2021 考研数学
高等数学一阶讲义习题册

基础阶段

主编：教研中心数学组

目录

高等数学

第一讲　函数、极限与连续

1.1 设 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$,求函数 $f(\sin x)$ 的定义域.

1.2 设 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$, 则 $\varphi(x)=$________；其定义域________.

1.3 函数 $f(x)=x\sin x$

A．当 $x\to\infty$ 时为无穷大.　　B．在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

C．在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.　　D．当 $x\to\infty$ 时有有限极限.

1.4 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f\left[f(x)\right]=$________.

1.5 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}\ (-\infty<x<+\infty)$ 是

A．有界函数．　　　　B．单调函数．

C．周期函数．　　　　D．偶函数．

1.6 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

A．$a_n<b_n$ 对任意的 n 成立．　　　　B．$b_n<c_n$ 对任意的 n 成立．

C．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在．　　　　D．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在．

1.7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

1.8 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.试证明数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限.

1.9 已知$\left(2+\sqrt{2}\right)^n=A_n+B_n\sqrt{2}$，$A_n$，$B_n$为整数，$n=1,2,3,\cdots$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{B_n}$.

1.10 已知$I=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)}+a[x]\right)$存在，$[\cdot]$为取整函数，求$I,a$.

1.11 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^3-2x^2+x-3}{2x^2-2x}$.

1.12 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[\sin x-\sin(\sin x)\right]\sin x}{x^4}$.

1.13 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

1.14 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\ x+\mathrm{e}^{x}{}^{\frac{1}{x}}$.

1.15 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t$， $g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

A．等价无穷小.

B．同阶但非等价的无穷小.

C．高阶无穷小.

D．低阶无穷小.

1.16 已知 $x \to 0$ 时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________.

1.17 设 a 是非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$________.

1.18 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$________.

1.19 （1）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{\pi}{x}}$； （2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

1.20 （1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$； （2）$\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

1.21 （1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

1.22 （1）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

1.23 （1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)(a>0,b>0)$.

1.24 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________.

1.25 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则

A．$\varphi[f(x)]$ 必有间断点．　　B．$[\varphi(x)]^2$ 必有间断点．

C．$f[\varphi(x)]$ 必有间断点．　　D．$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点．

1.26 设 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $g(x)=\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则

A．$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

B．$x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

C．$x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

D．$g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

1.27 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

A．连续.　　B．有可去间断点.

C．有跳跃间断点.　　D．有无穷间断点.

1.28 求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型.

1.29 设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$， $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，试补充定义 $f(1)$，使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

1.30 设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数. 证明此方程至少有一个正实根 x_n.

1.31 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负连续函数，且 $f(0)=f(1)=0$. 求证：对任意的实数 $r(0<r<1)$，必存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $x_0+r\in[0,1]$，且 $f\left(x_0\right)=f\left(x_0+r\right)$.

1.32 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b(n\ge 3)$,则在$[x_1,x_n]$内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$.

第二讲　一元函数微分学

2.1 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

A. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.

B. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f\left(1-e^h\right)$ 存在.

C. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在.

D. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

2.2 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

B. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

2.3 设函数 $f(x)$ 对任意的 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，则

A. $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

B. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$.

C. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$.

D. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.

2.4 设 $f\left(x\right)$ 可导，$F\left(x\right)=f\left(x\right)\left(1+\left|\sin x\right|\right)$．若 $f(0)=0$ 是 $F\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导的

A．充分必要条件.　　B．充分条件但非必要条件.

C．必要条件但非充分条件.　　D．既非充分条件又非必要条件.

2.5 设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g\left(x\right), & x\le 0,\end{cases}$ 其中 $g\left(x\right)$ 是有界函数，则 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处

A．极限不存在.　　B．极限存在，但不连续.

C．连续，但不可导.　　D．可导.

2.6 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件是

A． $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$.　　B． $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$.

C． $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$.　　D． $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.

2.7 函数 $f(x)=\left(x^2-x-2\right)\left|x^3-x\right|$ 的不可导点的个数是

A．3.　　B．2.

C．1.　　D．0.

2.8 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(x^{2}+1\right), & x\leq 1,\\ \dfrac{1}{2}(x+1), & x>1,\end{cases}$ 判断 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否可导.

2.9 求函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{\sin x+\sqrt{x^{2}+1}}}{\sqrt[3]{x-2}}(x>2)$ 的导数.

2.10 求函数 $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}+\cos\dfrac{\pi}{3}$ 的导数.

2.11 $y=\dfrac{\left(x^{2}+1\right)^{3}(x-2)^{\frac{1}{4}}}{(5x-9)^{\frac{2}{5}}}$, 求 y'.

2.12 设 $f(x)=\sqrt{\dfrac{(1+x)\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{x-1}}}+\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f'(1)$.

2.13 设 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$ 且 $f'(x)=\arctan x^2$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

2.14 设 $y=2x^3+4x-1$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=-1}=$________.

2.15 设 $y=y(x)$ 是由 $\sin xy=\ln\dfrac{x+\mathrm{e}}{y}+1$ 确定的隐函数，求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$ 的值.

2.16 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t,\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为________.

2.17 设$\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln\left(1+u^2\right)du, \end{cases}$ 则 $\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=0} =$ ________.

2.18 设 $x = \int_0^t e^{-s^2} ds, y = \int_0^t \sin\left(t-s\right)^2 ds$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ ________.

2.19 设 $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$, 则 $f^{(n+1)}(-1) =$ ________.

2.20 设 $f(x) = \frac{x}{2x^2 - 3x + 1}$，则 $f^{(n)}\left(0\right) =$ ________.

2.21 设 $y\sin x-\cos\left(x-y\right)=0$，求 $\mathrm{d}y$.

2.22 已知 $y=\arcsin\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)$，求 $\mathrm{d}y$.

2.23 证明方程 $x^5+5x+1=0$ 在区间 $\left(-1,0\right)$ 有唯一的实根.

2.24 设 $f(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$， $f'(a)f'(b)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

2.25 设 $a>b>0$，$n>1$，证明：$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

2.26 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{\tan^3 x}$.

2.27 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\arctan x-\ln(1+x^2)}{x+\ln x}$.

2.28 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\sin\frac{1}{x}}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$.

2.29 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)}{x-\sin x}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty} n^{2}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$.

2.30 设 $f\left(x\right)=e^{-\frac{x^{2}}{2}}-\cos x$，则在 $x\to 0$ 时， $f\left(x\right)$ 是 x 的几阶无穷小？

2.31 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$. 证明： $f(x)\geq x$.

2.32 设 $y=f\left(x\right)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，且 $f\left(x_{0}\right)>0$， $f'\left(x_{0}\right)=0$，则函数 $f\left(x\right)$ 在点 x_{0} 处

A．取得极大值.　　B．取得极小值.

C．某邻域内单调增加.　　D．某邻域内单调减少.

2.33 证明：当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^3}{6}<\sin x$.

2.34 设 $0\le x\le 1$，证明：$\arcsin(\cos x)>\cos(\arcsin x)$.

2.35 证明：当 $a>0,b>0$ 时，$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}\le a^a b^b$.

2.36 求函数 $f(x)=x^2-\frac{16}{x}$ 的极值.

2.37 求函数 $f(x)=x^2(x-1)^3$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值.

2.38 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2y^2+y=1(y>0)$ 确定的隐函数，求 $y(x)$ 的极值.

2.39 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=1$，证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值.

2.40 设三次曲线 $y=ax^3+bx^2+cx$ 有一拐点 $(1,2)$，且在该点切线斜率为 -1，求常数 a,b,c 的值.

2.41 求函数 $y=\ln(x^2+1)$ 的凹凸区间和拐点.

2.42 证明不等式：设常数 $p>1$，则当 $0\le x\le 1$ 时，有 $x^p+(1-x)^p\ge\dfrac{1}{2^{p-1}}$.

2.43 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x-3}$ 的渐近线.

2.44 求曲线 $y=2x+\arctan\dfrac{x}{2}$ 的渐近线.

第三讲 一元函数积分学

3.1 若 $f(x)$ 的导函数是 $2^x(\ln 2)^2$，则 $f(x)$ 为

A． $2^x + C$． B． $2^x \ln 2 + C$．

C． $2^x(\ln 2)^2 + C$． D． $\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x + C$．

3.2 若设 $\int f(x)\mathrm{d}x = \ln x + C$,则 $f'(x) =$ ________.

3.3 已知 $f'(\mathrm{e}^x) = 1 + x$，则 $f(x) =$

A． $x + \frac{1}{2}x^2 + C$． B． $\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$．

C． $x + x\ln x + C$． D． $x\ln x + C$．

3.4 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int x^3\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

3.5 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$；

（3）$\int x\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

3.6 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\mathrm{d}x$；

3.7 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-4}}$.

3.8 求下列不定积分：

（1）$\int x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$；

（2）$\int x^2 \ln x \mathrm{d}x$；

（3）$\int \arcsin x \mathrm{d}x$；

（4）$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$.

3.9 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$；

（2）$\int \frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}\mathrm{d}x$.

3.10 求不定积分$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

3.11 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

3.12 设$f(x)$连续，$f(0)=1$，$f'(0)=2$.下列曲线与曲线$y=f(x)$必有公共切线的是

A．$y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

B．$y=1+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

C．$y=\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t$.

D．$y=1+\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t$.

3.13 函数$F(x)=\int_x^1\left(1-\ln\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t\,(x>0)$的递增区间为________.

3.14 设 $f\left(x\right)$ 连续，$F\left(x\right)=\int_0^{x^2} x^2 f\left(t^2\right)\mathrm{d}t$，则 $F'\left(x\right)$ 等于

A． $x^2 f\left(x^4\right)$.　　B． $2x^3 f\left(x^4\right)$.

C． $4x^2 f\left(x^4\right)$.　　D． $2x^3 f\left(x^4\right)+2x\int_0^{x^2} f\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

3.15 若 $x\to 0$ 时，$F\left(x\right)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)f''\left(t\right)\mathrm{d}t$ 的导数与 x^2 是等价无穷小，则必有（其中 f 有二阶连续导数）

A． $f''\left(0\right)=1$.　　B． $f''\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$.

C． $f''\left(0\right)=0$.　　D． $f''\left(0\right)$ 不存在.

3.16 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x^2, & x>0, \end{cases}$ 则 $\int_{-2}^{0} f\left(x+1\right)\mathrm{d}x=$________.

3.17 计算积分 $\int_0^3 \left(|x-1|+|x-2|\right)\mathrm{d}x$.

3.18 设 $f(x)$ 连续，则在下列变上限积分中，必为偶函数的是

A. $\int_0^x t\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t$. B. $\int_0^x t\left[f(t)-f(-t)\right]\mathrm{d}t$.

C. $\int_0^x f\left(t^2\right)\mathrm{d}t$. D. $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$.

3.19 设 $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，$f(1)=a$，则 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________.

3.20 求定积分 $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

3.21 设 $N=\int_{-a}^a x^2\sin^3 x\mathrm{d}x$，$P=\int_{-a}^a \left(x^3\mathrm{e}^{x^2}-1\right)\mathrm{d}x$，$Q=\int_{-a}^a \cos^2 x^3\mathrm{d}x$，$a\ge 0$，则

A. $N\le P\le Q$. B. $N\le Q\le P$.

C. $Q\le P\le N$. D. $P\le N\le Q$.

3.22 计算下列定积分：

（1）$\int_{-2}^{2}\max\left[1,x^2\right]\mathrm{d}x$；

（2）$\int_{-1}^{1}\left[x^2\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\left(x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}\right]\mathrm{d}x$.

3.23 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}=$________.

3.24 计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left|x-x^2\right|}}$.

3.25 计算积分 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$.

3.26 下列广义积分中收敛的是

A. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

B. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

C. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(\ln x\right)^2}$.

D. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(\ln x\right)^{\frac{1}{2}}}$.

3.27 判断下列反常积分的敛散性：

（1）$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$；

（2）$\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

3.28 计算由两条抛物线：$y^2 = x$，$y = x^2$ 所围成的图形的面积.

3.29 由曲线 $y = x^3$，$y = 0$ 及 $x = 1$ 所围图形绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积为________.

3.30 求曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x\left(0 \leqslant x \leqslant \pi\right)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

3.31 设 $y=x^2-2x$， $y=0$， $x=1$， $x=3$ 围成一平面图形 A.

（1）求平面图形 A 的面积 S；

（2）求平面图形 A 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积.

3.32 曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 3 到 8 的一段弧的长度为_______.

第四讲　常微分方程

4.1 微分方程 $y'+\frac{1}{y}e^{y^2+3x}=0$ 的通解（其中 C 为任意常数）是

A. $2e^{3x}+3e^{y^2}=C$.　　B. $2e^{3x}+3e^{-y^2}=C$.

C. $2e^{3x}-3e^{-y^2}=C$.　　D. $e^{3x}-e^{-y^2}=C$.

4.2 微分方程 $y'\tan x=y\ln y$ 的通解是________.

4.3 微分方程 $\left(1-x^2\right)y-xy'=0$ 满足初值条件 $y(1)=1$ 的特解是________.

4.4 设 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，则 $f(x)=$

A. $e^x\ln 2$.　　B. $e^{2x}\ln 2$.

C. $e^x+\ln 2$.　　D. $e^{2x}+\ln 2$.

4.5 已知曲线 $y=y(x)$ 经过点 $\left(1,\mathrm{e}^{-1}\right)$，且在点 (x,y) 处的切线在 y 轴上的截距为 xy，求该曲线方程的表达式.

4.6 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^{2}}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，求 $y(1)$.

4.7 求解微分方程 $xy'+y=2\sqrt{xy}\,(x>0)$.

4.8 微分方程 $y'=\dfrac{y}{x+(y+1)^2}$（y 不为常函数）的通解为________.

4.9 曲线 $y=y(x)$ 经过点 $(0,-1)$，且满足方程 $y'+2y=4x$，则 $x=1$ 时，$y=$________.

4.10 设一阶非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个线性无关的解 y_1，y_2，若 $\alpha y_1+\beta y_2$ 也是该方程的解，则应有 $\alpha+\beta=$________.

4.11 已知 $g(x)$ 是微分方程 $g'(x)+\sin x g(x)=\cos x$ 满足初始条件 $g(0)=0$ 的解，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$.

4.12 求微分方程 $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$ 的通解.

4.13 求解微分方程：

（1） $y'' = 1 + (y')^2$； （2） $xy'' + y' = 0$.

4.14 函数 $y = Cx + \dfrac{x^3}{6}$（其中 C 是任意常数）对微分方程 $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = x$ 而言

A．是通解. B．是特解.

C．是解，但既非通解也非特解. D．不是解.

4.15 验证 $y_1 = e^{x^2}$ 及 $y_2 = xe^{x^2}$ 都是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解，并写出该方程的通解.

4.16 设常系数线性齐次方程的特解方程有根 $r_{1,2}=-1$，$r_{3,4}=\pm\mathrm{i}$，则此方程的通解为

A. $y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

B. $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x$.

C. $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\cos x+C_3x\sin x$.

D. $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+\left(C_2+x\right)\cos x+C_3\sin x$.

4.17 具有特解 $y_1=\mathrm{e}^{-x}$，$y_2=2x\mathrm{e}^{-x}$，$y_3=3\mathrm{e}^{x}$ 的三阶常系数齐次线性方程是

A. $y'''-y''-y'+y=0$.

B. $y'''+y''-y'-y=0$.

C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

D. $y'''-2y''-y'+2y=0$.

4.18 微分方程 $y''+2y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的特解形式为

A. $\mathrm{e}^{-x}(a\cos x+b\sin x)$.

B. $\mathrm{e}^{-x}(a\cos x+bx\sin x)$.

C. $x\mathrm{e}^{-x}(a\cos x+b\sin x)$.

D. $\mathrm{e}^{-x}(ax\cos x+b\sin x)$.

4.19 用待定系数法确定微分方程 $y''-2y'=x^2+\mathrm{e}^{2x}+1$ 的特解形式（不必求出系数）是________.

4.20 求微分方程 $y''+5y'+6y=2\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

4.21 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$ 满足初始条件

$y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{y(x)}$ 的极限

A．不存在.

B．等于 1.

C．等于 2.

D．等于 3.

4.22 微分方程 $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^{x}$ 的通解为________.

4.23 求连续函数 $f(x)$，使它满足 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=2f(x)+x$.

4.24 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2(\cos x-\sin x)$ 的通解.

第五讲　多元函数微分学

5.1 求下列各函数的定义域：

（1） $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

（2） $z=\ln\left(y-x\right)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

（3） $u=\arccos\dfrac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5.2 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)e^{x^2y^2}}$.

5.3 函数 $f\left(x,y\right)=\begin{cases}0, & xy=0,\\ x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0,\end{cases}$ 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f\left(x,y\right)$

A．等于 1.　　　　B．等于 2.

C．等于 0.　　　　D．不存在.

5.4 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{x+y}$

A．等于 0.　　B．不存在.

C．等于 $\dfrac{1}{2}$.　　D．存在，但不等于 $\dfrac{1}{2}$ 也不等于 0.

5.5 证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

5.6 函数 $f\left(x,y\right)=\ln\left(x^2+y^2-1\right)$ 的连续区域是________.

5.7 函数 $f(x,y)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{y}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 不连续的点集为.

A．y 轴上的所有点.　　B．$x=0$，$y\geq 0$ 的点集.

C．空集.　　D．$x=0$，$y\leq 0$ 的点集.

5.8 二元函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处

A．连续，偏导数都存在.　　B．连续，偏导数都不存在.

C．不连续，偏导数都存在.　　D．不连续，偏导数不都存在.

5.9 求下列函数的偏导数：

（1） $z=\sqrt{\ln(xy)}$；

（2） $z=(1+xy)^{y}$；

（3） $u=\arctan(x-y)^{z}$.

5.10 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x'(x,1)$.

5.11 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}\sin\left(x^2y\right), & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f_x'(0,1)=$________.

5.12 设 $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 求 $f_x'(x,y)$ 及 $f_y'(x,y)$.

5.13 求函数 $z=y^x$ 的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5.14 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

5.15 求下列函数的全微分：

（1）$z=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$；　　（2）$u=x^{yz}$.

5.16 求函数 $z=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 当 $x=1$， $y=2$ 时的全微分.

5.17 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2$， $y=1$， $\Delta x=0.1$， $\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

5.18 设 $z=u^2\ln v$，而 $u=\frac{x}{y}$， $v=3x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$.

5.19 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t$， $y=4t^3$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

5.20 设 $z=\arctan(xy)$，而 $y=\mathrm{e}^x$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

5.21 设$u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求$\dfrac{du}{dx}$.

5.22 求函数$u=f\left(x^2-y^2,e^{xy}\right)$的一阶偏导数（其中$f$具有一阶连续偏导数）.

5.23 设$z=f\left(x^2+y^2\right)$，其中f具有二阶导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

5.24 求函数$z=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中$f$具有二阶连续偏导数）.

5.25 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f ，g 均可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

5.26 设函数 $f(x,y)$ 可微，又 $f(0,0)=0$ ，$f_x'(0,0)=a$ ，$f_y'(0,0)=b$ ，且 $\varphi(t)=f\left[t,f\left(t,t^2\right)\right]$，求 $\varphi'(0)$.

5.27 设 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

5.28 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$______.

5.29 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，证明由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$.

5.30 设 $\mathrm{e}^z-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5.31 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$，

则下述四个选项中正确的是

A．点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

B．点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

C．点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

D．根据所给条件无法判断 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

5.32 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

5.33 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$ 的极值.

5.34 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

5.35 求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

第六讲　多元函数积分学（二重积分）

6.1 设平面区域D由$x=0, y=0, x+y=\frac{1}{4}, x+y=1$围成，$I_1=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_D[\sin(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则$I_1$，$I_2$，$I_3$的大小顺序为

A．$I_1<I_2<I_3$.　　B．$I_3<I_2<I_1$.

C．$I_1<I_3<I_2$.　　D．$I_3<I_1<I_2$.

6.2 $f(x,y)$为连续函数，$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant t^2\right\}$，则$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$________.

6.3 设平面区域D由曲线$y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right), x=-\frac{\pi}{2}, y=1$围成，则

$\iint\limits_D\left(xy^3-1\right)\mathrm{d}\sigma=$

A．2.　　B．-2.

C．π.　　D．$-\pi$.

6.4 若$f(x,y)$为关于x的奇函数，且积分区域D关于y轴对称，则当$f(x,y)$在D上连续时，必有$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

6.5 设 $f(u)$ 为连续函数，D 是由 $y=1$，$x^2-y^2=1$ 及 $y=0$ 所围成的平面闭区域，则 $I=\iint\limits_D xf(y^2)\mathrm{d}\sigma=$________.

6.6 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,-a\le x\le a,x\le y\le a\}$，$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a,x\le y\le a\}$，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$　　B. $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

C. $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$　　D. 0.

6.7 已知 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$，则 $I=$

A. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　B. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　D. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{1}f(x,y)\mathrm{d}x$.

6.8 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$________.

A. $2f(2)$.　　B. $f(2)$.

C. $-f(2)$.　　D. 0.

6.9 求二重积分 $\iint\limits_{D} \frac{y^2}{x^2} \mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y = \frac{1}{x}$，直线 $y = 2, y = x$ 所围成的平面区域.

6.10 计算 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{e}^{\max\left\{b^2x^2, a^2y^2\right\}} \mathrm{d}y$，其中 $a, b > 0$.

6.11 计算 $\iint\limits_{D} \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

6.12 把积分 $\iint\limits_{D} f\left(x, y\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式，积分区域 $D = \left\{\left(x, y\right) \mid x^2 \le y \le 1, -1 \le x \le 1\right\}$.

6.13 选用适当的坐标计算下列各题：

（1）$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由直线$x=2$，$y=x$及曲线$xy=1$所围成的闭区域；

（2）$\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的第一象限内的闭区域；

（3）$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由直线$y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=3a\left(a>0\right)$所围成的闭区域；

（4）$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是圆环形闭区域$\left\{\left(x,y\right)|\,a^2\le x^2+y^2\le b^2\right\}$.

6.14 设函数 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=x+\iint\limits_{D} yf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 由 $x=\dfrac{1}{y}, x=1, y=2$ 围成，求 $f(x,y)$.

6.15 $f(x,y)$ 在闭区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le y, x\ge 0\right\}$ 上连续，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

求 $f(x,y)$.

第七讲　无穷级数（数一、数三）

7.1 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$；

（2）$\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$.

7.2 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})\right]$ 收敛，则 $k=$

A．1.　　B．2.

C．-1.　　D．-2.

7.3 下列命题中错误的是

A．若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必定收敛.

B．若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必定发散.

C．若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 不一定发散.

D．若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 必定收敛.

7.4（1） 设 a 为常数，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - a)$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n =$________.

（2）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $v_n = \frac{1}{u_n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的敛散性为________.

7.5 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件为其部分和数列 $\{S_n\}$ ________.

7.6 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则

A．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必收敛.

B．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必发散.

C．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必收敛.

D．$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 必发散.

7.7 设 a 为正常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sin an}{n^2}\right)$ 的敛散性为________.

7.8 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$. 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛？试说明理由.

7.9 判定下列级数的收敛性：

（1）$\dfrac{1^4}{1!}+\dfrac{2^4}{2!}+\dfrac{3^4}{3!}+\cdots+\dfrac{n^4}{n!}+\cdots$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n\to a\,(n\to\infty)$，a_n，b，a 均为正数.

7.10 设 $a_n=\cos n\pi\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，则级数

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛.

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都发散.

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散.

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

7.11 当级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

A．条件收敛.

B．绝对收敛.

C．发散.

D．敛散性不确定.

7.12 若$\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$条件收敛，则

A．$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$条件收敛.

B．$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$绝对收敛.

C．$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$收敛.

D．$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$发散.

7.13 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\sqrt{n} \tan \frac{1}{n^{\alpha}}$绝对收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3-a}}$条件收敛，则

A．$0 < \alpha \le \frac{1}{2}$.

B．$1 < \alpha < \frac{5}{2}$.

C．$1 < \alpha < 3$.

D．$\frac{5}{2} < \alpha < 3$.

7.14 对于常数$k > 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan\left(\frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}\right)$

A．绝对收敛.

B．条件收敛.

C．发散.

D．收敛性与k的取值相关.

7.15 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$在$x=-1$处收敛，则在$x=2$处

A．条件收敛.　　B．绝对收敛.

C．发散.　　D．敛散性不确定.

7.16 设数列$\{a_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (n=1,2,\cdots)$无界，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$的收敛域是

A．$(-1,1]$.　　B．$[-1,1)$.

C．$[0,2)$.　　D．$(0,2]$.

7.17 设$\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-2)^n$的收敛区间为$(-2,6)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$的收敛区间是

A．$(-4,0)$.　　B．$(-3,1)$.

C．$(-2,2)$.　　D．$(-1,3)$.

7.18 求下列幂级数的收敛区间：

（1）$\dfrac{x}{1\cdot 3}+\dfrac{x^2}{2\cdot 3^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}$.

7.19 当$|x|<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$的和函数是

A. $\ln(1-x)$.

B. $\ln\dfrac{1}{1-x}$.

C. $\ln(x-1)$.

D. $-\ln(x-1)$.

7.20 利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}$；

7.21 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)\cdot 2^{n}}(x-1)^{n}$的收敛域及和函数.

7.22 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域与和函数.

7.23 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

7.24 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的幂级数.

7.25 将下列函数展开成 x 的幂级数，并求展开式成立的区间：

（1）$\ln\left(a+x\right)\quad\left(a>0\right)$；（2）$\sin^2 x$；

（3）$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$；（4）$\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}$．

7.26 设函数 $f(x)=x^2, x\in\left[0,\pi\right]$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$，则 $b_3=$________.

7.27 将函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}1, & 0\le x\le h,\\ 0, & h<x\le \pi\end{cases}$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

第八讲　向量代数与空间解析几何（数一）

8.1 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 $A(4,0,5)$，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{14}$，$\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$，$\cos\gamma=-\dfrac{2}{\sqrt{14}}$，则 B 的坐标为

A. $(10,-2,1)$.　　B. $(-10,-2,1)$.

C. $(10,2,1)$.　　D. $(10,-2,-1)$.

8.2 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求与向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 均垂直的单位向量.

8.3 过点 $P(2,0,3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面的方程是

A. $(x-2)-2(y-0)+4(z-3)=0$.

B. $3(x-2)+5(y-0)-2(z-3)=0$.

C. $-16(x-2)+14(y-0)+11(z-3)=0$.

D. $-16(x+2)+14(y-0)+11(z-3)=0$.

8.4 直线$L:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$与平面$\pi:x-y+2z+4=0$的夹角为

A．π.　　　　B．$\dfrac{\pi}{2}$.

C．$\dfrac{\pi}{3}$.　　　　D．$\dfrac{\pi}{6}$.

8.5 求过两点$A(0,1,0),B(-1,2,1)$且与直线$x=-2+t$，$y=1-4t$，$z=2+3t$平行的平面方程.

8.6 在平面xOy上求一点，使它到$x=0$，$y=0$及$x+2y-16=0$三直线的距离平方之和为最小.

8.7 经过点$A(1,0,0)$与点$B(0,1,1)$的直线绕z轴旋转一周生成的曲面方程是________.

8.8 曲面 $x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=a$ 的交线在 yOz 平面上的投影方程是

A. $\begin{cases}(a-z)^2+4y^2+z^2=4,\\ x=0.\end{cases}$

B. $\begin{cases}x^2+4y^2+(a-x)^2=4,\\ z=0.\end{cases}$

C. $\begin{cases}x^2+4y^2+(a-x)^2=4,\\ x=0.\end{cases}$

D. $(a-z)^2+4y^2+z^2=4.$

8.9 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处，沿着这抛物线在该点处偏向 x 轴正向的切线方向的方向导数.

8.10 求函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿从点 $(5,1,2)$ 到点 $(9,4,14)$ 的方向的方向导数.

8.11 求函数 $u = xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.

8.12 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0, \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

8.13 求出曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上的点，使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

8.14 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

8.15 求旋转椭球面$3x^2+y^2+z^2=16$上点$(-1,-2,3)$处的切平面与xOy面的夹角的余弦.

第九讲　多元函数积分学（数一）

9.1 计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2}\mathrm{d}z$.

9.2 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由平面 $z=0$， $z=y$， $y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域.

9.3 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 以及平面 $z=2$ 所围成的区域.

9.4 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是右半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(y\geqslant 0)$ 与 xOz 面所围成的区域.

9.5 曲线积分 $\oint_c\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s$，其中 C 是圆心在原点、半径为 a 的圆周，则积分值为.

A．$2\pi a^2$.　　B．πa^3.

C．$2\pi a^3$.　　D．$4\pi a^3$.

9.6 设 C 为从 $A(0,0)$ 到 $B(4,3)$ 的直线段，则 $\int_C (x-y)\mathrm{d}s$ 等于

A．$\int_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{d}x$.　　B．$\int_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\mathrm{d}x$.

C．$\int_0^3\left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\mathrm{d}x$.　　D．$\int_0^4\left(\frac{4}{3}y-y\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\mathrm{d}y$.

9.7 空间曲线 $x=3t$， $y=3t^2$， $z=2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$ 的弧长为________.

9.8 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

9.9 计算曲线积分 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$， L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，L 的方向为逆时针方向.

9.10 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内有一阶连续偏导数，L 为 D 内曲线，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关的充要条件为

A． $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某一函数的全微分.

B． $\oint_c P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$，其中 $C:x^2+y^2=1$ 在 D 内.

C． $\iint\limits_{x^2+y^2<1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

D． $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

9.11 设曲线积分 $\int_L \left[f(x) - e^x \right] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于

A. $\frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{x}\right)$.

B. $\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$.

C. $\frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) - 1$.

D. $1 - \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$.

9.12 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z dx + y dz =$ ________.

9.13 设 $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geqslant 0)$，$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分，则有.

A. $\iint\limits_{\Sigma} x dS = 4 \iint\limits_{\Sigma_1} x dS$.

B. $\iint\limits_{\Sigma} y dS = 4 \iint\limits_{\Sigma_1} y dS$.

C. $\iint\limits_{\Sigma} z dS = 4 \iint\limits_{\Sigma_1} z dS$.

D. $\iint\limits_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint\limits_{\Sigma_1} xyz dS$.

9.14 设 S 是半径为 R 的球面在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{S}(2x^2+3y^2+2z^2)\mathrm{d}S=$________.

9.15 设 Σ 为 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分的下侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

A. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(x^2+1-x-y\right)\mathrm{d}y$.　　B. $-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(x^2+1-x-y\right)\mathrm{d}y$.

C. $\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^1\left(x^2+z\right)\mathrm{d}y$.　　D. $-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(x^2+z\right)\mathrm{d}y$.

9.16 计算 $J=\oiint\limits_{S}|xy|z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+|x|y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 S 是由 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 构成的闭曲面外侧.

9.17 计算对坐标的曲面积分：$\oiint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma$是平面$x=0, y=0,$ $z=0, x+y+z=1$所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

9.18 设L是柱面方程$x^2+y^2=1$与平面$z=x+y$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L xz\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\mathrm{d}z =$________.