图 8－1，

由 $\begin{cases}x=y^2,\\y=x-2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$

方法一 令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 4,x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$，

则$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(x+y)\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}(x+y)\mathrm{d}y$

$$=2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+\int_1^4 x(\sqrt{x}-x+2)+\frac{1}{2}[x-(x-2)^2]\mathrm{d}x=9\,\frac{9}{20}.$$

方法二　令$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x\leqslant y+2,-1\leqslant y\leqslant 2\}$,则

$$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}(x+y)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2\left(-\frac{1}{2}y^4-y^3+\frac{3}{2}y^2+4y+2\right)\mathrm{d}y=9\,\frac{9}{20}.$$

【注解】

本题二重积分采用 X 型与 Y 型区域都可计算,但两者运算量相差大.

【例 3】　计算$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

【解】　改变积分次序得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

【注解】

(1) 定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$中,若被积函数为$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,$\sin\frac{1}{x}$或$\cos\frac{1}{x}$,$x^{2n}\mathrm{e}^{\pm x^2}$,都是无法使用牛顿-莱布尼茨公式计算的.

(2) 本题显然后面的定积分无法计算出来,需要改变积分次序再计算,即本题只能通过 X 型区域计算,故在计算二重积分时,有时改变积分区域甚至积分法都是必需的.

【例 4】　改变积分次序:(1)$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y$;　(2)$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【解】　(1) 如图 8-2,由$D=\{(x,y)\mid \mathrm{e}^y\leqslant x\leqslant \mathrm{e},0\leqslant y\leqslant 1\}$,

得$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

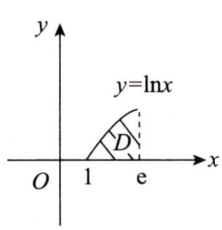


图 8-2

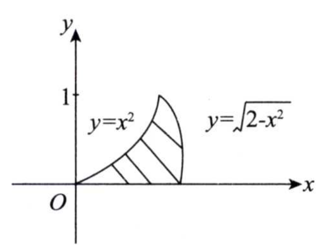


图 8-3

(2) 如图 8-3,由$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\}$,$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant\sqrt{2},0\leqslant y\leqslant\sqrt{2-x^2}\}$,得$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(二) 极坐标法

特征:(1) 被积函数$f(x,y)$中含x^2+y^2;　(2) 积分区域 D 的边界曲线含x^2+y^2.

变换:令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$区域 D 表示为$D=\{(r,\theta)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)\}$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r.$$

【例 5】 计算 $I=\iint\limits_D(x^2+xy)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 2x$.

【解】 因为区域 D 关于 x 轴对称，所以由二重积分的对称性得

$$I=\iint\limits_D(x^2+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $D=\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\}$，于是

$$I=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\mathrm{d}\theta=8I_6=8\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}.$$

三、二重积分的应用

(一) 几何应用

1. 平面区域的面积

设 D 为平面有限区域，则区域 D 的面积为 $A=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 曲顶柱体的体积

设曲顶柱体 $\Sigma:z=f(x,y)(\geqslant 0)$，其中 $(x,y)\in D$，则曲顶柱体的体积为

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 空间曲面的面积

设空间曲面 $\Sigma:z=f(x,y)$，其中 $(x,y)\in D$，则有限曲面 Σ 的面积为

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(二) 物理应用(数学二、数学三不要求)

设平面薄片 D 的面密度为 $\rho(x,y)$，则

1. 质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

2. 转动惯量

(1) D 绕 x 轴的转动惯量为 $I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) D 绕 y 轴的转动惯量为 $I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) D 绕原点的转动惯量为 $I_O=\iint\limits_D(x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(4) 设 $M(x,y)$ 为区域 D 上一点，l 为一条直线，M 到直线 l 的距离为 d，则 D 绕直线 l 的转动惯量为 $I_l=\iint\limits_D d^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

第二节 三重积分(数学二、三不要求)

一、三重积分的概念与基本性质

(一) 实际问题

设 Ω 为几何体,其体密度为 $\rho(x,y,z)$,求其质量 m 的过程如下:

(1) 将几何体 Ω 划分为 $\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots,\Delta v_n$;

(2) 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta v_i$, $\Delta m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i;$$

(3) 设 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$(其中 d_i 为小区域 Δv_i 的直径),则 $m=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$.

(二) 三重积分的定义

设 Ω 为几何体,三元函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上有界,

(1) 将几何体 Ω 划分为 $\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots,\Delta v_n$;

(2) 任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta v_i$,作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$;

(3) 设 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$(其中 d_i 为小区域 Δv_i 的直径),则若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 存在,称函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上可积,极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 的值称为函数 $f(x,y,z)$ 在区域 Ω 上的三重积分,记为 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$,即 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$.

(三) 三重积分的性质

设 $f(x,y,z),g(x,y,z)$ 在区域 Ω 上可积,则

1. $\iiint\limits_{\Omega}[k_1f(x,y,z)+k_2g(x,y,z)]\mathrm{d}v=k_1\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v+k_2\iiint\limits_{\Omega}g(x,y,z)\mathrm{d}v$.

2. $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=V$(其中 V 为区域 Ω 的体积).

3. (积分中值定理) 设 $f(x,y,z)$ 在有限闭区域 Ω 上连续,V 是 Ω 的体积,则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$,使得 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=f(\xi,\eta,\zeta)V$.

4. 奇偶性与对称性性质

(1) 设 Ω 关于 xOy 平面对称(即关于变量 z 对称),且 Ω_1 为 Ω 位于 xOy 平面上方的部分,

若 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$,则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$;

若 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$,则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

(2) 设 Ω 关于 yOz 平面对称(即关于变量 x 对称),且 Ω_1 为 Ω 位于 yOz 平面前侧的部分,

若 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$,则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$;

若 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$,则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

(3) 设 Ω 关于 xOz 平面对称(即关于变量 y 对称),且 Ω_1 为 Ω 位于 xOz 平面右侧的部分,

若 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$,则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=0$;

若 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$,则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

二、三重积分的计算方法

(一) 直角坐标法

1. 切片法

设 Ω 表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,c\leqslant z\leqslant d\}$,如图 8-4,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_c^d \mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

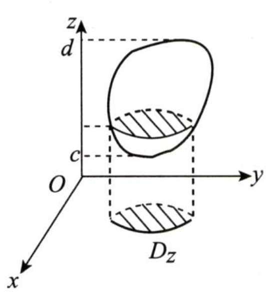


图 8-4

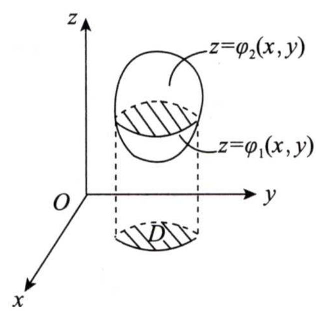


图 8-5

【例 1】 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2xy)\mathrm{d}v$,其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2$ 所围成的几何体.

【解】 由对称性得 $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2xy)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v$,

令 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,0\leqslant z\leqslant 2\}$,其中 $D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant z^2\}$,则

$$\iiint\limits_{\Omega}(z^2+2xy)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v=\int_0^2 z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 z^2\cdot\pi z^2\mathrm{d}z=\frac{32\pi}{5}.$$

2. 铅直投影法

设 Ω 表示为 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,\varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y)\}$,如图 8-5,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

【例 2】 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2-xy+z)\mathrm{d}v$,其中 Ω 为由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 及 xOy 面围成的几何体.

【解】 方法一 由对称性得 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2-xy+z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$

令 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,0\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2-y^2}\}$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 4$，

$$\begin{aligned}
\text{则原式}&=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}z\\
&=\iint_D\left[(x^2+y^2)\sqrt{4-x^2-y^2}+\frac{1}{2}(4-x^2-y^2)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\left[r^2\sqrt{4-r^2}+\frac{1}{2}(4-r^2)\right]\mathrm{d}r\\
&=2\pi\int_0^2 r^3\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r+\pi\int_0^2(4r-r^3)\mathrm{d}r\\
&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}8\sin^3t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t+4\pi\\
&=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\cdot(1-\sin^2t)\mathrm{d}t+4\pi\\
&=\frac{188\pi}{15}.
\end{aligned}$$

方法二 由对称性得 $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2-xy+z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$，

令 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,0\leqslant z\leqslant 2\}$，其中 $D_z:x^2+y^2\leqslant 4-z^2$，

$$\begin{aligned}
\text{则}\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v&=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(r^2+z)r\,\mathrm{d}r\\
&=2\pi\int_0^2\left[\frac{1}{4}(4-z^2)^2+\frac{1}{2}z(4-z^2)\right]\mathrm{d}z\\
&=2\pi\int_0^2\left(4+\frac{1}{4}z^4-2z^2+2z-\frac{1}{2}z^3\right)\mathrm{d}z=\frac{188}{15}\pi.
\end{aligned}$$

（二）柱面坐标变换法

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\\z=z,\end{cases}$ 其中 $\Omega=\{(r,\theta,z)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\varphi_1(r,\theta)\leqslant z\leqslant\varphi_2(r,\theta)\}$，则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}r\,\mathrm{d}r\int_{\varphi_1(r,\theta)}^{\varphi_2(r,\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

【注解】

对 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，如下两种情形常用柱面坐标变换：

(1) 若 Ω 的边界曲面表达式中含 x^2+y^2.

(2) 若被积函数 $f(x,y,z)$ 中含 x^2+y^2.

【例 3】 求 $\iiint\limits_\Omega\mathrm{d}v$，其中 Ω 为由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围的立体.

【解】 由 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\z=\sqrt{1-x^2-y^2},\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$.

令 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\}$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant\dfrac{1}{2}$，

则 $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r(\sqrt{1-r^2}-r)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$

(三) 球面坐标变换法

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$ 其中 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\theta_1\leqslant\varphi\leqslant\theta_2,r_1(\varphi,\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi,\theta)$,则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

【注解】

对 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,如下两种情形常用球面坐标变换:

(1) 若 Ω 的边界曲面表达式中含 $x^2+y^2+z^2$.

(2) 若被积函数 $f(x,y,z)$ 中含 $x^2+y^2+z^2$.

【例 4】 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0\}$.

【解】 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right)$,

则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\cdot r^2\sin^2\varphi\mathrm{d}r$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}.$

三、三重积分的应用

(一) 空间几何体的质心

设 Ω 为空间几何体,其体密度为 $\rho(x,y,z)$,则

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},$$

特别地,若体密度 $\rho(x,y,z)$ 为常数时,Ω 的形心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v,\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v,\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v.$$

(二) 空间几何体的转动惯量

设 Ω 为空间几何体,其体密度为 $\rho(x,y,z)$,则

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\quad I_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\quad I_O=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

二重积分重点题型讲解

题型一　二重积分的概念与性质

【例 1】 求 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(m+i)(n^2+j^2)}$.

【解】 令 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(m+i)(n^2+j^2)}=\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}$$

$$=\iint\limits_{D}\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

【例 2】 设 $I_1=\iint\limits_{D}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,I_2=\iint\limits_{D}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$I_3=\iint\limits_{D}\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则(　　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　(B) $I_1>I_2>I_3$　(C) $I_2<I_1<I_3$　(D) $I_3<I_1<I_2$

【解】 因为 $x^2+y^2\in[0,1]\subset\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 且 $\cos t$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少.

又因为 $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant x^2+y^2\geqslant(x^2+y^2)^2$，

所以 $\cos\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\cos(x^2+y^2)\leqslant\cos(x^2+y^2)^2$ 且三个函数不恒等，

于是 $\iint\limits_{D}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_{D}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_{D}\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，应选(A).

【例 3】 设 $D=\{(x,y)\mid r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$f(x)$ 连续且 $f(x)>0$，对任意的正数 a,b，$\iint\limits_{D}\dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$________.

【解】 因为 D 关于 $y=x$ 对称，所以

$$I=\iint\limits_{D}\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma,$$

于是 $2I=\iint\limits_{D}\dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D}\dfrac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma$

$=(a+b)\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma$

$=\dfrac{\pi(a+b)(R^2-r^2)}{4}$，

故 $I=\dfrac{\pi(a+b)(R^2-r^2)}{8}$,应填$\dfrac{\pi(a+b)(R^2-r^2)}{8}$.

【例 4】 设 $D:x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant t^2(t>0)$,则$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma}{t-\ln(1+t)}=$________.

【解】 由二重积分的积分中值定理,存在$(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma=2\pi t^2\cdot e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta),$$

又由 $t-\ln(1+t)\sim\dfrac{t^2}{2}$,得

$$\lim_{t\to 0}\frac{\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma}{t-\ln(1+t)}=4\pi\lim_{t\to 0}e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)=4\pi.$$

【例 5】 设 D 为平面有限闭区域,$f(x,y),g(x,y)$ 在 D 上连续,且 $g(x,y)\geqslant 0$,证明:存在$(\xi,\eta)\in D$,使得$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

【证明】 因为 $f(x,y)$ 在 D 上连续,所以 $f(x,y)$ 在 D 上取到最小值m 和最大值M,因为 $g(x,y)\geqslant 0$,所以 $m\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

若 $g(x,y)\equiv 0$,结论显然成立;

若 $g(x,y)\geqslant 0$ 但不恒等于零,则$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma>0$,则

$$m\leqslant\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma}\leqslant M,$$

由介值定理,存在$(\xi,\eta)\in D$,使得 $f(\xi,\eta)=\dfrac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma}$,即

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

题型二 改变积分次序

【思路分析】

改变积分次序一般有如下情形:

(1) 单纯改变积分次序.

(2) 积分次序不正确,导致二重积分无法计算,需要改变积分次序.

(3) 积分方法不正确,需要改变积分法.

(4) 变积分限的函数求导一般需要改变积分次序.

【例 1】 交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【解】 如图 8－6，改变积分次序得

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

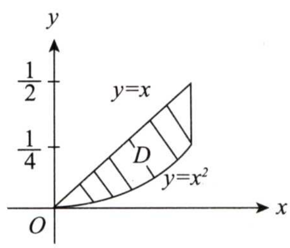


图 8－6

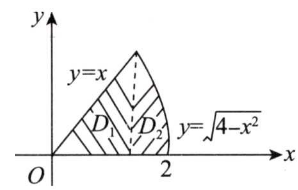


图 8－7

【例 2】 将$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cos\theta f(r^2\cos2\theta)\mathrm{d}r$ 化为先 y 后 x 的累次积分.

【解】 如图 8－7，令$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2},0\leqslant y\leqslant x\}$,

$$D_2=\{(x,y)\mid \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\},$$

则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cos\theta f(r^2\cos2\theta)\mathrm{d}r$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^x xf(x^2-y^2)\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}xf(x^2-y^2)\mathrm{d}y.$$

【例 3】 计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

【解】 改变积分次序得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1(1-x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\,\mathrm{d}(\cos x)=1-\cos1+x\cos x\Big|_0^1-\int_0^1\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=1-\sin1.$$

【例 4】 计算$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 x^2\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

【解】 如图 8－8，改变积分次序得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 x^2\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x x^2\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

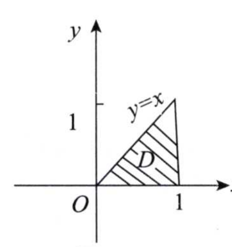


图 8－8

【例 5】 改变积分次序并计算$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

【解】　如图 8-9,改变积分次序得

$$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$$

$$=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)dy$$

$$=-\frac{8}{\pi^3}\int_1^2\frac{\pi}{2}y\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)d\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$

$$\xlongequal{t=\frac{\pi}{2}y}-\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\cos t\,dt=-\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\,d(\sin t)$$

$$=-\frac{8}{\pi^3}t\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\,dt$$

$$=\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^3}.$$

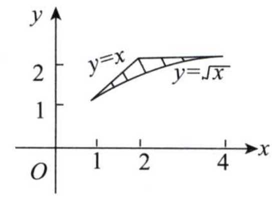


图 8-9

【例 6】　计算$\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,d\theta dr$,其中$D=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$.

分析:本题若采用极坐标变换化为累次积分,显然计算非常困难,其实二重积分的计算方法主要取决于积分区域的特点,本题的积分区域显然不便使用极坐标变换.

【解】　将积分区域改为直角坐标形式,为$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant x\}$,则

$$\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,d\theta dr=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\,d\theta dr$$

$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x(1-x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}d(1-x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]dx$$

$$\xlongequal{x=\sin t}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\,dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}I_4=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

【例 7】　设$f(u)$为连续函数,令$\varphi(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$,则$\varphi'(t)=$__________.

分析:本题本质上是变积分限的函数求导数,正常情况是将$\int_y^t f(x)dx$积出作为前面定积分的被积函数,因为$\int_y^t f(x)dx$中含t,所以需要改变积分次序再求导.

【解】　改变积分次序,得

$$\varphi(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t(x-1)f(x)dx,$$

于是$\varphi'(t)=(t-1)f(t)$.

题型三　二重积分的计算

【思路分析】

二重积分的计算一般有如下种类：

(1) 用直角坐标法、极坐标法计算的普通二重积分；

(2) 分段函数的二重积分；

(3) 广义二重积分.

情形一：普通二重积分的计算

【例 1】 计算$\iint\limits_D \sqrt{y^2-xy}\,dx\,dy$，其中 D 是由 $y=x,x=0,y=1$ 围成的区域.

【解】 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$\iint\limits_D \sqrt{y^2-xy}\,dx\,dy=\int_0^1 dy\int_0^y \sqrt{y^2-xy}\,dx=-\int_0^1 \frac{1}{y}dy\int_0^y (y^2-xy)^{\frac{1}{2}}d(y^2-xy)$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 y^2\,dy=\frac{2}{9}.$$

【例 2】 计算$\iint\limits_D (x+|y|)\,dx\,dy$，其中区域 D 由星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 围成.

【解】 如图 8 - 10，设星形线位于第一象限的区域为 D_1，由二重积分的对称性和奇偶性得

$$\iint\limits_D (x+|y|)\,dx\,dy=4\iint\limits_{D_1} y\,dx\,dy=4\int_0^a dx\int_0^y y\,dy=2\int_0^a y^2\,dx,$$

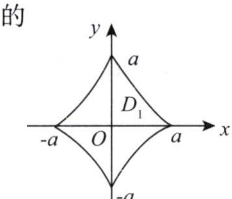


图 8 - 10

又星形线在第一象限的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

故
$$\iint\limits_D (x+|y|)\,dx\,dy=2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\sin^6 t\cdot(-3a\cos^2 t\cdot\sin t)\,dt$$

$$=6a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cdot\cos^2 t\,dt=6a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cdot(1-\sin^2 t)\,dt$$

$$=6a^3\times\left(\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{32a^3}{105}.$$

【例 3】 计算$\iint\limits_D y\,dx\,dy$，其中区域 D 由 $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 及 x 轴围成.

【解】 设 L 的直角坐标形式为 $L:y=f(x)(0\leqslant x\leqslant 2\pi a)$，则

$$\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{f(x)}y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a}f^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a}y^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\,dt=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3 dt=8a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$=8a^3\int_0^{\pi}\sin^6 t\,\mathrm{d}t=16a^3\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi a^3.$$

【例 4】 计算$\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 由 $r=2(1+\cos\theta)(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

【解】 令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta))$，则

$$\iint\limits_D x^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(1+\cos\theta)}r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r$$

$$=4\int_0^{\pi}\cos^2\theta(1+\cos\theta)^4\,\mathrm{d}\theta\xlongequal{\theta-\frac{\pi}{2}=t}4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot(1-\sin t)^4\,\mathrm{d}t$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot(1-4\sin t+6\sin^2 t-4\sin^3 t+\sin^4 t)\,\mathrm{d}t$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+6\sin^4 t+\sin^6 t)\,\mathrm{d}t=8\left(\frac{\pi}{4}+6\times\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{\pi}{4}\right)=\frac{49}{4}\pi.$$

【例 5】 求$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 由 $x^2+y^2=4$ 与$(x+1)^2+y^2=1$ 围成.

【解】 由对称性，得$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

令 $D_1:x^2+y^2\leqslant 4$， $D_2:(x+1)^2+y^2\leqslant 1$，

则 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

而$\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r=\frac{16\pi}{3}$，

$$\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r=-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{\theta-\pi=t}\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{32}{9},$$

于是$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}$.

【例 6】 计算 $I=\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中 D 由 $x^2+y^2\leqslant 1$ 与 $x+y\geqslant 1$ 围成.

【解】 令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$则 $D=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\leqslant r\leqslant 1\right\}$.

于是 $I=\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^1\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

【例 7】 设 $D: x^2+y^2 \leqslant x(y \geqslant 0)$，函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

求 $f(x,y)$.

【解】 令 $\iint_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=A$，则 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}A$，等式两边在 D 上积分得

$$A=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{8}{\pi}A\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

而 $\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$，

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),$$

即 $A=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)-A$，于是 $A=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$，故

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

【例 8】 计算 $\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

【解】 **方法一** 令 $\begin{cases}x-1=r\cos\theta,\\ y-1=r\sin\theta,\end{cases}$ 其中 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}$，$0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$，

则 $\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D [(x-1)-(y-1)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r(r\cos\theta-r\sin\theta)\,\mathrm{d}r=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\theta=-\frac{4}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{8}{3}.$$

方法二 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 其中 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$，$0\leqslant r\leqslant 2(\sin\theta+\cos\theta)$，则

$$\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} r^2(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)(\sin\theta+\cos\theta)^3\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^3\,\mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\frac{2}{3}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{8}{3}.$$

【例 9】 计算 $\iint_D y^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $x=-2, y=2, x=-\sqrt{2y-y^2}$ 及 x 轴围成.

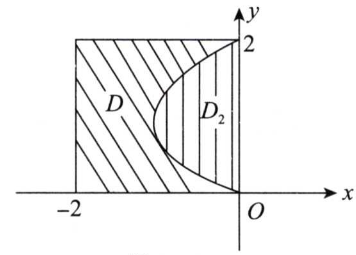


图 8 - 11

【解】 如图8-11,令 $D_1=\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant 0,0\leqslant y\leqslant 2\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid -\sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant 0\}$,

则 $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} y^2\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2} y^2\mathrm{d}\sigma$,

而 $\iint\limits_{D_1} y^2\mathrm{d}\sigma=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y^2\mathrm{d}y=\dfrac{16}{3}$,

$$\iint\limits_{D_2} y^2\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^6\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{8},$$

故 $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}\sigma=\dfrac{16}{3}-\dfrac{5\pi}{8}$.

【例 10】 设 $f(x,y)$ 二阶连续可偏导,且 $f(1,y)=0,f(x,1)=0,\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=a$,计算 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

【解】 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y)$,

由 $\int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y)=yf'_x(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y=f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y$ 得

$$I=\int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y,$$

由 $\int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,1)=0$ 得

$$I=-\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,y),$$

由 $\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,y)=xf(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$,

故 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$.

【注解】

二重积分表达式中若含偏导数,一般使用分部积分法.

情形二:利用对称性与奇偶性计算二重积分

【例 1】 计算 $\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1$.

【解】 因为 D 关于直线 $y=x$ 对称,

所以 $I=\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\left(\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma$,

于是 $2I=\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D\left(\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma$

$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right),$$

故 $I=\iint\limits_{D}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$.

【例 2】 计算 $\iint\limits_{D}\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$.

【解】 令 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，由对称性得

$$\iint\limits_{D}\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

【例 3】 设 $f(u)$ 连续，区域 D 由 $y=x^3,x=-1,y=1$ 围成，计算

$$\iint\limits_{D}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma.$$

【解】 设 $f(u)$ 的原函数为 $F(u)$，如图 8 - 12，

令 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,x^3\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$I=\iint\limits_{D}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^{1}x(1-x^3)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\mathrm{d}x\int_{x^3}^{1}f(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2)$$

$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]\mathrm{d}x,$$

因为 $x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]$ 为奇函数，所以 $I=-\dfrac{2}{5}$.

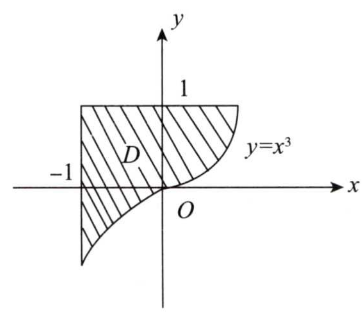


图 8 - 12

情形三：分段函数的二重积分

【例 1】 设 D 为 xOy 平面，$f(x)=\begin{cases}a, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

计算 $\iint\limits_{D}f(x)f(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】 $f(x)f(y-x)=\begin{cases}a^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y-x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

如图 8 - 13，令 $D_0=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant x+1\}$，

则 $\iint\limits_{D}f(x)f(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\iint\limits_{D_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2$.

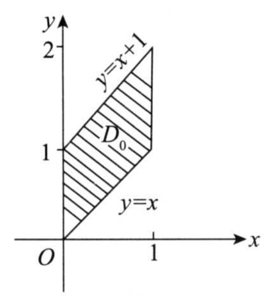


图 8 - 13

【例 2】 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y, & 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

计算 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\geqslant 2x$.

【解】 如图 8 - 14，

令 $D_0=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant x\}$，则

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_0}x^2y\mathrm{d}\sigma=\int_1^2x^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}y\mathrm{d}y$$

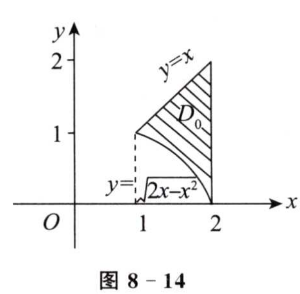


图 8 - 14

$$=\int_1^2 x^2(x^2-x)\mathrm{d}x=\frac{49}{20}.$$

【例 3】 计算$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$[1+x^2+y^2]$表示不超过$[1+x^2+y^2]$的最大整数,其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

【解】 令$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2<1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}(\sin\theta)+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}(\sin\theta)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

情形四:无界区域的二重积分(数学一、二不要求)

【例 1】 计算$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

【解】 令$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant R,0\leqslant y\leqslant R\}$,

$D_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,

因为$D_1\subset D_2\subset D_3$,所以$\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_{D_3}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$,

而$\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-R^2})$,

$\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^R\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\left(\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$,

$\iint\limits_{D_3}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}R}r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-2R^2})$,

于是$\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-R^2})\leqslant\left(\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-2R^2})$,令$R\to+\infty$,由夹逼定理得

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

【例 2】 计算$\iint\limits_D\max\{x,y\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

【解】 令$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x<+\infty,0\leqslant y\leqslant x\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y<+\infty\}$,则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\max\{x,y\}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\cos\theta\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\sin\theta\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\\&=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\xlongequal{r^2=t}\sqrt{2}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

题型四　二重积分的综合问题

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,证明:$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

【证明】 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_x^a f(y)\mathrm{d}y&=\int_0^a f(x)[F(a)-F(x)]\mathrm{d}x\\&=F(a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a F(x)\mathrm{d}F(x)\\&=\frac{1}{2}F^2(a)=\frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2.\end{aligned}$$

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,证明:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$.

【证明】 令 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$.

令 $\varphi(x,y)=[f(x)-f(y)]\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right]$,显然 $\varphi(x,y)\leqslant 0$.

于是 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^b\left[2-\frac{f(x)}{f(y)}-\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}y\leqslant 0$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y+\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\geqslant 2(b-a)^2,$$

因为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$,

所以
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

【例 3】 设 $f(u)$ 连续可导,$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{x-\ln(1+x)}=2$,

求 $\lim\limits_{t\to0}\frac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma}{1-\mathrm{e}^{-t^3}}$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant t^2$.

【解】 由 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,$x-\ln(1+x)\sim\frac{x^2}{2}$,得

$$2=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{x-\ln(1+x)}=2\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x},$$

于是 $f'(0)=2$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma}{1-\mathrm{e}^{-t^3}}&=\lim_{t\to0}\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r}{t^3}=\frac{2\pi}{3}\lim_{t\to0}\frac{tf(t)}{t^2}\\&=\frac{2\pi}{3}\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{2\pi}{3}f'(0)=\frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

题型五 二重积分的应用(数学二、三不要求)

【例 1】 半径为 R 的球面 Σ 中心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上,问 R 为何值时,Σ 在定球面内的面积最大?

【解】 如图 8-15,设 $\Sigma:x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$,

由 $\begin{cases}x^2+y^2+(z-a)^2=R^2,\\x^2+y^2+z^2=a^2\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=R^2-\dfrac{R^4}{4a^2}$,则 Σ 位于定球内的部分表示为

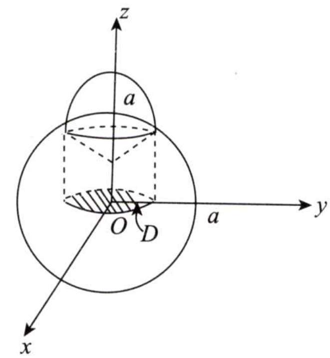


图 8-15

$\Sigma_0:z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,其中 $(x,y)\in D$,

且 $D:x^2+y^2\leqslant R^2-\dfrac{R^4}{4a^2}=b^2$,

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$,得

$$A(R)=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=R\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$=R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^b\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi\left(R^2-\frac{R^3}{2a}\right),$$

令 $A'(R)=2\pi\left(2R-\dfrac{3R^2}{2a}\right)=0$,则 $R=\dfrac{4a}{3}$.

因为当 $R\in\left(0,\dfrac{4a}{3}\right)$ 时,$A'(R)>0$,当 $R>\dfrac{4a}{3}$ 时,$A'(R)<0$,所以当 $R=\dfrac{4a}{3}$ 时,动球在定球内的面积最大.

【例 2】 高度为 $h(t)$(其中 t 为时间)的雪堆在融化过程中其侧面满足 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$,已知体积减小的速度与侧面面积所成比例系数为 0.9,问高度为 130 的雪堆全部融化需要多少时间?

【解】 设雪堆的体积为 $V(t)$,侧面积为 $S(t)$,则

$$V(t)=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{h(t)}[h^2(t)-h(t)z]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{4x}{h(t)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4y}{h(t)}$ 得 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\dfrac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}\sigma$,

于是 $S(t)=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}h^2(t)}\sqrt{1+\dfrac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}\sigma$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}r\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}\mathrm{d}r=\frac{13}{12}\pi h^2(t),$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$,得 $h'(t)=-\dfrac{13}{10}$,解得 $h(t)=C_0-\dfrac{13}{10}t$.

由 $h(0)=130$ 得 $C_0=130$，于是 $h(t)=130-\frac{13}{10}t$，令 $h(t)=0$ 得 $t=100$，即雪堆全部融化需要 100 小时.

三重积分重点题型讲解

题型一　三重积分的计算

【例 1】 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $L:\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转体介于 $z=2$ 与 $z=8$ 之间的几何体.

【解】 $L:\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面为 $\Sigma:z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，

则 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,2\leqslant z\leqslant 8\}$，其中 $D_z:x^2+y^2\leqslant 2z$，

于是 $I=\int_2^8\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_2^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\mathrm{d}r=2\pi\int_2^8 z^2\mathrm{d}z=336\pi$.

【例 2】 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}v$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2$ 围成.

【解】 方法一：铅直投影法

设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 2\}$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 4$，

则 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2\mathrm{e}^z\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^r}{r}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^2(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^r)\mathrm{d}r=2\pi(\mathrm{e}^2+1).$$

方法二：切片法

设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,0\leqslant z\leqslant 2\}$，其中 $D_z:x^2+y^2\leqslant z^2$，

则 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{e}^z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$=\int_0^2\mathrm{e}^z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z\mathrm{d}r=2\pi\int_0^2 z\mathrm{e}^z\mathrm{d}z=2\pi(\mathrm{e}^2+1).$$

【例 3】 $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中 $V:1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4,z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$.

【解】 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\y=r\sin\theta\sin\varphi,\\z=r\cos\varphi,\end{cases}$ 其中 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},1\leqslant r\leqslant 2$，

则 $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{62\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

【例 4】 设 $f(u)$ 可微，且 $f(0)=0$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega:x^2+$

$y^2+z^2\leqslant t^2$.

【解】 令$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\y=r\sin\theta\sin\varphi,\\z=r\cos\varphi,\end{cases}$ 其中 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant t$,则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r)r^2\sin\varphi\,dr=4\pi\int_0^t f(r)r^2\,dr,$$

则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dv=4\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t f(r)r^2\,dr}{t^4}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2f(t)}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0).$$

题型二　三重积分的应用

【例】 求由 $z=x^2+y^2$ 及 $z=1$ 围成的均匀几何体 Ω 的质心坐标.

【解】 如图 8-16,设质心坐标为 $M(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$,由对称性得 $\overline{x}=\overline{y}=0$,则 $M(0,0,\overline{z})$.

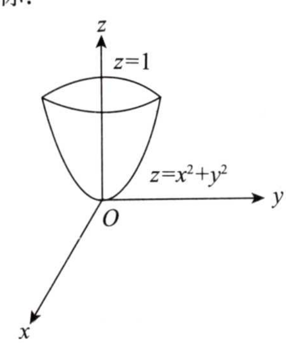


图 8-16

方法一:铅直投影法

令 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$,其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1$.

则 $\iiint\limits_{\Omega}dv=\iint\limits_{D}dx\,dy\int_{x^2+y^2}^1 dz=\iint\limits_{D}(1-x^2-y^2)\,dx\,dy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(1-r^2)\,dr=\frac{\pi}{2},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,dv=\iint\limits_{D}dx\,dy\int_{x^2+y^2}^1 z\,dz=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}[1-(x^2+y^2)^2]\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(1-r^4)\,dr=\frac{\pi}{3},$$

于是质心坐标为 $M\left(0,0,\dfrac{2}{3}\right)$.

方法二:切片法

令 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,0\leqslant z\leqslant 1\}$,其中 $D_z:x^2+y^2\leqslant z$,

则
$$\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}dx\,dy=\pi\int_0^1 z\,dz=\frac{\pi}{2},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,dv=\int_0^1 z\,dz\iint\limits_{D_z}dx\,dy=\pi\int_0^1 z^2\,dz=\frac{\pi}{3},$$

故质心坐标为 $M\left(0,0,\dfrac{2}{3}\right)$.

第九章　级　数（数学二不要求）

考查要求

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.

2. 掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件.

3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法，会用积分判别法.

4. 掌握交错级数的莱布尼茨判别法.

5. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系.

6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.

7. 理解幂级数收敛半径的概念，并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.

8. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性、逐项求导和逐项积分），会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和.

9. 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件（数学三不要求）.

10. 掌握 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林（Maclaurin）展开式，会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.

11. 了解傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理，会将定义在 $[-l,l]$ 上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在 $[0,l]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数，会写出傅里叶级数的和函数的表达式（数学三不要求）.

第一节　常数项级数

一、常数项级数的基本概念

1. 常数项级数 —— 设 $\{a_n\}$ 为常数列，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为常数项级数.

2. 常数项级数的收敛与发散 —— 称 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和，若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，令 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 S，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$；若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

【注解】

虽然 S_n 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 不同，但 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是相同的，故若 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 存在，称为收敛；若 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 不存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也不存在，称为发散.

【例 1】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 的敛散性.

【解】 $S_n=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$，

因为 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 收敛.

【例 2】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ 的敛散性.

【解】 $S_n=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}=2\times\frac{\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3^n}$，

因为 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ 收敛.

二、常数项级数的基本性质

性质 1 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=A$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=B$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n=A\pm B$.

【注解】

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 一个收敛一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 一定发散.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 两个都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 不一定发散.

如：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 都发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n+(-1)^{n-1}]$ 收敛于 0.

性质 2 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n=kS$，特别地，若 $k\neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 有相同的敛散性.

性质 3 级数增加、减少、改变有限项不改变级数的敛散性.

【注解】

若级数收敛，则增加、减少、改变级数的有限项时，虽然不改变级数的敛散性，但可能改变级数的和.

性质 4 若一个级数收敛，则任意添加括号后的级数也收敛，反之，若添加括号后的级数收敛，则原级数不一定收敛(即添加括号提高级数的收敛性).

例如：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，但 $(-1+1)+(-1+1)+\cdots$ 收敛.

性质 5(级数收敛的必要条件) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty}a_n=0$;反之,若$\lim_{n\to\infty}a_n=0$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$不一定收敛.

证明 令$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,所以$\lim_{n\to\infty}S_n$存在,令$\lim_{n\to\infty}S_n=S$.因为$a_n=S_n-S_{n-1}$,所以$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$.

若$\lim_{n\to\infty}a_n=0$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$不一定收敛.

例如:级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,虽然$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,但调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

三、两个重要的级数

1. p 级数

(1)p 级数的定义

形如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$的级数称为 p 级数,当 $p=1$ 时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$称为调和级数.

【注解】

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$不是 p 级数.

(2) p 级数的敛散性判断

① 当 $p\leqslant 1$ 时,p 级数发散,特别地,调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散;

② 当 $p>1$ 时,p 级数收敛.

2. 几何级数

(1) 几何级数的定义

形如$\sum_{n=1}^{\infty}aq^n\ (a\neq 0)$称为几何级数.

(2) 几何级数的敛散性判断

① 当 $|q|\geqslant 1$ 时,几何级数发散;

② 当 $|q|<1$ 时,几何级数收敛,且其和为 $S=\dfrac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$.

【例 1】 求$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$的和.

【解】 显然$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$为几何级数且收敛,所以$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{1-\frac{2}{3}}=6$.

【例 2】 设 $|x|<1$,求$\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$.

【解】 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^n$为几何级数,因为 $x^2<1$,所以$\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

四、正项级数及其敛散性判断

(一) 正项级数的概念

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为常数项级数，若对所有的 n 有 $a_n \geqslant 0$，称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数.

【注解】

正项级数的最大特点就是部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加，正项级数分为两种情形：

(1) $\{S_n\}$ 无上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$，此时正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2) 存在 $M > 0$，使得 $S_n \leqslant M$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，此时正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(二) 正项级数审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，正项级数敛散判别法如下：

判别法	内容	
比较审敛法	基本形式	(1) 若 $a_n \leqslant b_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. (2) 若 $a_n \geqslant b_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
	极限形式	设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l(0 < l < +\infty)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 敛散性相同.
	推论	(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. (2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
比值审敛法	设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$，则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛； 当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.	
根值审敛法	设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$，则当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛； 当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.	
积分审敛法(了解)	设 $\{a_n\}\downarrow$，令 $a_n = f(n)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 敛散性相同.	

【例 1】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 的敛散性.

【解】 因为当 $x \geqslant 0$ 时，$\sin x \leqslant x$，所以 $0 \leqslant \sin \frac{\pi}{2^n} \leqslant \frac{\pi}{2^n}$.

又因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$收敛,所以由正项级数比较审敛法得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$收敛.

【例 2】 设$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛,证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

【证明】 由$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$得$0\leqslant b_n-a_n\leqslant c_n-a_n$.

因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛,由正项级数的比较审敛法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛,因为$b_n=(b_n-a_n)+a_n$,由常数项级数的基本性质得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

【例 3】 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

【证明】 由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,取$\varepsilon_0=1$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,所以由数列极限的定义,存在$N>0$,当$n>N$时,$|a_n-0|<1$,即$0\leqslant a_n<1$,于是$0\leqslant a_n^2\leqslant a_n<1$.

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛得$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n$收敛,再由正项级数比较审敛法得$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n^2$收敛,于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛.

【例 4】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$的敛散性.

【解】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以由比较审敛法的极限形式得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$发散.

【例 5】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$的敛散性.

【解】 因为当$x>0$时,$\ln(1+x)<x$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$为正项级数.

因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$,

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,于是由比较审敛法的极限形式得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$收敛.

【例 6】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$的敛散性.

【解】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{2^n n!}{n^n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1$,

所以由比值审敛法得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛.

【例 7】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$的敛散性.

【解】 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$，

所以由根值审敛法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 收敛.

【注解】

判断正项级数敛散性的一般思路如下：

(1) 是否满足级数收敛的必要条件，若不满足则级数发散.

(2) 若级数一般项是数列相邻两项之差，则一般使用定义法.

(3) 对一般项满足一定的条件但不具体的正项级数，一般使用级数敛散性的性质及判别法判断.

(4) 对一般项具体的正项级数，一般采用具体的审敛法判断. 若一般项含阶乘，则一般使用比值审敛法；若一般项含 n 次幂，则一般使用根值审敛法；若一般项含对数，则一般使用积分审敛法；其余情形则一般使用比较审敛法.

五、交错级数及其审敛法

(一) 交错级数的概念

称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 为交错级数，其中 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$.

(二) 交错级数的莱布尼茨审敛法

定理 4(莱布尼茨审敛法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数，若 (1) $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减少；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和不超过 u_1.

【注解】

(1) 交错级数的两个条件是交错级数收敛的充分条件，不一定必要.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 也是交错级数收敛的必要条件. 但 $\{u_n\}$ 不单调递减，则交错级数可能收敛也可能发散. 例如：

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1}{n}+(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}\right]$，显然 $u_n=\dfrac{1}{n}+(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}>0$，但 $\{u_n\}$ 不单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1}{n}+(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}\right]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1}{n}+(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}\right]$ 发散.

【例 1】 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

【解】 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ 为交错级数.

令 $f(x)=\dfrac{1}{x-\ln x}$，因为 $f'(x)=\dfrac{-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}<0(x>1)$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少，于是数列 $\left\{\dfrac{1}{n-\ln n}\right\}$ 单调减少，又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}=0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ 收敛.

因为 $\dfrac{1}{n-\ln n}\sim\dfrac{1}{n}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-\ln n}$ 条件收敛.

【例 2】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 是否收敛？

【解】 不一定.

如：对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，因为 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

【例 3】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 为发散的交错级数，其中 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减少，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

【解】 因为 $a_n>0$ 且 $\{a_n\}$ 单调减少，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，显然 $A\geqslant 0$.

因为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，所以 $A>0$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a_n}=\dfrac{1}{1+A}<1$，所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

六、级数的条件收敛与绝对收敛

(一) 绝对收敛与条件收敛的概念

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛.

(二) 绝对收敛与条件收敛的关系

定理 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，反之不对.

【例 1】 设 $f(x)$ 二阶连续可导，$f(0)=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=2$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【证明】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=2$ 得 $f'(0)=0,f''(0)=2$.

因为 $f(x)$ 二阶连续可导，所以有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$，于是 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=1+\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，即 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right|=\left|\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right|\sim\dfrac{1}{n^2}$.

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$绝对收敛.

【例 2】 判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)(a>0)$的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

【解】 因为$0\leqslant\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)\right|=2\sin^2\frac{a}{2n}\sim\frac{a^2}{2n^2}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{2n^2}$收敛，

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$绝对收敛.

【例 3】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

【解】 $\sin\sqrt{n^2+1}\pi=\sin[n\pi+(\sqrt{n^2+1}-n)\pi]=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$，

因为$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}>0$，$\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$收敛.

又因为$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$条件收敛.

【注解】

常数项级数有如下一些问题需要注意：

(1) 注意使用如下直观的口诀：添加括号提高级数的收敛性；一般项趋向于零的速度越快级数收敛的可能性越大；添加绝对值提高级数的发散性.

(2) 常数项级数敛散性判断的一般次序：

第一步，看是否满足级数收敛的必要条件；

第二步，看是否可以根据定义判断常数项级数的敛散性；

第三步，确定具体的级数类型，若级数为正项级数，再确定使用具体的判别法(比较审敛法、比值审敛法、根值审敛法、积分审敛法等)；若级数为交错级数，则使用莱布尼茨审敛法；若级数为任意级数，则判断级数的绝对收敛性与条件收敛性.

(3) 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$都收敛.

(4) 对三个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$，

① 若其中两个收敛，则另一个一定收敛；

② 若其中两个发散，则另一个敛散性不确定；

③ 若一个收敛一个发散，则另一个一定发散. (5) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}$都不一定收敛.

如：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n u_{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 都发散；

又如：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛，但 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}u_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散.

(6) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 中一个收敛一个发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(7) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 一定收敛.(添加括号提高级数的收敛性).

(8) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 不一定收敛，但若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项收敛级数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 一定收敛.

第二节　幂级数

一、幂级数的基本概念

1. 函数项级数 —— 设 $\{u_n(x)\}$ 为函数项列，称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为函数项级数. 当 $x=x_0$ 时，若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，称 $x=x_0$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散，称 $x=x_0$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的发散点，所有收敛点组成的集合称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域，所有发散点组成的集合称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的发散域. 记 $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$，在收敛域内，设 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$，称 $S(x)$ 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数.

2. 幂级数 —— 形如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的级数称为幂级数.

二、幂级数的收敛半径与收敛域

定理 1（阿贝尔定理）　对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，当 $x=x_0(\neq 0)$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，则当 $|x|<|x_0|$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 绝对收敛；当 $x=x_1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 发散，则当 $|x|>|x_1|$ 时，幂级数发散.

【注解】

由阿贝尔定理，对任何一个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，总存在$R\geqslant 0$，当$|x|<R$时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛，而当$|x|>R$时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散，称$R$为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径.

定理 2 对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则当$\rho=0$时，$R=+\infty$；当$\rho=+\infty$时，$R=0$；当$0<\rho<+\infty$时，$R=\dfrac{1}{\rho}$.

【例 1】 求下列幂级数的收敛半径及收敛域：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$；　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$；　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$.

【解】 (1) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$，得幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$的收敛半径为$R=+\infty$，于是收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$，得幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$的收敛半径为$R=0$，于是收敛域为$\{0\}$.

(3) 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$得幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$的收敛半径为$R=1$，

当$x=\pm 1$时，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以收敛域为$[-1,1]$.

【例 2】 求$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$的收敛半径与收敛域.

【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$得幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$的收敛半径为$R=1$.

当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛，当$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，故收敛域为$[-1,1)$.

定理 3 对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，设$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则当$\rho=0$时，$R=+\infty$；当$\rho=+\infty$时，$R=0$；当$0<\rho<+\infty$时，$R=\dfrac{1}{\rho}$.

【注解】

(1) 对$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{3n}$，设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则$R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\rho}}$.

同理对$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n+1}$，设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则$R=\sqrt{\dfrac{1}{\rho}}$.

(2) 对$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若当$x=x_0$时级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$条件收敛，则$R=|x_0|$.

(3) 级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$与$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的收敛半径相同，但$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$以$x=0$为收敛区间的中心，而$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$以$x=x_0$为收敛区间的中心.

三、幂级数的性质

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R,其和函数为 $S(x)$,则

定理 1 和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续.

定理 2(逐项可导性) 当 $x \in (-R,R)$ 时,$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$,且幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径也是 R.

定理 3(逐项可积性) 当 $x \in (-R,R)$ 时,$\int_0^x \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$,且幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径也是 R.

【注解】

对幂级数逐项求导或逐项积分后的幂级数与原幂级数收敛半径相同,但收敛域不一定相同.

四、函数展成幂级数

1. 直接法

定理 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内任意阶可导,则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,\text{其中 } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ (n = 0,1,2,\cdots).$$

特别地,当 $x_0 = 0$ 时,$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$,称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 为 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

记住以下函数的麦克劳林级数:

(1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$;

(2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$;

(3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$;

(4) $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$;

(5) $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$;

(6) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (-1 < x \leqslant 1)$;

(7) $-\ln(1-x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} \quad (-1 \leqslant x < 1)$.

2. 间接法

所谓间接法,即通常使用如下两个工具:

(1) 常见函数的麦克劳林级数.

(2) 逐项可导性与逐项可积性.

【例 1】 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 展开成 $x-4$ 的幂级数.

【解】 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2+(x-4)}-\dfrac{1}{3+(x-4)}$,

而$\dfrac{1}{2+(x-4)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-4}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-4}{2}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-4)^n\quad(2<x<6),$$

$$\frac{1}{3+(x-4)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x-4}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-4}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-4)^n\quad(1<x<7),$$

于是 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x-4)^n\quad(2<x<6)$.

【例 2】 将 $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-x-2}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

【解】 令 $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+1}$,

由 $A(x+1)+B(x-2)=5x-1$,得$\begin{cases}A+B=5,\\A-2B=-1,\end{cases}$解得 $A=3,B=2$.

于是 $f(x)=\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{2+(x-1)}-\dfrac{3}{1-(x-1)}$,

而$\dfrac{2}{2+(x-1)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n\quad(-1<x<3)$,

$$\frac{3}{1-(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}3(x-1)^n\quad(0<x<2),$$

故 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{2^n}-3\right](x-1)^n\quad(0<x<2)$.

【例 3】 将 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 $f(0)=0,f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\quad(-1<x<1)$,

则 $f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

五、求幂级数的和函数

求幂级数的和函数本质上是函数展开成幂级数的逆过程,通常需要使用如下三个工具:

(1) 常见函数的麦克劳林级数.

(2) 逐项可导性与逐项可积性.

(3) 微分方程的方法.

【例 1】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^{2n+1}$ 的和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=2$，得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^{2n+1}$ 的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

当 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散；

当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，则收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n}x^{2n+1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x^2)^n}{n}=-x\ln(1-2x^2)$.

【例 2】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时，由级数收敛的必要条件得级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$
$$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$
$$=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

【例 3】 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得级数的收敛半径为 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots$，求导得

$$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,\quad S''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots,$$

则 $S(x)$ 满足微分方程 $S''(x)-S(x)=0$，则 $S(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x$，

由 $S(0)=1,S'(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，故 $S(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

第三节　傅里叶级数（数学三不要求）

一、周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，

[问题 1] $f(x)$ 可否分解为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$？其中系数 a_n,b_n 如何计算？

[问题 2] $f(x)$ 与三角级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是何关系？

定理 1（狄利克雷充分条件） 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足：

(1) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点；

(2) $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个极值点，则 $f(x)$ 可以展开成

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2,\cdots)$，且

(1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

二、定义于 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足狄利克雷充分条件，将 $f(x)$ 进行周期延拓，则 $f(x)$ 可以展开成

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2,\cdots)$，且

(1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

三、定义于 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

(一) 将 $f(x)$ 展成余弦级数

将 $f(x)$ 进行区间偶延拓，再进行周期延拓，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可以展成余弦级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，其中 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=1,2,\cdots)$.

(二) 将 $f(x)$ 展成正弦级数

将 $f(x)$ 进行区间奇延拓，再进行周期延拓，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上可以展开成正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2,\cdots)$.

四、周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数，

[问题 1] $f(x)$ 可否分解为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$？其中系数 a_n，b_n 如何计算？

[问题 2] $f(x)$ 与三角级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$ 是何关系？

定理 1(狄利克雷充分条件) 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数，若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上满足：
(1) $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续或只有有限个第一类间断点；
(2) $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上只有有限个极值点，则 $f(x)$ 可以展开成

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$，且

(1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=f(x)$；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

五、定义于$[-l,l]$上的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

若 $f(x)$ 在$[-l,l]$上满足狄利克雷充分条件，将 $f(x)$ 进行周期延拓，则 $f(x)$ 可以展开成

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$，且

(1) 当 x 为 $f(x)$ 的连续点时，$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=f(x)$；

(2) 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时，

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

六、定义于$[0,l]$上的函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

(一) 将 $f(x)$ 展成余弦级数

将 $f(x)$ 进行区间偶延拓，再进行周期延拓，则 $f(x)$ 在$[0,l]$上可以展成余弦级数

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$，其中 $a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$，$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

(二) 将 $f(x)$ 展成正弦级数

将 $f(x)$ 进行区间奇延拓，再进行周期延拓，则 $f(x)$ 在$[0,l]$上可以展开成正弦级数

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$，其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

重点题型讲解

题型一　常数项级数的基本性质与敛散性判断

【思路分析】

涉及常数项级数性质的问题主要运用以下性质：

(1) 级数收敛的定义.

(2) 级数收敛的必要条件.

(3) 级数收敛的基本性质，尤其应记住：添加括号提高级数的收敛性，添加绝对值提高级数的发散性.

【例 1】 设$\{u_n\}$为常数列,下列结论正确的是(　　).

(A) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛

(B) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(C) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛

(D) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

【解】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots$,因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,所以由常数项级数的性质得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,应选(A);

取$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$,显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛于0,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$发散,(B)不对;

取$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+\cdots$发散,(C)不对;

取$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2$,显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛于0,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2$发散,(D)不对.

【例 2】 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,下列级数一定收敛的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

【解】 令$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

对$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$,部分和$S_n'=(u_1+u_2)+(u_2+u_3)+\cdots+(u_n+u_{n+1})=2S_n-u_1+u_{n+1}$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n'=2S-u_1$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛,应选(D).

【例 3】 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散,则(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+|v_n|)$发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$发散

【解】 取$u_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}$,$v_n=\dfrac{1}{n}$,显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,(A)不对;

取$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,$v_n=\dfrac{1}{n}$,显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,(B)不对;

取$u_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}, v_n=\frac{1}{n}$，显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+|v_n|)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，(C)不对；

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_n|$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$发散，应选(D).

【例 4】 设$u_n\neq 0$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$（　　）.

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不确定

【解】 由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}=1$，得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$且$\frac{1}{u_n}\sim\frac{1}{n}$，

$$S_n=-\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)+\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)-\cdots+(-1)^n\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=-\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^n}{u_{n+1}}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-\frac{1}{u_1}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$收敛.

又因为$\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\sim\frac{2}{n}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$条件收敛，应选(B).

【例 5】 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+n+1}}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$.

【解】 (1) 因为$\frac{n}{\sqrt{n^3+n+1}}\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+n+1}}$发散.

(2) 因为$\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx\geqslant\int_0^n x\,dx=\frac{n^2}{2}$，所以$0\leqslant\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx}\leqslant\frac{2}{n^2}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛，

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$收敛.

【例 6】 判别$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$是绝对收敛还是条件收敛？

【解】 因为$n^{\frac{1}{n}}>1$，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$为交错级数.

令$f(x)=x^{\frac{1}{x}}-1$，由$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}<0(x>e)$得数列$\left\{n^{\frac{1}{n}}-1\right\}_{n=3}^{\infty}$单调减少.

又由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)=0$得交错级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$收敛.

由$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}(\ln x-1)=+\infty$，得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=+\infty$，再

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$发散，故$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$条件收敛.

【例 7】 判断$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin an}{n^2}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$的敛散性.

【解】 因为 $0 \leqslant \left|\frac{\sin an}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{n^2}$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

又因为 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ 单调减少且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin an}{n^2} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$ 条件收敛.

【例 8】 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

【解】 设 $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，当 n 为偶数时，$u_n > 0$；当 n 为奇数时，$u_n < 0$，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 为交错级数.

$0 \leqslant |u_n| \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\left[\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}\right] \to 0(n \to \infty)$，

又 $|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x > \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x+\pi}}\mathrm{d}x \xlongequal{x+\pi=t} \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = |u_{n+1}|$，所以原级数收敛.

题型二 常数项级数敛散性证明

【例 1】 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x$.

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$；

(2) 证明：对任意的 $\lambda > 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

【解】 (1) $a_n + a_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{n+1}$，

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$， $S_n = \frac{1}{1\times 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$，

因为 $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = 1$.

(2) 令 $\tan x = t$，则

$$0 \leqslant a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,\mathrm{d}x \xlongequal{\tan x = t} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n},$$

因为 $0 \leqslant \frac{a_n}{n^\lambda} \leqslant \frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，所以由正项级数比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

【例 2】 (1) 证明：方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 有且仅有一个正根 x_n；

(2) 对任意的 $a > 1$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ 收敛.

【证明】 (1) 令 $f(x) = x^n + nx - 1$，$f(0) = -1$，$f(1) = n$.

因为 $f(0)f(1) < 0$，所以存在 $x_n \in (0,1)$，使得 $f(x_n) = 0$，即方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 有正根 x_n.

因为 $f'(x)=nx^{n-1}+n>0(x>0)$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加，故正根是唯一的.

(2) 由 $x_n^n+nx_n-1=0$ 得 $x_n=\frac{1}{n}(1-x_n^n)\leqslant\frac{1}{n}$.

因为 $0\leqslant x_n^a\leqslant\frac{1}{n^a}(a>1)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ 收敛，所以由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^a$ 收敛.

【例 3】 设 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

【证明】 (1) 因为 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant 1$ 且 $a_{n+1}-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0$，

所以数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(2) 显然 $0\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leqslant a_n-a_{n+1}$，

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$， $S_n=(a_1-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n+1})=a_1-a_{n+1}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_1-\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$ 存在，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，由正项级数的比较审敛法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

【例 4】 设 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}(n=1,2,\cdots;a_n>0,b_n>0)$，证明：

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

【证明】 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，得 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$，即 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减少且 $\frac{a_n}{b_n}\geqslant 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

情形一：若 $A>0$，则(1)，(2) 显然成立.

情形二：设 $A=0$，取 $\varepsilon_0=1$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，$\frac{a_n}{b_n}<1$，即 $0<a_n<b_n$，于是当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

【例 5】 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f(0)=1,f''(0)=2$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【证明】 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f'(x)$ 为奇函数，于是 $f'(0)=0$.

因为 $f(x)$ 二阶连续可导，所以 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$，

即 $f(x)=1+x^2+o(x^2)$，从而 $f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

于是 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right|=\left|\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\sim\frac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

【例 6】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

【证明】 $S_n=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1$，

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，故 $\{a_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，使得 $|a_n|\leqslant M$.

因为 $0\leqslant|a_nb_n|\leqslant M|b_n|$，又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M|b_n|$ 收敛，由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

题型三　幂级数的收敛半径与收敛域

【例 1】 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 在 $x=-6$ 处收敛，在 $x=12$ 处发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{2n-1}$ 的收敛半径为__________.

【解】 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛半径为 R.

因为 $x=-6$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 收敛，所以 $R\geqslant|-6-3|=9$，

又因为 $x=12$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 发散，所以 $R\leqslant|12-3|=9$.

于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛半径为 $R=9$，故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 $R_1=3$，因为 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}\right)'=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{2n-1}$ 且逐项求导后的级数收敛半径不变，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{2n-1}$ 的收敛半径为 3.

【例 2】 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得级数的收敛半径为 $R=1$，

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛，故级数的收敛域为 $(-1,1]$.

【例 3】 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛区间.

【解】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{2n}x^{2n}$，

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$；

对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{2n}}{2n}x^{2n}$，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$，故原级数的收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

题型四　函数展开成幂级数

【例 1】 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$，

由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ (-1<x<1)$ 得

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},$$

当 $x=-1$ 时，因为 $\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，

所以 $\arctan\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\ (-1\leqslant x<1)$.

【例 2】 将 $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-7x+3}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

【解】 令 $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x^2-7x+3}=\dfrac{3x+1}{(2x-1)(x-3)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{2x-1}$，

由 $A(2x-1)+B(x-3)=3x+1$，得 $\begin{cases}2A+B=3,\\-A-3B=1,\end{cases}$ 解得 $A=2,B=-1$.

于是 $f(x)=\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{2}{-2+(x-1)}-\dfrac{1}{2(x-1)+1}$，

由 $\dfrac{2}{-2+(x-1)}=-\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{2}}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}(x-1)^n\ (-1<x<3)$，

$\dfrac{1}{2(x-1)+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n(x-1)^n\left(\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\right)$，

得
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}2^n-\frac{1}{2^n}\right](x-1)^n\left(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right).$$

【例 3】 将 $f(x)=\ln x$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

【解】 $f(x)=\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln2+\ln(1+\dfrac{x-2}{2})$

$$=\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n\ (0<x\leqslant 4).$$

【例 4】 将 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{4^{2n}(2n+1)!}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

【解】 显然级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{4^{2n}(2n+1)!}$ 的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{4^{2n}(2n+1)!}=4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=4\sin\frac{x}{4},$$

则 $f(x)=4\sin\left(\frac{1}{4}+\frac{x-1}{4}\right)=4\sin\frac{1}{4}\cos\frac{x-1}{4}+4\cos\frac{1}{4}\sin\frac{x-1}{4}$

$$=4\sin\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{2n}(2n)!}(x-1)^{2n}+\cos\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{2n}(2n+1)!}(x-1)^{2n+1}.$$

题型五 幂级数的和函数

【思路分析】

幂级数求和是幂级数部分最重要的题型，求幂级数的和函数常见类型及方法如下：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n$（其中 $P(n)$ 为 n 的多项式）

利用逐项可导性将幂级数转化为 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$、$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x}(-1<x<1)$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{P(n)}$（其中 $P(n)$ 为 n 的多项式）

该类型有两个思路：

思路一：利用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x)(-1<x\leqslant 1)$ 及

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$；

思路二：利用逐项可积性去掉分母，转化为几何级数求和.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}x^n$（其中 $P(n),Q(n)$ 为 n 的多项式）

将 $\frac{P(n)}{Q(n)}$ 分解为部分和，从而将幂级数化为(1)、(2) 两种类型之和.

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{P(n)}$（其中 $P(n)$ 中含阶乘）

该类型幂级数求和常用两种思路：

思路一：利用 $e^x,\sin x,\cos x$ 的麦克劳林级数求和函数；

思路二：将和函数 $S(x)$ 求导，构造出 $S(x)$ 所满足的微分方程，求出 $S(x)$.

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$（其中 a_n 是给出递推关系的数列）

该类型幂级数求和常用两种思路：

思路一：利用递推关系求出 a_n 具体的表达式，再求和函数；

思路二：将递推关系代入幂级数，求出和函数 $S(x)$ 满足的关系式，从而求出 $S(x)$.

【例 1】 求下列幂级数的和函数：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)x^n$； (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$； (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{n}x^{2n}$.

【解】 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，所以幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+1)x^n$ 的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm 1$ 时，由级数收敛的必要条件知级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+1)x^n$，

则 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n+\dfrac{1}{1-x}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n+\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n+\dfrac{1}{1-x}$

$=x^2\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\dfrac{1}{1-x}=x^2\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)''+x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{2x^2-x+1}{(1-x)^3}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 得级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，故收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$，

则 $S(x)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{n!}x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2)^n}{n!}$

$=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n!}x^{2n}+e^{x^2}=2x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x^2)^{n-1}}{(n-1)!}+e^{x^2}=(2x^2+1)e^{x^2}$.

(3) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得级数的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm 1$ 时，由级数收敛的必要条件得级数发散，故级数的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n}x^{2n}$，

则 $S(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-x^2)^n}{n}=\dfrac{-2x^2}{1+x^2}-\ln(1+x^2)$.

【例 2】 求下列幂级数的收敛区间与和函数：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$； (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^n}$.

【解】 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$，得级数的收敛半径为 $R=+\infty$，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{\frac{x}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{x^2}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!}+e^{\frac{x}{2}}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，得级数的收敛半径为 $R=1$，级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\frac{1}{1-x}$$

$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}\right)'+\frac{1}{1-x}=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^{2}},$$

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n}}=S\left(\frac{1}{2}\right)=6.$

【例 3】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right|=1$ 得级数的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,因为 $\left|\frac{(\pm1)^{n}}{n(n+1)}\right|\sim\frac{1}{n^{2}}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$ 收敛,所以当 $x=\pm1$ 时级数绝对收敛,故级数的收敛域为$[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n+1}=S_{1}(x)-S_{2}(x)$,

当 $x=1$ 时,$S(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$;当 $x=0$ 时,$S(0)=0$;

当 $-1\leqslant x<1$ 且 $x\neq0$ 时,$S_{1}(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}=-\ln(1-x)$;

$S_{2}(x)=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}-x\right)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)-1$,

$$\text{于是 } S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x=1,\\ \left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1, & -1\leqslant x<1 \text{ 且 } x\neq0.\end{cases}$$

【例 4】 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right|=1$,得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域为$[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$,则 $S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=xS_{1}(x)$,

由 $S_{1}(0)=0$,$S_{1}'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x^{2})^{n-1}=\frac{1}{1+x^{2}}$,

得 $S_{1}(x)=S_{1}(x)-S_{1}(0)=\int_{0}^{x}S_{1}'(x)\mathrm{d}x=\arctan x$,故 $S(x)=x\arctan x$.

【例 5】 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^{2}+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

【解】 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right|=1$ 得级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^{2}+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时,因为$\frac{4n^{2}+4n+3}{2n+1}\to\infty(n\to\infty)$,所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^{2}+4n+3}{2n+1}$ 发散,故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^{2}+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域为$(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$，

则 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=S_1(x)+2S_2(x),$$

$S_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$；

当 $x=0$ 时，$S_2(0)=1$；

当 $x\neq 0$ 时，$xS_2(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，由 $[xS_2(x)]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$，得

$xS_2(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，即 $S_2(x)=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$，

故 $S(x)=\begin{cases}3, & x=0,\\ \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & -1<x<1\text{ 且 }x\neq 0.\end{cases}$

【例 6】 设 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}(-\infty<x<+\infty)$.

(1) 验证 y 满足 $y''+y'+y=e^x$；

(2) 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数 $y(x)$.

【解】 (1) $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots$，求导得

$$y'=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots,\quad y''=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots;$$

则 $y''+y'+y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

(2) $y''+y'+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$，特征值为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

则 $y''+y'+y=e^x$ 的通解为 $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$.

由 $y(0)=1,y'(0)=0,y''(0)=0$ 得 $C_1=\frac{2}{3},C_2=0$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为

$$y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x.$$

【例 7】 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，$y(x)$ 为其和函数，满足 $y''-2xy'-4y=0$ 且满足 $y(0)=0,y'(0)=1$，求 a_n 及和函数 $y(x)$.

【解】 由 $y(0)=0$ 得 $a_0=0$，由 $y'(0)=1$ 得 $a_1=1$.

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n,$$

因为 $y(x)$ 满足 $y''-2xy'-4y=0$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

整理得 $2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)(n+2)a_{n+2}-2(n+2)a_n]x^n=0$，于是 $a_2=0,a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n$.

由 $a_0=0,a_1=1$ 得，

当 $n=2k$ 时，$a_n=0$，当 $n=2k+1$ 时，$a_{2k+1}=\dfrac{1}{k}a_{2k-1}=\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{k-1}a_{2k-3}=\cdots=\dfrac{1}{k!}$.

故 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}$.

【例 8】 设 $a_1=a_2=1$，且满足 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，证明：当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 收敛并求其和函数.

【解】 因为 $a_1=a_2=1,a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，所以 $a_n>0,a_{n+1}\geqslant a_n(n=1,2,\cdots)$.

当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，$\left|\dfrac{a_{n+1}x^n}{a_nx^{n-1}}\right|=\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_n}|x|\leqslant 2|x|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^n}{a_nx^{n-1}}\right|\leqslant 2|x|<1$，

故当 $|x|<\dfrac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 收敛.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$，则

$$\begin{aligned}S(x)&=a_1+a_2x+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1}=1+x+\sum_{n=3}^{\infty}(a_{n-2}+a_{n-1})x^{n-1}\\&=1+x+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-1}+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}=1+xS(x)+x^2S(x),\end{aligned}$$

则 $S(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$.

题型六　特殊常数项级数求和

【例 1】 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}$ 的和.

【解】 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$，显然该级数的收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\&=xe^x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1=xe^x+e^x-1=(x+1)e^x-1,\end{aligned}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}=S(1)=2e-1$.

【例 2】 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

【解】 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$，显然该级数的收敛区间为$(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+\frac{x}{1-x}=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+\frac{x}{1-x}=\frac{x+x^3}{(1-x)^3},$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=S\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{27}$.

【例 3】 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和.

【解】 令 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n^2-1}$，该幂级数的收敛区间为$(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+x+\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1-x^2)\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}\right],$$

于是 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}=2S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$.

题型七　傅里叶级数(数学三不要求)

【例 1】 将函数 $f(x)=2+|x|\ (|x|\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

【解】 $f(x)$ 在$[-1,1]$上满足收敛定理的条件，且 $f(x)$ 为偶函数，则

$a_0=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=5$,

$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}(n=1,2,\cdots)$,

$b_n=0(n=1,2,\cdots)$，则

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}(|x|\leqslant 1),$$

取 $x=0$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

【例 2】 将函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & 0<|x|<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

【解】 显然 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上满足收敛定理条件，将函数进行周期延拓，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$,

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$,

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right)(n=1,2,\cdots)$,

当 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 时,级数收敛于$\frac{\pi}{4}$,

故 $f(x)=\frac{\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right)\cos nx\left(|x|\leqslant\pi,\text{且 }x\neq\pm\frac{\pi}{2}\right)$.

【例 3】 将函数 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成以 4 为周期的余弦级数.

【解】 将 $f(x)$ 进行偶延拓和周期延拓,则

$a_0=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0$,

$a_n=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$,

$b_n=0$,

则 $f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}(0\leqslant x\leqslant 2)$.

第十章 向量代数和空间解析几何

（数学二、三不要求）

考查要求

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），了解两个向量垂直、平行的条件.

3. 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法.

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题.

6. 会求点到直线以及点到平面的距离.

7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

8. 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求简单的柱面和旋转曲面的方程.

9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程. 了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求该投影曲线的方程.

第一节 空间解析几何的理论

一、基本概念

1. 向量 —— 既有大小又有方向的量称为向量，常用从起点指向终点的带箭头的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示，或用带箭头的小写字母 $\vec{a}$ 表示，向量的大小或长度又称为向量的模，向量 $\vec{a}$ 的模记为 $\left|\vec{a}\right|$，大小相等且方向相同的向量相等.

【注解】

(1) 模为 1 的向量称为单位向量.

(2) 模为零的向量称为零向量.

(3) 设 $\vec{a}$ 为一个非零向量，则向量 $\vec{a}$ 对应的单位向量记为 $\overrightarrow{a^0}$.

2. 向量的坐标 —— 设 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 及 $\vec{k}$ 分别表示 x，y，z 轴正向上的单位向量，设向量 $\vec{\alpha}$ 在三个坐标轴上的投影为 a，b，c，由向量的分解得 $\vec{\alpha}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\{a,b,c\}$，称 $\{a,b,c\}$ 为向量 $\vec{\alpha}$ 的坐标，称 $\vec{\alpha}=\{a,b,c\}$ 为向量的坐标表示形式.

设 $\vec{\alpha}=\{a,b,c\}$，则

(1) $\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；

(2) $\overrightarrow{\alpha^0}=\dfrac{1}{\left|\vec{\alpha}\right|}\vec{\alpha}=\left\{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right\}$；

(3) 设 $A(a_1,b_1,c_1)$,$B(a_2,b_2,c_2)$ 为两个点,则 $\overrightarrow{AB}=\{a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1\}$.

3. 向量的方向角与方向余弦——设 $\vec{r}=\{a,b,c\}$ 为非零向量,则 $\vec{r}$ 与 x 轴,y 轴,z 轴正方向的夹角,称为此向量的方向角,分别记为 α,β,γ,称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\vec{r}$ 的方向余弦,

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\gamma=\frac{c_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

显然有

(1) $\vec{r}^{\,0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$;

(2) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4. 向量在一个轴(向量)上的投影——设 u 为一个数轴,$\vec{a}$ 为一个向量,过向量的起点 A 和终点 B 作 u 轴的垂面交 u 轴于点 A_1 和 B_1,其在 u 轴上的坐标为 x_1,x_2,称 x_2-x_1 为向量 $\vec{a}$ 在 u 轴上的投影,记为 $\mathrm{Prj}_u\vec{a}=x_2-x_1$,且 $\mathrm{Prj}_u\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos(\widehat{u,\vec{a}})$.

二、向量运算

(一) 向量运算的几何描述

1. 向量加法(如图 10-1)

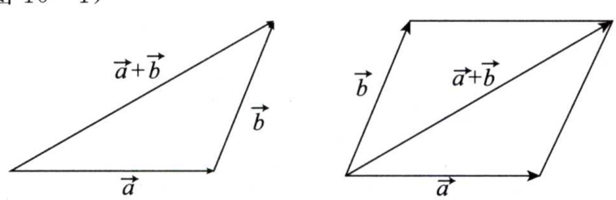


图 10-1

2. 向量减法(如图 10-2)

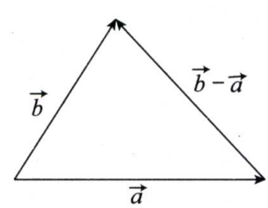


图 10-2

3. 数与向量之积

(1) 当 $k>0$ 时,$k\vec{a}$ 方向与 $\vec{a}$ 相同,长度为 $\vec{a}$ 的 k 倍(k 为常数);

(2) 当 $k=0$ 时,$k\vec{a}$ 为零向量;

(3) 当 $k<0$ 时,$k\vec{a}$ 方向与 $\vec{a}$ 相反,长度为 $\vec{a}$ 的 $|k|$ 倍.

4. 向量的数量积

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

5. 向量的向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$

(1) 方向按右手准则(如图 10-3).

(2) 长度为 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

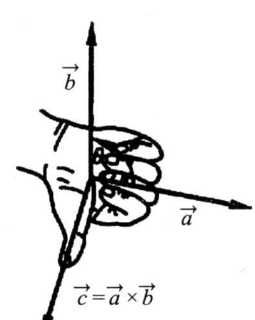


图 10-3

（二）向量运算的代数描述

设 $\vec{a}=\{a_1,b_1,c_1\}$，$\vec{b}=\{a_2,b_2,c_2\}$，则

1. 向量的加法

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2\}.$$

2. 向量的减法

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2\}.$$

3. 数与向量之积

$$k\vec{a}=\{ka_1,kb_1,kc_1\}.$$

4. 向量的数量积

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2.$$

5. 向量的向量积

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_1&a_1\\c_2&a_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\right\}.$$

【注解】

1. 向量的数量积具有如下性质：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，且 $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ 充要条件是 $\vec{a}=\vec{0}$.

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

2. 向量的向量积具有如下性质：

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$（$a_2,b_2,c_2$ 均不为 0）.

(3) $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ 且 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$.

(4) 设由 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 构成的三角形面积为 A，则 $|\vec{a}\times\vec{b}|=2A$（如图 10－4）.

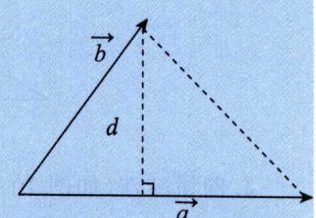


图 10－4

第二节　向量的应用

一、平面

1. 平面方程的点法式方程

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$，又非零向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}\perp\pi$，则平面 π 的方程为

$$\pi:A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

2. 平面的一般式方程

$\pi: Ax+By+Cz+D=0$,其中 $\vec{n}=\{A,B,C\}$ 为平面 π 的法向量.

3. 平面的截距式方程

设平面 π 与三个坐标轴的交点分别为 $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0,c)$,其中 a,b,c 为非零常数,则平面 π 的方程为 $\pi: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

4. 平面的三点式方程

设 $A(a_1,b_1,c_1),B(a_2,b_2,c_2),C(a_3,b_3,c_3)$ 为不在一条直线上的三点,则 A,B,C 唯一确定平面 π,平面的法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$,利用点法式易求出平面方程.

【例】 设 $A(1,0,-1),B(2,1,2),C(-1,1,3)$,求由 A,B,C 确定的平面.

【解】 $\overrightarrow{AB}=\{1,1,3\},\overrightarrow{AC}=\{-2,1,4\}$,因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不平行,所以 A,B,C 唯一确定平面,$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{1,-10,3\}$,则平面方程为

$\pi:(x-1)-10(y-0)+3(z+1)=0$,即 $\pi: x-10y+3z+2=0$.

二、直线

1. 空间直线的一般式方程

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

2. 直线的点向式(对称式)方程

设向量 $\vec{s}=\{m,n,p\}\parallel L$,点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$,则直线 L 的点向式方程为

$$L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

3. 直线的参数式方程

空间直线的参数式方程为 $L:\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt,\end{cases}$ 其中 $\vec{s}=\{m,n,p\}\parallel L,M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$.

三、特殊曲面

(一) 旋转曲面

1. 二维空间旋转曲面

(1) 设曲线 $L:\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 为 xOy 平面内的曲线,则曲线 L 绕 x 轴旋转而成的曲面为

$$\Sigma_x: f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0;$$

(2) 曲线 L 绕 y 轴旋转而成的曲面为 $\Sigma_y: f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

【例 1】 求曲线 $L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转而成的曲面.

【解】 L 绕 x 轴旋转而成的曲面为 $\Sigma_x: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$,

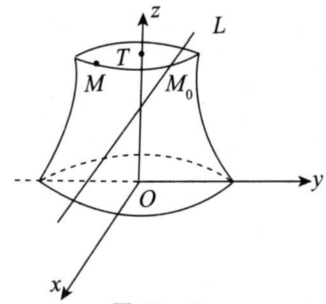


图 10－5

L 绕 y 轴旋转而成的曲面为 $\Sigma_y:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$.

2. 三维空间直线旋转曲面(以直线 L 绕 z 轴旋转为例)

设 $L:\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ 为三维空间的直线,直线 L 绕 z 轴旋转而成曲面方程的求法如下:

设 L 绕 z 轴旋转而成的曲面为Σ,如图 10-5,任取 $M(x,y,z)\in\Sigma$,M 所在的圆位于 L 上的点为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$,圆心为 $T(0,0,z)$.

由 $|MT|=|M_0T|$,得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$,因为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$,所以 $L:\frac{x_0-a}{m}=\frac{y_0-b}{n}=\frac{z-c}{p}$,解得 $x_0=\frac{m}{p}z+a-\frac{mc}{p}$, $y_0=\frac{n}{p}z+b-\frac{nc}{p}$,

所求的曲面方程为

$$\Sigma:x^2+y^2=\left(\frac{m}{p}z+a-\frac{mc}{p}\right)^2+\left(\frac{n}{p}z+b-\frac{nc}{p}\right)^2.$$

【例 2】 设 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$,求直线 L 绕 z 轴旋转而成的曲面方程.

【解】 设 L 绕 z 轴旋转而成的曲面为Σ,如图 10-5,任取 $M(x,y,z)\in\Sigma$,M 所在的圆位于L 上的点为$M_0(x_0,y_0,z)$,圆心为 $T(0,0,z)$,由 $|MT|=|M_0T|$ 得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$.

因为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$,所以 $L:\frac{x_0-1}{2}=\frac{y_0+1}{-1}=\frac{z}{1}$,解得 $x_0=1+2z,y_0=-1-z$,则所求的曲面为 $\Sigma:x^2+y^2=(1+2z)^2+(-1-z)^2$,即 $\Sigma:x^2+y^2=5z^2+6z+2$.

(二) 柱面

1. 母线平行于坐标轴的柱面

(1)$\Sigma:f(x,y)=0$ 为母线平行于 z 轴的柱面;
(2)$\Sigma:f(y,z)=0$ 为母线平行于 x 轴的柱面;
(3)$\Sigma:f(z,x)=0$ 为母线平行于 y 轴的柱面.

2. 投影柱面

设 $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 为空间曲线,过 L 且平行于 z 轴的柱面方程为$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中消去 z 而得到的方程 $H(x,y)=0$.

【注解】

$f(x,y)=0$ 在二维空间表示曲线,而在三维空间表示母线平行于 z 轴的柱面,$\begin{cases}f(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$ 表示三维空间中位于 xOy 平面内的曲线.

四、距离

1. 两点之间的距离

设两点 M_1,M_2 的坐标为 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$,则这两点之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2. 点到平面的距离

设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$，则点 M_0 到平面 π 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. 点到直线的距离

设点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，直线 $L: \frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$，则点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{\left|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\vec{s}\right|}，\text{其中 } M_1(x_1,y_1,z_1)\in L, \vec{s}=\{m,n,p\}.$$

【例】 求点 $M_0(1,-1,0)$ 到直线 $L: \frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$ 的距离.

【解】 $M_1(2,0,-1)\in L$，$\vec{s}=\{-1,1,2\}\ /\!/\ L$，

$\overrightarrow{M_0M_1}=\{1,1,-1\}$，$\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}=\{3,-1,2\}$，则点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}=\frac{\sqrt{21}}{3}.$$

4. 两平行平面之间的距离

设 $\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$，$\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$ 为两平行平面，则平面 π_1 与 π_2 之间的距离为 $d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

5. 两异面直线之间的距离

设 $L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ 为两条直线，$\vec{s_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$，$\vec{s_2}=\{m_2,n_2,p_2\}$ 分别为 L_1 和 L_2 的方向向量，$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1$，$M_2(x_2,y_2,z_2)\in L_2$，则直线 L_1 与 L_2 的位置关系如下：

(1) 当 $(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=0$ 时，L_1 与 L_2 共面；

(2) 当 $(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$ 时，L_1 与 L_2 异面，当 L_1 与 L_2 异面时，L_1 与 L_2 之间的距离为

$$d=\frac{|(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}.$$

五、夹角

1. 两向量之间的夹角

设 $\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$ 为两个向量，则 $\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$ 的夹角为 $\theta=\arccos\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\left|\vec{\beta}\right|}$.

2. 两直线之间的夹角

设 $L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ 为两条直线，$\vec{s_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$，$\vec{s_2}=\{m_2,n_2,p_2\}$ 为直线 L_1 和 L_2 的方向向量，则 L_1 和 L_2 的夹角为

$$\theta=\arccos\frac{\left|\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}\right|}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\left|\overrightarrow{s_2}\right|}.$$

3. 两平面之间的夹角

设$\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$为两个平面，$\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$，$\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$为平面$\pi_1$和$\pi_2$的法向量，则平面$\pi_1$和$\pi_2$的夹角为

$$\theta=\arccos\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}.$$

4. 直线与平面之间的夹角

设直线$L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，平面$\pi:Ax+By+Cz+D=0$，$\vec{s}=\{m,n,p\}$与$\vec{n}=\{A,B,C\}$分别为直线$L$的方向向量和平面$\pi$的法向量，则直线$L$与平面$\pi$之间的夹角为$\varphi=\arcsin\dfrac{\left|\vec{s}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\left|\vec{n}\right|}$.

重点题型讲解

题型一 向量的运算与性质

【例1】 设$\vec{a},\vec{b}$为两个非零向量，夹角为$\dfrac{\pi}{4}$，其中$\vec{b}$为单位向量，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|}{x}$.

【解】
$$\lim_{x\to0}\frac{\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2}{x\left(\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|+\left|\vec{a}\right|\right)}=\frac{1}{2\left|\vec{a}\right|}\lim_{x\to0}\frac{\left|\vec{a}+x\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2}{x}$$
$$=\frac{1}{2\left|\vec{a}\right|}\lim_{x\to0}\frac{2x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2\left|\vec{b}\right|^2}{x}=\frac{1}{2\left|\vec{a}\right|}\lim_{x\to0}\frac{2x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2}{x}$$
$$=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}=\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【例2】 设$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，且$\vec{a}+3\vec{b}\perp7\vec{a}-5\vec{b}$，$\vec{a}-4\vec{b}\perp7\vec{a}-2\vec{b}$，求向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角.

【解】 设向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ，由$\vec{a}+3\vec{b}\perp7\vec{a}-5\vec{b}$与$\vec{a}-4\vec{b}\perp7\vec{a}-2\vec{b}$，得

$$\begin{cases}(\vec{a}+3\vec{b})(7\vec{a}-5\vec{b})=0,\\(\vec{a}-4\vec{b})(7\vec{a}-2\vec{b})=0,\end{cases}\text{整理得}\begin{cases}7\left|\vec{a}\right|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\left|\vec{b}\right|^2=0,\\7\left|\vec{a}\right|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\left|\vec{b}\right|^2=0,\end{cases}\text{或}$$

$\begin{cases} 7\left|\vec{a}\right|^2+16\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta-15\left|\vec{b}\right|^2=0, \\ 7\left|\vec{a}\right|^2-30\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta+8\left|\vec{b}\right|^2=0, \end{cases}$ 解得 $\cos\theta=\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{2\left|\vec{a}\right|}$,代入上式得 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$,于是 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

题型二 平面方程

【例 1】 设有三点 $A(1,0,-1)$,$B(2,1,3)$,$C(3,-1,2)$.

(1) 判断三点是否共线;

(2) 若三点不共线,求过三点的平面方程.

【解】 (1) $\overrightarrow{AB}=\{1,1,4\}$,$\overrightarrow{AC}=\{2,-1,3\}$,因为两向量不成比例,所以三点不共线.

(2) 所求平面的法向量为 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{7,5,-3\}$,

所求平面为 $\pi:7(x-1)+5y-3(z+1)=0$,即 $\pi:7x+5y-3z-10=0$.

【例 2】 设 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$,$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$,求经过直线 L_1 且平行于 L_2 的平面方程.

【解】 $\vec{s_1}=\{1,0,-1\}$,$\vec{s_2}=\{2,1,1\}$,所求平面的法向量为 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\{1,-3,1\}$,

因为平面经过直线 L_1,所以 $M(1,2,3)$ 为所求平面上的一点,则所求平面为

$$\pi:(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0,\text{即 }\pi:x-3y+z+2=0.$$

【例 3】 求经过 $\pi_1:x+y+1=0$ 与 $\pi_2:x+2y+2z=0$ 的交线且与平面 $\pi_3:2x-y-z=0$ 垂直的平面方程.

【解】 **方法一** 过 π_1 与 π_2 的平面束为

$\pi':x+y+1+\lambda(x+2y+2z)=0$,即 $\pi':(\lambda+1)x+(2\lambda+1)y+2\lambda z+1=0$,

因为 $\pi'\perp\pi_3$,所以 $\{\lambda+1,2\lambda+1,2\lambda\}\cdot\{2,-1,-1\}=0$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,

故所求的平面为 $\pi':\dfrac{3}{2}x+2y+z+1=0$,或 $\pi':3x+4y+2z+2=0$.

方法二 设平面 π_1 与 π_2 的交线为 L,显然 $M_0(0,-1,1)\in L$.

直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=\{1,1,0\}\times\{1,2,2\}=\{2,-2,1\}$,

所求平面的法向量为 $\vec{n}=\{2,-2,1\}\times\{2,-1,-1\}=\{3,4,2\}$,

所求的平面为 $\pi':3(x-0)+4(y+1)+2(z-1)=0$,即 $\pi':3x+4y+2z+2=0$.

【例 4】 求经过 $P_1(5,-4,3)$,$P_2(-2,1,8)$ 及直线 $L:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-3}$ 与平面 $\pi:x-y+z=0$ 交点的平面方程.

【解】 L 的参数方程为 $L:\begin{cases} x=2+t, \\ y=1-t, \\ z=-3t. \end{cases}$ 代入平面 $\pi:x-y+z=0$ 得 $t=1$,故直线 L 与平面 π 的交点为 $P_3(3,0,-3)$.

$\overrightarrow{P_1P_2}=\{-7,5,5\}$，$\overrightarrow{P_1P_3}=\{-2,4,-6\}$，所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\{-50,-52,-18\},$$

所求的平面为 $\pi':50(x-3)+52(y-0)+18(z+3)=0$，

即 $\pi':25x+26y+9z-48=0$.

题型三　直线方程

【例 1】　求直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$ 在平面 $\pi:x-y+2z-5=0$ 上的投影直线.

【解】　直线 L 的一般式方程为 $L:\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1},\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z+1}{3},\end{cases}$ 即 $L:\begin{cases}x-2y-1=0,\\3x-2z-5=0.\end{cases}$

过 L 的平面束为 $\pi':(x-2y-1)+\lambda(3x-2z-5)=0$，即

$$\pi':(1+3\lambda)x-2y-2\lambda z-1-5\lambda=0.$$

由 $\{1+3\lambda,-2,-2\lambda\}\cdot\{1,-1,2\}=0$ 得 $\lambda=3$，则所求的投影直线为

$$L_0:\begin{cases}x-y+2z-5=0,\\5x-y-3z-8=0.\end{cases}$$

【例 2】　设空间点 $A(-1,0,4)$，平面 $\pi:3x-4y+z+10=0$，直线 $L:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$，求一条经过点 A 与 π 平行且与 L 相交的直线方程.

【解】　设过点 A 平行于平面 $\pi:3x-4y+z+10=0$ 的平面为 $\pi_1:3x-4y+z+D=0$. 将点 $A(-1,0,4)$ 代入 π_1 中得 $D=-1$，即 $\pi_1:3x-4y+z-1=0$.

令 $L:\begin{cases}x=-1+t,\\y=3+t,\\z=2t,\end{cases}$ 代入 π_1 得 $t=16$，则 L 与 π_1 的交点为 $B(15,19,32)$，$\overrightarrow{AB}=\{16,19,28\}$，故

所求的直线为 $L_1:\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$.

题型四　距离与夹角

【例 1】　求点 $M(1,-1,2)$ 到直线 $L:\begin{cases}x-y-z+1=0,\\2x-y+z-2=0\end{cases}$ 的距离.

【解】　显然 $M_0(1,1,1)\in L$，直线 L 的方向向量为

$$\vec{s}=\{1,-1,-1\}\times\{2,-1,1\}=\{-2,-3,1\},$$

直线 L 的方程为 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$.

设点 M 到直线 L 的距离为 d，由 $\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}\right|=\left|\vec{s}\right|\cdot d$ 得 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

【例 2】 求两异面直线 $L_1:\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 与 $L_2:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$ 之间的距离.

【解】 $\vec{s_1}=\{4,-3,1\}\parallel L_1$， $\vec{s_2}=\{-2,9,2\}\parallel L_2$，

$$M_1(9,-2,0)\in L_1,\quad M_2(0,-7,2)\in L_2,$$

$$\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\{-15,-10,30\},\quad \overrightarrow{M_1M_2}=\{-9,-5,2\}.$$

因为$(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=245\neq 0$,所以 L_1 与 L_2 异面.

过 M_2 作直线 $L_1'\parallel L_1$,则 L_1' 与 L_2 所形成的平面为

$\pi:-15(x-0)-10(y+7)+30(z-2)=0$,即 $\pi:3x+2y-6z+26=0$,

L_1 与 L_2 之间的距离即点 M_1 到平面 π 的距离,故所求的距离为

$$d=\frac{|3\times 9+2\times(-2)-6\times 0+26|}{\sqrt{9+4+36}}=7.$$

【例 3】 设 $L_1:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$,$L_2:\begin{cases}x-y-2=0,\\2y+z-4=0,\end{cases}$求直线 L_1 与 L_2 的夹角.

【解】 设直线 L_1 与 L_2 的夹角为 θ,

$$\vec{s_1}=\{-1,2,-1\},\quad \vec{s_2}=\{1,-1,0\}\times\{0,2,1\}=\{-1,-1,2\},$$

由 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\dfrac{1}{2}$ 得夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

题型五　旋转曲面

【例】 (1) 求直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面方程;

(2) 求曲面位于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的体积.

【解】 (1) 设 L 绕 z 轴旋转而成的曲面为 Σ,任取 $M(x,y,z)\in\Sigma$,M 所在的圆位于 L 上的点为 $M_0(x_0,y_0,z)$,圆心为 $T(0,0,z)$,由 $|MT|=|M_0T|$ 得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$.

因为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$,所以$\dfrac{x_0-1}{2}=\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{z}{1}$,解得 $x_0=1+2z$,$y_0=z$,于是所求的曲面为 $\Sigma:x^2+y^2=(1+2z)^2+z^2$ 或 $\Sigma:x^2+y^2=5z^2+4z+1$.

(2) 任取 $z\in[0,1]$,设 $M(x,y,z)\in\Sigma$ 为曲面上一点,则

$$A(z)=\pi r^2=\pi(x^2+y^2)=\pi(5z^2+4z+1).$$

于是 $V=\displaystyle\int_0^1 A(z)\mathrm{d}z=\pi\int_0^1(5z^2+4z+1)\mathrm{d}z=\frac{14\pi}{3}$.

第十一章　曲线积分与曲面积分

（数学二、三不要求）

考查要求

1. 理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.

2. 掌握计算两类曲线积分的方法.

3. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件，会求二元函数全微分的原函数.

4. 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系，掌握计算两类曲面积分的方法，掌握用高斯公式计算曲面积分的方法，并会用斯托克斯公式计算曲线积分.

5. 了解散度与旋度的概念，并会计算.

6. 会用曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量.

第一节　曲线积分

一、第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）

1. 问题的产生 —— 曲线段的质量

设 L 为 xOy 平面内有限的曲线段，其线密度为 $\rho(x,y)$，求其质量 m 的过程如下：

（1）将 L 分为 n 个小的曲线段，记为 $\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n$；

（2）任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$，则 $\Delta m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是 $m\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$；

（3）令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$，则 $m=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

2. 对弧长的曲线积分的定义

设 L 为 xOy 平面内有限的光滑或逐段光滑的曲线段，函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上有界，将 L 分为 n 个小的曲线段，记为 $\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n$，任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta s_i$，作 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$，若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$ 存在，称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线段 L 上对弧长的曲线积分，记为 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，即 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.

【注解】

（1）对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 与 L 的划分及点的取法无关.

（2）若 $f(x,y)$ 在 L 上连续，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 一定存在.

3. 对弧长的曲线积分的基本性质

(1) $\int_L [af(x,y)+bg(x,y)]\mathrm{d}s = a\int_L f(x,y)\mathrm{d}s + b\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$.

(2) $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$,其中 $L = L_1 + L_2$.

(3) $\int_L \mathrm{d}s = l$,其中 l 为曲线 L 的长度.

(4) 若曲线 L 关于 y 轴(即关于变量 x)对称,L_1 为位于 y 轴右侧的部分,

若 $f(-x,y) = -f(x,y)$,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 0$;

若 $f(-x,y) = f(x,y)$,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$.

(5) 若曲线 L 关于 x 轴(即关于变量 y)对称,L_1 为位于 x 轴上侧的部分,

若 $f(x,-y) = -f(x,y)$,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 0$;

若 $f(x,-y) = f(x,y)$,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s$.

(6) 若 L 关于直线 $y = x$ 对称,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_L f(y,x)\mathrm{d}s$.

4. 对弧长的曲线积分的计算方法

(1) 特殊代替法

【例 1】 计算 $\int_L (x^2 - 2xy + 3y^2)\mathrm{d}s$,其中 $L: x^2 + y^2 = 1$.

【解】 由对称性与奇偶性得 $I = \int_L (x^2 - 2xy + 3y^2)\mathrm{d}s = \int_L (x^2 + 3y^2)\mathrm{d}s$.

因为 L 关于直线 $y = x$ 对称,所以 $I = \int_L (y^2 + 3x^2)\mathrm{d}s$.

于是 $2I = \int_L (x^2+3y^2)\mathrm{d}s + \int_L (y^2+3x^2)\mathrm{d}s = 4\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = 4\int_L \mathrm{d}s = 8\pi$,

故 $I = \int_L (x^2 - 2xy + 3y^2)\mathrm{d}s = 4\pi$.

(2) 定积分法

情形一 设 $L: y=\varphi(x)(a \leqslant x \leqslant b)$,则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f[x,\varphi(x)]\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

情形二 设 $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

【例 2】 计算 $\int_L x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$,其中 L 为第一象限中由 x 轴,$y = x$ 及 $x^2 + y^2 = 4$ 围成的曲线段.

【解】 令 $L_1: y=0(0 \leqslant x \leqslant 2)$,$L_2: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases} \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$,$L_3: y=x(0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2})$,

则 $L = L_1 + L_2 + L_3$,

由 $\int_{L_1} x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \int_0^2 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x \Big|_0^2 = \mathrm{e}^2 + 1$,

$\int_{L_2} x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s = \mathrm{e}^2\int_{L_2} x\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos t \cdot 2\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^2$,

$$\int_{L_3} x\,e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=\int_{L_3} x\,e^{\sqrt{2}x}\,ds=\int_0^{\sqrt{2}} x\,e^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 x\,e^x\,dx=\frac{e^2+1}{\sqrt{2}},\text{得}$$

$$I=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(e^2+1)+2\sqrt{2}\,e^2.$$

【注解】

计算第一类曲线积分一般按如下步骤进行：

(1) 检查是否可将边界曲线方程代入被积函数；

(2) 检查是否可以使用奇偶性；

(3) 写出曲线方程的适当形式(直角坐标或参数方程)，转化为定积分.

二、对坐标的曲线积分(或第二类曲线积分)

1. 对坐标的曲线积分问题的产生 —— 做功的问题

(1) 在大小和方向都不变的力 $\overrightarrow{F}$ 的作用下物体沿水平方向从点 A 移动到点 B，力对物体做功为 $W=|\overrightarrow{F}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{AB}$，其中 θ 为 $\overrightarrow{F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角.

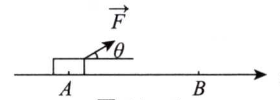


图 11－1

(2) 二维空间物体在变力作用下沿有向曲线段做功

设 $\overrightarrow{F}(x,y)=\{P(x,y),Q(x,y)\}$，$L$ 为 xOy 平面内的有向曲线段，物体在 $\overrightarrow{F}(x,y)$ 的作用下沿 L 从起点 A 到达终点 B，元素法求力所做的功的方法如下：

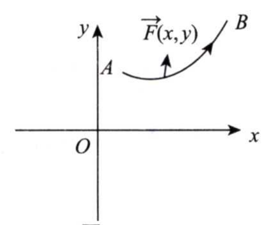


图 11－2

取 $d\vec{s}\subset L$，其中 $d\vec{s}=\{dx,dy\}$，则 $dW=\overrightarrow{F}(x,y)\cdot d\vec{s}=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，于是 $W=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

(3) 三维空间物体在变力作用下沿有向曲线段做功

设 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，$L$ 为三维空间的有向曲线段，物体在 $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ 的作用下沿 L 从起点 A 到达终点 B，元素法求力所做的功的方法如下：

取 $d\vec{s}\subset L$，其中 $d\vec{s}=\{dx,dy,dz\}$，则

$$dW=\overrightarrow{F}(x,y,z)\cdot d\vec{s}=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz,$$

于是 $W=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$.

2. 对坐标的曲线积分的定义(了解)

(1)(二维空间) L 为 xOy 平面上的有向曲线段，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上有界，若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 存在，称此极限为函数 $P(x,y)$ 沿有向曲线段 L 对坐标 x 的曲线积分，记为 $\int_L P(x,y)dx$，即 $\int_L P(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$；

若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 存在，称此极限为函数 $Q(x,y)$ 沿有向曲线段 L 对坐标 y 的曲线积分，记为 $\int_L Q(x,y)dy$，即 $\int_L Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$，$\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy=$

$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

(2)(三维空间)L 为三维空间的有向曲线段,函数 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 在 L 上有界,若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$ 存在,称此极限为函数 $P(x,y,z)$ 沿有向曲线段 L 对坐标 x 的曲线积分,记为 $\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x$,即 $\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$;

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i$ 存在,称此极限为函数 $Q(x,y,z)$ 沿有向曲线段 L 对坐标 y 的曲线积分,记为 $\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y$,即 $\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i$;

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$ 存在,称此极限为函数 $R(x,y,z)$ 沿有向曲线段 L 对坐标 z 的曲线积分,记为 $\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z$,即 $\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i$.

$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y + \int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$.

3. 对坐标的曲线积分的性质(以二维空间为例)

(1) $\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$.

(2) $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y + \int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$,其中 $L = L_1 + L_2$.

4. 二维空间对坐标的曲线积分的计算方法

(1) 定积分法

情形一:设 $L: y=\varphi(x)$,其中起点对应 $x=a$,终点对应 $x=b$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \{P[x,\varphi(x)] + Q[x,\varphi(x)]\varphi'(x)\}\mathrm{d}x.$$

情形二:设 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ 其中起点对应 $t=\alpha$,终点对应 $t=\beta$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t.$$

【例 1】 求:$\int_L (y+1)\mathrm{d}x + (2x-1)\mathrm{d}y$,其中

(1) L 是从点 $O(0,0)$ 经 $y=x$ 到点 $A(1,1)$;

(2) L 是从点 $O(0,0)$ 经 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$.

【解】 (1) $\int_L (y+1)\mathrm{d}x + (2x-1)\mathrm{d}y = \int_0^1 [(x+1)+(2x-1)]\mathrm{d}x = \int_0^1 3x\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}$.

(2)
$$\begin{aligned}\int_L (y+1)\mathrm{d}x + (2x-1)\mathrm{d}y &= \int_0^1 [(x^2+1)+(2x-1)\cdot 2x]\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (5x^2-2x+1)\mathrm{d}x = \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

【例 2】 求 $\int_L (2y+1)\mathrm{d}x + (2x-3)\mathrm{d}y$,其中

(1)L 是从点 $O(0,0)$ 经 $y=x$ 到点 $A(1,1)$；

(2)L 是从点 $O(0,0)$ 经 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$.

【解】 (1)$\int_L (2y+1)\mathrm{d}x+(2x-3)\mathrm{d}y=\int_0^1[(2x+1)+(2x-3)]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 (4x-2)\mathrm{d}x=0;$$

(2)$\int_L (2y+1)\mathrm{d}x+(2x-3)\mathrm{d}y=\int_0^1[(2x^2+1)+(2x-3)\cdot 2x]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 (6x^2-6x+1)\mathrm{d}x=0.$$

(2) 二重积分法(格林公式)

定理 设 D 为 xOy 平面上连通的有限闭区域，L 为闭区域 D 的正向边界，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上连续可偏导，则

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

【注解】

(1) 若 L 为 D 的负向边界，则 $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

(2) 若曲线 L 不封闭，可以补充曲线段再使用格林公式.

(3) 若区域 D 内有 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 不连续可偏导的点，一般挖小区域，再使用格林公式.

(3) 曲线积分与路径无关的条件

定理 设 D 为单连通区域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在区域 D 内连续可偏导，则下列四个命题等价：

① 曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

② 对区域 D 内任意闭曲线 C，有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$.

③ 区域 D 内恒有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$(柯西－黎曼条件).

④ 在区域 D 内存在二元函数 $u(x,y)$，使得 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$.

【注解】

(1) 若 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，则曲线积分可表示为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\mathrm{d}y.$$

如：$\int_L y\mathrm{d}x+(x+2)\mathrm{d}y$，其中 L 为从点 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=x^3$ 到点 $A(1,1)$ 的有向曲线段，

$P(x,y)=y,Q(x,y)=x+2$,因为$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}=1$,所以$\int_L y\mathrm{d}x+(x+2)\mathrm{d}y$与路径无关,于是

$$\int_L y\mathrm{d}x+(x+2)\mathrm{d}y=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^1(1+2)\mathrm{d}y=3.$$

(2) 若$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$,且存在$u(x,y)$,使得$\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0).$$

如:$\int_L xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$,其中$L$是从点$(1,2)$沿$y=x^2+1$到点$(2,5)$的有向曲线段,

因为$xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)$,

所以$\int_L xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(1,2)}^{(2,5)}=48$.

(3) 若$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$,则

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

(4) 对微分方程$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$,若$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$,称该方程为全微分方程.

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$,所以令$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,
有$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}u(x,y)$,故原方程的通解为$u(x,y)=C$.

如:求解$(xy^2+y)\mathrm{d}x+(x^2y+x-2y)\mathrm{d}y=0$.

$$P(x,y)=xy^2+y,\quad Q(x,y)=x^2y+x-2y,$$

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}=2xy+1$,所以该方程为全微分方程,

由$(xy^2+y)\mathrm{d}x+(x^2y+x-2y)\mathrm{d}y=0$得

$(xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-2y\mathrm{d}y=0$,或$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2+xy-y^2\right)=0$,

故原方程的通解为$\frac{1}{2}x^2y^2+xy-y^2=C$.

【例 3】 设曲线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$与路径无关,其中$\varphi$连续可导,且$\varphi(0)=0$,计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$.

【解】 令$P(x,y)=xy^2,Q(x,y)=y\varphi(x)$,因为曲线积分与路径无关,所以$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,即$y\varphi'(x)=2xy$,于是$\varphi'(x)=2x$,解得$\varphi(x)=x^2+C$,由$\varphi(0)=0$得$C=0$,故$\varphi(x)=x^2$.

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}.$$

(4) 两类曲线积分之间的关系

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为曲线 L 上点 (x,y) 处的切向量的方向余弦.

5. 三维空间对坐标的曲线积分的计算

(1) 定积分法

设 $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$（起点 $t=\alpha$，终点 $t=\beta$），则

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t) + R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t.$$

(2) 斯托克斯公式

定理(Stokes 公式)　如图 11-3，设 Σ 是有侧有限的光滑曲面，L 为其边界，Σ 的侧与 L 的方向按右手准则确定，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在有侧曲面 Σ 上连续可偏导，则有

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

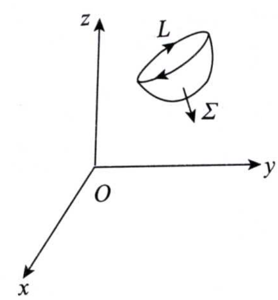


图 11-3

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 Σ 上一点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

第二节　曲面积分

一、对面积的曲面积分(第一类曲面积分)

1. 设 Σ 为空间有限光滑或逐片光滑的曲面，其面密度为 $\rho(x,y,z)$，求曲面的 Σ 的质量 m

(1) 经典积分思想

第一步，将 Σ 划分为 n 个小曲面 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$；

第二步，任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $m\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$；

第三步，设 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$，其中 d_i 为 Δs_i 的直径 $(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$m=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

(2) 元素法思想

第一步，取 $\mathrm{d}S\subset\Sigma$；

第二步，$\mathrm{d}m=\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$；

第三步，$m=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$.

2. 对面积的曲面积分的定义

设 Σ 为空间有限曲面，函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上有界，将 Σ 划分为 n 个小曲面 ΔS_1，ΔS_2，$\cdots$，ΔS_n，任取 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i(1\leqslant i\leqslant n)$，作 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$，其中 d_i 为 ΔS_i 的直径，若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 存在，称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，即

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

3. 对面积的曲面积分的基本性质

(1) $\iint\limits_{\Sigma}[af(x,y,z)+bg(x,y,z)]\mathrm{d}S=a\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S+b\iint\limits_{\Sigma}g(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(2) $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$.

(3) $\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=A$，其中 A 为曲面 Σ 的面积.

(4) 设 Σ 关于 xOy 平面(或变量 z) 对称，Σ_1 为 Σ 位于 xOy 平面上方的部分，

若 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$；

若 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

设 Σ 关于 yOz 平面(或变量 x) 对称，Σ_1 为 Σ 位于 yOz 平面前侧的部分，

若 $f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$；

若 $f(-x,y,z)=f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

设 Σ 关于 xOz 平面(或变量 y) 对称，Σ_1 为 Σ 位于 xOz 平面右侧的部分，

若 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$；

若 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=2\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

4. 对面积的曲面积分的计算方法

(1) 特殊代替法

【例 1】 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+\frac{4y}{3}+z\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分.

【解】 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+\frac{4y}{3}+z\right)\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=4A$，

令 $A(2,0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(0,0,4)$，$\overrightarrow{AB}=\{-2,3,0\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-2,0,4\}$，

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{12,8,6\}$，则 $A=\frac{1}{2}\mid\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\mid=\sqrt{61}$，

故 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+\frac{4y}{3}+z)\mathrm{d}S=4\sqrt{61}$.

(2) 二重积分法

设 $\Sigma: z=\varphi(x,y)$，其中 $(x,y)\in D$，则 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}f[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【例 2】 求 $I=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$，其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 被 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截的顶部.

【解】 由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$.

于是 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D$，其中 $D: x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}$，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma,$$

于是 $I=\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{2}$.

二、对坐标的曲面积分

1. 对坐标的曲面积分问题的产生 —— 流量

设 Σ 为有侧曲面，流体的流速为 $\vec{v}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，单位时间内流过指定侧的曲面的流量 Φ 的元素法计算思路如下：

(1) 任取 $\mathrm{d}\vec{S}=\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}\subset\Sigma$；

(2) $\mathrm{d}\Phi=\vec{v}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(3) $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}\Phi=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 对坐标的曲面积分的定义（了解）

设 Σ 为有限的有侧曲面，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上有界，

若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$ 存在，称此极限为函数 $P(x,y,z)$ 在有侧曲面 Σ 上对坐标 y,z 的曲面积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，即 $\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$；

若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz}$ 存在，称此极限为函数 $Q(x,y,z)$ 在有侧曲面 Σ 上对坐标 x,z 的曲面积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，即 $\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz}$；

若 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$ 存在，称此极限为函数 $R(x,y,z)$ 在有侧曲面 Σ 上对坐标 x,y 的曲面积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$，

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 对坐标的曲面积分的性质

(1) $\iint_{\Sigma^-} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(2) $\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$.

(3) 设 Σ 关于 xOy 平面(或变量 z)对称，Σ_1 为 Σ 位于 xOy 平面上方的部分，

若 $R(x,y,-z)=-R(x,y,z)$，则 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

若 $R(x,y,-z)=R(x,y,z)$，则 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

设 Σ 关于 yOz 平面(或变量 x)对称，Σ_1 为 Σ 位于 yOz 平面前侧的部分，

若 $P(-x,y,z)=-P(x,y,z)$，则 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint_{\Sigma_1} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

若 $P(-x,y,z)=P(x,y,z)$，则 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

设 Σ 关于 xOz 平面(或变量 y)对称，Σ_1 为 Σ 位于 xOz 平面右侧的部分，

若 $Q(x,-y,z)=-Q(x,y,z)$，则 $\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint_{\Sigma_1} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$；

若 $Q(x,-y,z)=Q(x,y,z)$，则 $\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$.

4. 对坐标的曲面积分的计算方法

(1) 二重积分法

情形一 对 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的计算

① 设 $\Sigma: z=\varphi(x,y)$，其中 $(x,y)\in D_{xy}$；

② 则 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,\varphi(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，若 Σ 上一点的法向量与 z 轴夹角为锐角，则二重积分前带“+”，若 Σ 上一点的法向量与 z 轴的夹角为钝角，则二重积分前带“−”.

情形二 对 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的计算

① 设 $\Sigma: x=\varphi(y,z)$，其中 $(y,z)\in D_{yz}$；

② 则 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}} P[\varphi(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，若 Σ 上一点的法向量与 x 轴夹角为锐角，则二重积分前带“+”，若 Σ 上一点的法向量与 x 轴的夹角为钝角，则二重积分前带“−”.

情形三 对 $\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 的计算

① 设 $\Sigma: y=\varphi(x,z)$，其中 $(x,z)\in D_{xz}$；

② 则 $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_{D_{xz}} Q[x,\varphi(x,z),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，若 Σ 上一点的法向量与 y 轴夹角为锐角，则二重积分前带"+"，若 Σ 上一点的法向量与 y 轴夹角为钝角，则二重积分前带"−".

(2) 高斯公式

定理(高斯公式) 设 Ω 为几何体，Σ 为 Ω 的外侧曲面，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上一阶连续可偏导，则 $\oiint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$.

【例 1】 计算 $\oiint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=0$ 围成区域表面外侧.

【解】 如图 11-4，由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{5}a^5.$$

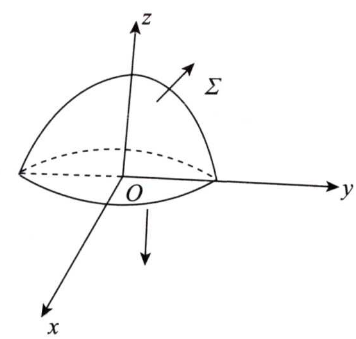


图 11-4

【例 2】 计算 $\oiint\limits_{S}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中 S：$x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧.

【解】 由两类曲面积分之间的关系得

$$\oiint\limits_{S}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S=\oiint\limits_{S}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r=\frac{12\pi R^5}{5}.$$

【例 3】 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 $\Sigma: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧 $(a>0)$.

【解】 $$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a}I_1,$$

如图 11-5，补充 $\Sigma_0: z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$，取下侧，

$$I_1=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}(2z+3a)\mathrm{d}v$$

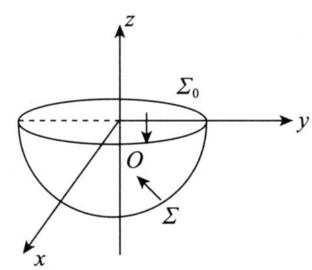


图 11-5

$$=-2\iiint\limits_{\Omega} z\,dv-3a\iiint\limits_{\Omega} dv$$

$$=-2\int_{-a}^{0} z\,dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2-z^2} dx\,dy-3a\cdot\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$=-2\pi\int_{-a}^{0} z(a^2-z^2)\,dz-2\pi a^4$$

$$=-\frac{3\pi a^4}{2},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0} ax\,dy\,dz+(z+a)^2\,dx\,dy=\iint\limits_{\Sigma_0}(z+a)^2\,dx\,dy=-\iint\limits_{D_{xy}} a^2\,dx\,dy=-\pi a^4.$$

于是原式 $=\frac{1}{a}\left(-\frac{3\pi a^4}{2}+\pi a^4\right)=-\frac{\pi a^3}{2}.$

(3) 两类曲面积分之间的关系

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS.$$

【例 4】 设 $f(x,y,z)$ 是连续函数，Σ 是平面 $x-y+z-1=0$ 在第四卦限部分的上侧，计算 $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dy\,dz+[2f(x,y,z)+y]dz\,dx+[f(x,y,z)+z]dx\,dy$.

【解】 曲面 Σ 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$，方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$，由两类曲面积分之间的关系得

$$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dy\,dz+[2f(x,y,z)+y]dz\,dx+[f(x,y,z)+z]dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]\cos\alpha+[2f(x,y,z)+y]\cos\beta+[f(x,y,z)+z]\cos\gamma\}dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\,dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.$$

第三节　场论初步

一、梯度、旋度、散度

1. 梯度

设 $u=f(x,y,z)$ 可偏导，则 $\mathbf{grad}u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$.

2. 旋度

设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则 $\mathbf{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$.

3. 散度

设向量场 $\vec{a}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$，则 $\operatorname{div}\vec{a}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

二、通量与环流量

1. 通量

设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，其中 P,Q,R 连续可偏导，Σ 为有侧曲面，称 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 指向指定侧的流过有侧曲面 Σ 的通量(或流量)，其中 $\vec{n}$ 为曲面 Σ 的单位法向量.

2. 环流量

设 $\vec{a}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$ 为向量场，P,Q,R 连续可偏导，L 为有向闭曲线，称 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\oint_L\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$ 为向量场 $\vec{a}(x,y,z)$ 沿有向闭曲线 L 的环流量.

重点题型讲解

题型一　对弧长的曲线积分

【例 1】 设 $L:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，且 L 的长度为 a，则 $\oint_L(2x-3y)^2\mathrm{d}s=$ ________.

【解】 由对称性得

$$\oint_L(2x-3y)^2\mathrm{d}s=\oint_L(4x^2-12xy+9y^2)\mathrm{d}s=\oint_L(4x^2+9y^2)\mathrm{d}s$$

$$=36\oint_L\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}s=36\oint_L\mathrm{d}s=36a.$$

【例 2】 设 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\x+y+z=1,\end{cases}$ 求 $\oint_L(x^2+y)\mathrm{d}s$.

【解】 由对称性得 $\oint_L(x^2+y)\mathrm{d}s=\oint_L(y^2+z)\mathrm{d}s=\oint_L(z^2+x)\mathrm{d}s$,

于是 $\oint_L(x^2+y)\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2+x+y+z)\mathrm{d}s$

$$=\frac{5}{3}\oint_L\mathrm{d}s=\frac{5}{3}\cdot2\pi\cdot\sqrt{4-\frac{1}{3}}=\frac{10\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}\pi.$$

【例 3】 计算 $\int_L(3x-4y)\mathrm{d}s$，其中 $L:x^2+(y+2)^2=1$.

【解】 令 $L:\begin{cases}x=\cos t,\\y=-2+\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant2\pi)$，$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=\mathrm{d}t$，则

$$\int_L(3x-4y)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}[3\cos t-4(-2+\sin t)]\mathrm{d}t=16\pi.$$

题型二 二维空间对坐标的曲线积分

【例 1】 $\int_L (x^2+y^2)dx - x dy$,其中 L 为 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 从点 $A(-a,0)$ 经 $B(0,a)$ 到 $C(a,0)$ 的弧段.

【解】 **方法一** 令 $L:\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=a\sin t\end{cases}$(起点 $t=\pi$,终点 $t=0$),则

$$\int_L (x^2+y^2)dx - x dy=\int_\pi^0 [a^2\cdot(-a\sin t)-a\cos t\cdot a\cos t]dt$$

$$=\int_0^\pi (a^3\sin t+a^2\cos^2 t)dt$$

$$=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt+2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=2a^3+\frac{\pi}{2}a^2.$$

方法二 令 $L_0:y=0$(起点 $x=a$,终点 $x=-a$),则

$$\int_L (x^2+y^2)dx - x dy=\oint_{L+L_0}(x^2+y^2)dx - x dy-\int_{L_0}(x^2+y^2)dx - x dy,$$

而$\oint_{L+L_0}(x^2+y^2)dx - x dy=-\iint\limits_D(-1-2y)dx dy=\iint\limits_D(1+2y)dx dy$

$$=\frac{\pi}{2}a^2+2\int_0^\pi d\theta\int_0^a r^2\sin\theta dr=\frac{\pi}{2}a^2+\frac{4}{3}a^3,$$

$$\int_{L_0}(x^2+y^2)dx - x dy=\int_{L_0}(x^2+y^2)dx=\int_a^{-a}x^2 dx=-\frac{2}{3}a^3,$$

于是$\int_L (x^2+y^2)dx - x dy=2a^3+\frac{\pi}{2}a^2.$

【例 2】 在从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$ 的曲线 $y=a\sin x(a>0)$ 中求一条曲线 L,使得 $\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 最小.

【解】 $I=\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$

$$=\oint_{L+\overline{AO}}(1+y^3)dx+(2x+y)dy-\int_{\overline{AO}}(1+y^3)dx+(2x+y)dy,$$

$$\oint_{L+\overline{AO}}(1+y^3)dx+(2x+y)dy=-\iint\limits_D(2-3y^2)d\sigma=\int_0^\pi dx\int_0^{a\sin x}(3y^2-2)dy$$

$$=\int_0^\pi(a^3\sin^3 x-2a\sin x)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3\sin^3 x-2a\sin x)dx=\frac{4}{3}a^3-4a;$$

$$\int_{\overline{AO}}(1+y^3)dx+(2x+y)dy=\int_\pi^0 dx=-\pi,$$

则 $I(a)=\frac{4}{3}a^3-4a+\pi.$

令 $I'(a)=4a^2-4=0$ 得 $a=1$,因为 $I''(1)=8>0$,所以当 $a=1$ 时曲线积分取最小值.

【例 3】 计算 $I=\int_L[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy(a>0,b>0)$,$L$ 是从

点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 至原点 $O(0,0)$ 的有向曲线段.

【解】 方法一 $I=\int_L[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$

$$=\int_L e^x\sin y dx+e^x\cos y dy-\int_L b(x+y)dx+ax dy,$$

而 $\int_L e^x\sin y dx+e^x\cos y dy=\int_L d(e^x\sin y)=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0$,

令 $L:\begin{cases}x-a=a\cos t,\\ y=a\sin t\end{cases}$(起点 $t=0$,终点 $t=\pi$),

则 $\int_L b(x+y)dx+ax dy=\int_0^{\pi}[b(a+a\cos t+a\sin t)\cdot(-a\sin t)+a(a+a\cos t)\cdot a\cos t]dt$

$$=\int_0^{\pi}[-a^2b(\sin t+\sin t\cos t+\sin^2t)+a^3(\cos t+\cos^2t)]dt$$

$$=\int_0^{\pi}[-a^2b(\sin t+\sin^2t)+a^3\cos^2t]dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-a^2b(\sin t+\sin^2t)+a^3\cos^2t]dt$$

$$=2\left(-a^2b-\frac{\pi}{4}a^2b+\frac{\pi}{4}a^3\right)=\frac{\pi}{2}a^2(a-b)-2a^2b,$$

所以原式 $=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b$.

方法二 令 $L_0:y=0$(起点 $x=0$,终点 $x=2a$),L_0 与 L 围成的区域为 D,则

$$I=\oint_{L+L_0}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy-$$

$$\int_{L_0}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy,$$

令 $P=e^x\sin y-b(x+y)$,$Q=e^x\cos y-ax$,

$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-a$,$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-b$,由格林公式得

$$\oint_{L+L_0}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=(b-a)\iint_D dxdy=\frac{\pi}{2}a^2(b-a);$$

$$\int_{L_0}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy=\int_{L_0}-bx dx=-b\int_0^{2a}x dx=-2a^2b,$$

故原式 $=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b$.

【例 4】 设 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上连续可偏导,$\int_L 2xy dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关,对任意的 t 有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy dx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy dx+Q(x,y)dy$,求 $Q(x,y)$.

【解】 因为曲线积分 $\int_L 2xy dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关,所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$,

解得 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$.

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy dx+Q(x,y)dy=\int_0^t 0dx+\int_0^1[t^2+\varphi(y)]dy=t^2+\int_0^1\varphi(y)dy,$$

$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 0\mathrm{d}x + \int_0^t [1+\varphi(y)]\mathrm{d}y = t + \int_0^t \varphi(y)\mathrm{d}y$,

由 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$,

得 $t^2 + \int_0^1 \varphi(y)\mathrm{d}y = t + \int_0^t \varphi(y)\mathrm{d}y$,两边对 t 求导,得 $2t = 1 + \varphi(t)$,即 $\varphi(t) = 2t - 1$,

故 $Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$.

【例 5】 设 $f(x)$ 连续可导,计算 $\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]\mathrm{d}y$,其中 L 是从点 $A\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段.

【解】 $P = \frac{1+y^2 f(xy)}{y}$,$Q = \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]$,因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = f(xy) + xyf'(xy) - \frac{1}{y^2}$,所以曲线积分与路径无关,取路径 $xy = 2$,则有

$$\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]\mathrm{d}y = \int_3^1 \left[\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}f(2)\right) + \left(-\frac{2}{x}f(2) + \frac{x}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = -4.$$

【例 6】 计算曲线积分 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + 4y^2}$,其中 L 为不经过原点的逆时针光滑闭曲线.

【解】 设 $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+4y^2}$,　$Q(x,y) = \frac{x}{x^2+4y^2}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y^2 - x^2}{(x^2+4y^2)^2} \quad ((x,y) \neq (0,0)).$$

(1) 若 $O(0,0) \notin D$,如图 11-6,由格林公式得

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0;$$

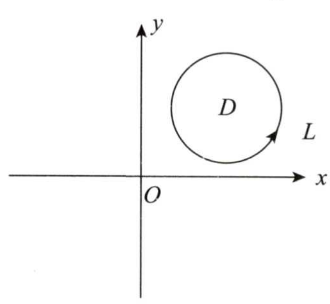


图 11-6

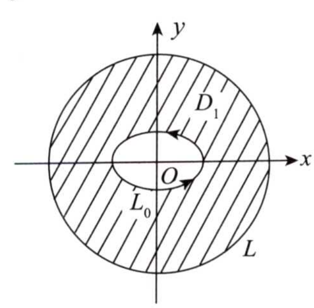


图 11-7

(2) 若 $O(0,0) \in D$,如图 11-7,作 $L_0: x^2 + 4y^2 = r^2$($r > 0$,L_0 在 L 内且取逆时针),设 L_0 与 L 围成的区域为 D_1,L_0 围成的区域为 D_2,则

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \oint_{L+L_0^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} + \oint_{L_0} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2},$$

由格林公式得 $\oint_{L+L_0^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$,

于是 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\oint_{L_0}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{L_0}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{r^2}\iint_{D_2}\mathrm{d}\sigma=\frac{2}{r^2}\cdot\pi\cdot r\cdot\frac{r}{2}=\pi.$$

【例 7】 求 $\int_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$，其中 L 为 $x^2+y^2=1$ 从 $A(1,0)$ 经 $B(0,1)$ 到 $C(-1,0)$ 的曲线段.

【解】 $P=\frac{y}{x^2+4y^2}$，$Q=\frac{-x}{x^2+4y^2}$，因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$，且 P,Q 在除原点的区域上连续可偏导，所以在除原点的单连通区域上曲线积分与路径无关，取 $L_1:x^2+4y^2=1$ 的上半椭圆且方向为逆时针，则有 $\int_{L+L_1^-}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=0$，即 $\int_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$.

而 $\int_{L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{L_1}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=-2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}$，所以 $\int_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=-\frac{\pi}{2}$.

【例 8】 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+\varphi(y)}\equiv A$（其中 A 为常数），$\varphi(1)=1$，L 是绕原点 $O(0,0)$ 一周的任意正向闭曲线，求 $\varphi(y)$ 及常数 A.

【解】 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+\varphi(y)}$，　$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+\varphi(y)}$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\varphi(y)-x^2}{[x^2+\varphi(y)]^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-x^2-\varphi(y)+y\varphi'(y)}{[x^2+\varphi(y)]^2}.$$

设 Γ 为任意不绕原点的正向闭曲线，如图 11－8，在 Γ 上任取两点 A,B 将 Γ 分为 L_1,L_2，过 A,B 作曲线 L_3，使得 $L_1^-+L_3$ 与 L_2+L_3 都是绕原点的闭曲线，由已知条件得

$$\oint_{L_1^-+L_3}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+\varphi(y)}=A,\quad \oint_{L_2+L_3}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+\varphi(y)}=A,$$

两式相减得 $\oint_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+\varphi(y)}=0$，由曲线积分与路径无关的条件得 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}(\forall x^2+y^2\neq 0)$，即

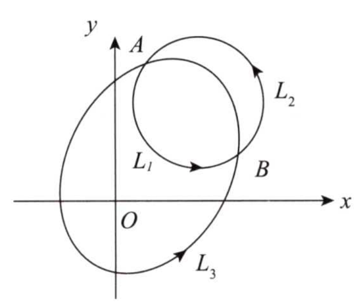


图 11－8

$-x^2-\varphi(y)+y\varphi'(y)=\varphi(y)-x^2$，整理得

$y\varphi'(y)-2\varphi(y)=0$，解得 $\varphi(y)=C\mathrm{e}^{-\int-\frac{2}{y}\mathrm{d}y}=Cy^2$，

由 $\varphi(1)=1$ 得 $C=1$，于是 $\varphi(y)=y^2$.

设 L 为任意一条绕原点的正向闭曲线，取 $L_0:x^2+y^2=r^2(r>0$，L_0 在 L 内，L_0 取逆时针方向)，令 L_0 与 L 围成的区域为 D_1，L_0 围成的区域为 D_2，

由格林公式得 $\oint_{L+L_0^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

于是 $A=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{L_0}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{L_0}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{r^2}\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\cdot\pi r^2=2\pi.$$

题型三 三维空间对坐标的曲线积分

【例 1】 求$\oint_{\Gamma} y\,dx+z\,dy+x\,dz$，其中$\Gamma$为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x+y+z=0,\end{cases}$从$y$轴正向看$\Gamma$是逆时针.

【解】 $\oint_{\Gamma} y\,dx+z\,dy+x\,dz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}dS$

$$=-\iint_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)dS,$$

因为$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以原式$=-\sqrt{3}\iint_{\Sigma}dS=-\sqrt{3}\pi a^2$.

【例 2】 求$\oint_{\Gamma} y^2dx+z^2dy+x^2dz$，其中$\Gamma$为$x^2+y^2+z^2=1$与$x^2+y^2=x(z\geqslant 0)$的交线，从$x$轴正向看$\Gamma$是逆时针.

【解】 设上半球$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$被柱面$x^2+y^2=x$所截曲面为Σ，则Γ为Σ的边界，由 Stokes 公式得$\oint_{\Gamma} y^2dx+z^2dy+x^2dz=-2\iint_{\Sigma}(z\cos\alpha+x\cos\beta+y\cos\gamma)dS$，

因为$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，

所以原式$=-2\iint_{\Sigma}\dfrac{xz+xy+yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=-2\iint_{\Sigma}(xz+xy+yz)dS$.

因为$\iint_{\Sigma}xy\,dS=\iint_{\Sigma}yz\,dS=0$，

$$\iint_{\Sigma}xz\,dS=\iint_{x^2+y^2\leqslant x}x\sqrt{1-x^2-y^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dx\,dy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\cos\theta}r^2dr=\frac{\pi}{8},$$

所以原式$=-\dfrac{\pi}{4}$.

【例 3】 计算$\oint_{L}(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$，其中$L:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x-y+z=2,\end{cases}$从$z$轴正向看，$L$取逆时针方向.

【解】 方法一：积分法

令$L:\begin{cases}x=\cos t,\\y=\sin t,\\z=2-\cos t+\sin t\end{cases}$ （起点$t=0$，终点$t=2\pi$），则

$$\oint_{L}(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$$

$$=\int_0^{2\pi}[-2(\sin t+\cos t)+4\cos^2 t-1]dt=\int_0^{2\pi}(4\cos^2 t-1)dt$$

$=4\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t-2\pi=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t-2\pi=2\pi.$

方法二:斯托克斯公式

取 L 的截口面为 Σ,取上侧,

Σ 的法向量为 $\vec{n}=\{1,-1,1\}$,方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

由斯托克斯公式得

$$\oint_L(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_D\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi.$$

【例 4】 计算 $I=\oint_L 2y\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y-yz^2\,\mathrm{d}z$,其中 $L:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=4,\end{cases}$ 从 z 轴正向看,L 取逆时针方向.

【解】 方法一:定积分法

L 的参数方程为 $L:\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t,\\ z=4\end{cases}$(起点 $t=0$,终点 $t=2\pi$),则

$I=\oint_L 2y\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y-yz^2\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}4\sin t\cdot(-2\sin t)\mathrm{d}t+8\cos t\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t$

$=\int_0^{2\pi}(-8\sin^2 t+16\cos^2 t)\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-8\sin^2 t+16\cos^2 t)\mathrm{d}t$

$=-32I_2+64I_2=32I_2=8\pi.$

方法二:斯托克斯公式

取截口面 $\Sigma:z=4(x^2+y^2\leqslant 4)$,取上侧,

Σ 的法向量为 $\vec{n}=\{0,0,1\}$,方向余弦为 $\cos\alpha=0,\cos\beta=0,\cos\gamma=1$,

于是 $I=\oint_L 2y\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y-yz^2\,\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2y & xz & -yz^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$

$$=\iint_{\Sigma}(z-2)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}(4-2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=8\pi.$$

题型四　对坐标的曲线积分的应用

【例 1】 位于(0,1)的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\dfrac{k}{r^2}(k>0,r=|AM|)$,质点 M 沿 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $B(2,0)$ 运动到(0,0),求质点 A 对质点 M 所做的功.

【解】　在弧 BO 上任取一点 $M(x,y)$，则 $r=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$.

$\overrightarrow{MA}=\{-x,1-y\}$，　$\vec{F}^0=\overrightarrow{MA}^0=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\{-x,1-y\}$.

因为 $|\vec{F}|=\dfrac{k}{r^2}=\dfrac{k}{x^2+(y-1)^2}$，所以质点 A 对质点 M 的引力为

$\vec{F}=|\vec{F}|\cdot\vec{F}^0=\dfrac{k}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\{-x,1-y\}$，即

$$P(x,y)=\frac{-kx}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}},\quad Q(x,y)=\frac{k(1-y)}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

于是 $W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=k\int_L\dfrac{-x\mathrm{d}x+(1-y)\mathrm{d}y}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}$，

因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{3kx(y-1)}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{5}{2}}}$，所以曲线积分与路径无关，

故
$$W=k\int_2^0\frac{-x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=k\left(1-\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

【例 2】　在力 $F=\{yz,zx,xy\}$ 的作用下，质点从原点沿直线运动到椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问当 ξ,η,ζ 为何值时，力 F 所做的功 W 最大？并求最大值 W.

【解】　$L:x=\xi t,y=\eta t,z=\zeta t(0\leqslant t\leqslant 1)$，$W=\int_{\overline{OM}}yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=\xi\eta\zeta$.

令 $F=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$，由
$$\begin{cases}F'_\xi=\eta\zeta+2\lambda\dfrac{\xi}{a^2}=0,\\ F'_\eta=\xi\zeta+2\lambda\dfrac{\eta}{b^2}=0,\\ F'_\zeta=\xi\eta+2\lambda\dfrac{\zeta}{c^2}=0,\\ F'_\lambda=\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

得 $\xi=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\eta=\dfrac{b}{\sqrt{3}},\zeta=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$，则 $W_{\max}=\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$.

题型五　对面积的曲面积分

【例 1】　设 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint\limits_\Sigma(x+|y|)\mathrm{d}S=$________.

【解】　由奇偶性，得 $\oiint\limits_\Sigma(x+|y|)\mathrm{d}S=\oiint\limits_\Sigma|y|\mathrm{d}S$，

由对称性，得 $\oiint\limits_\Sigma|y|\mathrm{d}S=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_\Sigma(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S$

$$=\frac{1}{3}\oiint\limits_\Sigma\mathrm{d}S=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

【例 2】 计算 $I=\iint\limits_S(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分.

【解】 $S:z=\sqrt{x^2+y^2}\ ((x,y)\in D)$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1$，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

则 $I=\iint\limits_S(x^2+y^2+z)\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint\limits_D(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2+r)r\,\mathrm{d}r=\frac{7\sqrt{2}\,\pi}{6}.$$

【例 3】 求 $F(t)=\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=t^2\ (t>0)$，

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

【解】 把 Σ 分为 $\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=t^2\ (z\geqslant\sqrt{x^2+y^2})$，$\Sigma_2:x^2+y^2+z^2=t^2\ (z<\sqrt{x^2+y^2})$，则 $\iint\limits_{\Sigma_2}f(x,y,z)\mathrm{d}S=0$，$\iint\limits_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，

Σ_1 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant\frac{t^2}{2}$，由 $\Sigma_1:z=\sqrt{t^2-x^2-y^2}$，则

$$\mathrm{d}S=\frac{t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}},\ F(t)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{t^2-x^2-y^2}}=\frac{8-5\sqrt{2}}{12}\pi t^4.$$

【例 4】 设 $\Sigma:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1\ (z\geqslant 0)$，点 $P(x,y,z)\in\Sigma$，π 为曲面 Σ 在点 P 处的切平面，$d(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，计算 $\iint\limits_\Sigma\frac{z}{d(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

【解】 曲面 Σ 上点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为 $\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}=\{x,y,2z\}$，

点 $P(x,y,z)$ 处的切平面方程为 $\pi:x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$，

注意到 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$，则 $\pi:\frac{x}{2}X+\frac{y}{2}Y+zZ-1=0$，

$$d(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}},$$

$\Sigma:z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$，$(x,y)\in D$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 2$，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}\mathrm{d}\sigma,$$

于是 $$\iint\limits_\Sigma\frac{z}{d(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint\limits_D\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}{\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}}}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\frac{4-x^2-y^2}{4}\mathrm{d}\sigma=\frac{3}{2}\pi.$$

【例 5】　设 P 为椭球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 Σ 在点 P 处的切平面与 xOy 平面垂直，求 P 的轨迹 L，并求曲面积分 $I=\iint\limits_S \frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$，其中 S 为 Σ 位于曲线 L 上方的部分.

【解】　令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，则曲面 Σ 在点 P 处的法向量为

$$\vec{n}=\{2x,2y-z,2z-y\},$$

因为切平面与 xOy 平面垂直，所以 $y=2z$，

于是 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ y-2z=0,\end{cases}$ 即 $L:\begin{cases}x^2+\frac{3}{4}y^2=1,\\ y-2z=0.\end{cases}$

S 在 xOy 平面上的投影区域为 $D_{xy}: x^2+\frac{y^2}{\frac{4}{3}}\leqslant 1$，

$x^2+y^2+z^2-yz=1$ 两边分别对 x,y 求偏导得

$\begin{cases}2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y-2z}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-z}{y-2z}$，

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

故 $I=\iint\limits_S \frac{(x+\sqrt{3})\,|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi.$

题型六　对坐标的曲面积分

【例 1】　计算 $\iint\limits_\Sigma \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为由 $x^2+y^2=R^2$ 及 $z=R$，$z=-R(R>0)$ 所围成的曲面的外侧.

分析：本题 Σ 虽然是封闭曲面，但由于 P,Q,R 在 Σ 围成的区域上原点处不连续可偏导，所以不能使用高斯公式，只能使用奇偶性及二重积分计算.

【解】　如图 11－9，令 $\Sigma_1: z=-R(x^2+y^2\leqslant R^2)$，取下侧，

$\Sigma_2: z=R(x^2+y^2\leqslant R^2)$，取上侧，

$\Sigma_3: x^2+y^2=R^2(-R\leqslant z\leqslant R)$，取外侧，

则 $\iint\limits_\Sigma \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$

$=\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，

而 $\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，

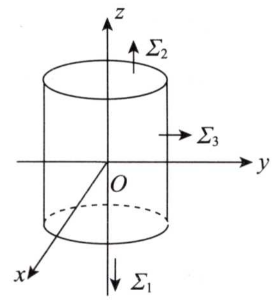


图 11-9

因为$\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$关于 z 为偶函数,且 $\Sigma_1+\Sigma_2$ 关于 xOy 平面对称,

所以 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0$;

显然$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$,

令 $\Sigma_3^{(1)}:x=\sqrt{R^2-y^2}$,由奇偶性得

$$\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=2\iint\limits_{\Sigma_3^{(1)}}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}=2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}z$$

$$=8\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^R\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}=8\cdot\frac{\pi}{4}R^2\cdot\frac{1}{R}\arctan\frac{z}{R}\Big|_0^R=\frac{\pi^2}{2}R.$$

【例 2】 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$ 的外侧,求$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】 **方法一:二重积分法**

$$\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $\Sigma_1:y=\sqrt{4-x^2-z^2}\,((x,z)\in D_{xz})$,其中 $D_{xz}:x^2+z^2\leqslant 4(z\geqslant 0)$,$\Sigma_1$ 取右侧,由对坐标的曲面积分的奇偶性得

$$\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{\Sigma_1}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint\limits_{D_{xz}}z\sqrt{4-x^2-z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sqrt{4-r^2}\sin\theta\,\mathrm{d}r=4\int_0^2 r^2\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{r=2\sin t}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=64(I_2-I_4)=4\pi,$$

$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi$,故原式$=12\pi$.

方法二:高斯公式

补充 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$,取下侧,则

$$\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而$\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2 z(4-z^2)\mathrm{d}z=4\pi$,

$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Sigma_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-8\pi$,

故原式$=12\pi$.

【例 3】 计算曲面积分$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是由 $L:\begin{cases}z=1-x^2,\\ y=0\end{cases}(|x|\leqslant 1)$ 绕 z 轴旋转一周所得到的曲面,正侧向外.

【解】 L 绕 z 轴旋转而成的曲面为 $\Sigma:z=1-x^2-y^2(x^2+y^2\leqslant 1)$,取上侧,

补充 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$,取下侧,则

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_0}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而 $\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$

$$=3\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 1-z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-z}}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2},$$

$$\iint_{\Sigma_0}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi,$$

于是原式 $=\dfrac{3\pi}{2}$.

【例 4】 求 $I=\iint_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,其中 Σ 为 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧($a>0$).

【解】 $I=\iint_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{1}{a}I_1,$$

补充 $\Sigma_0: z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$ 取下侧,

则 $I_1=\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-$

$$\iint_{\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

而 $\oiint_{\Sigma+\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-a\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=-\dfrac{2\pi}{3}a^4$,

$$\iint_{\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2y(z+a)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma_0}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi a^4,$$

故 $I=\dfrac{\pi a^3}{3}$.

题型七 场论初步

【例 1】 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}u)\big|_{(1,1,1)}$.

【解】 由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$,得

$$\mathbf{grad}u=\left\{\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right\},$$

则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

$$=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2+z^2},$$

故 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}u)\big|_{(1,1,1)}=\frac{1}{3}$.

【例 2】 确定常数 λ,使得在右半平面 $x>0$ 内,$2xy(x^4+y^2)^\lambda\vec{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda\vec{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求出函数 $u(x,y)$.

【解】 令 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda$, $Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$,

因为 $\mathbf{grad}u=2xy(x^4+y^2)^\lambda\vec{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda\vec{j}$,

所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy(x^4+y^2)^\lambda$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$,

则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}$,

由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 得

$2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}$,

整理得 $4(\lambda+1)x(x^4+y^2)=0$,解得 $\lambda=-1$.

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,所以 $u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+C=-\arctan\frac{y}{x^2}+C$.

第十二章　数学的经济应用

（数学一、二不要求）

考查要求

1. 了解差分与差分方程及其通解与特解的概念.
2. 会求解简单的一阶常系数线性差分方程.
3. 理解边际与弹性的概念.
4. 会计算边际与弹性,理解其经济学意义.

第一节　差分方程

一、差分方程的基本概念

1. 差分 —— 设 $y_t=f(t)$ 为 t 的函数,称 $\Delta y_t=f(t+1)-f(t)$ 为 $f(t)$ 的一阶差分,称 $\Delta^2 y_t=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t=f(t+2)-2f(t+1)+f(t)$ 为 $f(t)$ 的二阶差分.

一般地,$\Delta^k y_t=\Delta^{k-1} y_{t+1}-\Delta^{k-1} y_t=\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i f(t+k-i)$ 称为 $f(t)$ 的 k 阶差分.

2. 差分方程 —— 含 $t,y_t,y_{t+1},\cdots,y_{t+k}$ 的方程 $F(t,y_t,y_{t+1},\cdots,y_{t+k})=0$ 称为差分方程.

3. 差分方程的解 —— 若函数 $y_t=\varphi(t)$ 使得差分方程 $F(t,y_t,y_{t+1},\cdots,y_{t+k})=0$ 成立,称函数 $y_t=\varphi(t)$ 为差分方程的解,其中 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 为一阶常系数差分方程.

二、一阶常系数差分方程的求解

1. 一阶常系数齐次差分方程的通解

一阶常系数齐次差分方程 $y_{t+1}+ay_t=0$ 的通解为 $y_t=C(-a)^t$,其中 C 为任意常数.

2. 一阶常系数非齐次差分方程的特解与通解

一阶常系数非齐次差分方程 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的通解为一阶常系数齐次差分方程 $y_{t+1}+ay_t=0$ 的通解与 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解之和.

对 $y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解有如下几种情形:

情形一:$f(t)=b$

当 $a\neq-1$ 时,$y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解为 $y^*=\dfrac{b}{a+1}$;

当 $a=-1$ 时,$y_{t+1}+ay_t=f(t)$ 的特解为 $y^*=bt$.

情形二:$f(t)=(a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0)b^t$,则 $y^*=t^k(b_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+\cdots+b_1t+b_0)b^t$,其中当 $a\neq-b$ 时,$k=0$,当 $a=-b$ 时,$k=1$.

【例 1】 求差分方程 $y_{t+1}+2y_t=t$ 的通解.

【解】 $y_{t+1}+2y_t=0$ 的通解为 $y_t=C(-2)^t$.

因为 $a=2,b=1$ 且 $a\neq -b$，所以令 $y_{t+1}+2y_t=t$ 的特解为 $y^*=At+B$，

代入原方程得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{1}{9}$，故原方程的通解为

$$y_t=C(-2)^t+\frac{t}{3}-\frac{1}{9}.$$

【例 2】 求差分方程 $y_{t+1}-y_t=(2t+1)2^t$ 的通解.

【解】 $y_{t+1}-y_t=0$ 的通解为 $y_t=C$.

因为 $a=-1,b=2$ 且 $a\neq -b$，所以令 $y_{t+1}-y_t=(2t+1)2^t$ 的特解为

$$y^*=(At+B)2^t,$$

代入原方程得 $A=2,B=-3$，

故原方程的通解为 $y_t=C+(2t-3)2^t$.

【例 3】 求差分方程 $y_{t+1}-y_t=4t-3$ 的通解.

【解】 差分方程 $y_{t+1}-y_t=0$ 的通解为 $y_t=C$.

令差分方程 $y_{t+1}-y_t=4t-3$ 的特解为 $y^*=t(At+B)$，代入原方程得 $A=2,B=-5$，故 $y_{t+1}-y_t=4t-3$ 的通解为 $y_t=C+2t^2-5t$.

第二节　边际与弹性

一、经济数学的五大函数

1. 成本函数——产品的总成本即生产一定数量的产品需要的全部资源投入的费用总额，包括固定成本和可变成本，用 $C(Q)$ 表示，且 $C(Q)=C_0+C_1(Q)$，其中 Q 为产量，C_0 为固定成本，$C_1(Q)$ 为可变成本.

2. 收入函数——生产者出售一定数量的产品所获得的全部收入称为总收益，记为 $R(Q)$，且 $R(Q)=P\cdot Q$，其中 P 为价格.

3. 需求函数——在一定价格条件下，消费者愿意购买并能够支付的商品数量，记为 $Q=Q(P)$，且 $Q=Q(P)$ 为价格的单调减函数.

4. 供给函数——在一定的价格条件下，生产者愿意提供并可出售的商品量，记为 $Q=f(P)$，供给函数 $Q=f(P)$ 是 P 的单调增函数.

5. 利润函数——$L(Q)=R(Q)-C(Q)$.

二、边际与弹性

1. 边际函数——设函数 $y=f(x)$ 为可导函数，称 $f'(x)$ 为边际函数.

2. 弹性函数——设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，称 $\eta=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}\Big|_{x=x_0}=x_0\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的弹性.

【例 1】 设某产品需求函数为 $P=20-\frac{Q}{5}$，当销售量 $Q=15$ 时，求总收益及边际收益.

【解】 总收益为 $R(Q)=PQ=Q(20-\frac{Q}{5})=20Q-\frac{Q^2}{5}$，边际收益为 $R'(Q)=20-\frac{2Q}{5}$，当 $Q=15$ 时，总收益为 $R(15)=255$，边际收益为 $R'(15)=14$.

【例 2】　某商品需求量 Q 对价格 P 的弹性为 $\eta=3P^3$，且该商品的最大需求量为 1，求需求函数.

【解】　$\eta=-P\cdot\dfrac{Q'(P)}{Q(P)}$，由 $\eta=3P^3$ 得 $P\cdot\dfrac{Q'(P)}{Q(P)}=-3P^3$，

整理得 $Q'(P)+3P^2Q(P)=0$，解得 $Q(P)=C\mathrm{e}^{-\int 3P^2\mathrm{d}P}=C\mathrm{e}^{-P^3}$.

由 $Q(0)=1$ 得 $C=1$，故需求函数为 $Q(P)=\mathrm{e}^{-P^3}$.

【例 3】　某商品的收益函数为 $R(P)$，收益弹性为 $1+P^3$，且 $R(1)=1$，求 $R(P)$.

【解】　收益对价格的弹性为 $\eta=P\cdot\dfrac{R'(P)}{R(P)}$，由已知条件得

$$P\cdot\frac{R'(P)}{R(P)}=1+P^3 \text{ 或 } R'(P)-\left(\frac{1}{P}+P^2\right)R(P)=0,$$

解得 $R(P)=C\mathrm{e}^{-\int-(\frac{1}{P}+P^2)\mathrm{d}P}=CP\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{3}P^3}$，由 $R(1)=1$ 得 $C=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，故 $R(P)=P\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(P^3-1)}$.

【例 4】　设某产品的需求函数为 $Q=\mathrm{e}^{-\frac{P}{5}}$，

(1) 求需求对价格的弹性；

(2) 求 $P=3,P=5,P=6$ 时，需求对价格的弹性，并说明其经济意义.

【解】　(1)$Q'(P)=-\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{P}{5}}$，需求对价格的弹性为 $\eta=-P\cdot\dfrac{Q'(P)}{Q(P)}=\dfrac{P}{5}$.

(2) 当 $P=3$ 时，$\eta=0.6$，说明价格上升 1%，需求只减少 0.6%.

当 $P=5$ 时，$\eta=1$，说明价格上升 1%，需求减少 1%.

当 $P=6$ 时，$\eta=1.2$，说明价格上升 1%，需求减少 1.2%.

【例 5】　某商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中 $0<P<20$.

(1) 求需求对价格的弹性 η；

(2) 推导 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-\eta)$，利用弹性说明价格在何范围变化时，降低价格会使得收益上升.

【解】　(1)$\eta=-P\dfrac{Q'(P)}{Q(P)}=\dfrac{P}{20-P}$.

(2)$R=PQ$，　$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\cdot\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q\left[1+P\dfrac{Q'(P)}{Q(P)}\right]=Q(1-\eta)$.

由 $\eta=\dfrac{P}{20-P}=1$ 得 $P=10$，故当 $10<P<20$ 时，$\eta>1$，此时 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}<0$，即当 $10<P<20$ 时，价格降低收益反而会提高.

第三节　现值与利息

一、分期复利计息公式

设 A_0 为开始存入银行的钱(本金)，r 为年利率，利息按年计算，n 年末的本利和为

$$A_n=A_0(1+r)^n,$$

若已知 n 年末的本利和为 A_n，则现值为 $A_0=A_n(1+r)^{-n}$.

二、连续复利计息公式

设 A_0 为开始存入银行的钱(本金)，r 为连续复利年利率，n 年末的本利和为 $A_n = A_0 e^{nr}$，若已知 n 年末的本利和为 A_n，则现值为 $A_0 = A_n e^{-nr}$.

【例 1】 设银行存款年利率为 $r=0.05$，依年复利计息. 某基金会希望通过存入 A 万元，实现第一年末提取 19 万元，第二年末提取 28 万元，…，第 n 年末提取 $10+9n$ 万元，并按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？

【解】 设 A_n 为第 n 年末提取 $10+9n$ 万元的现值，则 $A_n = \dfrac{10+9n}{(1+r)^n}(n=1,2,\cdots)$，则

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+9n}{(1+r)^n} = 10\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^n} + 9\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{1+r}\right)^n,$$

$$10\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^n} = 10 \cdot \frac{\dfrac{1}{1+r}}{1-\dfrac{1}{1+r}} = \frac{10}{r} = \frac{10}{0.05} = 200(\text{万元});$$

令 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n(-1<x<1)$，则

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2},$$

于是 $A = 200 + 9S\left(\dfrac{1}{1+r}\right) = 3\,980$(万元)，即刚开始的投入为 3 980 万元.

【例 2】 设一酒厂生产一批好酒，若现在出售，总收入为 R_0 元. 如窖藏起来待来日出售，t 年末总收入为 $R(t) = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$. 设银行年利率为 r，并以连续复利计算，求窖藏多少年出售可使总收入的现值最大，并求 $r=0.06$ 时的 t.

【解】 按连续复利计算，t 年末出售的总收入的现值为

$$A(t) = R(t)e^{-rt} = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}.$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}\left(\dfrac{1}{5\sqrt{t}} - r\right) = 0$ 得 $t_0 = \dfrac{1}{25r^2}$.

因为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=t_0} = -12.5r^3 R_0 e^{\frac{1}{25r}} < 0$，所以当 $t_0 = \dfrac{1}{25r^2}$ 时，$A(t)$ 最大，即窖藏 $t_0 = \dfrac{1}{25r^2}$ 出售，可使总收入的现值最大.

当 $r=0.06$ 时，$t_0 = \dfrac{1}{25\times 0.06^2} = \dfrac{100}{9} \approx 11$(年).

文都教育®

50210105

汤家凤精品图书系列

搜索一下

1.2022《考研数学复习大全》（数学一至三）

2.2022《全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义》

3.2022《全国硕士研究生招生考试线性代数辅导讲义》

4.2022《概率论与数理统计辅导教程》

5.2022《考研数学接力题典1800》（数学一至三）

6.2022《考研数学历年真题全解析》（数学一至三）

7.2022《考研数学强化测试10套卷》（数学一至三）

8.2022《考研数学绝对考场最后八套题》（数学一至三）

文都图书　名师精品

新浪微博：@文都图书

图书答疑QQ群：742230365

扫码获取海量免费资料

文都书馆微信公众号

上架指导：考研类图书

ISBN 978-7-5022-9557-8

定价：42.00元