

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟。

第 I 卷(选择题 共 100 分)

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 10 分,共 100 分)在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 计算 $\log_2 8$ 的结果是 ()

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

2. 过点 $(\sqrt{2}, 0)$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切的直线的倾斜角大小为 ()

- A. 30°
- B. 45°
- C. 60°
- D. 75°

3. 函数 $y = \sin x$ 的反函数为 ()

- A. $y = \arcsin x$ ($x \in [-1, 1]$)
- B. $y = \arcsin x$ ($x \in [0, 1]$)
- C. $y = \arcsin x$ ($x \in [-1, 0]$)
- D. $y = \arcsin x$ ($x \in [0, \pi]$)

4. 若 l_1, l_2 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 给出下列四个命题:

- ① 若 $l_1 \perp \alpha, l_2 \perp \alpha$, 则 $l_1 \parallel l_2$
 - ② 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 - ③ 若 $l_1 \parallel \alpha, l_2 \parallel \alpha$, 则 $l_1 \parallel l_2$
 - ④ 若 $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma, l_1 \perp \alpha$, 则 $l_1 \perp \gamma$
- 其中正确命题的序号是: ()
- A. ① 和 ②
 - B. ② 和 ③
 - C. ③ 和 ④
 - D. ① 和 ④

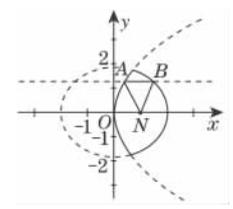
5. 从 4 名男生和 3 名女生中, 选出 4 名分别担任语文、数学、英语的课代表, 要求至少有 1 名女生, 则选派方案共有 ()

- A. 24 种
- B. 36 种
- C. 48 种
- D. 72 种

6. $\sin x > \frac{1}{2}$ 是 $\sin x = \frac{1}{2}$ 的 ()

- A. 充分非必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

7. 定点 $A(1, 0)$ 和动点 B 分别在图中抛物线 $y = x^2$ 及椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的实线部分上运动, 且 $AB \parallel x$ 轴, 则 $\triangle OAB$ 的周长 L 的取值范围是 ()



8. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 在 $x = 1$ 处取得极值, 且 $f(x) > 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的最小值为 ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

第 II 卷(共 50 分)

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 10 分,共 50 分)把答案填在题中横线上。

9. 已知 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (2, 1)$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 _____。

10. 在四面体 $ABCD$ 中, E 是 BC 中点, F 是 AD 中点, EF 与 AB 所成的角的大小为 _____。

11. 已知平面向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \vec{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$ ($\alpha, \beta \in [0, \pi]$)。若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$, 则 $\alpha - \beta$ 的值为 _____。若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则实数 λ 的值为 _____。

12. $(x + \frac{1}{x})^{10}$ 的展开式的二项式系数之和为 1023, 则展开式中常数项为 _____。

13. 已知定义在正实数集上的连续函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1) \\ x, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$, 则实数 $f(x)$ 的值为 _____。

14. 某资料室在计算机使用中, 如下表所示, 编码以一定规则排列, 且从左至右以及从上到下都是无限的。

员	员	员	员	员	员	...
员	圆	猿	源	缘	远	...
员	猿	缘	苑	怨	员	...
员	源	苑	园	猿	员	...
员	缘	怨	猿	苑	员	...
员	远	员	员	员	员	...
...

此表中, 主对角线上数列 员圆缘园猿苑... 的通项公式为 _____, 编码 员圆 共出现 _____ 次。

三、解答题(本大题共 5 小题,共 50 分)解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

15. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 。

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 当 $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值、最小值。

16. 一厂家向用户提供的一箱产品共 10 件, 其中有 2 件次品, 用户先对产品进行抽检以决定是否接收。抽检规定是这样的: 一次取一件产品检查, 若前三次没有抽查到次品, 则用户接收这箱产品, 而前三次中只要抽查到次品就停止抽检, 并且用户拒绝接收这箱产品。

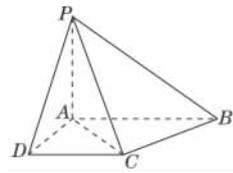
- (I) 求这箱产品被用户拒绝接收的概率;
- (II) 记 ξ 表示抽检的产品件数, 求 ξ 的概率分布列。

本题共 12 分

四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA \parallel$ 平面 PBC

$\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 1$, $PA = 2$

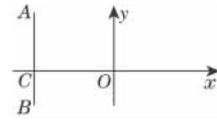
- (I) 求证: $PA \perp$ 平面 PBC ;
- (II) 求二面角 $P-BC-A$ 的大小;
- (III) 求点 A 到平面 PBC 的距离



本题共 12 分

如图, 在直角坐标系中, O 为坐标原点, 直线 $l \perp$ x 轴于点 A , 动点 M 到直线 l 的距离是它到点 A 的距离的 2 倍

- (I) 求点 M 的轨迹方程;
- (II) 设点 N 为点 M 的轨迹与 x 轴正半轴的交点, 直线 l 交点 M 的轨迹于 C, D 两点 (C, D 与点 N 不重合), 且满足 $\overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{ND} = 0$, 求直线 l 的斜率的取值范围



本题共 12 分

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_n = n^2 + 2n$

- (I) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列;
- (II) 设 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;
- (III) 设 $c_n = \frac{1}{a_n}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 C_n , 求证: $C_n < 1$

本题共 12 分

已知函数 $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$

- (I) 当 $x > 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (II) 若不等式 $f(x) \geq \frac{1}{x}$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{1\}$ B. $\{-1, 1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

2. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $ax + by + c = 0$ 是不同的直线, α, β, γ 是不同的平面, 有以下四个命题:

- ① $\begin{cases} \alpha // \beta \\ \alpha // \gamma \end{cases} \Rightarrow \beta // \gamma$
- ② $\begin{cases} \alpha \perp \beta \\ \beta // \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha \perp \beta$
- ③ $\begin{cases} \beta \perp \alpha \\ \beta // \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \perp \beta$
- ④ $\begin{cases} \beta // \gamma \\ \gamma \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow \beta // \alpha$

其中为真命题的是 ()
A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ①④

3. 设 $\omega > 0$, 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为 π , 则

- A. $\varphi > \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的必要非充分条件
- B. $\varphi > \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的必要不充分条件
- C. $\varphi > \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的充分必要条件
- D. $\varphi > \frac{\pi}{2}$ 既不充分也不必要条件

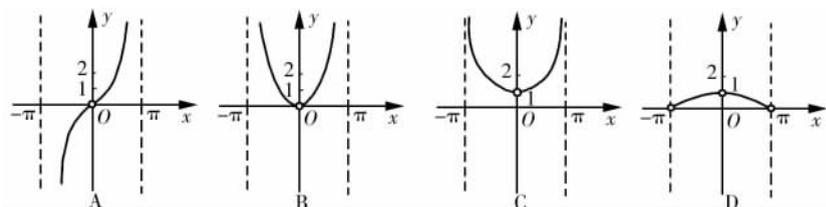
4. 将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 沿向量 $\vec{a} = (1, 1)$ 平移后, 恰好与直线 $ax + by + c = 0$ 相切, 则实数 c 的值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$
- C. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 在三角形 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, 则 $\frac{a}{b} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ($x \in \mathbb{R}$) 的图像可能是下列图像中的 ()



7. 从椭圆的右焦点 F_2 为圆心作一个圆, 使此圆过椭圆中心 O 并交椭圆于点 P , 若过椭圆左焦点 F_1 的直线 l 是圆 F_2 的切线, 则椭圆的右准线与圆 F_2 ()
A. 相交 B. 相离 C. 相切 D. 位置关系随离心率改变

8. 函数 $f(x) = ax + b$ 其中 a, b 是常数, 其图像是一条直线, 称这个函数为线性函数. 对于非线性可导函数 $f(x)$, 在点 x_0 附近一点 x 的函数值 $f(x)$, 可以用如下方法求其近似代替值: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. 利用这一方法, 求 $\sqrt{1.01}$ 的近似代替值 ()
A. 小于 1 B. 大于 1 C. 等于 1 D. 大小关系无法确定

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

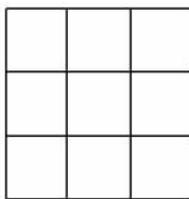
二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 15 分, 共 90 分)把答案填在题中横线上)

9. 若 $z = a + bi$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为 _____

10. 一个与球心距离为 r 的平面截球所得的圆面面积为 π , 则球的表面积为 _____
11. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角的大小为 _____

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \in \mathbb{R} \\ \ln x, & x \in (0, 1) \end{cases}$. 若 $f(x) \geq 0$, 则 x 的取值范围是 _____

13. 有这样一种数学游戏, 在 3×3 的表格中(见下图)要求在每个格子中都填上 1 至 3 三个数字中的某一个数字, 且每一行和每一列都不能出现重复的数字, 则此游戏共有 _____ 种不同填法



14. 数列 $\{a_n\}$ ($a_1 = 1, a_2 = 2, \dots$) 由下列条件所确定:

- (i) $a_{2n} = 2a_n$
- (ii) $n > 1$ 时, a_n 与 a_{n-1} 满足如下条件:
当 $a_{n-1} \geq 1$ 时, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$;
当 $a_{n-1} < 1$ 时, $a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$.

那么, 当 $a_n = 1$ 时, a_n 的通项公式 $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

当 $a_n = 2$ 时, 用 a_n 表示 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

三、解答题(本大题共 4 小题, 共 60 分)解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

15. 本小题共 15 分)

已知 α 为钝角, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 求 $\cos \alpha$ 的值:

(I) 求 $\cos \alpha$;

(II) 求 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值

16. 本小题共 15 分)

某公司有 100 万元资金用于投资, 如果投资甲项目, 根据市场分析知道: 一年后可能获利 10%, 可能损失 10%, 可能不赔不赚, 这三种情况发生的概率分别为 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$;

如果投资乙项目, 一年后可能获利 20%, 也可能损失 20%, 这两种情况发生的概率分别为 α 和 β ($\alpha + \beta < 1$)

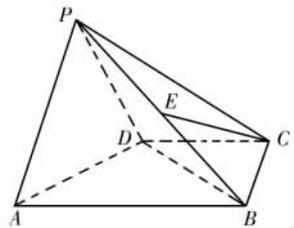
(I) 如果把 100 万元投资甲项目, 用 ξ 表示投资收益(收益 = 回收资金 - 原投资资金), 求 ξ 的概率分布及 $E\xi$;

(II) 若把 100 万元资金投资乙项目的平均收益不低于投资甲项目的平均收益, 求 α 的取值范围

本题共 12 分

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, $PA = PC = 2$, E 是 BC 的中点.

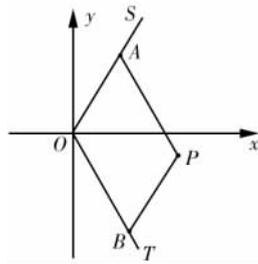
- (I) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;
- (II) 求 PE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值;
- (III) 求二面角 $P-BC-A$ 的大小.



本题共 12 分

如图,在平面直角坐标系 xOy 中,点 $A(1,0)$, $B(0,1)$ 分别在射线 OA , OB 上移动,且 $\angle AOB = 90^\circ$. 动点 P 满足 $\vec{OP} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$.

- (I) 求 λ 的值;
- (II) 求点 P 的轨迹方程,并说明它表示怎样的曲线;
- (III) 若直线 l 过点 A 且与 (II) 中曲线 C 交于 M, N 两点 (M, N 三点互不相同),且 $\vec{OM} \cdot \vec{ON} = 0$,求 l 的方程.



本题共 12 分

设关于 x 的方程 $x^2 - 2x + \lambda = 0$ 有两个实根 α, β , 且 $\alpha < \beta$. 定义函数 $f(x) = \frac{\ln(x-\alpha)}{\ln(x-\beta)}$.

- (I) 求 $f(\alpha)$ 与 $f(\beta)$ 的值;
- (II) 判断 $f(x)$ 在区间 (α, β) 上的单调性,并加以证明;
- (III) 若 λ, μ 为正实数,证明不等式: $\frac{\lambda \ln \mu}{\lambda + \mu} < \frac{\mu \ln \lambda}{\lambda + \mu} < \frac{\lambda \ln \lambda}{\lambda + \mu}$.

本题共 12 分

已知:数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$.

- (I) 求 a_1, a_2, a_3 ;
- (II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (III) 求证: $\frac{1}{a_n} < n$.

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

第 I 卷(选择题 共 40 分)

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x + 1 < 0\}$, 则满足 $A \cup B = A$ 的集合 B 的个数是 ()

- 粤 A. 1
- 月 B. 2
- 悦 C. 3
- 阅 D. 4

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差等于 ()

- 粤 A. 1
- 月 B. 2
- 悦 C. 3
- 阅 D. 4

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 1)e^{-x}, & x > 0 \\ \ln(x + 1), & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 那么实数 a 的取值范围是 ()

- 粤 A. $(-\infty, 0]$
- 月 B. $(-\infty, 1]$
- 悦 C. $(-\infty, 2]$
- 阅 D. $(-\infty, 3]$

4. 若把一个函数 $y = f(x)$ 的图像按 $(\pi, 0)$ 平移后得到函数 $y = f(x - \pi)$ 的图像, 则函数 $y = f(x)$ 的解析式为 ()

- 粤 A. $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$
- 月 B. $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- 悦 C. $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
- 阅 D. $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

5. 已知以椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点 F 为圆心, b 为半径的圆与椭圆的右准线交于不同的两点, 则该椭圆的离心率的取值范围是 ()

- 粤 A. $(\frac{1}{2}, 1)$
- 月 B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$
- 悦 C. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$
- 阅 D. $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 1)$

6. 地球的半径为 R , 若甲地位于北纬 30° 东经 120° , 乙地位于南纬 30° 东经 120° , 则甲、乙两地的球面距离为 ()

- 粤 A. $\frac{2\pi R}{3}$
- 月 B. $\frac{\pi R}{3}$
- 悦 C. $\frac{2\pi R}{3}$
- 阅 D. $\frac{\pi R}{3}$

7. 某运动员参加男子 100 米的决赛, 已知运动场有从内到外编号依次为 1 至 8 的八条跑道, 若指定的某运动员所在的跑道编号必须是三个连续数字(如: 123), 则参加比赛的这 8 名运动员安排跑道的方式共有 ()

粤 A. 24

月 B. 36

悦 C. 48

阅 D. 72

第 II 卷(非选择题 共 110 分)

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)把答案填在题中横线上)

8. 计算: $\int_0^1 (x^2 + 1) dx =$ _____

9. 已知 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 单调递减区间是 _____

10. 已知点 $A(1, 0)$ 的直线 l 与圆 $C: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 交于 M, N 两点, C 为圆心, 当 $\angle MCN$ 最小时, 直线 l 的方程为 _____

11. $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 的展开式的第 5 项的值等于 $\frac{1}{2}$ 时, $n =$ _____, 此时

二项式系数之和为 _____

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$, 且 $a_n > 0$, 则 $a_{2012} =$ _____

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分)解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

13. 已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

- (I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
- (II) 求 $f(x)$ 函数图像的对称轴方程;
- (III) 求 $f(x)$ 的单调区间

14. 已知各项都不相等的等差数列 $\{a_n\}$ 的前六项和为 36, 且 a_1, a_3, a_5 为等比数列

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及前 n 项和 S_n ;

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = a_1, b_{n+1} = a_n + a_{n+1}$, 且 $b_n > 0$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n

15. 某中学排球队进行发球训练, 每人在一轮练习中最多可发球 5 次, 且规定一旦发球成功即停止该轮练习, 否则一直发到 5 次为止

(I) 求一轮练习中队员甲的发球次数 ξ 的分布列, 并求出 ξ 的数学期望 $E\xi$;

(II) 求一轮练习中队员甲至少发球 3 次的概率

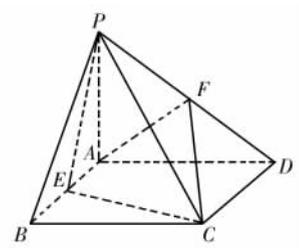
题源本小题满分 12 分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是矩形, E, F 分别是 AB, CD 的中点. 若 $PA = \sqrt{2}AB$.

(I) 求证: $PE \parallel$ 平面 PCD ;

(II) 求点 C 到平面 PCD 的距离;

(III) 求直线 PC 与平面 PCD 所成角的大小.



题源本小题满分 12 分)

已知平面上两定点 $A(0, 0)$ 、 $B(1, 0)$, P 为一动点, 满足 $|PA| + |PB| = 2$.

(I) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(II) 若 M, N 是轨迹 C 上的两不同动点, 且 PM, PN 分别以 M, N 为切点作轨迹 C 的切线, 设其交点为 Q , 证明 $MQ \cdot NQ$ 为定值.

题源本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, 过点 $P(1, 0)$, 作曲线 $y = f(x)$ 的两条切线 l_1, l_2 , 切点分别为 A, B .

(I) 当 $x > 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 设 $g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, 试求函数 $g(x)$ 的表达式;

(III) 在 (II) 的条件下, 若对任意的正整数 n 在区间 $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$ 内总存在 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 使得不等式 $g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_n) > \frac{1}{n}$ 成立, 求 n 的最大值.

数学

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分... 考试时间120分钟

第I卷(选择题 共48分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题4分,共48分) 每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项)

复数z在复平面内,复数z对应的点位于 ()

- 第一象限 第二象限 第三象限 第四象限

若集合A={x|x^2-1=0}, B={x|x^2-2x+1=0}, 则“x∈A”是“x∈B”的 ()

- 充分不必要条件 必要不充分条件 充分必要条件 既不充分也不必要条件

已知函数f(x)=x^2+ax+b, 若f(x)在区间[1,2]上恒有f(x)≥0, 则实数a的取值范围是 ()

- a≥-3 a≥-1 a≤-3 a≤-1

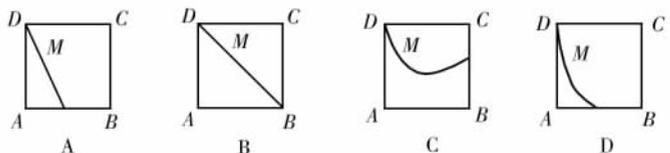
某小组有4名女生, 3名男生, 这7名同学排成一行, 其中甲、乙、丙四名女生必须排在一起, 另两名女生不相邻且不与前3名女生相邻, 则不同的排法共有 ()

- 24种 36种 48种 72种

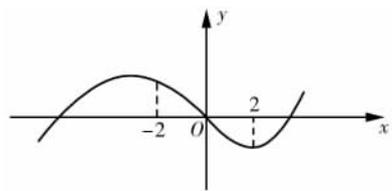
斜率为1的直线l过双曲线x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1的右焦点, 且与双曲线的左、右两支分别相交, 则双曲线的离心率e的取值范围是 ()

- e>1 e>2 e>3 e>4

如图, 在四棱锥P-ABCD中, 侧面PAD为正三角形, 底面ABCD为正方形, 侧面PAD⊥底面ABCD, M为底面ABCD内的一个动点, 且满足PM⊥DM, 则点M在正方形ABCD内的轨迹为 ()



函数f(x)=x^2+ax+b的图像如图



所示, 则a, b的值一定 ()

- a>0, b>0 a<0, b>0 a>0, b<0 a<0, b<0

若f(x)=x^2+ax+b, 规定: f(x)·f(x) = f(x^2+ax+b) (x^2+ax+b)...

(f(x)·f(x)) = f(x^2+ax+b) (x^2+ax+b) ()

- f(x)是奇函数不是偶函数 f(x)是偶函数不是奇函数 f(x)既是奇函数又是偶函数 f(x)既不是奇函数又不是偶函数

第II卷(非选择题 共72分)

二、填空题(本大题共6小题, 每小题12分, 共72分) 答案填在题中横线上)

已知等差数列{a_n}的公差为1, 且a_1, a_3, a_5成等比数列, 则a_1 = _____

在二项式(x^2+ax)^n的展开式中, 若所有项的系数之和等于1, 则a = _____, 这个展开式中含x项的系数是 _____

函数f(x)=x^2+ax+b, 若f(x)的反函数f^-1(x) = x^2+ax+b, 则a = _____

已知函数f(x)=x^2+ax+b, 若f(x)在[1,2]上连续, 则f(1) = _____

已知函数f(x)=x^2+ax+b, 若f(x)在[1,2]上连续, 则f(1) = _____

已知函数f(x)=x^2+ax+b, 若f(x)在[1,2]上连续, 则f(1) = _____

已知点P(x, y)的坐标满足条件: x^2+y^2 ≤ 1, 若P(x, y)在圆x^2+y^2=1上的最大值为1, 则a = _____

定义一种运算“*”, 它对于正整数n满足以下运算性质:

(1) 1*1=1; (2) (n+1)*n = n*(n+1) + 1; (3) n*(n+1) = n^2 + n, 则1*2*3*...*n = _____

三、解答题(本大题共3小题, 共72分) 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

本小题共12分)

设函数f(x)=x^2+ax+b的图像与直线y=x相切于点M, 且点M的横坐标为1

- (I) 求a, b的值; (II) 求函数f(x)的单调区间, 并指出在每个区间上的增减性

本小题共12分)

已知△ABC的三个内角分别为A, B, C, 向量a=(cos A, sin A)与向量b=(cos B, sin B)

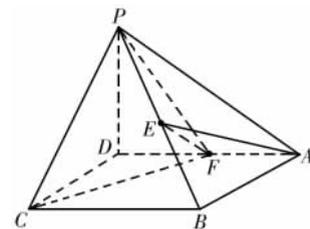
(I) 求角C的大小;

(II) 求cos A的取值范围

本小题共12分)

如图, 在四棱锥P-ABCD中, 底面ABCD为正方形, PA⊥平面ABCD, 且PA=AB, E, F分别为PB, PC的中点

- (I) 求异面直线EF与PD所成角的大小; (II) 求证: EF⊥平面PAC; (III) 求二面角P-AC-D的大小



本题共 12 分)

某学生玩投飞镖游戏,他一次投镖所得环数 ξ 的概率分布如下:

10	9	8	7
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

若这名学生投两次飞镖,记两次投中的最高环数为 ξ

(I)求该名生两次都投中 8 环的概率;

(II)求 ξ 的分布列和数学期望

本题共 12 分)

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点是 F ,右顶点是 A ,虚轴的上端点是 B ,且 $\angle BAF = 45^\circ$

(I)求双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的方程;

(II)过点 $P(1,0)$ 的直线 l 交双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 于 M, N 两点,交 x 轴于点 Q 点 M 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的顶点不重合),当 $\frac{PM}{MQ} = \lambda$ 时,求点 Q 的坐标

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像上的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 横坐标为 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 = 2$ (其中 O 为坐标原点)

本题共 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像上的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 横坐标为 x_1, x_2 满足 $x_1 + x_2 = 2$ (其中 O 为坐标原点)

(I)求证: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 为定值;

(II)若 $x_1 < 1 < x_2$,求 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ 的取值范围;

(III)已知 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像上的点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 其中 $x_1 < 1 < x_2$,且 $x_1 + x_2 = 2$,求 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ 的取值范围

(III)已知 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像上的点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 其中 $x_1 < 1 < x_2$,且 $x_1 + x_2 = 2$,求 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ 的取值范围

项和,若 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2}$ 对一切 $x_1 < 1 < x_2$ 都成立,试求 $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ 的取值范围

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分 满分 员圆分,考试时间 员圆分钟

第 I 卷(选择题 共 源分)

一、选择题(本大题共 愿小题,每小题 缘分,共 源分)在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

员毅复数 拙,越员垣蚤拙,越曾原蚤曾(砸)若 拙,拙为实数,则 曾等于 ()

- 粤 猿 月 猿 悦 猿 阅 猿

圆毅 ̑、̒ 为两个平面,造皂为两条直线,且 造 ̑,皂 ̒,有如下两个命题:

- ①若 ̑//̒,则 造/皂; ②若 造 皂,则 ̑⊥̒

那么 ()

- 粤 ①是真命题,②是假命题 月 ①是假命题,②是真命题 悦 ①,②都是真命题 阅 ①,②都是假命题

猿毅 知直线 赠越葬葬(葬)和圆 曾垣赠垣曾原圆曾原圆相切,那么 葬的值是 ()

- 粤 猿 月 猿 悦 猿 阅 猿

源毅 等比数列{葬}的前 灶项和是 杂,且 葬垣葬垣...垣葬垣葬垣...那么 造杂的值为 ()

- 粤 猿 月 猿 悦 猿 阅 猿

缘毅 在 (曾原员)的展开式中常数项是 ()

- 粤 猿 月 猿 悦 猿 阅 猿

远毅 知函数 枣曾越曾原曾,若 枣曾越遭(遭)则 枣原葬等于 ()

- 粤 猿 月 猿 悦 猿 阅 猿

苑毅 知 噪在(曾,越)噪员,曾越(圆,源)若 遭月遭源则△曾悦是直角三角形的概率是 ()

- 粤 猿 月 猿 悦 猿 阅 猿

愿毅 若集合 粤,粤满足 粤∪粤越粤,则记[粤,粤]是 粤的一组双子集拆分规定: [粤,粤]和[粤,粤]是 粤的同一组双子集拆分 已知集合 粤越{员,圆,猿},那么 粤的不同双子集拆分共有 ()

- 粤 猿组 月 猿组 悦 猿组 阅 猿组

- 粤 猿组 月 猿组 悦 猿组 阅 猿组

- 粤 猿组 月 猿组 悦 猿组 阅 猿组

- 粤 猿组 月 猿组 悦 猿组 阅 猿组

- 粤 猿组 月 猿组 悦 猿组 阅 猿组

- 粤 猿组 月 猿组 悦 猿组 阅 猿组

- 粤 猿组 月 猿组 悦 猿组 阅 猿组

- 粤 猿组 月 猿组 悦 猿组 阅 猿组

第 II 卷(非选择题 共 员圆分)

二、填空题(本大题共 远小题,每小题 缘分,共 猿分)把答案填在题中横线上)

怨毅 知向量 葬越员猿,遭越曾原员,且 葬/遭,则实数 曾越_____

员圆毅 知函数 赠越|泽(ω曾垣π/远)|的最小正周期是 π/圆,那么正数 ω 越_____

员猿毅 在平面直角坐标系中,不等式组 { 曾>园,赠>园, 曾垣赠原园<园 } 所表示的平面区域的面积是 _____,变量 拙越曾垣赠的最大值是_____

员源毅 双曲线 曾原赠/葬与直线 曾原赠垣圆相交于 粤,月两点,且 粤月过原圆,则

双曲线的离心率 藻越_____

员缘毅 点(员,员)作曲线 赠越曾的切线,则切线方程为_____

员远毅 对于函数 枣曾定义域中任意的 曾,曾(曾≠曾),有如下结论:

- ① 枣曾垣曾)越枣曾)·枣曾); ② 枣曾)·曾)越枣曾)垣枣曾); ③ (曾原曾)·[枣曾)原枣曾)]约园; ④ 枣曾垣曾)约枣曾)垣枣曾)

当 枣曾越曾时,上述结论中正确结论的序号是_____ 援写出全部正确结论的序号)

三、解答题(本大题共 远小题,共 愿分)解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

员毅 本小题满分 愿分)

△曾悦中,内角 粤,月,悦的对边分别为 葬,遭,糟且√(葬)悦垣(遭)悦越(圆)悦

- (I)求角 悦的大小; (II)若 葬,遭,糟成等比数列,求 泽曾的值

员圆毅 本小题满分 愿分)

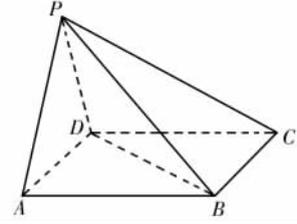
某次有奖竞猜活动设有 粤,月两组相互独立的问题,答对问题 粤可赢得奖金 猿千元,答对问题 月可赢得奖金 远千元,规定答题顺序可任选,但只有一个问题答对后才能解答下一个问题,否则中止答题.假设你答对问题 粤,月的概率依次为 员/圆, 员/猿

- (I)若你按先 粤后 月的次序答题,写出你获得奖金的数额 ξ 的分布列及期望 耘; (II)你认为获得奖金期望值的大小与答题顺序有关吗?证明你的结论

员圆毅 本小题满分 愿分)

如图,在四棱锥 孕原粤月悦中,底面 粤月悦是正方形,侧面 孕粤月是正三角形,且平面 孕粤月⊥底面 粤月悦

- (I)求证:平面 孕粤月⊥平面 孕粤悦; (II)求二面角 粤原粤月原粤悦的大小; (III)设 粤月越员,求点 悦到平面 孕粤悦的距离



员援本小题满分 员分)

设 葬垣函数 枣曾越 葬曾援

(I)讨论 枣曾的单调性;

(II)求 枣曾在区间[葬愿葬]上的最小值援

员援本小题满分 员分)

给定抛物线 悦:赠越愿曾,云是 悦的焦点,过点 云的直线 造与 悦相交于 粤 月两点,记 韵为坐标原点援

(I)求 韵粤 韵月的值;

(II)设 粤越 云,当三角形 韵粤月的面积 杂∈[圆,圆√缘]时,求 狼的取值范围援

圆援本小题满分 员分)

设集合 宰是满足下列两个条件的无穷数列{葬}的集合:

① $\frac{\text{葬垣葬}}{\text{圆}} \leq \text{葬}$; ② 葬 ≤ 酝葬中 灶 晕,酝是与 灶无关的常数援

(I)若{葬}是等差数列,杂是其前 灶项的和,葬越原杂越愿证明:{杂}∈宰;

(II)设数列{遭}的通项为 遭越灶原愿,且{遭}∈宰,求 酝的取值范围;

(III)设数列{糟}的各项均为正整数,且{糟}∈宰,证明:糟 ≤ 糟垣援

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的)

1. 已知集合 $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 < 0\}$, 且 M 的元素中至少含有一个奇数, 则满足条件的集合 M 共有

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

2. 若 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $\phi(x) = x^2 - 1$, 则 ϕ 是 \mathbb{R} 上的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1)$ 的图像过点 $(e, 1)$, 则 $f(e)$ 等于

- (A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{e-1}$ (C) $\frac{1}{e+1}$ (D) $\frac{1}{e-2}$

4. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中, M, N 分别是 AB, AC 的中点, 有下列三个论断:

- ① $PM \perp MN$; ② $PM \perp$ 平面 AMN ; ③ $PM \perp$ 平面 ABC

其中正确论断的个数为

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

5. 若 $(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2 = 1$, 则 $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ 的值为

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{16}$

6. 已知 \vec{a}, \vec{b} 是不共线的向量, $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 那么 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三点共线的充要条件为

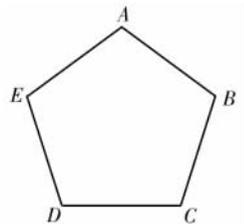
- (A) $\lambda + \mu = 1$ (B) $\lambda = \mu = 1$ (C) $\lambda = \mu = 0$ (D) $\lambda = \mu = 1$

7. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的半焦距为 c , 离心率为 e , 若直线 $bx - cy = 0$ 与双曲线的一个交点的横坐标恰为 c , 则 e 等于

- (A) $\frac{c}{a}$ (B) $\frac{c}{b}$ (C) $\frac{c}{a-b}$ (D) $\frac{c}{a+b}$

8. 如图, 正五边形 $ABCDE$ 中, 若把顶点 A, B, C, D, E 涂上红、黄、绿三种颜色中的一种, 使得相邻顶点所染颜色不相同, 则不同的染色方法共有

- (A) 12 种 (B) 24 种 (C) 30 种 (D) 60 种



第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 15 分, 共 90 分) 把答案填在题中横线上)

9. 甲、乙、丙三个加工厂共生产玩具 1200 件, 其中甲厂生产了 400 件, 现采用分层抽样的方法从三个加工厂抽取一个容量为 100 件的样本进行质量检测, 则应从甲厂抽取 _____ 件玩具

10. 若 $z = \frac{1-i}{1+i}$, 则 z^2 是虚数单位, 则 z^2 等于 _____

11. 函数 $f(x) = \ln(x-1)$ 的定义域为 _____

12. 设 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 的最小值是 a , 则 a 等于 _____

13. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 边长为 1, 高为 2, 它的八个顶点都在同一球面上, 那么球的半径是 _____; A_1C_1 两点的球面距离为 _____

14. 按下列程序框图运算:



规定: 程序运行到“判断结果是否大于 224”为 1 次运算

若 $x = 1$, 则运算进行 _____ 次才停止; 若运算进行 4 次才停止, 则 x 的取值范围是 _____

三、解答题(本大题共 3 小题, 共 60 分) 解答时应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

15. 本小题满分 12 分)

已知 α 为第二象限的角, β 为第三象限的角, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \beta = -\frac{5}{13}$

(I) 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值;

(II) 求 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值

16. 本小题满分 12 分)

设甲、乙两套试验方案在一次试验中成功的概率均为 $\frac{1}{2}$, 且这两套试验方案中至少有一套试验成功的概率为 $\frac{3}{4}$. 假设这两套试验方案在试验过程中, 相互之间没有影响

(I) 求 $\frac{1}{2}$ 的值;

(II) 设试验成功的方案的个数为 ξ , 求 ξ 的分布列及数学期望

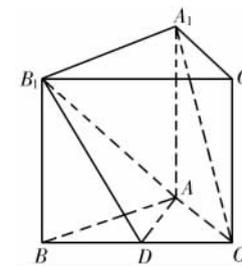
17. 本小题满分 12 分)

如图, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M 是 BC 的中点, N 是 CC_1 的中点

(I) 求证: $BM \perp$ 平面 A_1MN ;

(II) 求二面角 $M-A_1N-C$ 的大小;

(III) 求点 M 到平面 A_1MN 的距离



员援本小题满分 员分)

设直线 造赠越噪 曾垣员与椭圆 曾垣猿曾越葬(葬跃园)相交于 粤 月两个不同的点,与 曾轴相交于点 悦,记 韵为坐标原点援

(I)证明 :葬跃猿可猿;

(II)若 粤悦越圆悦,求 △ 韵粤月的面积取得最大值时的椭圆方程援

员援本小题满分 员分)

设 葬跃园函数 枣曾越曾原葬/曾垣员垣葬援

(I)若 枣曾在区间(园,员)上是增函数,求 葬的取值范围;

(II)求 枣曾在区间(园,员)上的最大值援

圆援本小题满分 员分)

设 葬,葬, …, 葬是首项为 员公比为 圆的等比数列,对于满足 园 < 噪 < 圆的整数 噪

数列 遭,遭, …, 遭由 遭越 $\begin{cases} 葬垣噪, & \text{当 } 噪 \leq 圆 \text{ 原 } 噪 \text{ 时,} \\ 葬垣噪 \text{ 原 } 圆, & \text{当 } 圆 \text{ 原 } 噪 \text{ 约 } 噪 \leq 圆 \text{ 时} \end{cases}$ 确定援记 酝越 $\sum_{噪=1}^n 遭$ 援

(I)当 噪越员时,求 酝的值;

(II)求 酝的最小值及相应的 噪的值援

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟

参考公式:

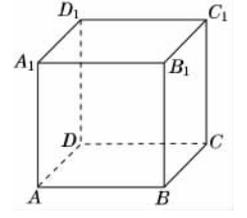
- 如果事件 A, B 互斥,那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$
- 如果事件 A, B 相互独立,那么 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$
- 如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p ,那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- 球的表面积公式 $S = 4\pi R^2$
- 球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- 其中 R 表示球的半径

第 I 卷(选择题 共 120 分)

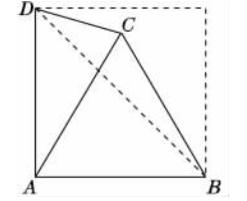
一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 10 分,共 120 分)在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 - (A) $\{x \mid -1 < x < 3\}$
 - (B) $\{x \mid 1 < x < 3\}$
 - (C) $\{x \mid 1 < x < 4\}$
 - (D) $\{x \mid 2 < x < 3\}$
- 方程 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$ 表示的曲线的对称性是 ()
 - (A) 关于原点对称
 - (B) 关于两坐标轴对称
 - (C) 关于直线 $x=1$ 对称
 - (D) 关于直线 $y=2$ 对称
- 若复数 z 满足对应关系 $z + \bar{z} = 2 + i$, $z - \bar{z} = 3 - 2i$, 则 $z =$ ()
 - (A) $1 + \frac{1}{2}i$
 - (B) $1 + i$
 - (C) $1 + \frac{3}{2}i$
 - (D) $1 + 2i$
- 数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_1 = 1, a_n = \frac{1}{n} + a_{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$), 则 a_{100} 的值为 ()
 - (A) $\frac{101}{100}$
 - (B) $\frac{100}{101}$
 - (C) $\frac{100}{100}$
 - (D) $\frac{101}{101}$
- 已知两圆 $\odot O_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$ 和 $\odot O_2: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ 都经过点 $(0, 0)$, 则同时经过点 $(0, 0)$ 和点 $(2, 2)$ 的直线方程为 ()
 - (A) $x - y = 0$
 - (B) $x + y - 2 = 0$
 - (C) $x - y - 2 = 0$
 - (D) $x + y + 2 = 0$
- 若关于 x 的方程 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0$ 恒有实数解, 则实数 a 的取值范围是 ()
 - (A) $[-1, 1]$
 - (B) $(-1, 1)$
 - (C) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
 - (D) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
- 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 对于下列结论: ① $AC \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$; ② AC 和 BC_1 所成角为 60° ; ③ 点 C 与点 A_1 在该正方体外接球表面上的球面距离为 $\frac{\pi}{2}$. 其中正确结论的个数是 ()
 - (A) 0
 - (B) 1
 - (C) 2
 - (D) 3

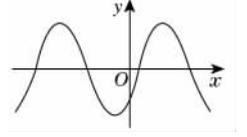
为 $\sqrt{3}$, 则 $\sqrt{3}$ 中正确结论的个数是 ()



- 若函数 $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{x}$, 则函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 ()
 - (A) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
 - (B) $(-1, 1)$
 - (C) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 - (D) $(-1, 1) \cup (1, \infty)$
- 将边长为 1 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角, 若点 P 满足 $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$, 则 $x^2 + y^2$ 的值为 ()
 - (A) $\frac{1}{2}$
 - (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - (C) $\frac{3}{4}$
 - (D) $\frac{1}{4}$



- 反复抛掷一个骰子, 依次记录下每一次抛掷落地时向上的点数, 当记有三个不同点数时即停止抛掷, 若抛掷五次恰好停止, 则记有这五次点数的所有不同记录结果的种数有 ()
 - (A) 60
 - (B) 120
 - (C) 240
 - (D) 480
- 已知直线 $l: y = kx + 1$ 与函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 的图像(如图所示)有且仅有两个公共点, 若这两个公共点的横坐标分别为 α, β , $\beta > \alpha$, 则下列结论中正确的是 ()
 - (A) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) > \sin(\beta - \frac{\pi}{4})$
 - (B) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) < \sin(\beta - \frac{\pi}{4})$
 - (C) $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) > \cos(\beta - \frac{\pi}{4})$
 - (D) $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) < \cos(\beta - \frac{\pi}{4})$



- 已知点 F_1, F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, P 为右支上一点, 点 P 到右准线的距离为 d , 若 $|PF_1|, |PF_2|, d$ 依次成等差数列, 则此双曲线离心率的取值范围是 ()
 - (A) $(1, 2)$
 - (B) $(1, \frac{3}{2})$
 - (C) $(\frac{3}{2}, 2)$
 - (D) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

悦园/猿垣肆) 悦园/猿垣肆) 悦园/猿垣肆)

第 II 卷(非选择题 共 30 分)

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 6 分,共 30 分)把答案填在题中横线上)

- 已知 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (2, 1)$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ _____
- 成都为第一批“中国最佳旅游城市”的成都, 市民们喜欢节假日到近郊休闲和旅游, 去年相关部门对城东“五朵金花”之一的某景区在“五一”黄金周中每天的游客人数作了统计, 其频率分布如下表所示:

时间	缘月员日	缘月圆日	缘月猿日	缘月源日	缘月缘日	缘月远日	缘月苑日
频率	园圆						

- 已知缘月员日这天该景区的营业额约为 愿万元, 假定这七天每天游客人均消费相同, 则这个黄金周该景区游客人数最多的那一天的营业额约为 _____ 万元
- 我们把平面内与直线垂直的非零向量称为直线的法向量, 在平面直角坐标系中, 利用求动点轨迹方程的方法, 可以求出过点 $P(x_0, y_0)$ 且法向量为 $\vec{n} = (a, b)$ 的直线(点法式)方程为 $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, 化简后得 $ax + by - ax_0 - by_0 = 0$. 类比以上求法, 在空间直角坐标系中, 经过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 且法向量为 $\vec{n} = (a, b, c)$ 的平面(点法式)方程为 _____ (请写出化简后的结果)

定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x + 2) = f(x)$ 且函数 $f(x)$ 为奇函数, 给出下列结论:

- 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2;
- 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称;
- 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称;
- 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

其中正确结论的序号是 _____ 援写出所有你认为正确的结论的序号)

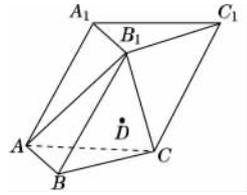
三、解答题(本大题共 3 小题,共 30 分)解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

- 本小题满分 10 分) 在锐角三角形 ABC 中, 已知内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}a \cos B = b \sin A$. (I) 若 $a = 2, b = 3$, 求 c 的大小; (II) 已知向量 $\vec{m} = (\cos A, \sin A), \vec{n} = (\cos B, \sin B)$, 求 $\vec{m} \cdot \vec{n}$ 的取值范围

本题满分 15 分)

如图,在各棱长均为 2 的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 ABB_1A_1 上底面 ABC 的射影 D 为 BC 的中点.

- (I) 求侧棱 AA_1 与平面 ABC 所成角的大小;
- (II) 已知点 M 满足 $\vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$, 在直线 AA_1 上是否存在点 N , 使 $MN \parallel$ 平面 ABC ? 若存在, 请确定点 N 的位置; 若不存在, 请说明理由.



本题满分 15 分)

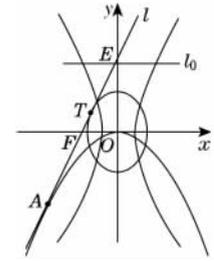
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1, S_n = 2a_{n+1} - 1$ ($n \in \mathbb{N}^+$)

- (I) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;
- (II) 对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, 设 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 求使不等式 $b_1 + b_2 + \dots + b_n < 2$ 成立的自然数 n 的最小值.

本题满分 15 分)

如图, 与抛物线 $y^2 = 4x$ 相切于点 P 的直线 l 分别交 y 轴、 x 轴于点 A, B . 过点 B 作 $BC \perp$ x 轴, 垂足为 C .

- (I) 若以 BC 为一条准线, 中心在坐标原点的椭圆恰与直线 l 相切, 切点为 Q , 求椭圆的方程及点 Q 的坐标;
- (II) 若直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个交点为 M, N , 且点 P 为线段 MN 的中点, 又过点 B 的直线与该双曲线的两支分别交于 R, S 两点, 记 RS 在 x 轴正方向上的投影为 RS' , 且 $(\vec{PM} \cdot \vec{PS}) > 0, RS' \in [\frac{1}{2}, 1]$, 求 (I) 中切点 Q 到直线 RS' 的距离的最小值.



本题满分 15 分)

一种电脑屏幕保护画面, 只有符号“O”和“伊”随机地反复出现, 每秒钟变化一次, 每次变化只出现“O”和“伊”之一, 其中出现“O”的概率为 $\frac{1}{2}$, 出现“伊”的概率为 $\frac{1}{2}$. 若第 n 次出现“O”, 则记 $X_n = 1$; 出现“伊”, 则记 $X_n = 0$. 记 $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

- (I) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 记 $\xi = \frac{S_n}{n}$, 求 ξ 的分布列及数学期望;
- (II) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} > \frac{1}{2}$ 的概率.

本题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ x^2 - 2x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ (e 是自然对数的底数)

- (I) 当 $x > 0$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;
- (II) 当 $x > 0$ 时, 设 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 对 $\forall x > 0$, 试比较 $f^{-1}(x)$ 与 $f(x)$ 的大小.

数学

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分... 考试时间120分钟

第I卷(选择题 共60分)

参考公式:

- 如果事件A, B互斥, 那么... 球的表面积公式 S=4πR^2
如果事件A, B相互独立, 那么... 其中R表示球的半径
如果事件A在一次试验中发生的概率是P, 那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率... 球的体积公式 V=4/3πR^3

一、选择题(本大题共12小题, 每小题5分, 共60分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一个是符合题目要求的)

- 1. 已知集合A={x|x^2-3x+2=0}, B={x|x^2-4x+4=0}, 则A∪B=...
2. 已知等比数列{a_n}中, 已知a_1=1, a_2=2, 则a_3=...
3. 已知单位向量a, b的夹角为π/3, 那么|a+b|=...
4. 已知抛物线y^2=2px(p>0), 直线l过焦点F且与p轴不重合, 则抛物线被l垂直平分弦共有...
5. 长方体的对角线长度是√6, 若长方体的8个顶点都在同一个球面上, 则这个球的表面积是...

- 6. 已知函数f(x)=x^2+2x-3, 若f(x)≥0, 则x的取值范围是...
7. 已知实系数方程x^2+bx+c=0的两个实根分别为α, β, 且α+β=1, αβ=0, 则b的取值范围是...
8. 已知△ABC的三个内角A, B, C所对的三边分别为a, b, c, 若△ABC的面积S=1/2bc sin A, 则sin A=...

第II卷(非选择题 共90分)

二、填空题(本大题共5小题, 每小题18分, 共90分, 把答案填在横线上)

- 9. 某校高三年级有男生1000人, 某次考试中成绩为A等级的有200人, B等级的有300人, C等级的有400人, D等级的有100人, 为了了解考试情况, 欲从中抽取一个容量为100的样本, 若采用分层抽样方法, 则抽取成绩为B等级的人数是...
10. 已知数列{a_n}的前n项和为S_n, 且S_n=2^n-1, 则a_n=...
11. 已知椭圆x^2/a^2+y^2/b^2=1(a>b>0)的右焦点为F, 方向向量为(1, 1), 若原点到直线AF的距离是右焦点到右准线距离, 则椭圆的离心率为...
12. 在平面直角坐标系中, 横、纵坐标均为整数的点叫做格点, 若函数图像恰经过n个格点, 则称函数f(x)为n阶格点函数. 已知函数: ①f(x)=x^2; ②f(x)=x^3; ③f(x)=x^4; ④f(x)=x^5; ⑤f(x)=x^6; ⑥f(x)=x^7. 其中为一阶格点函数的序号为... (注: 把你认为正确结论的序号都填上)

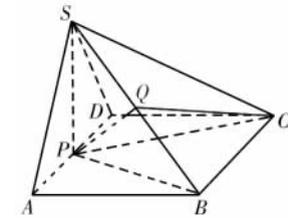
三、解答题(本大题共3小题, 共60分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

- 13. 已知函数f(x)=sin(ωx+φ), 其中ω>0, φ∈[0, π/2). 记f(x)的最小正周期为π. (I)求f(x)的最大值及取得最大值时x的集合; (II)将函数f(x)的图像按向量(π/2, 0)平移后得函数g(x), 求g(x)的最小值.

- 14. 甲、乙两人射击(每次射击是相互独立事件), 规则如下: 若某人一次击中, 则由他继续射击, 若一次不中, 就由对方接替射击. 已知甲、乙二人每次击中的概率均为1/2. 若两人合计共射击n次, 且第一次由甲开始射击. (I)甲恰好击中k次的概率; (II)乙射击次数ξ的分布列及期望.

15. 已知四棱锥S-ABCD中, △SAB是边长为2的正三角形, 平面SAB⊥平面ABCD, 四边形ABCD为菱形, ∠BAD=120°, P, Q分别为SC, CD的中点.

- (I)求证: PQ⊥平面SAB; (II)求二面角P-AB-C的正切值.



本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的最大值;

(II) 当 $x > 1$ 时, 求证: $f(x) > \frac{1}{x}$

本题满分 12 分)

过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的上支上一点 P 作双曲线的切线交两条渐近线分别于点 A, B

(I) 求证: $PA \cdot PB$ 为定值;

(II) 若 P 在 x 轴上, 求动点 P 的轨迹方程

本题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n} = 2^n$, 其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

(I) 求证: $a_n < 2^{n-1}$

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(III) 设 $b_n = \frac{1}{a_n} - \lambda \cdot n^{\lambda}$ (λ 为非零整数, $n \in \mathbb{N}^*$), 试确定 λ 的值, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $b_n > 0$ 成立

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)在每小题的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- 粤 A. $\{2\}$
- 悦 B. $\{1, 2\}$
- 阅 C. $\{2, 4\}$
- 粤 D. $\{1, 2, 4\}$

2. 设复数 $z = a + bi$ (其中 $a, b \in \mathbb{R}$), 若 z^2 为纯虚数, 则 a 的值为 ()

- 粤 A. 0
- 悦 B. 1
- 阅 C. -1
- 粤 D. 2

3. 函数 $y = \ln(x+1)$ 的反函数是 ()

- 粤 A. $y = e^x - 1$
- 悦 B. $y = e^x + 1$
- 阅 C. $y = \frac{1}{e^x} - 1$
- 粤 D. $y = \frac{1}{e^x} + 1$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\angle C = 90^\circ$ ”是“ $\triangle ABC$ 为钝角三角形”的 ()

- 粤 A. 必要不充分条件
- 悦 B. 充分不必要条件
- 阅 C. 必要条件
- 粤 D. 既不充分也不必要条件

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$, 则 $a_5 =$ ()

- 粤 A. 16
- 悦 B. 31
- 阅 C. 63
- 粤 D. 127

6. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1)$, 那么 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影为 ()

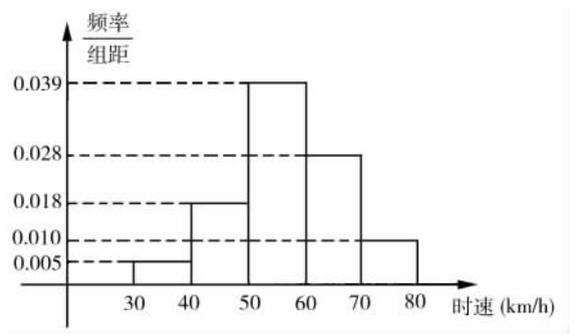
- 粤 A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- 悦 B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 阅 C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$
- 粤 D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

7. 已知 α, β, γ 是三条不重合的直线, α, β, γ 是三个两两不重合的平面, 给出下列四个命题:

- ①若 $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma$, 则 $\beta \parallel \gamma$;
 - ②若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
 - ③若 $\alpha \subset \beta, \alpha \subset \gamma, \beta \cap \gamma = \alpha$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
 - ④若 α, β 是异面直线, $\alpha \subset \beta, \alpha \parallel \gamma, \beta \perp \gamma, \gamma \perp \alpha$, 则 $\alpha \parallel \beta$.
- 其中的真命题是 ()

- 粤 A. ①和②
- 悦 B. ①和③
- 阅 C. ②和④
- 粤 D. ③和④

8. 四辆汽车正经过某一雷达地区, 这些汽车运行的时速频率分布直方图如图所示, 则时速超过 70 km/h 的汽车数量约为 ()



9. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这 10 个数字中任取 4 个数字组成没有重复数字的四位数, 其中能被 3 整除的数有 ()

- 粤 A. 216 个
- 悦 B. 288 个
- 阅 C. 360 个
- 粤 D. 432 个

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 且倾斜角为 60° 的直线与双曲线的右支有两个交点, 则此双曲线离心率的取值范围是 ()

- 粤 A. $(1, 2)$
- 悦 B. $(1, \frac{2}{\sqrt{3}})$
- 阅 C. $(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2)$
- 粤 D. $(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3})$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R} \\ \ln x, & x \in (0, 1) \end{cases}$, 满足对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 则 a 的取值范围是 ()

- 粤 A. $[\frac{1}{e}, 1]$
- 悦 B. $[\frac{1}{e}, 2]$
- 阅 C. $[\frac{1}{e}, 3]$
- 粤 D. $[\frac{1}{e}, 4]$

12. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点, 动点 Q 满足 $\vec{PQ} = \lambda \vec{PA} + (1-\lambda)\vec{PB}$, $\lambda \in (0, 1)$, 则动点 Q 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的 ()

- 粤 A. 重心
- 悦 B. 垂心
- 阅 C. 外心
- 粤 D. 内心

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 15 分, 共 90 分)把正确答案填在题中横线上)

13. 展开式 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 中 x 的系数是 _____

14. 四棱柱的底面边长是 1, 侧棱长是 2, 它的八个顶点都在同一个球面上, 则这个球的表面积为 _____

15. 设实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值为 _____

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 90 分)解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \phi)$ (其中 $\omega > 0, \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

(I) 求 $f(x)$ 的定义域和值域;

(II) 设 α 是锐角, 且 $f(\alpha) = \frac{1}{2}$, 求 α 的值

17. 某商场准备在节日期间举行促销活动, 根据市场调查, 该商场决定从 3 种服装商品、2 种家电商品、3 种日用商品中, 选出 5 种商品进行促销活动

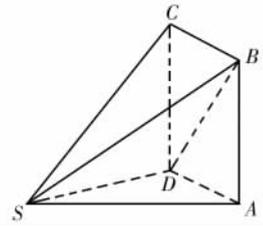
(I) 试求选出的 5 种商品中至少有一种日用商品的概率;

(II) 商场对选出的商品采用有奖促销, 即在该商品现价的基础上价格提高 10%, 同时允许顾客每购买 1 件促销商品有 1 次抽奖的机会, 若中奖, 则每次中奖都可获得奖金 100 元, 假设顾客每次抽奖时中奖与否是等可能的, 试分析此种有奖促销方案对商场是否有利

本题满分 12 分

如图, 多面体 $S-ABCD$ 中, 面 $ABCD$ 为矩形, $SD \perp$ 平面 $ABCD$, $SD = AD$, $AB = 2AD$.

- (I) 求证: 平面 $SBC \perp$ 平面 $ABCD$;
- (II) 求二面角 $S-BC-D$ 的大小.



本题满分 12 分

已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 其左准线与 x 轴相交于点 A , 并且满足 $\vec{AF_1} = \lambda \vec{F_1F_2}$, $\vec{AF_2} = \mu \vec{F_2F_1}$. P 是上半椭圆上满足 $\vec{PF_1} = \lambda \vec{F_1F_2}$ 的两点, 其中 $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

- (I) 求此椭圆的方程及直线 AP 的斜率的取值范围;
- (II) 过 P, Q 两点分别作此椭圆的切线, 两切线相交于一点 M , 求证: 点 M 在一条定直线上, 并求点 M 的纵坐标的取值范围.

本题满分 12 分

已知函数 $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$, $g(x) = \ln(x) + \frac{1}{x^2}$.

- (I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (II) 如果关于 x 的方程 $f(x) = g(x) + m$ 有实数根, 求实数 m 的取值集合;
- (III) 是否存在正数 k 使得关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不相等的实数根? 如果存在, 求 k 满足的条件, 如果不存在, 说明理由.

本题满分 12 分

数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 且 a_n, a_{n+1} 与 a_n 之间满足 $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$ ($n \geq 1$).

- (I) 求证: 数列 $\{\frac{a_n - 1}{2}\}$ 是等差数列;
- (II) 设存在正数 k 使 $(a_1 - k)(a_2 - k) \dots (a_n - k) \geq \frac{1}{2^n}$ 对一切 $n \in \mathbb{N}^+$ 都成立, 求 k 的最大值.

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 120 分,考试时间 120 分钟

参考公式:

如果事件 A, B 互斥,那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立,那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的

概率是 P,那么 n 次独立重复试验中恰

好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

第 I 卷(选择题 共 80 分)

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 10 分,共 80 分)在每小题给出的四个选项中,有且只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $M = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $N = \{x \mid x > 1\}$, 其中 $x \in \mathbb{R}$, 则下面属于 $M \cap N$ 的元素是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是 ()

A. 增函数 B. 减函数 C. 先增后减 D. 先减后增

3. 已知复数 $z = a + bi$ (a, b 为实数), 且 $z^2 = 2 + 3i$, 则 $a + b$ 的值为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 二项式 $(\frac{1}{x} - \sqrt{x})^n$ 展开式中的常数项是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上, 若 F_1, F_2 为此双曲线的两个焦点, 且 $|PF_1| = 3|PF_2|$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的周长等于 ()

A. 2a B. 2b C. 2c D. 2(a+b)

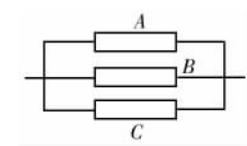
6. 若 \vec{a}, \vec{b} 是非零向量且满足 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, $(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角是 ()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

7. 如图, A, B, C 表示某种开关, 设在某段时间内它们正常工作的概率分别是 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 则系统正常工作的概率是 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

8. 统正常工作的概率是 ()



9. 设 α, β 是空间两条直线, γ 是空间一个平面, 则下列选项中正确的是 ()

A. $\alpha \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \gamma$ 是 $\beta \perp \gamma$ 成立的充要条件

B. $\alpha \perp \beta$ 且 $\beta \perp \gamma$ 是 $\alpha \perp \gamma$ 成立的充要条件

C. $\alpha \perp \beta$ 且 $\alpha \parallel \gamma$ 是 $\beta \perp \gamma$ 成立的充要条件

D. $\alpha \perp \beta$ 且 $\beta \parallel \gamma$ 是 $\alpha \perp \gamma$ 成立的充要条件

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & x \in \mathbb{R} \\ \ln(x) & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$, 若 $f(x) = 0$, 则 x 的解的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 有两个同心圆, 在外圆周上有相异点 A, 内圆周上有相异点 B, 由这 2 个点决定的直线至少有 ()

A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

12. 已知点 P 的坐标为 (1, 2), 点 Q 的坐标为 (3, 4), 则 \overrightarrow{PQ} 的模为 ()

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. 4

13. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是 ()

A. 增函数 B. 减函数 C. 先增后减 D. 先减后增

第 II 卷(非选择题 共 40 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 10 分,共 40 分)请将答案填在题中横线上)

14. 在直角坐标系 xOy 中, 设 P(x, y) 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上任意一点, 则线段 OP 的中点 M 的轨迹方程是 _____

15. 若 ξ 的分布列为:

ξ	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

其中 $P(\xi=0) = \frac{1}{2}$, $P(\xi=1) = \frac{1}{2}$, 则 $E\xi =$ _____

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$, 则这个数列的前 10 项的绝对值之和为 _____

17. 设 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $x \in \mathbb{R}$, 定义在集合 \mathbb{R} 上的函数 $g(x) = f(x) + f(x + \frac{\pi}{2})$ 的最大值比最小值大 1, 则底数 a 的值是 _____

18. 设 A 为正整数, 坐标平面上有一等腰三角形, 它的三个顶点分别是 (0, 0), (A, 0), (A/2, $\frac{\sqrt{3}A}{2}$)

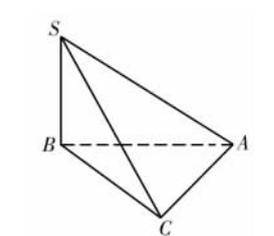
19. (原创) 设此三角形的外接圆直径长等于 A, 则 $\sin \frac{\pi}{3}$ 的值为 _____

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P(x, y) 满足条件:

$$|x| \leq 1, |y| \leq 1, |x+y| \leq 1$$

则点 P 所在区域的面积为 _____

21. 在棱锥 S-ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, SA 是斜边 BC 上的高, 则以下结论中: ① 异面直线 SA 与 BC 所成的角为 45° ; ② 直线 SA \perp 平面 ABC; ③ 面 SAB \perp 面 SAC; ④ 点 S 到平面 ABC 的距离是 $\frac{1}{2}BC$. 其中正确结论的序号是 _____



三、解答题(本大题有 2 小题,共 20 分)解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

22. (本小题满分 10 分)

(I) 请写出一个各项均为实数且公比 $q > 1$ 的等比数列, 使得其同时满足 $a_n > 0$ 且 $a_{n+1} > a_n + 1$

(II) 在符合 (I) 条件的数列中, 试找出所有的正整数 n, 使得 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 这三个数依次成等差数列

本题满分 10 分

设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 的周期为 π ，且 $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ 。

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期 T ；

(II) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(III) 设点 $A_1(\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6})), A_2(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3})), \dots, A_n(\frac{n\pi}{6}, f(\frac{n\pi}{6}))$ 在函数 $f(x)$ 的图像上，且满足条件： $\frac{1}{|A_1 A_2|} + \frac{1}{|A_2 A_3|} + \dots + \frac{1}{|A_{n-1} A_n|} = \frac{1}{|A_1 A_n|}$ ，求 n 的值。

本题满分 10 分

已知直线 $l: y = kx + b$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px$ 交于点 A, B ，且 $OA \perp OB$ 。

(I) 当直线 l 经过抛物线焦点 F 时，求点 A 关于直线 l 的对称点 A' 的坐标，并判断点 A' 是否在抛物线 C 上；

(II) 当 k 变化 ($k \neq 0$) 且直线 l 与抛物线 C 有公共点时，设点 A 关于直线 l 的对称点为 A' ，求 A' 关于 k 的函数关系式 $y = f(x)$ ，并求 A 与 A' 重合时， k 的取值范围。

本题满分 10 分

已知函数 $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{x}$ 和点 $A(1, 0)$ ，过点 A 作曲线 $f(x)$ 的两条切线 l_1, l_2 ，切点分别为 B, C 。

(I) 设 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$ ，试求函数 $f'(x)$ 的表达式；

(II) 是否存在 x 使得 A, B, C 三点共线？若存在，求出 x 的值；若不存在，请说明理由；

(III) 在 (I) 的条件下，若对任意的正整数 n 在区间 $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$ 内总存在 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n ，使得不等式 $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) > \frac{1}{n}$ 成立，求 n 的最大值。

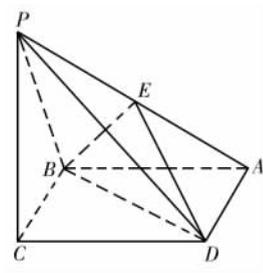
本题满分 10 分

已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 a 的菱形， $\angle BCD = 120^\circ$ ，且 $PC \perp$ 平面 $ABCD$ ， E 是 PA 的中点。

(I) 求证：平面 $PBE \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(II) 求直线 PE 与直线 BD 所成的角的余弦值；

(III) 设二面角 $P-BC-D$ 的平面角为 θ ，求 $\cos \theta$ 的值。



数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立,那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的

概率是 P,那么它在 n 次独立重复试验

中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

第 I 卷(选择题 共 50 分)

一、选择题(本大题 10 个小题,每小题 5 分,共 50 分)

1. 已知复数 $z = a + bi$ 在复平面上对应的点位于

- A. 第一象限
- B. 第二象限
- C. 第三象限
- D. 第四象限

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 100$

- A. 10
- B. 20
- C. 30
- D. 40

3. 某市组织了一次高三调研考试,考试后统计的数学成绩服从正态分布,其密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

该市这次考试的数学平均成绩为 80 分

4. 分数在 90 分以上的人数与分数在 60 分以下的人数相同

5. 分数在 80 分以上的人数与分数在 70 分以下的人数相同

6. 该市这次考试的数学标准差为 10

7. 设 α, β, γ 为互不相同的三个平面,直线 l 为不重合的三条直线,则 $l \perp \beta$ 的一个充分不必要条件是

- A. $l \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \gamma = l$
- B. $l \perp \beta, \alpha \cap \beta = l$, 且 $l \perp \alpha$
- C. $l \perp \alpha, \beta \perp \alpha, l \subset \beta$
- D. $l \perp \gamma, \beta \perp \gamma, l \subset \alpha$

8. 已知在平面直角坐标系中,散点图,点 $P(x, y)$,点 $Q(x', y')$,点 $R(x'', y'')$ 满足

$$x^2 + y^2 \leq x'^2 + y'^2 \leq x''^2 + y''^2$$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

9. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条准线与两条渐近线交于 A、B 两点,相应的

焦点为 F,若以 F 为直径的圆恰过 A、B 点,则双曲线的离心率为

- A. $\frac{5}{4}$
- B. $\frac{3}{2}$
- C. $\frac{5}{3}$
- D. $\frac{4}{3}$

10. 点 A、B 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上,点 C 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上,则 $|AC - BC|$ 的取值范围是

- A. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
- B. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$
- C. $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$
- D. $[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}]$

11. 方程 $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$ 的根的个数是

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

12. 已知函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,且满足条件 $f(x) + f(-x) = 0$,其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数,则 $f'(x)$ 的图像上任意一点的切线的斜率为 k,则 k 的取值范围是

- A. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- B. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- C. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- D. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

13. 若对任意长方体 ABCD-A'B'C'D',都存在一个与 ABCD-A'B'C'D' 等高的长方体 A''B''C''D'',使得 A''B''C''D'' 的侧面积之比和体积之比都等于 k,则 k 的取值范围是

- A. $[\frac{1}{2}, 1]$
- B. $[\frac{1}{2}, 1] \cup (\frac{1}{2}, 1)$
- C. $[\frac{1}{2}, 1] \cup (\frac{1}{2}, 1)$
- D. $[\frac{1}{2}, 1] \cup (\frac{1}{2}, 1)$

第 II 卷(非选择题 共 100 分)

二、填空题(本大题 5 个小题,每小题 20 分,共 100 分) 请将答案填在答题卡相应位置,不要过程

14. 容量为 100 的样本数据,按从小到大的顺序分成 5 组,如下表:

组号	1	2	3	4	5
频数	10	20	30	40	20

15. 则第 3 组的频率为 _____

16. 已知 $(x^2 + \frac{1}{x})^n$ 展开式中常数项为 $\frac{1}{2}$,其中 n 是小于零的常数,则展开式中各项系数之和是 _____

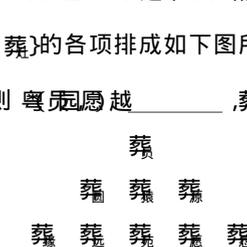
17. 已知向量 $a = (1, 2)$, $b = (2, 1)$,且 $a \cdot b = 4$,若由 a 的值构成的集合 M 满足 $M \cap \{a, b\} = \emptyset$,则 M 的取值的集合是 _____

18. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $\sin 2\alpha =$ _____

19. 已知 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $\sin 2\alpha =$ _____

20. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,若球 O 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 有共同的中心,正方体在球内部的表面积为 $\frac{1}{2}$,则球 O 的半径为 _____

21. 已知 $a_n = \frac{1}{n}$,把数列 $\{a_n\}$ 的各项排成如下图所示三角形形状,记 A_n 为第 n 行、第 k 列的项,则 A_{100} 为 _____, a_{100} 在图中的位置为 _____



三、解答题(本大题 5 个小题,共 70 分) 解答必须写出必要的文字说明、演算步骤或推理过程

22. 本小题满分 14 分

在 $\triangle ABC$ 中,角 A、B、C 所对应的边分别为 a、b、c,且 $\cos A = \frac{1}{2}$

(I) 求 $\sin B$ 的值;

(II) 若 $b = 2$,当 $\sin C$ 取最大值时,求 $\sin A$ 的值

23. 本小题满分 14 分

有甲、乙两个篮球运动员,每人各投篮三次,甲三次投篮命中率均为 $\frac{1}{2}$,乙第一次

在距离 2 米处投篮命中率为 $\frac{1}{2}$,若第一次投篮未中,则乙进行第二次投篮,但距离

为 4 米,如果又未中,则乙进行第三次投篮,并且在投篮时距离为 8 米,乙若投中,则不再继续投篮,且知乙命中的概率与距离的平方成反比

(I) 求乙投篮命中的概率;

(II) 求甲三次投篮命中次数 ξ 的期望与方差

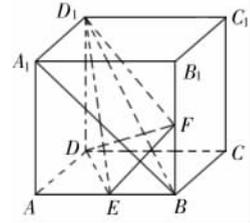
本题满分 15 分

正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB 与 BC 的中点

(I) 求证: $EF \perp$ 平面 A_1D_1D ;

(II) 求二面角 A_1-DE-A 的正切值;

(III) 若 $AE = \lambda$, 求三棱锥 A_1-ADE 的体积



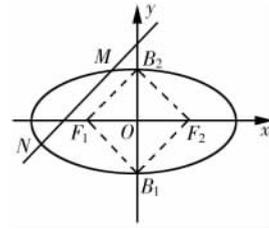
本题满分 15 分

如图, 椭圆两焦点 F_1, F_2 与短轴两端点 B_1, B_2 正好是正方形的四个顶点, 且焦点到椭圆上一点最近距离为 $\sqrt{2}$

(I) 求椭圆的标准方程;

(II) 过 B_1 的直线与椭圆交于不同的两点 M, N , 且 M 在 B_1, N 之间, 设 $\frac{B_1M}{B_1N} = \lambda$

求 λ 的取值范围



本题满分 15 分

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

(I) 求 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的极值;

(II) 若对任意 $x \in [1, e]$, 不等式 $f(x) \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 在 $[1, e]$ 上恰有两个不同的实根, 求实数 a 的取值范围

本题满分 15 分

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若存在实数 λ 使得数列 $\{a_n - \lambda\}$ 成等差数列, 记数列 $\{a_n - \lambda\}$ 的前 n 项和为 S_n

求 S_n 的表达式

题本小题满分 5 分)

已知点 P 在 x 轴上, 点 Q 在 y 轴的正半轴上, 且

满足 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 1$

(I) 当点 P 在 x 轴上移动时, 试求点 Q 的轨迹方程;

(II) 直线 l 与点 Q 的轨迹交于 A, B 两点, 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1$, 求直线 l 的斜率的取值范围.

题本小题满分 5 分)

已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = 1, b_1 = 1, a_{n+1} = a_n + b_n, b_{n+1} = a_n - b_n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_n .

(I) 求证: $\{b_n\}$ 为等差数列;

(II) 求证: $a_n > b_n$;

(III) 求证: 当 $n \geq 1$ 时, $S_n \geq \frac{1}{2}n^2$.

题本小题满分 5 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

(I) 求 $f(x)$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的最值;

(III) 若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上有最大值, 求实数 a 的取值范围.

数学

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间120分钟

第I卷(选择题 共84分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题7分,共84分)在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 A={x|2<x<4}, B={x|3<x<6}, 则 A∩B 等于 ()

- (A) {x|2<x<3} (B) {x|3<x<4} (C) {x|4<x<6} (D) {x|2<x<6}

2. 若 (x^2+1)^n 的展开式中各项系数之和是 2^n, (x^2+2x)^n 的展开式中各项的二项式系数之和为 2^n, 则 n 的值为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. 若 cos α = 1/2, 则方程 sin α = x 的解是 ()

- (A) π/6 或 5π/6 (B) π/6 或 2π/3 (C) π/6 或 7π/6 (D) π/6 或 3π/2

4. 若把一个函数的图像按向量 a 平移, 得到函数 y = sin(x+π/3) 的图像, 则原图像的函数解析式是 ()

- (A) y = sin(x-π/3) (B) y = sin(x+π/3) (C) y = sin(x-π/6) (D) y = sin(x+π/6)

5. 已知 阅是△粤悦的边粤悦的中点, 则悦等于 ()

- (A) 粤悦/2 (B) 粤悦 (C) 粤悦/4 (D) 粤悦/8

6. 已知正方体的外接球的体积是 8π/3, 那么正方体的棱长是 ()

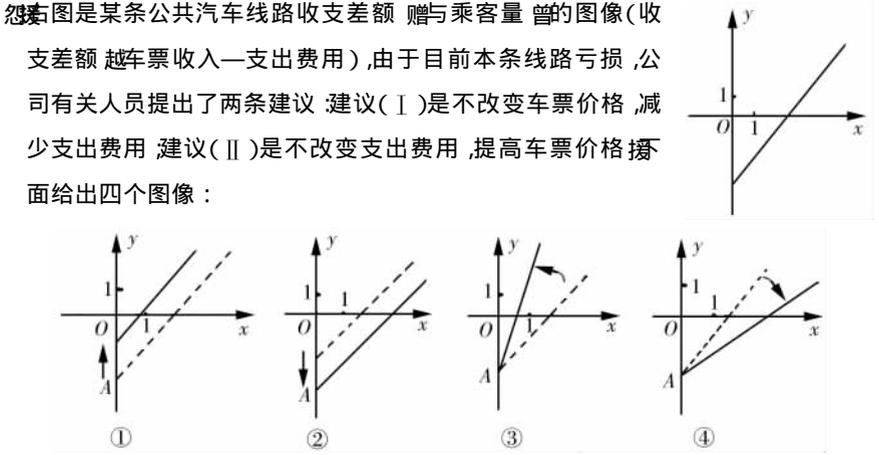
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 某市统考成绩大体上反映了全市学生的成绩状况, 因此可以把统考成绩作为总体,

设平均成绩 μ, 则 μ 越接近标准差 δ 越接近, 总体服从正态分布, 若全市录取率为 1/2, 那么录取分数线可能划在 (已知 φ(0)=1/2) ()

8. 双曲线 x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 的两个焦点为 F1, F2, 点 P 在双曲线上, △PF1F2 的面积为 1, 则 PF1 · PF2 等于 ()

9. 右图是某条公共汽车线路收支差额 y 与乘客量 x 的图像 (收支差额 = 车票收入 - 支出费用), 由于目前本条线路亏损, 公司有关人员提出了两条建议: 建议(I)是不改变车票价格, 减少支出费用; 建议(II)是不改变支出费用, 提高车票价格. 下面给出四个图像:



在这些图像中 ()

- (A) ①反映了建议(I), ③反映了建议(II) (B) ②反映了建议(I), ③反映了建议(II) (C) ①反映了建议(I), ④反映了建议(II) (D) ②反映了建议(I), ④反映了建议(II)

10. 数列 {an} 为等差数列, 从 {a1, a2, ..., an} 中任取 k 个不同的数, 使这三个数仍成等差数列, 则这样不同的等差数列最多有 ()

第II卷(非选择题 共66分)

二、填空题(本大题共6小题, 每小题11分, 共66分) 把答案填在题中横线上)

11. 设 z = a + bi, 则 |z| 越 () 则 |z-1| 越 ()

12. 已知 x, y 满足 x^2 + y^2 ≤ 1, 则 x + y 的最小值等于 ()

13. 已知椭圆 x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 过原点且倾斜角分别为 θ 和 π-θ (0 ≤ θ ≤ π/2) 的两条直线分别交椭圆于点 P, Q 和点 R, S, 则四边形 PQRS 的面积的最大值等于 (), 此时 θ 越 ()

14. 已知不等式 1/x + 1/y ≥ 1/(x+y) 对任意的正实数 x, y 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()

15. 对某一目标进行射击, 直到击中为止, 如果每次射击命中目标的概率都是 1/2, 则射击次数 ξ 的数学期望值等于 ()

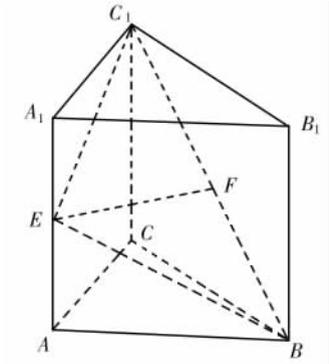
三、解答题(本大题共4小题, 共54分) 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本小题满分12分) 设函数 f(x) = sin(x+π/3) + cos(x-π/6), 求 f(x) 的最小正周期和在 [0, π] 上的单调递增区间;

(II) 当 x ∈ [0, π/2] 时, 原不等式恒成立, 求实数 a 的取值范围

17. (本小题满分12分) 如图, 直三棱柱 ABC-A1B1C1 中, ∠ACB = 90°, AC = BC = 1, AA1 = 2, E, F 分别为 A1C1 与 B1C1 的中点

- (I) 求证: EF ⊥ 底面 ABC; (II) 求平面 A1EF 与底面 ABC 所成的锐二面角的大小



本题满分 12 分)

设 a, b 是区间 I 上的任意两点, 若函数 $f(x)$ 满足

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{f(\frac{a+b}{2})}{2}$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上

下凸.

(I) 证明: 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上下凸;

(II) 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上下凸, 则对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ 有

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq \frac{f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n}$$

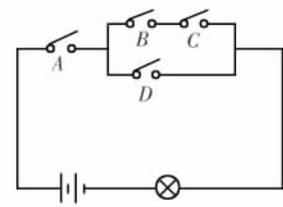
证明. 若 $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, 则 $(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n})^2 \geq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}$.

本题满分 12 分)

某电路如图所示, 在某段时间内, 开关 A, B, C, D 能接通的概率都是 $\frac{1}{2}$.

(I) 计算这段时间内电灯不亮的概率 P ;

(II) P 在 $(0, 1)$ 内是否存在最大值? 若存在请求出, 若不存在请说明理由.



本题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_n \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, 其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

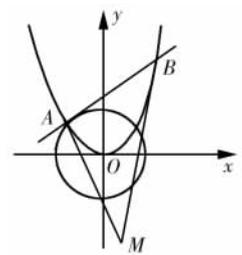
(I) 求证: $a_n \geq a_1$;

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(III) 若 $a_n = \lambda \cdot n^{\lambda-1}$ (λ 为非零常数, $n \in \mathbb{N}^*$), 问是否存在整数 λ , 使得对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_n \geq \frac{S_n}{n}$? 若存在求出 λ 的值, 若不存在请说明理由.

本题满分 12 分)

如图所示, 抛物线 $y = x^2 - 2x + 2$ 的动弦 AB 所在直线与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 分别过点 A, B 的抛物线的两条切线相交于点 M , 求点 M 的轨迹方程.



数学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分)在每小题给出的四个选项中,有且只有一个是正确的

1. 集合 $M = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $N = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$, 则 $M \cap N$ 等于

- (A) $\{x \mid -1 < x < 3\}$ (B) $\{x \mid 1 < x < 3\}$ (C) $\{x \mid 1 < x < 4\}$ (D) $\{x \mid 2 < x < 3\}$

2. 将函数 $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 的图像按向量 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 平移后得到的图像对应的函数解析式是

- (A) $y = \sin x + 1$ (B) $y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + 1$ (C) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$ (D) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1$

3. 若两个平面 α 与 β 相交但不垂直,直线 a 在平面 α 内,则在平面 β 内

- (A) 一定存在与直线 a 平行的直线 (B) 一定不存在与直线 a 平行的直线 (C) 一定存在与直线 a 垂直的直线 (D) 一定不存在与直线 a 垂直的直线

4. 设 $f: A \rightarrow B$ 是由 A 到 B 的映射(其中 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$)其对应法则如下表:

A	B	C	D
a	1	2	3
b	2	1	3
c	3	2	1

则 $f \circ f$ 等于

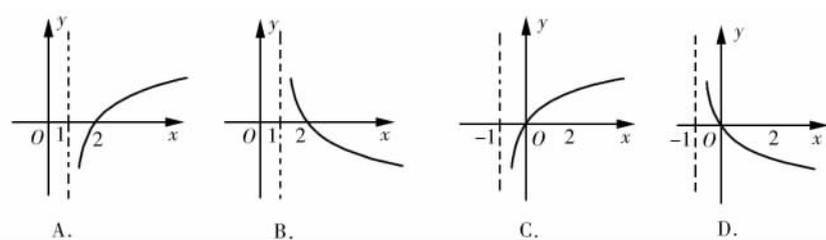
- (A) $\{a \rightarrow 2, b \rightarrow 1, c \rightarrow 3\}$ (B) $\{a \rightarrow 1, b \rightarrow 2, c \rightarrow 3\}$ (C) $\{a \rightarrow 3, b \rightarrow 2, c \rightarrow 1\}$ (D) $\{a \rightarrow 1, b \rightarrow 3, c \rightarrow 2\}$

5. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列,其公比 $q \neq 1$ 且 $b_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}^+$)若

$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$, 则

- (A) $a_4 < b_4$ (B) $a_4 > b_4$ (C) $a_4 = b_4$ (D) $a_4 \leq b_4$ 或 $a_4 \geq b_4$

6. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \varphi \in \mathbb{R}$) 既是奇函数,又是增函数,则 $f(x)$ 的图像是



7. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 5 < 0$, 命题 $q: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 4 > 0$, 则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的

必要不充分条件

充分不必要条件

充分必要条件

既不充分也不必要条件

8. 设集合 $M = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $N = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$, 则 $M \cap N$ 等于

- (A) $\{x \mid -1 < x < 3\}$ (B) $\{x \mid 1 < x < 3\}$ (C) $\{x \mid 1 < x < 4\}$ (D) $\{x \mid 2 < x < 3\}$

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \varphi \in \mathbb{R}$) 既是奇函数,又是增函数,则 $f(x)$ 的图像是

- (A) $y = \sin x$ (B) $y = \cos x$ (C) $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (D) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

10. 设 $f: A \rightarrow B$ 是由 A 到 B 的映射(其中 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$)其对应法则如下表:

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 15 分,共 90 分)把答案填在题中横线上

11. 若复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 满足 $|z| = 1$, 且 $\arg z \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则复数 z 对应的点必在第

象限

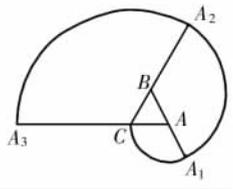
12. 已知 $(x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中 x 的系数是 -8 , 则 n 等于

13. 已知 $\triangle ABC$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的动点,且 $\angle C = 90^\circ$, 则实数 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的值是

14. 已知球 O 的表面积为 4π , A, B, C 三点都在球面上,且任意两点间的球面距离为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 与平面 OAC 所成角的正切值是

15. 已知点 $P(x, y)$ 满足不等式组 $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则动点 P 到点 $(1, 0)$ 的距离 d 的取值范围是

16. 如图,一条螺旋线是用以下方法画成: $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形,曲线 BA_1 以 B 为圆心, BA 为半径画弧,曲线 A_1C_1 以 A_1 为圆心, A_1C 为半径画弧,曲线 C_1A_2 以 C_1 为圆心, C_1A_1 为半径画弧,这样画到第 3 圈,则所得整条螺旋线的长度是



三、解答题(本大题共 6 小题,共 75 分)解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$ 与向量 $\vec{b} = (x, y)$ 共线,其中 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的内角

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$, $\sin C = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{3}{5}$, $\sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{24}{25}$, $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{7}{25}$, $\sin A \sin B + \cos A \cos B = \frac{24}{25}$, $\cos A \sin B + \sin A \cos B = \frac{7}{25}$

(I) 求角 A 的大小;

(II) 求 $\sin 2A$ 的值

19. 本小题满分 12 分

甲、乙两人进行定点投篮游戏,投篮者若投中则继续投篮,否则由对方投篮,第一次由甲投篮,已知每次投篮甲、乙命中的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

(I) 求第三次由乙投篮的概率;

(II) 在前 3 次投篮中,乙投篮的次数为 ξ , 求 ξ 的分布列及期望

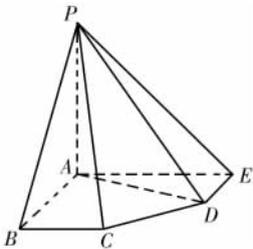
20. 本小题满分 12 分

在五棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, $\angle BAC = 90^\circ$, $PA = AB = AD = 1$

(I) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 求二面角 $P-AC-D$ 的大小;

(III) 求点 P 到平面 BCD 的距离



本题满分 15 分

在直角坐标平面上有一点列 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$ 对每个正整数 n 点 P_n 位于函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像上, 且 x_n 的横坐标构成以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{4}$ 为公差的等差数列 $\{x_n\}$

(I) 求点 P_1 的坐标;

(II) 设抛物线列 $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ 中的每一条的对称轴都垂直于 x 轴, 第 n 条抛物线 C_n 的顶点为 P_n 且过点 $Q_n(1, \frac{1}{n^2})$, 记过点 Q_n 且与抛物线 C_n 相切的直线的斜率为 k_n , 求证: $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} < \frac{1}{2}$

证: $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} < \frac{1}{2}$

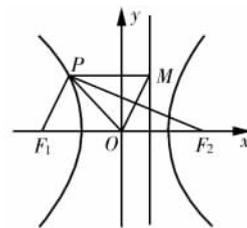
本题满分 15 分

如图, 若 F_1, F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, O 为坐标原点, P 在双曲线左支上, M 在右准线上, 且满足 $\vec{OP} \perp \vec{PM}, \vec{OM} \perp \vec{PM}$

(I) 求此双曲线的离心率;

(II) 若此双曲线过点 $(\sqrt{2}, \frac{1}{2})$, 求双曲线的方程;

(III) 设 (II) 中双曲线的虚轴端点为 B_1, B_2 (B_1 在 y 轴的正半轴上), 过 B_1 点作直线 l 与双曲线交于 A, C 两点, 当 $\vec{B_1A} \perp \vec{B_1C}$ 时, 求直线 l 的方程



本题满分 15 分

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ (其中 e 为自然对数的底数)

(I) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(II) 在 $(\frac{1}{e}, e)$ 上求函数 $f(x)$ 的极值;

(III) 用数学归纳法证明: 当 $x > 1$ 时, 对任意正整数 n 都有 $f(x) > \frac{1}{n} \ln x$

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟

第 I 卷(选择题 共 50 分)

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

A. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-2, 2]$ D. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

2. 复数 $z = \frac{1-i}{1+i}$ 的共轭复数是

A. $1-i$ B. $1+i$ C. $-1-i$ D. $-1+i$

3. 已知 $f(x) = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处取得极值, 则 $f(x)$ 等于

A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$

4. 已知 $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$, 则下列不等式正确的是

A. $\sin \theta > \frac{1}{2}$ B. $\cos \theta > \frac{1}{2}$ C. $\tan \theta > \frac{1}{2}$ D. $\cot \theta > \frac{1}{2}$

A. $\sin \theta > \frac{1}{2}$ B. $\cos \theta > \frac{1}{2}$ C. $\tan \theta > \frac{1}{2}$ D. $\cot \theta > \frac{1}{2}$

5. 在 $(x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中, x 的系数是

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{16}$

6. 若 $\sin \theta = \frac{1}{2}$, 且 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\cos \theta$ 等于

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

7. 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$, 则 $x + y$ 的最大值是

A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

8. 已知曲线 $y = \sin x$ 上一点 P 到两定点 $A(0, 1)$, $B(\pi, 1)$ 的距离之差为 $\frac{\pi}{2}$, 则 P 的横坐标为

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. $\frac{7\pi}{4}$

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{4}$ D. $\frac{7\pi}{4}$

9. 若差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n > 0$ 存在自然数 n_0 使得 $S_n > a_n$, 则当 $n > n_0$ 时, S_n 与 a_n 的大小关系是

A. $S_n > a_n$ B. $S_n < a_n$ C. $S_n = a_n$ D. 不确定

A. $S_n > a_n$ B. $S_n < a_n$ C. $S_n = a_n$ D. 不确定

10. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

第 II 卷(非选择题 共 100 分)

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 20 分,共 100 分)

11. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

12. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

13. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

14. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

15. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

16. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

17. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

18. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

19. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

20. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

21. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

22. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

23. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

24. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

25. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

26. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

27. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

28. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

29. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

30. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

31. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

第 II 卷(非选择题 共 100 分)

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 20 分,共 100 分)

32. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

33. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

34. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

35. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

36. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

37. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

38. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

39. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

40. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

41. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

42. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

43. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

44. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

45. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

46. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

47. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

48. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

49. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

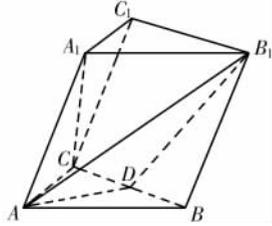
50. 已知 $f(x) = \sin x + \cos x$, 则 $f(x)$ 的取值范围是

圆接本小题满分 5 分)

如图 棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp AC$ 且 $AA_1 \perp BC$ 都与平面 ABC 所成的角相等, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = 2$, D 为 AB 上的点,

且 $AA_1 \parallel$ 平面 A_1CD 求:

- (I) AA_1 与平面 A_1CD 的距离;
- (II) 二面角 A_1-CD-A 的大小;
- (III) AA_1 与平面 ABC 所成角的大小 援



圆接本小题满分 5 分)

已知圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心为 M , 圆 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$ 的圆心为 N , 一动圆与这两圆都外切 援

- (I) 求动圆圆心 P 的轨迹方程;
- (II) 若过点 N 的直线 l 与 (I) 中所求轨迹有两个交点 A, B , 求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围 援

圆接本小题满分 5 分)

已知 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 其中 a, b, c 援

- (I) 求 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 的表达式;
- (II) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{1}{n} \cdot a$ 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (III) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \sqrt{c}$ 当 $n \geq 1$ 时, $b_n = \frac{1}{n} \cdot c$ $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 援 试比较 S_n 与 $\frac{1}{n}$ 的大小 援

数 学

试卷说明 本试卷部分记号采用非试验教材的表示法,使用试验教材的考生请注意

注意,试卷中的 葬越 曾,赠相当于试验教材中的 葬越 曾,赠,麻相当于试验教材中的 麻援 满分 员分,考试时间 员分钟援

一、填空题(本大题满分 源分)本大题共有 员题,只要求直接填写结果,每题填对得 源分,否则一律得零分)

员已知 扎越员垣葬蚤扎越葬垣蚤蚤是虚数单位),若 扎扎为实数,则实数 葬的值是 _____援

圆若直线 葬垣垣赠垣垣与直线 曾垣(葬原)赠垣葬垣垣互相垂直,则 葬越_____援

猿已知正三棱锥底面边长为 圆,侧棱与底面成 远度角,则三棱锥的体积为_____援

源设 $\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 葬垣垣葬越 苑, 则 麻越_____援

缘已知 枣曾越 $\begin{cases} 葬曾, & (曾 > 园) \\ 枣曾垣员垣员, & 曾 \leq 园 \end{cases}$ 则 枣猿垣枣原猿越_____援

远在极坐标系中,曲线 $\rho = 2\cos\theta$ 与曲线 $\rho = 2\sin\theta$ 有_____个公共点援

苑设 灶为正整数,抛物线 赠越灶灶垣员曾原(圆垣垣)曾垣员在 曾轴上截得的线段长为 葬,则 遭(葬垣葬垣...垣葬)越_____援

愿点 孕是抛物线 赠越曾上到直线 曾垣赠垣垣距离最短的点,则 孕到抛物线焦点的距离是_____援

怨已知向量 葬越员/猿,遭越遭曾,原葬越曾,曾 $\in [0, \pi]$,若 葬遭的夹角为 θ ,则 θ 的取值范围是_____援

员在 某次数学考试中,学号为 蚤蚤越员圆猿源的学生考试成绩为 枣蚤,且 枣蚤 $\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,则满足 枣员约枣圆 \leq 枣猿约枣源的概率为_____ (用分数表示结果)援

员对于实数 曾用 [曾表示不超过 曾的最大整数,如 [圆猿]越圆, [缘猿]越缘,若 灶为正整数,葬越 灶, 葬为数列 {葬} 的前 灶项和,则 葬灶越_____援

圆设 葬遭 砸且 遭若函数 赠越葬曾原员垣遭的图像与直线 赠越曾恒有公共点,则 葬遭应满足的条件为_____援

二、选择题[本大题满分 员分]本大题共有 源题,每题都给出代号为 粤月悦阅的四个结论,其中有且只有一个结论是正确的,必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内,选对得 源分,不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内),一律得零分]

员设 粤月悦中,“粤跃月”是“粤跃月”的 ()

粤充分非必要条件 月必要非充分条件

悦必要条件 阅既非充分又非必要条件

圆若直线 皂曾垣垣赠原原垣垣皂,灶,砸将圆 曾垣赠原原原垣垣垣垣垣分成两段相等的弧,则 皂垣灶等于 ()

粤原圆 月原员 悦原 阅圆

猿制作一个面积为 圆皂² 形状为直角三角形的钢框架,有下列四种长度的钢管可供选用,则最合适(既够用,又剩余最少)的长度为 ()

粤圆皂 月圆皂 悦圆皂 阅圆皂

源若函数 赠越葬,葬原圆葬垣垣且 葬在区间(员圆)上是增函数,则 枣曾在区间(圆垣肆)上的单调性为 ()

粤先增后减 月先减后增

悦单调递增 阅单调递减

三、解答题(本大题满分 愿分)本大题共有 远题,解答下列各题必须写出必要的步骤)

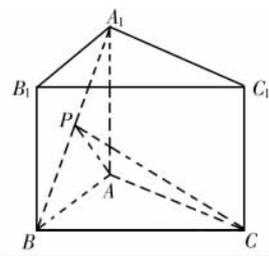
员(本题满分 愿分)

设 扎越葬垣垣蚤扎越员原葬曾曾为实数且 曾 $\in [0, \frac{\pi}{2}]$, 蚤为虚数单位)援函数

枣曾越遭,原扎,遭的值域援

圆(本题满分 愿分)

在直三棱柱 粤月悦原粤月悦中,底面 \triangle 粤月悦是等腰直角三角形, \angle 粤月悦越远度,孕为 粤月的中点,且 悦上 粤月,求二面角 孕原粤月原月的角大小援

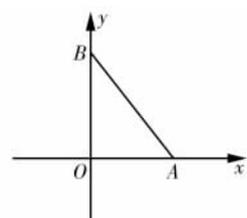


圆(本题满分 愿分)本大题共有 圆个小题,第 员小题满分 愿分,第 圆小题满分 远分)

如图,点 粤葬园、月园遭分别是 曾轴和 赠轴正半轴上的定点,动点 孕曾,赠满足 遭孕越遭月遭点 匝满足 遭孕垣遭月越遭援

(I) 用 遭与粤来表示 粤月匝;

(II) 当向量 遭孕与粤的夹角 θ 为何值时,粤月匝的值最大,并求出此最大值援



本题满分 16 分. 本题共有 4 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 4 分, 第 3 小题满分 4 分, 第 4 小题满分 4 分.

甲、乙两公司生产同一种新产品, 经测算, 对于任意 $x \geq 0$ 存在两个函数 $f(x)$, $g(x)$, 当甲公司投入 x 万元用于产品的宣传时, 若乙公司投入的宣传费小于 $f(x)$ 万元, 则乙公司有失败的风险, 否则无失败风险; 当乙公司投入 x 万元用于产品的宣传时, 若甲公司投入的宣传费小于 $g(x)$ 万元, 则甲公司有失败的风险, 否则无失败风险.

(I) 解释 $f(x)$ 的实际意义;

(II) 当 $f(x) = \sqrt{x}$ 且 $g(x) = \sqrt{x}$ 时, 甲、乙两公司为了避免恶性竞争, 经过协商, 同意在双方均无失败风险的情况下尽可能少地投入宣传费用. 问此时甲、乙两公司各应投入多少宣传费?

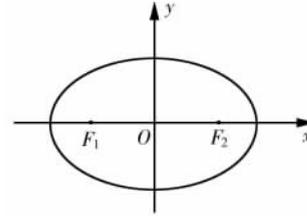
本题满分 16 分. 本题共有 4 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 4 分, 第 3 小题满分 4 分, 第 4 小题满分 4 分.

设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点是 $F_1(-c, 0)$ 和 $F_2(c, 0)$, 且椭圆 C 与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 有公共点.

(I) 求 r 的取值范围;

(II) 若椭圆上的点到焦点的最短距离为 $\sqrt{a-c}$, 求椭圆的方程;

(III) 对 (II) 中的椭圆 C , 直线 $l: y = kx + m$ 与 C 交于不同的两点 A, B , 若线段 AB 的垂直平分线恒过点 $(0, 1)$, 求实数 m 的取值范围.



本题满分 16 分. 本题共有 4 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 4 分, 第 3 小题满分 4 分, 第 4 小题满分 4 分.

我们用 $f(x)$, $g(x)$ 分别表示实数 x, y 中的最小者和最大者.

(I) 设 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, 函数 $f(x)$ 的值域为 M , 函数 $g(x)$ 的值域为 N , 求 $M \cap N$;

(II) 数学课上老师提出了下面的问题: 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为实数, $x \in \mathbb{R}$, 求函数 $f(x) = \max\{a_1 + x, a_2 + x, \dots, a_n + x\}$ 的最小值或最大值. 为了方便探究, 遵循从特殊到一般的原则, 老师让学生先解决两个特例. 求函数 $f(x) = \max\{x, 1-x\}$ 和 $f(x) = \max\{x, 1-x, 0\}$ 的最值.

学生甲得出的结论是 $f(x) = \max\{x, 1-x\}$ 在 $x = 0.5$ 处取得最小值 0.5, 且 $f(x)$ 无最大值.

学生乙得出的结论是 $f(x) = \max\{x, 1-x, 0\}$ 在 $x = 0.5$ 处取得最小值 0.5, 且 $f(x)$ 无最大值.

请选择两个学生得出的结论中的一个, 说明其成立的理由.

(III) 试对老师提出的问题进行研究, 写出你所得到的结论并加以证明 (如果结论是分类的, 请选择一种情况加以证明).

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)在每小题给出的四个选项中,恰有一项是符合题目要求的)

1. 函数 $f(x) = \ln(x+1)$ 的定义域是集合 M , 函数 $g(x) = \sqrt{x}$ 的定义域是集合 N , 则 $M \cap N$ 等于

A. $(-1, 0]$ B. $(-1, 1]$ C. $[0, 1]$ D. $(0, 1]$

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_3 = 4$, 则 $a_5 =$

A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

3. 直线 $ax + by + c = 0$ 关于直线 $x = 1$ 对称的直线方程是

A. $ax + by + c = 0$ B. $ax + by - c = 0$ C. $ax + by + c = 2$ D. $ax + by - c = 2$

4. 若平面 $\alpha \perp$ 平面 β , 直线 $l \subset \alpha, m \subset \beta, \alpha \cap \beta = n$, 则

A. $l \perp m$ B. $l \perp n$ C. $m \perp n$ D. $l \perp \beta$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\sin A = \frac{1}{2}, \cos B = \frac{1}{2}$, 则 $\triangle ABC$ 一定是

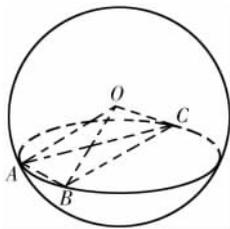
A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 等腰三角形

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 上

A. 单调递增 B. 单调递减 C. 先增后减 D. 先减后增

7. 如图, 已知 A, B, C 是表面积为 4π 的球面上的三点, $\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{3}$, O 为球心, 则二面角 $B-OC-A$ 的大小为

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{2}$



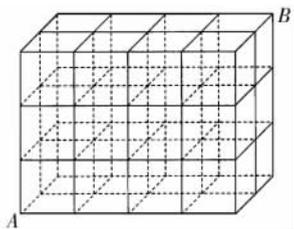
8. 将圆形纸片的圆心为 O 点, 在圆内异于 O 点的一点 P , 把纸片折叠使点 O 与点 P 重合, 然后抹平纸片, 折痕为 AB , 当点 P 运动时, 点 A 的轨迹是

A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线

9. 方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的解共有

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

10. 如图, 某建筑工地搭建的脚手架局部类似于 $3 \times 3 \times 3$ 的长方体框架(由 27 个棱长为 1 个单位长度的正方体框架组合而成) 建筑工人从 A 点沿脚手架到点 B , 每步走 1 个单位长度, 且不连续向上攀登, 则其行走的最近路线共有



A. 6 条 B. 12 条 C. 18 条 D. 24 条

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 15 分, 共 90 分)不需写出解答过程)

11. 不等式 $x^2 - 2x + 1 < 0$ 的解集为

12. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \phi)$ 的最小正周期为 π , 则 $\omega =$

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线相交于 M, N 两点, 以 MN 为直径的圆恰好过双曲线的右顶点, 则双曲线的离心率等于

14. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$, 则 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PBC$ 的面积比值为

15. 在 $(\sqrt{x} + \frac{1}{x})^n$ 的二项展开式中, 所有有理项之和为 1023, 当 $n = 10$ 时, 杂等于

16. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$, 若 $A \cap B$ 中的元素所对应的点恰好是一个正八边形的八个顶点, 则正数 a 的值为

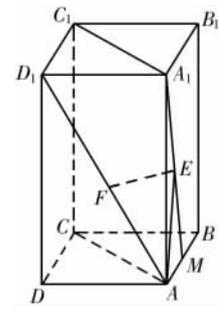
三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分)解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 袋中装有 10 个不同的小球, 其中有 3 个红球, 2 个蓝球, 5 个黄球, 其余为白球. 已知从袋中取出 3 个颜色相同的彩球(不是白球)的概率为 $\frac{1}{10}$.

- (I) 求袋中的红球、白球各有多少个? (II) 从袋中任取 3 个小球, 求其中一定有红球的概率

18. (本小题满分 12 分) 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 BC, C_1D_1 的中点.

- (I) 求证: 直线 $EF \perp$ 平面 AB_1C_1 ; (II) 求直线 EF 与平面 AB_1C_1 所成角的大小



题号 本题满分 (总分)

将圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 沿向量 $\vec{a} = (1, 1)$ 平移后得到圆 C_2 , 直线 l 与圆 C_2 相交于 A, B 两点, 若在圆 C_2 上存在点 P , 使 $\angle APB = 90^\circ$, 求直线 l 的方程及对应的点 P 的坐标.

解: 设直线 l 的方程为 $y - kx + b = 0$, 则圆 C_2 的方程为 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$. 因为 $\angle APB = 90^\circ$, 所以 $PA \perp PB$, 即 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 0$. 又 A, B 在圆 C_2 上, 所以 $(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2 = 4$, $(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = 4$. 联立以上三式, 解得 $k = 1, b = -2$. 所以直线 l 的方程为 $y - x - 2 = 0$. 此时点 P 的坐标为 $(1, 1)$.

解: 设直线 l 的方程为 $y - kx + b = 0$, 则圆 C_2 的方程为 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$. 因为 $\angle APB = 90^\circ$, 所以 $PA \perp PB$, 即 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 0$. 又 A, B 在圆 C_2 上, 所以 $(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 1)^2 = 4$, $(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 1)^2 = 4$. 联立以上三式, 解得 $k = 1, b = -2$. 所以直线 l 的方程为 $y - x - 2 = 0$. 此时点 P 的坐标为 $(1, 1)$.

题号 本题满分 (总分)

已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 对于任意的实数 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且 $f(1) = 1$.

(I) 求 $f(x)$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的解析式 (用 x 表示).

题号 本题满分 (总分)

设函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$.

(I) 求证: $f(x)$ 为奇函数的充要条件是 $\frac{\pi}{4} = k\pi$.

(II) 设常数 $\omega > 0$, 且对任意 $x \in [0, \pi]$, $f(x)$ 恒成立, 求实数 ω 的取值范围.

数学

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分... 考试时间120分钟

第I卷(选择题 共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分)在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 虚数单位i,复数(1-i)/i等于 ()

- A. 1-i B. 1+i C. -1-i D. -1+i

2. 过点(1,0)且与双曲线x^2/4 - y^2/3 = 1有公共渐近线的双曲线方程是 ()

- A. x^2/4 - y^2/3 = 1 B. x^2/4 - y^2/3 = -1 C. x^2/3 - y^2/4 = 1 D. x^2/3 - y^2/4 = -1

3. 设一个含有三个实数的集合可表示为{a, b, c},也可表示为{1/a, 1/b, 1/c},那么abc的值是 ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

4. 如果一个三位数的十位数字既大于百位数字也大于个位数字,这样的三位数的个数是 ()

- A. 120 B. 100 C. 80 D. 60

5. 已知实数x, y的线性约束条件是... 那么函数z = 2x + y的最大值是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 若l, m是两条不同的直线, alpha, beta是两个不同的平面,下列命题中正确的一个是 ()

- A. l垂直于beta, m垂直于alpha, l平行于beta implies m垂直于alpha B. m垂直于alpha, l垂直于beta, m垂直于alpha implies l垂直于beta C. l平行于beta, m垂直于alpha, l平行于beta implies m垂直于alpha D. l垂直于beta, alpha垂直于beta implies l垂直于alpha

7. 在数列{a_n}中, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 1/n, 那么a_n的值等于 ()

- A. 1/n B. 1/n + 1 C. 1/n + 1/n D. 1/n + 1/n^2

8. 已知sin(theta) > cos(theta) > tan(theta), 则下列不等关系中必成立的是 ()

- A. sin(theta) > 1/2 > cos(theta) B. cos(theta) > 1/2 > sin(theta) C. tan(theta) > 1/2 > sin(theta) D. sin(theta) > 1/2 > tan(theta)

9. 函数f(x) = x^2 - 2x + 1在(0,1)内存在极小值, 则下列关系成立的是 ()

- A. a > 1 B. a < 1 C. a > 2 D. a < 2

10. 已知f(x) = sin(x)是最小正周期为pi的函数, 当x in [0, pi]时, f(x) > 0, 那么函数y = f(x)的图像与y = f(x+pi/2)的图像的交点个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

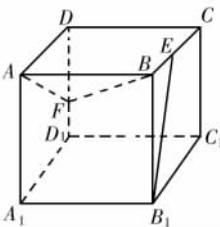
第II卷(非选择题 共60分)

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分)把答案填在题中横线上)

11. 二项式(x + 1/sqrt(x))^n的展开式中常数项的值是_____

12. 已知向量a, b, c, d, 且a与b, c互相垂直, 则向量a与d的夹角等于_____

13. 如图正方体ABCD-A1B1C1D1的棱长为1, E, F分别是棱BC, C1D1上的点, 如果EF垂直于平面A1B1C1, 则EF与A1B1的和的值等于_____



14. 直线y = kx + 1被圆x^2 + y^2 = 4所截得的弦长等于_____

15. 某林厂年初有森林木材存量m, 木材以每年n%的增长率生长, 而每年末要砍伐固定的木材量x, 为保证经过两次砍伐后木材的存量增加, 则x的值为_____

16. 设向量a = (1, 2), b = (2, 1), 若a + lambda*b垂直于a - lambda*b, 则lambda的最小值, 那么cos(theta)的值等于_____

三、解答题(本大题共3小题,共30分)解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 已知函数f(x) = x^2 - 2x + 1, 求常数a, b的值

18. 已知函数f(x) = x^2 - 2x + 1, 求常数a, b的值

19. 本小题5分)

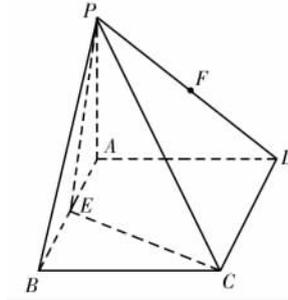
甲、乙两人各进行n次射击, 甲每次击中目标的概率为1/2, 乙每次击中目标的概率为1/3

- (I) 记甲击中目标的次数为xi, 求xi的概率分布及数学期望值; (II) 求乙至多击中目标n次的概率; (III) 求甲恰好比乙多击中目标n次的概率

20. 本小题5分)

如图四棱锥P-ABCD的底面ABCD是矩形, PA垂直于平面ABCD, E, F分别是PB, PD的中点, 二面角P-AC-B的大小为pi/3

- (I) 求证: PA垂直于平面ABCD; (II) 求证: 平面PAC垂直于平面PBD



圆援本小题 5分)

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ 在 $x = 1$ 处取得极值 圆援

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 实数 a 满足什么条件时 函数 $f(x)$ 在区间 $(a, a+1)$ 上为单调增函数?

(III) 若 $P(x_0, y_0)$ 是 $f(x)$ 图像上任意一点 直线 l 与 $f(x)$ 的图像相切于 P 点 求直线 l 的斜率 k 的取值范围 援

圆援本小题 5分)

已知公差大于零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 且满足 S_1, S_2, S_4 成等比数列 圆援

(I) 求通项 a_n ;

(II) 若 $\{b_n\}$ 是等差数列 求非零常数 k

(III) 求 $\frac{S_n}{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) 的最大值 援

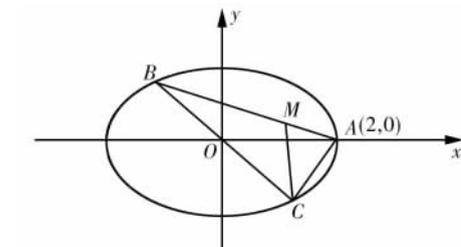
圆援本小题 5分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 点 $A(2, 0)$ 是长轴的一个端点 弦 BC 过椭圆的中心 且 $BC \perp OA$ 圆援

(I) 求椭圆的方程;

(II) 在 BC 上求一点 M 使 M 为 BC 的中点 并证明 $OM \perp AC$;

(III) 对于椭圆上的不同于 A, B 的两点 P, Q 当 $\angle POQ$ 的平分线总垂直于 BC 时 是否存在实数 λ 使 $PQ \perp BC$ 圆援



数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p,那么它在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率 $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

球的表面积公式 $S = 4\pi R^2$,其中 R 表示球的半径

球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$,其中 R 表示球的半径

第 I 卷(选择题 共 100 分)

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 10 分,共 100 分)在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 则 $(A \cap B) \cup \{1\}$ 为 ()

- A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- B. $\{1, 2, 3, 4\}$
- C. $\{1, 2, 3, 5\}$
- D. $\{1, 2, 3\}$

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前三项为 $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$, 则该数列的第四项为 ()

- A. $\sqrt{2}$
- B. $2\sqrt{2}$
- C. 2
- D. 4

3. 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) > 1$ 及 $f(x) < 1$, 则 $f(x)$ 可以是 ()

- A. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- B. $f(x) = \frac{1}{x}$
- C. $f(x) = \frac{1}{x^3}$
- D. $f(x) = \frac{1}{x^4}$

4. 复数 $z = \frac{1-i}{1+i}$ (i 为虚数单位)在复平面上对应的点不可能位于 ()

- A. 第一象限
- B. 第二象限
- C. 第三象限
- D. 第四象限

5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点, P 为双曲线上的点,若 $|PF_1| \cdot |PF_2| = b^2$, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

6. 正三棱锥 $P-ABC$ 内接于球 O , 球心 O 在底面 ABC 上, 且 $PA = 2$, 则球的表面积为 ()

- A. 4π
- B. 8π
- C. 12π
- D. 16π

7. 条件 $p: x \approx \frac{\pi}{2}$, 条件 $q: x \approx \frac{\pi}{4}$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分又不必要条件

8. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x & (x > 0) \\ x^2 & (x \leq 0) \end{cases}$, 则不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 ()

- A. $(e, +\infty) \cup (-\infty, -1)$
- B. $(e, +\infty) \cup (-1, 0)$
- C. $(e, +\infty) \cup (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- D. $(e, +\infty) \cup (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像的对称中心为 $(1, 1)$, 则实数 a 的值是 ()

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{5}$

11. 从 10 名学生中选出 3 人分别从事 A、B、C 三项不同的工作, 若其中甲、乙两人不能从事 A 种工作, 则不同的选派方案共有 ()

- A. 240 种
- B. 180 种
- C. 120 种
- D. 96 种

12. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为正实数, 若 a, b, c 成公差为正数的等差数列, 且满足 $f(a) + f(b) + f(c) = 3$, 若实数 x 是方程 $f(x) = 1$ 的一个解, 那么下列四个判断: ① $x > a$; ② $x > b$; ③ $x > c$; ④ $x > \frac{a+b+c}{3}$ 有可能成立的个数为 ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

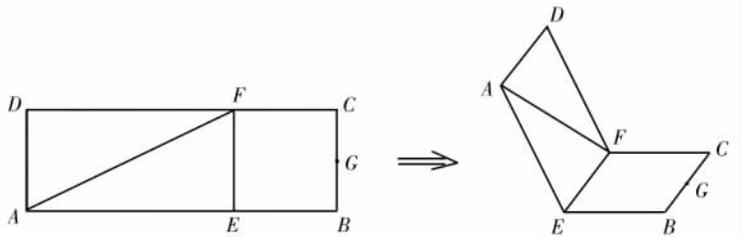
第 II 卷(非选择题 共 50 分)

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 10 分,共 50 分)

13. 已知某质点的位移 s 与移动时间 t 满足 $s = \frac{1}{2}at^2$, 则质点在 $t = 1$ 时的瞬时速度是 _____。

14. 若 $(x + \frac{1}{x})^n$ 的展开式中 x^2 的系数为 147 , 则 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n}}$ 的值为 _____。

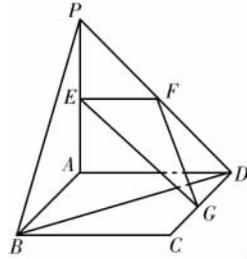
15. 如图, $ABCD$ 为矩形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, EF 为 $ABCD$ 的外心, 将 $ABCD$ 折成一个 120° 的二面角 $A-EF-C$, 则此时 AC 的长是 _____。



本题满分 12 分

如图, 平面 $PAQ \perp$ 平面 PQR , $PAQR$ 为正方形, $\triangle PAQ$ 是直角三角形, 且 $PQ \perp QR$. 点 E, F 分别是线段 PA, QR 的中点.

- (I) 求证: $PQ \parallel$ 面 AEF ;
- (II) 求异面直线 EF 与 QR 所成的角;
- (III) 在线段 QR 上是否存在一点 M , 使得点 M 到平面 AEF 的距离为 $\frac{1}{2}PQ$? 若存在, 求出 QM 的值; 若不存在, 请说明理由.



本题满分 12 分

某个微信群中有 n 名同学在玩一个数字哈哈镜游戏, 这些同学依次编号为 $1, 2, \dots, n$. 他们在哈哈镜中, 每个同学看到的像用数对 (a, b) (表示, 规则如下: 若编号为 a 的同学看到的像为 (a, b) , 则编号为 b 的同学看到的像为 (b, a) , 且 $a \neq b$.) 已知编号为 1 的同学看到的像为 $(1, 2)$.

- (I) 请根据以上规律分别写出编号为 2 和 3 的同学看到的像;
- (II) 求编号为 n 的同学看到的像.

本题满分 12 分

已知 z_1, z_2 为复数, $|z_1| = |z_2| = 1$, 点 P 满足 $z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$, 记点 P 的轨迹为 C .

- (I) 求轨迹 C 的方程;
- (II) 若直线 l 过点 z_1 且与轨迹 C 交于 A, B 两点.
 - (i) 无论直线 l 绕点 z_1 怎样转动, 在 z_2 轴上总存在定点 Q , 使 $QA \perp QB$ 恒成立, 求实数 Q 的值.
 - (ii) 过 A, B 作直线 z_2 的垂线 AM, BM , 垂足分别为 M, N , 记 $\lambda = \frac{AM}{AN}$, 求 λ 的取值范围.

本题满分 12 分

设 $f(x), g(x) (x \in \mathbb{R})$ 是函数 $F(x) = \sin x + \cos x$ 的两个极值点.

- (I) 若 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$, 求函数 $F(x)$ 的解析式;
- (II) 若 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$, 求 $F(x)$ 的最大值;
- (III) 若 $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$, 且 $F(x)$ 是函数 $F(x)$ 的原函数, 求证: $\int_0^{2\pi} F(x) dx = 0$.