课时作业(四十)

二元一次不等式(组)与简单的线性规划

基础过关组

一、选择题

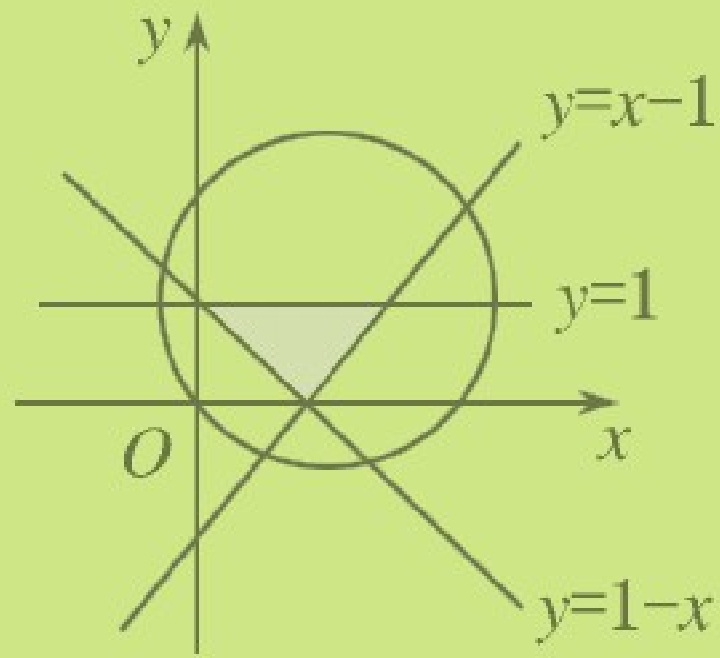
1. 设 p：实数 x,y 满足 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$，$q$：实数 x,y 满足 $\begin{cases} y\geqslant x-1, \\ y\geqslant 1-x, \\ y\leqslant 1, \end{cases}$ 则 p 是 q 的(　　)

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

答案与解析

解析 画出可行域，易知命题 q 中不等式组表示的平面区域在命题 p 中不等式表示的圆面内，故是必要不充分条件。



答案 A

一题多解 本题还可以采用以下方法 教师独具

解析：取 $x=y=0$ 满足条件 p，但不满足条件 q，反之，对于任意的 x，y 满足条件 q，显然必满足条件 p，所以 p 是 q 的必要不充分条件。故选 A。

2．已知不等式组$\begin{cases}x+y\leqslant 1,\\x-y\geqslant -1,\\y\geqslant 0\end{cases}$所表示的平面区域为 D，若直线 $y=kx-3$ 与平面区域 D 有公共点，则 k 的取值范围是(　　)

A．$[-3,3]$

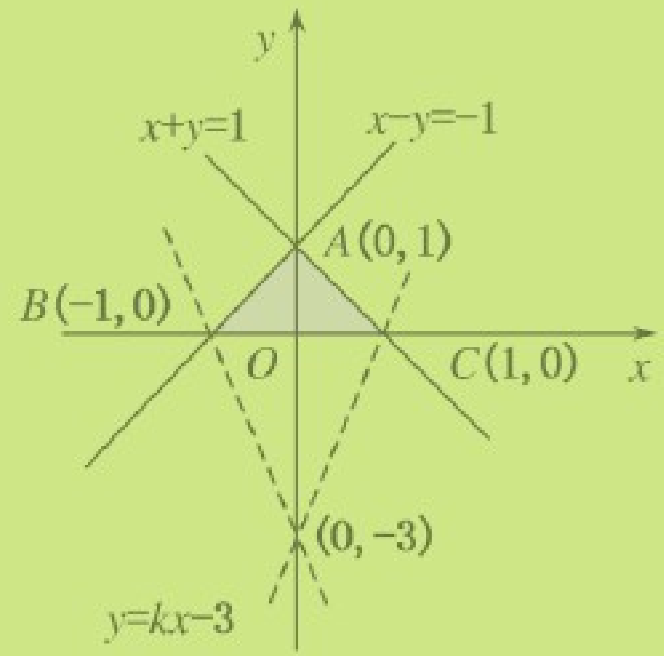
B．$\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},\ +\infty\right)$

C．$(-\infty,\ -3]\cup[3,\ +\infty)$

D．$\left[-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right]$

答案与解析

解析　满足约束条件的平面区域如图中阴影部分所示。因为直线 $y=kx-3$ 过定点 $(0，-3)$，所以当 $y=kx-3$ 过点 $C(1,0)$ 时，$k=3$；当 $y=kx-3$ 过点 $B(-1,0)$ 时，$k=-3$，所以当 $k\leqslant-3$ 或 $k\geqslant3$ 时，直线 $y=kx-3$ 与平面区域 D 有公共点。故选 C。



答案　C

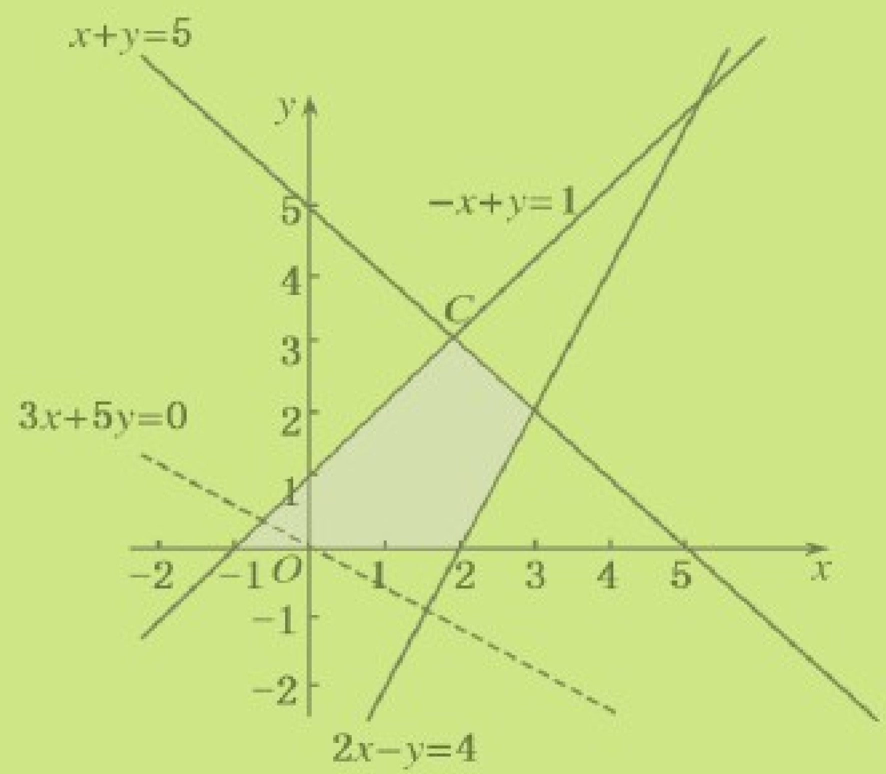
3．(2018·天津高考)设变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases} x+y\leqslant 5, \\ 2x-y\leqslant 4, \\ -x+y\leqslant 1, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为(　　)

A．6　　B．19

C．21　　D．45

答案与解析

解析 不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，作出直线 $y=-\frac{3}{5}x$，平移该直线，当经过点 C 时，z 取得最大值，由 $\begin{cases}-x+y=1,\\x+y=5\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ 即 $C(2,3)$，所以 $z_{\max}=3\times2+5\times3=21$。故选 C。



答案 C

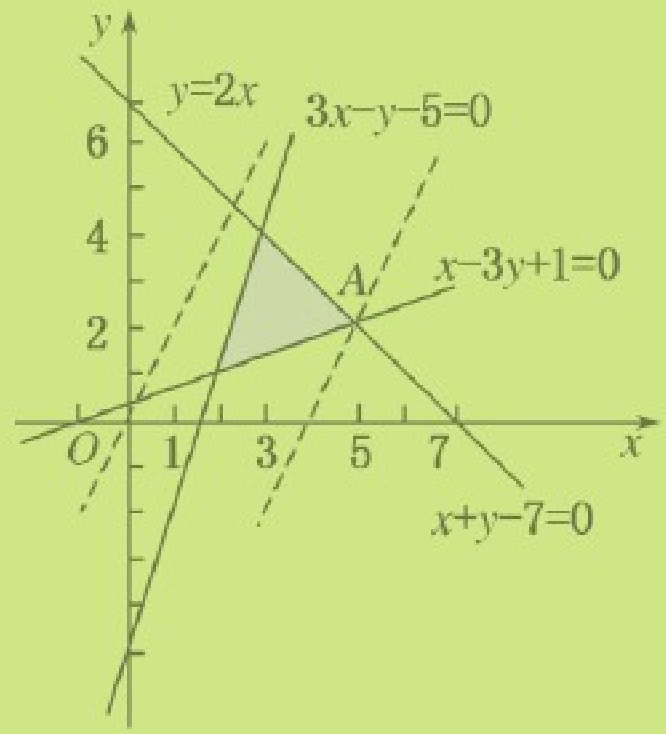
4. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-7\leqslant 0, \\ x-3y+1\leqslant 0, \\ 3x-y-5\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值为(　　)

A. 10　　B. 8

C. 3　　D. 2

答案与解析

解析 画出可行域如图所示。



由 $z=2x-y$，得 $y=2x-z$，欲求 z 的最大值，可将直线 $y=2x$ 向下平移，当经过区域内的点，且满足在 y 轴上的截距 $-z$ 最小时，即得 z 的最大值，如图，可知当过点 A 时 z 最大，由 $\begin{cases}x+y-7=0,\\x-3y+1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=5,\\y=2,\end{cases}$ 即 $A(5,2)$，则 $z_{max}=2\times5-2=8$。故选 B。

答案 B

5．(2019·湖南湘东五校联考)已知实数 x，y 满足$\begin{cases}x+2y\geqslant 0,\\x-y\leqslant 0,\\0\leqslant y\leqslant k,\end{cases}$且 $z=x+y$ 的最大值为 6，则$(x+5)^2+y^2$的最小值为(　　)

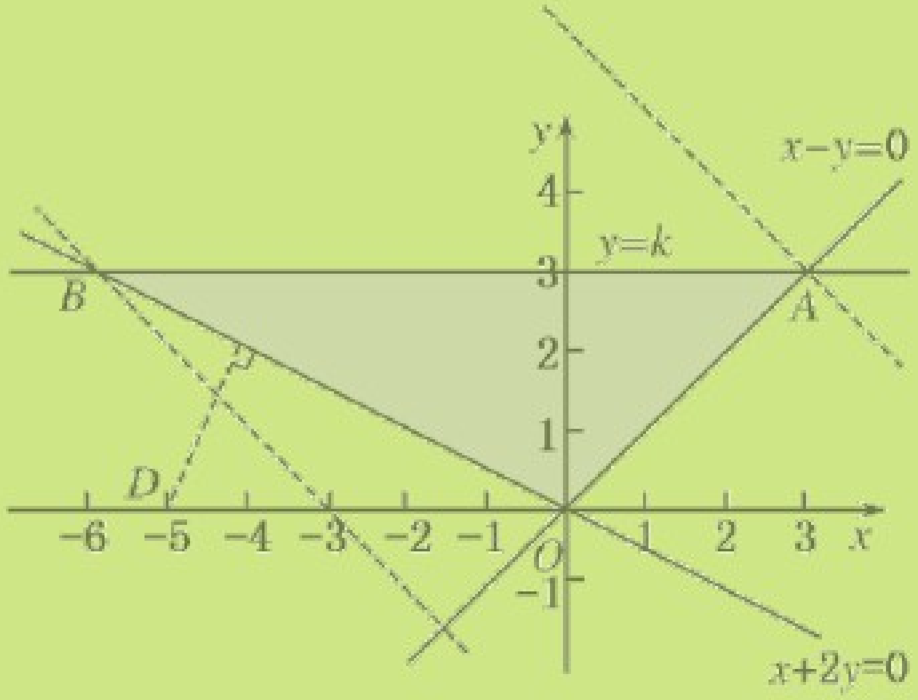
A．5　　B．3

C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{3}$

答案与解析

解析　作出不等式组$\begin{cases}x+2y\geqslant 0,\\x-y\leqslant 0,\\0\leqslant y\leqslant k\end{cases}$表示的平面区域如图中阴影部分所示，由 $z=x+y$，得 $y=-x+z$，平移直线 $y=-x$，由图形可知当直线 $y=-x+z$ 经过点 A 时，直线 $y=-x+z$ 的纵截距最大，此时 z 最大，最大

值为 6，即 $x+y=6$。由$\begin{cases}x+y=6,\\x-y=0,\end{cases}$得 $A(3,3)$，因为直线 $y=k$ 过点 A，所以 $k=3$。$(x+5)^2+y^2$ 的几何意义是可行域内的点与 $D(-5,0)$的距离的平方，数形结合可知，$(-5，0)$到直线 $x+2y=0$ 的距离最小，可得$(x+5)^2+y^2$ 的最小值为$\left(\dfrac{|-5+2\times0|}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2=5$。故选 A。



答案　A

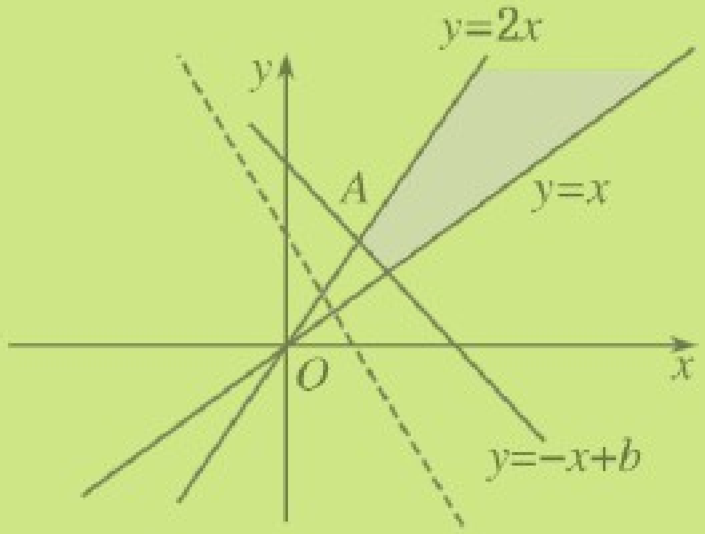
6．若函数 x，y 满足 $\begin{cases}2x-y\geqslant 0,\\ y\geqslant x,\\ y\geqslant -x+b\end{cases}$ 且 $z=2x+y$ 的最小值为 4，则实数 b 的值为(　　)

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．$\dfrac{5}{2}$

答案与解析

解析　由约束条件作出可行域(如图)，当目标函数 $y=-2x+z$ 经过可行域内的点 $A\left(\frac{b}{3},\ \frac{2b}{3}\right)$时，$z$ 取得最小值，即 $z_{\min}=2\times\frac{b}{3}+\frac{2b}{3}=4$，解得 $b=3$。故选 C。



答案　C

7．(2019·**河北名校联考**)某企业生产甲、乙两种产品均需用 A，B 两种原料，已知生产 1 吨每种产品所需原料及每天原料的可用限额如表所示。如果生产 1 吨甲、乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元，则该企业每天可获得的最大利润为(　　)

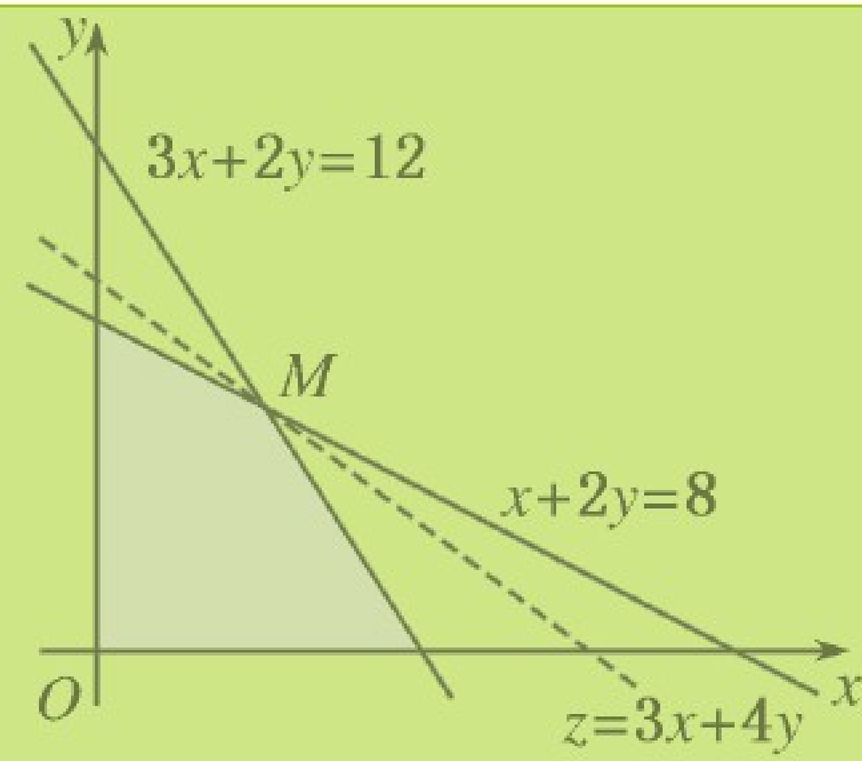
	甲	乙	原料限额
A/吨	3	2	12
B/吨	1	2	8

A．15 万元　　B．16 万元

C．17 万元　　D．18 万元

答案与解析

解析 设生产甲产品 x 吨，乙产品 y 吨，获利润 z 万元，由题意可知，$\begin{cases}3x+2y\leqslant 12,\\ x+2y\leqslant 8,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ $z=3x+4y$，画出可行域如图中阴影部分所示，直线 $z=3x+4y$ 过点 M 时，$z=3x+4y$ 取得最大值，由$\begin{cases}3x+2y=12,\\ x+2y=8,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2,\\ y=3,\end{cases}$所以 $M(2,3)$，故 $z=3x+4y$ 的最大值为 18。故选 D。



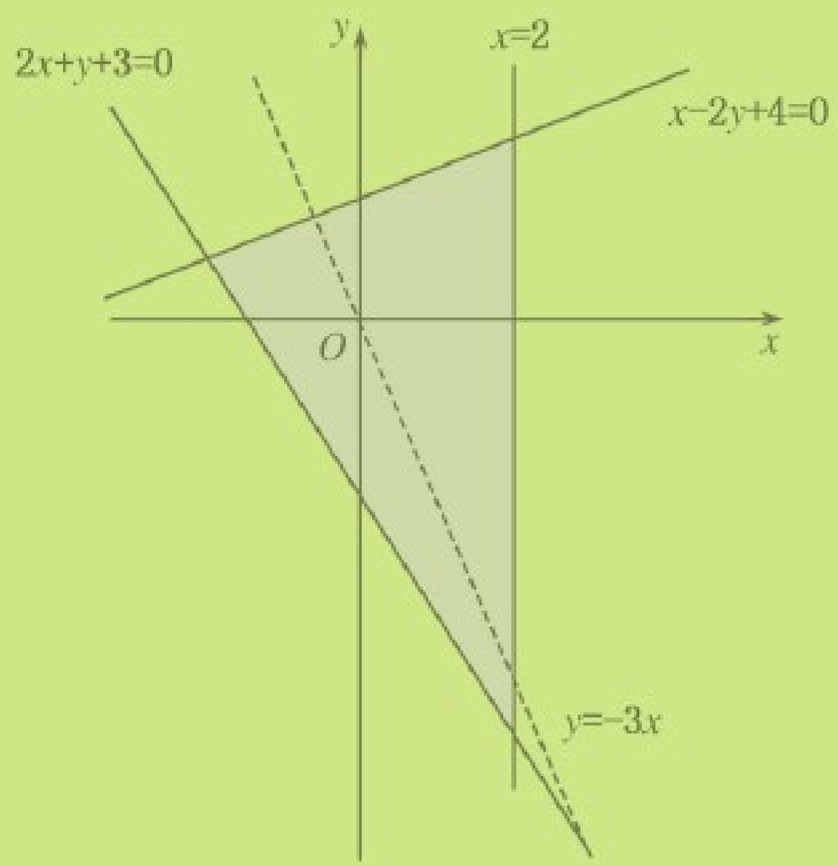
答案　D

二、填空题

8．若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y+3\geqslant 0,\\ x-2y+4\geqslant 0,\\ x-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+\frac{1}{3}y$ 的最大值是________。

答案与解析

解析 作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，画出直线 $y=-3x$，平移该直线，由图可知当平移后的直线经过直线 $x=2$ 与直线 $x-2y+4=0$ 的交点(2,3)时，$z=x+\frac{1}{3}y$ 取得最大值，即 $z_{\max}=2+\frac{1}{3}\times 3=3$。



答案 3

一题多解

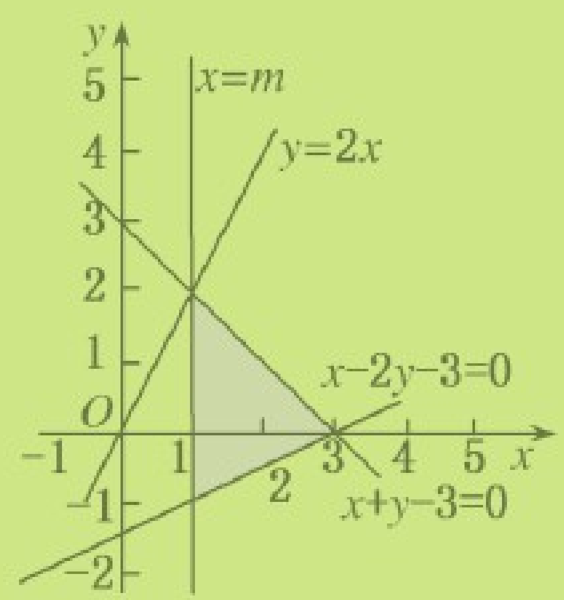
本题还可以采用以下方法 教师独具

解析：易知 $z=x+\frac{1}{3}y$ 在可行域的顶点处取得最大值，由 $\begin{cases}2x+y+3=0,\\x-2y+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$ 代入 $z=x+\frac{1}{3}y$，可得 $z=-\frac{5}{3}$；由 $\begin{cases}2x+y+3=0,\\x-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-7,\end{cases}$ 代入 $z=x+\frac{1}{3}y$，可得 $z=-\frac{1}{3}$；由 $\begin{cases}x-2y+4=0,\\x-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ 代入 $z=x+\frac{1}{3}y$，可得 $z=3$。比较可知，z 的最大值为 3。

9．若直线 $y=2x$ 上存在点$(x，y)$满足约束条件$\begin{cases}x+y-3\leqslant 0,\\x-2y-3\leqslant 0,\\x\geqslant m,\end{cases}$则实数 m 的取值范围是________。

答案与解析

解析 根据题意，由$\begin{cases}y=2x,\\x+y-3=0,\end{cases}$可求得交点坐标为(1,2)，要使直线$y=2x$上存在点$(x，y)$满足约束条件$\begin{cases}x+y-3\leqslant 0,\\x-2y-3\leqslant 0,\\x\geqslant m,\end{cases}$则点(1,2)在可行域内，如图所示，可得$m\leqslant 1$。

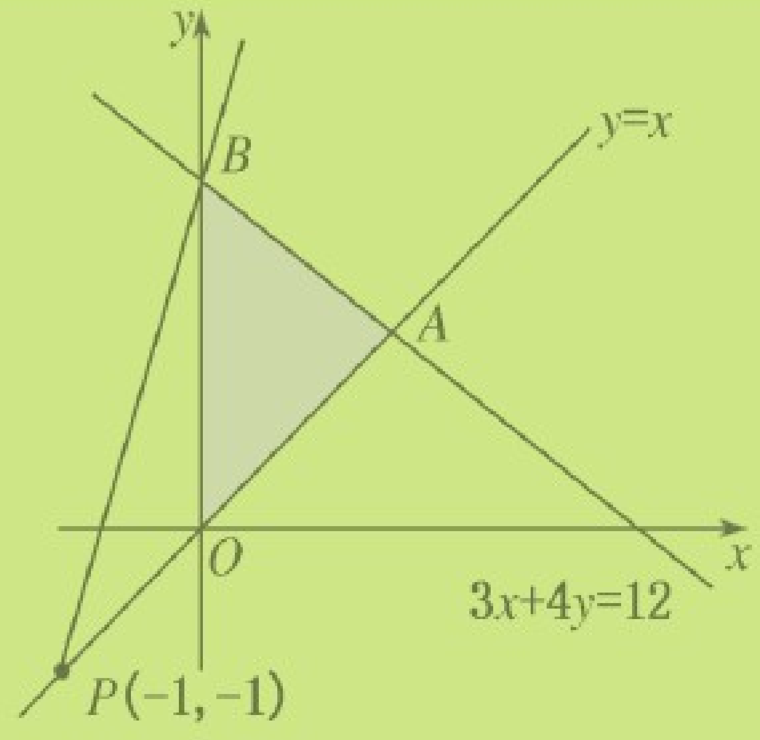


答案 $(-\infty，1]$

10. 已知 x，y 满足条件 $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant x, \\ 3x+4y \leqslant 12, \end{cases}$ 则 $\dfrac{x+2y+3}{x+1}$ 的取值范围是____。

答案与解析

解析 画出不等式组表示的可行域，如图中阴影部分所示，$\dfrac{x+2y+3}{x+1}=1+2\times\dfrac{y+1}{x+1}$，$\dfrac{y+1}{x+1}$ 表示可行域中的点 (x, y) 与点 $P(-1, -1)$ 连线的斜率。由图可知，当 $x=0$，$y=3$ 时，$\dfrac{x+2y+3}{x+1}$ 取得最大值，且 $\left(\dfrac{x+2y+3}{x+1}\right)_{\max}=9$。因为点 $P(-1, -1)$ 在直线 $y=x$ 上，所以当点 (x, y) 在线段 AO 上时，$\dfrac{x+2y+3}{x+1}$ 取得最小值，且 $\left(\dfrac{x+2y+3}{x+1}\right)_{\min}=3$。所以 $\dfrac{x+2y+3}{x+1}$ 的取值范围是[3,9]。



答案 [3,9]

能力提升组

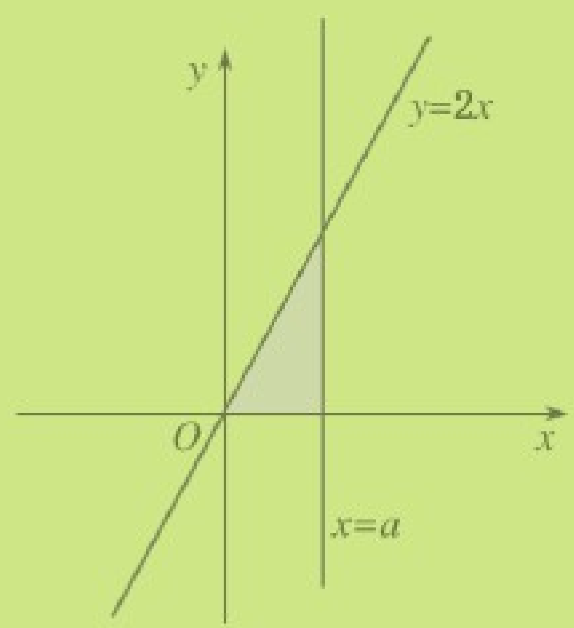
11．(2019·洛阳市高三统考)在区间(0,2)内随机取一个实数 a，则满足 $\begin{cases}2x-y\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ x-a\leqslant 0\end{cases}$ 的点(x，y)构成区域的面积大于 1 的概率是(　　)

A．$\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{1}{4}$

C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{3}{4}$

答案与解析

解析　作出约束条件$\begin{cases}2x-y\geq 0,\\ y\geq 0,\\ x-a\leq 0\end{cases}$表示的平面区域如图中阴影部分所示，则阴影部分的面积$S=\frac{1}{2}\times a\times 2a=a^2>1$，所以$1<a<2$，根据几何概型的概率计算公式得所求概率为$\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$。故选C。



答案　C

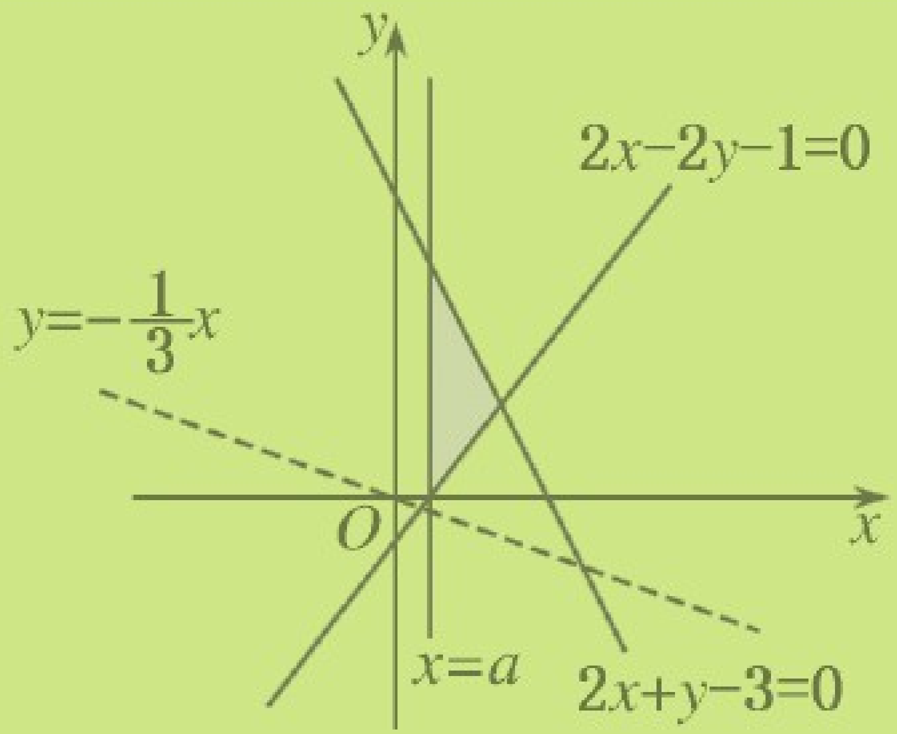
12．设 x，y 满足约束条件$\begin{cases}2x+y-3\leqslant 0,\\2x-2y-1\leqslant 0,\\x-a\geqslant 0,\end{cases}$其中 $a>0$，若$\dfrac{x-y}{x+y}$的最大值为 2，则 a 的值为(　　)

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{4}$

C．$\dfrac{3}{8}$　　D．$\dfrac{5}{9}$

答案与解析

解析 设 $z=\frac{x-y}{x+y}$，则 $y=\frac{1-z}{1+z}x$，当 $z=2$ 时，$y=-\frac{1}{3}x$，作出 x，y 满足的约束条件 $\begin{cases}2x+y-3\leqslant 0,\\2x-2y-1\leqslant 0,\\x-a\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域如图中阴影部分所示，作出直线 $y=-\frac{1}{3}x$，易知此直线与区域的边界线 $2x-2y-1=0$ 的交点为 $\left(\frac{3}{8},\ -\frac{1}{8}\right)$，当直线 $x=a$ 过点 $\left(\frac{3}{8},\ -\frac{1}{8}\right)$ 时 $a=\frac{3}{8}$，又此时直线 $y=\frac{1-z}{1+z}x$ 的斜率 $\frac{1-z}{1+z}$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$，即 $-1+\frac{2}{z+1}$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$，即 z 的最大值为 2，符合题意，所以 a 的值为 $\frac{3}{8}$。故选 C。



答案 C

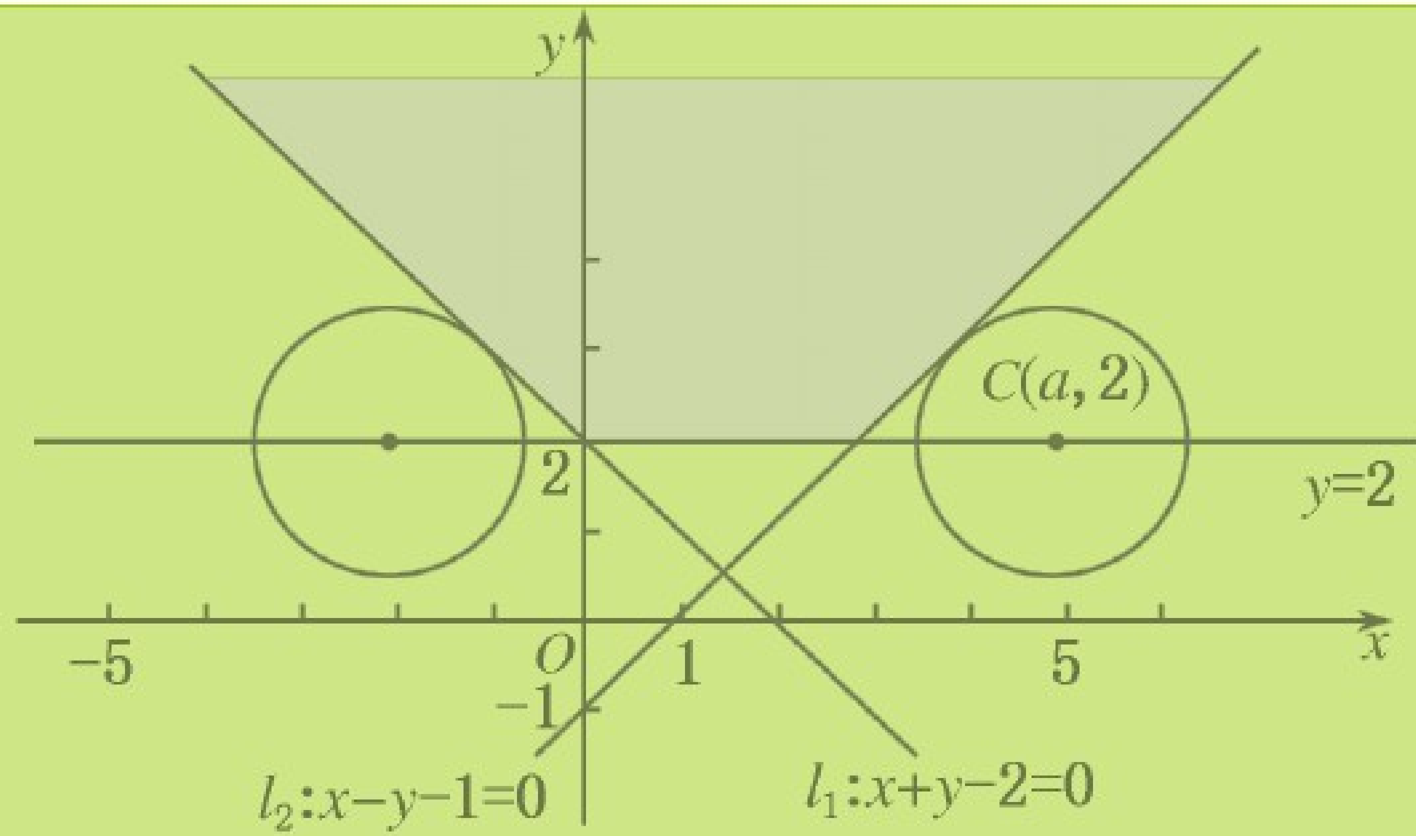
一题多解　本题还可以采用以下方法　教师独具

解析：因为 $x>0$，所以 $\frac{x-y}{x+y}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}=\frac{-1-\frac{y}{x}+2}{1+\frac{y}{x}}=-1+\frac{2}{1+\frac{y}{x}}$，当 $\frac{y}{x}$ 最小时，$\frac{x-y}{x+y}$ 取最大值为 2，此时 $\frac{y}{x}=-\frac{1}{3}$，由 $\begin{cases}2x-2y-1=0,\\x=a,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=a,\\y=a-\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $\frac{a-\frac{1}{2}}{a}=-\frac{1}{3}$，解得 $a=\frac{3}{8}$。故选 C。

13．(2019·江西南昌二中模拟)已知区域 D：$\begin{cases} y\geqslant 2, \\ x+y-2\geqslant 0, \\ x-y-1\leqslant 0, \end{cases}$ 且圆 C：$(x-a)^2+(y-2)^2=2$ 与区域 D 有公共点，则实数 a 的取值范围是________。

答案与解析

解析　在坐标系中作出区域 D(如图中阴影部分所示)，易知圆 C 的圆心为$(a,2)$，半径为$\sqrt{2}$，所以只需确定圆心的位置即可，通过左右平移圆可观察到圆 C 与直线 l_1：$x+y-2=0$ 和 l_2：$x-y-1=0$ 分别相切时对应 a 取值的临界位置。当圆与 l_1：$x+y-2=0$ 相切时，$dC-l_1=\frac{|a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow a=\pm 2$，由图可得 $a=-2$；当圆与 l_2：$x-y-1=0$ 相切时，$dC-l_2=\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow a=1$ 或 $a=5$，由图可得 $a=5$，所以 $a\in[-2,5]$。

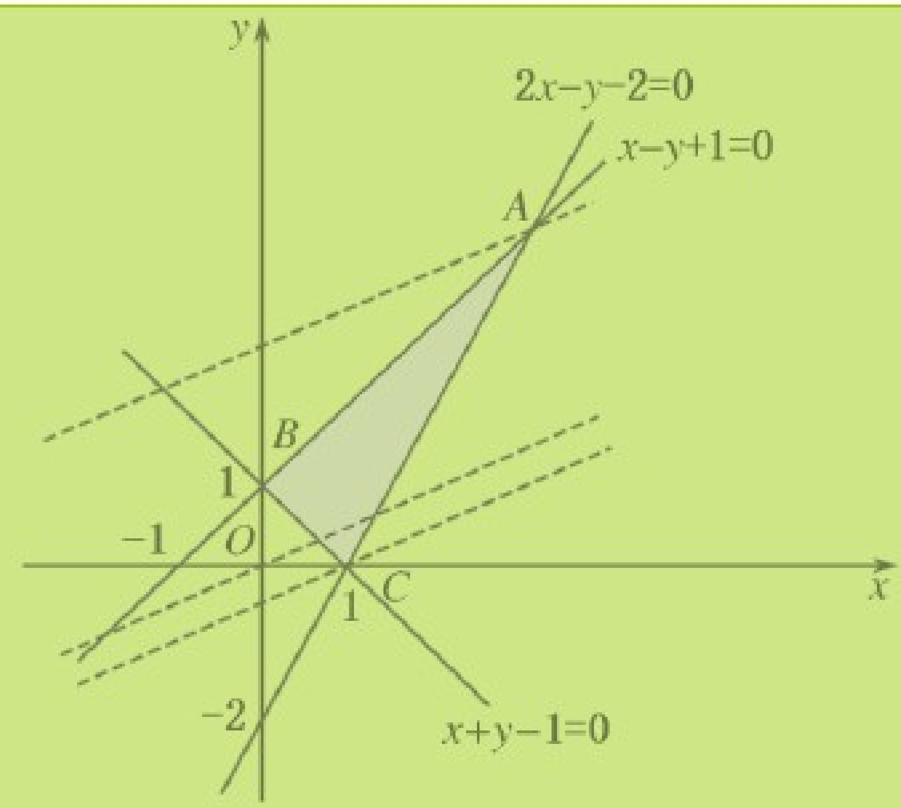


答案　[－2,5]

14．(2019·**豫南九校联考**)已知不等式组$\begin{cases}x+y-1\geqslant 0,\\x-y+1\geqslant 0,\\2x-y-2\leqslant 0\end{cases}$表示的平面区域为 D，若对任意的$(x，y)\in D$，不等式 $t-4<x-2y+6<t+4$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是________。

答案与解析

解析　作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，可求得 $A(3,4)$，$B(0,1)$，$C(1,0)$。设 $z=x-2y+6$，平移直线 $y=\frac{1}{2}x$，可知 $z=x-2y+6$ 在 $A(3,4)$处取得最小值 1，在 $C(1,0)$处取得最大值 7，所以$\begin{cases}t-4<1,\\t+4>7,\end{cases}$解得 $3<t<5$。故实数 t 的取值范围是$(3,5)$。



答案 (3,5)