经全国中小学教材审定委员会
2004年初审通过

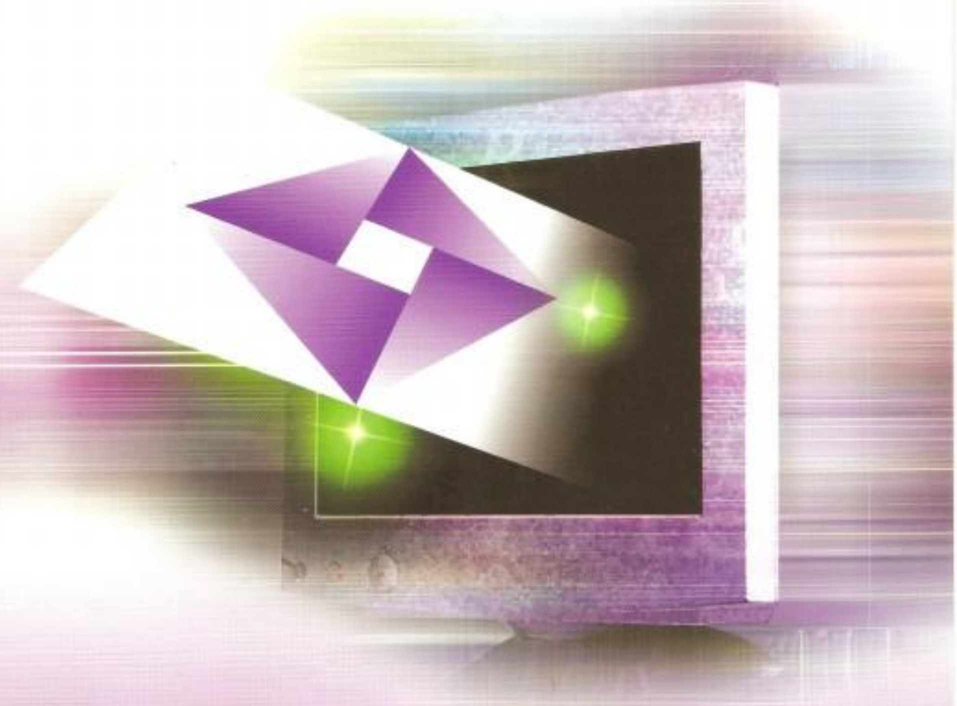
义务教育课程标准实验教科书

数学

SHUXUE

九年级　下册

课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

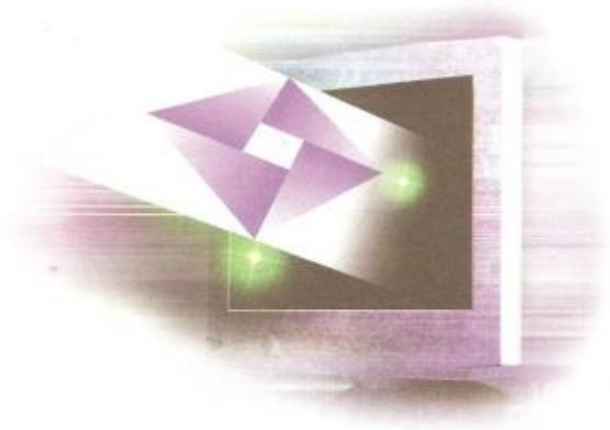
义务教育课程标准实验教科书

数　学

SHUXUE

九年级　下册

课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

义务教育课程标准实验教科书
数　学
九年级　下册
课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著
*
人民教育出版社出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销
*
开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：8.5　字数：140 000
2009 年 3 月第 2 版　2009 年 12 月第 6 次印刷
ISBN 978-7-107-19606-5
G·12656（课）　定价：8.40 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬

本册主编：李海东
主要编者：薛　彬　李海东　左怀玲
　　　　　田载今　刘长明
本次修订：薛　彬　宋莉莉　章建跃　刘长明
责任编辑：薛　彬
美术编辑：王俊宏　刘　昀
封面设计：林荣桓

本册导引

亲爱的同学，新学期又开始了.

你将要学习的这本书是我们根据《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》编写的实验教科书，这是你在七～九年级要学习的六册数学教科书中的最后一册.

与前五册一样，这册书将继续伴你乘坐"思考""探究""归纳"之舟，从身边的实际问题出发，在数学的海洋里乘风破浪，去探索、发现数学的奥秘；你还要用学到的本领去解决"复习巩固""综合运用""拓广探索"等不同层次的问题；你可以有选择地进行"数学活动"；如果有兴趣，你也可以到"阅读与思考""观察与猜想""实验与探究""信息技术应用"这些选学内容中去看看更广阔的数学世界. 通过探索、尝试，相信你的聪明才智会得到充分的发挥，你用数学解决问题的能力会迈上一个新的台阶.

现在，让我们启航，一起去遨游九年级下册这片数学海域吧！

函数是描述变化的一种数学工具，在前面几册，我们已经学习了一次函数和反比例函数. 在"二次函数"一章，我们将认识函数家庭的另一个重要成员——二次函数，学习它的图象和性质，利用它来表示某些问题中的数量关系，解决一些实际问题，进一步提高对函数认识和应用能力.

日常生活中，我们常常会见到一些形状相似的图形，它们具

有什么共同的特征？怎样从数学的角度去认识这种现象？在“相似”一章，你将会得到答案．类似于全等，相似是图形之间的一种特殊关系．与平移、轴对称、旋转一样，位似也是图形之间的一种基本变换．学习了这一章，你将会对上述问题有更深刻的理解，并利用相似去解决一些实际问题．

测量物体的长度或角度是我们日常生活中经常遇到的问题，在前面的学习中，你已学习了一些利用全等或相似来测量的方法，但都要用到两个三角形．“锐角三角函数”将带你去研究直角三角形中的边角关系，利用它可以很方便地解决与直角三角形有关的测量问题．

在建筑施工和制造机械时，人们常常要通过三视图来实现设计师的设计．在七年级上册，你已初步了解了从不同方向看立体图形可以得到不同的平面图形．在“投影与视图”一章，你将了解投影的基础知识，借助投影来认识视图，并进一步利用视图来认识立体图形和平面图形的关系．学习了本章，相信你对空间图形的认识一定会有进一步的提高．

过了这个学期，你就要初中毕业了，这套《义务教育课程标准实验教科书·数学》伴你走过了三年的初中学习生活．回忆一下，在这三年里，你学到了哪些数学知识？对数学有了进一步的认识吗？

今后，无论是你继续学习还是参加工作，都希望你能用数学的眼光去观察世界，用数学的头脑去思考问题，用所学的数学知识去解决问题．愿你今后取得更大的进步．

目　录

第二十六章　二次函数

第二十七章　相　似

第二十八章 锐角三角函数

第二十九章 投影与视图

第二十六章 二次函数

函数是描述变化的一种数学工具，用一次函数与反比例函数可以表示某些问题中变量之间的关系．我们再来看另一些问题中变量之间的关系．

如果改变正方体的棱长 x，那么正方体的表面积 y 会随之改变，y 与 x 之间有什么关系？

物体自由下落过程中，下落的距离 s 随下落时间 t 的变化而变化，s 与 t 之间有什么关系？

再看章前图，从喷头飞出的水珠，在空中走过一条曲线．在这条曲线的各个位置上，水珠的竖直高度 h 与它距离喷头的水平距离 x 之间有什么关系？

上面问题中变量之间的关系可以用哪一种函数来表示？这种函数有哪些性质？它的图象是什么样的？它与以前学习的函数、方程等有哪些联系？

通过学习本章，你不仅能回答上述问题，并且能体会如何用这种函数分析和解决某些实际问题，从而进一步提高对函数的认识和运用能力．

26.1 二次函数及其图象

26.1.1 二次函数

我们看引言中正方体的表面积的问题.

正方体的六个面是全等的正方形（图 26.1-1），设正方体的棱长为 x，表面积为 y，显然对于 x 的每一个值，y 都有一个对应值，即 y 是 x 的函数，它们的具体关系可以表示为

$$y=6x^2. \qquad ①$$

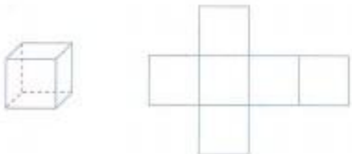


图 26.1-1

我们再来看几个问题.

问题 1　多边形的对角线数 d 与边数 n 有什么关系？

图 26.1-2

由图 26.1-2 可以想出，如果多边形有 n 条边，那么它有____个顶点. 从一个顶点出发，连接与这点不相邻的各顶点，可以作______条对角线.

因为像线段 MN 与 NM 那样，连接相同两顶点的对角线是同一条对角线，所以多边形的对角线总数

$$d=\frac{1}{2}n(n-3),$$

即

$$d=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n. \qquad ②$$

②式表示了多边形的对角线数 d 与边数 n 之间的关系，对于 n 的每一个

值，d 都有一个对应值，即 d 是 n 的函数.

问题 2　某工厂一种产品现在的年产量是 20 件，计划今后两年增加产量. 如果每年都比上一年的产量增加 x 倍，那么两年后这种产品的产量 y 将随计划所定的 x 的值而确定，y 与 x 之间的关系应怎样表示？

这种产品的原产量是 20 件，一年后的产量是________件，再经过一年后的产量是____________件，即两年后的产量为

$$y=20(1+x)^2,$$

即

$$y=20x^2+40x+20. \qquad ③$$

③式表示了两年后的产量 y 与计划增产的倍数 x 之间的关系，对于 x 的每一个值，y 都有一个对应值，即 y 是 x 的函数.

思考

函数①，②，③有什么共同点？

在上面的问题中，函数都是用自变量的二次式表示的. 一般地，形如

$$y=ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c \text{ 是常数}，a\neq 0)$$

的函数，叫做**二次函数**（quadratic function）. 其中，x 是自变量，a，b，c 分别是函数解析式的二次项系数、一次项系数和常数项.

现在我们学习过的函数有：一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$，其中包括正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 和二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. 可以发现，这些函数的名称都反映了函数解析式与自变量的关系.

练习

1. 一个圆柱的高等于底面半径，写出它的表面积 S 与半径 r 之间的关系式.
2. n 支球队参加比赛，每两队之间进行一场比赛. 写出比赛的场次数 m 与球队数 n 之间的关系式.

26.1.2　二次函数 $y=ax^2$ 的图象

思考

一次函数的图象是一条直线，反比例函数的图象是双曲线，二次函数的图象是什么形状呢？通常怎样画一个函数的图象？

我们先来画最简单的二次函数 $y=x^2$ 的图象.

在 $y=x^2$ 中自变量 x 可以是任意实数，列表表示几组对应值（填表）：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…								…

结合图象讨论性质是数形结合地研究函数的重要方法. 我们将从最简单的二次函数开始逐步深入地讨论一般二次函数的图象和性质.

根据表中 x，y 的数值在坐标平面中描点 (x, y)（图 26.1-3），再用平滑曲线顺次连接各点，就得到 $y=x^2$ 的图象（图 26.1-4）.

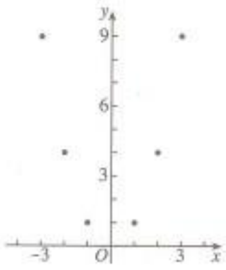


图 26.1-3

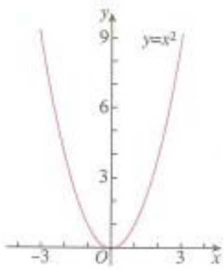


图 26.1-4

还记得如何用描点法画一个函数的图象吗？

可以看出，二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条曲线，它的形状类似于投篮球或掷铅球时球在空中所经过的路线，只是这条曲线开口向上. 这条曲线叫做抛物线 $y=x^2$. 实际上，二次函数的图象都是抛物线，它们的开口或者向上或者向下. 一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象叫做抛物线

$y=ax^2+bx+c$.

还可以看出，y 轴是抛物线 $y=x^2$ 的对称轴，抛物线 $y=x^2$ 与它的对称轴的交点（0，0）叫做抛物线 $y=x^2$ 的顶点，它是抛物线 $y=x^2$ 的最低点．实际上，每条抛物线都有对称轴，抛物线与对称轴的交点叫做抛物线的顶点．顶点是抛物线的最低点或最高点．

由于点（m，m^2）和它关于 y 轴的对称点（$-m$，m^2）都在抛物线 $y=x^2$ 上，所以抛物线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称．

例 1　在同一直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ 的图象．

解：分别填表，再画出它们的图象(图 26.1-5)．

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…										…

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
$y=2x^2$	…										…

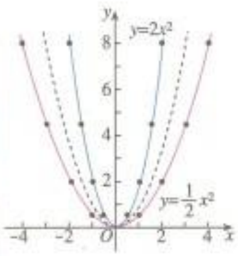


图 26.1-5

思考

函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ 的图象与函数 $y=x^2$(图 26.1-5 中的虚线图形)的图象相比，有什么共同点和不同点？

探究

画出函数 $y=-x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=-2x^2$ 的图象，并考虑这些抛物线有什么共同点和不同点．

你画出的图象与图 26.1-6 相同吗？

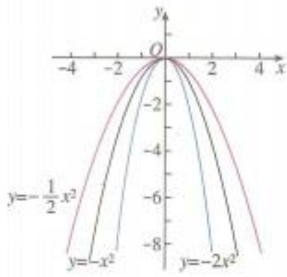


图 26.1-6

对比抛物线 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$，它们关于 x 轴对称吗？一般地，抛物线 $y=ax^2$ 和 $y=-ax^2$ 呢？

归纳

一般地，抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴是 y 轴，顶点是原点．当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，顶点是抛物线的最低点，a 越大，抛物线的开口越小；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向____，顶点是抛物线的最____点，a 越大，抛物线的开口越____．

26.1.3　二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象

例 2　在同一直角坐标系中，画出二次函数 $y=x^2+1$，$y=x^2-1$ 的图象．

解：先列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2+1$	…								…
$y=x^2-1$	…								…

然后描点画图，得 $y=x^2+1$，$y=x^2-1$ 的图象（图 26.1-7）．

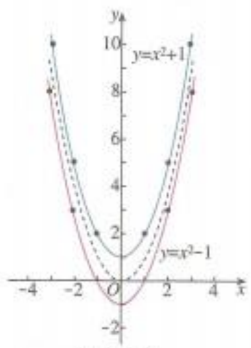


图 26.1-7

思考

(1) 抛物线 $y=x^2+1$，$y=x^2-1$ 的开口方向、对称轴、顶点各是什么？

(2) 抛物线 $y=x^2+1$，$y=x^2-1$ 与抛物线 $y=x^2$ 有什么关系？

可以发现，把抛物线 $y=x^2$ 向上平移 1 个单位，就得到抛物线 $y=x^2+1$；把抛物线 $y=x^2$ 向下平移1 个单位，就得到抛物线 $y=x^2-1$.

思考

把抛物线 $y=2x^2$ 向上平移 5 个单位，会得到哪条抛物线？向下平移 3.4 个单位呢？

练习

在同一直角坐标系中，画出下列二次函数的图象：

$$y=\frac{1}{2}x^2,\ y=\frac{1}{2}x^2+2,\ y=\frac{1}{2}x^2-2.$$

观察三条抛物线的相互关系，并分别指出它们的开口方向、对称轴及顶点．你能说出抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$ 的开口方向、对称轴及顶点吗？它与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

探究

画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象，并考虑它们的开口方向、对称轴和顶点.

先列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$	…								…
$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$	…								…

然后描点画图，得 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象（图 26.1-8）.

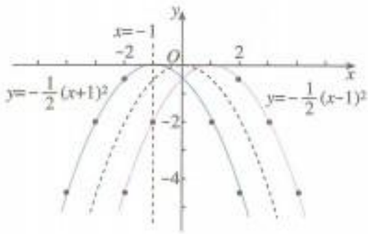


图 26.1-8

可以看出，抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的开口向下，对称轴是经过点$(-1, 0)$且与 x 轴垂直的直线，我们把它记作 $x=-1$，顶点是$(-1, 0)$；抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的开口向____，对称轴是__________，顶点是__________.

思考

抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

可以发现，把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$；把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 1 个单位，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

练习

在同一直角坐标系内画出下列二次函数的图象：

$$y=\frac{1}{2}x^2，y=\frac{1}{2}(x+2)^2，y=\frac{1}{2}(x-2)^2$$

观察三条抛物线的相互关系，并分别指出它们的开口方向、对称轴及顶点.

例 3　画出函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图象，指出它的开口方向、对称轴及顶点．怎样移动抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 就可以得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$？

解：函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图象如图 26.1-9 所示．

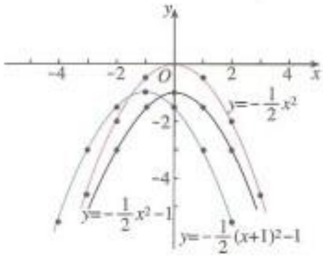


图 26.1-9

抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的开口方向向下、对称轴是 $x=-1$，顶点是 $(-1,-1)$．

还有其他平移方法吗？

把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向下平移 1 个单位，再向左平移 1 个单位，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$．

归纳

一般地，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 形状相同，位置不同．把抛物线 $y=ax^2$ 向上（下）向左（右）平移，可以得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$．平移的方向、距离要根据 h，k 的值来决定．

抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 有如下特点：

(1) 当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下；

(2) 对称轴是直线 $x=h$；

(3) 顶点坐标是 (h,k)．

我们来看一个与章前图有关的问题.

例 4　要修建一个圆形喷水池，在池中心竖直安装一根水管，在水管的顶端安一个喷水头，使喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为 1 m 处达到最高，高度为 3 m，水柱落地处离池中心 3 m，水管应多长？

解：如图 26.1-10 建立直角坐标系，点（1，3）是图中这段抛物线的顶点，因此可设这段抛物线对应的函数是

$$y=a(x-1)^2+3 \quad (0\leqslant x\leqslant 3).$$

由这段抛物线经过点(3，0)可得

$$0=a(3-1)^2+3,$$

解得

$$a=-\frac{3}{4}.$$

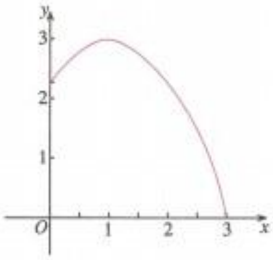


图 26.1-10

因此

$$y=-\frac{3}{4}(x-1)^2+3 \quad (0\leqslant x\leqslant 3).$$

当 $x=0$ 时，$y=2.25$，也就是说，水管应长 2.25 m.

练习

说出下列抛物线的开口方向、对称轴及顶点：

(1) $y=2(x+3)^2+5$；　(2) $y=-3(x-1)^2-2$；

(3) $y=4(x-3)^2+7$；　(4) $y=-5(x+2)^2-6$.

26.1.4　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象

下面通过画 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象，讨论一般地怎样画二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象.

思考

我们知道，像 $y=a(x-h)^2+k$ 这样的函数，容易确定相应抛物线的顶点为 (h, k)，二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 也能化成这样的形式吗？

配方可得：

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2-6x+21 \\ &= \frac{1}{2}(x-6)^2+3. \end{aligned}$$

由此可知，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的顶点是点 $(6, 3)$，对称轴是直线 $x=6$.

接下来，利用图象的对称性列表（请填表）：

x	…	3	4	5	6	7	8	9	…
$y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$	…								…

然后描点画图，得到 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$ 的图象（图 26.1-11）.

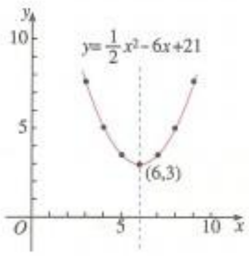
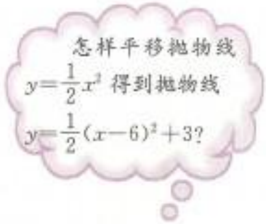


图 26.1-11



从图象可以看出：当 $x<6$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>6$ 时，y 随 x 的增大而增大.

归纳

一般地，我们可以用配方求抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的顶点与对称轴.

$$\begin{aligned}y&=ax^2+bx+c\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},\end{aligned}$$

因此，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

练习

写出下列抛物线的开口方向、对称轴及顶点坐标.

(1) $y=3x^2+2x$；　(2) $y=-x^2-2x$；

(3) $y=-2x^2+8x-8$；　(4) $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3$.

*26.1.5　用待定系数法求二次函数的解析式

探究

我们知道，已知一次函数图象上两个点的坐标，可以用待定系数法求出它的解析式. 对于二次函数，探究下面的问题：

(1) 已知二次函数图象上几个点的坐标，可以求出这个二次函数的解析式？

(2) 如果一个二次函数的图象经过 $(-1,\ 10)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 7)$ 三点，能求出这个二次函数的解析式吗？如果能，求出这个二次函数的解析式.

* 本小节内容是选学内容，供学有余力的学生学习.

分析：(1) 一次函数的解析式是 $y=kx+b$，要写出解析式，需求出 k 与 b 的值．为此，可以由一次函数图象上两个点的坐标，列出关于 k，b 的二元一次方程组求出待定系数 k 与 b．类似地，二次函数的解析式是 $y=ax^2+bx+c$，要写出解析式，需求出 a，b，c 的值．为此，可以由二次函数图象上三个点的坐标，列出关于 a，b，c 的三元一次方程组，求出三个待定系数 a，b，c．

(2) 设所求二次函数为 $y=ax^2+bx+c$．

由已知，函数图象经过 $(-1，10)$，$(1，4)$，$(2，7)$ 三点，得关于 a，b，c 的三元一次方程组

$$\begin{cases} a-b+c=10, \\ a+b+c=4, \\ 4a+2b+c=7. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$a=2，b=-3，c=5.$$

所求二次函数是 $y=2x^2-3x+5$．

归纳

求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式，关键是求出待定系数 a，b，c 的值．由已知条件（如二次函数图象上三个点的坐标）列出关于 a，b，c 的方程组，并求出 a，b，c，就可以写出二次函数的解析式．

练习

1. 一个二次函数，当自变量 $x=0$ 时，函数值 $y=-1$，当 $x=-2$ 与 $\frac{1}{2}$ 时，$y=0$．求这个二次函数的解析式．
2. 一个二次函数的图象经过 $(0，0)$，$(-1，-1)$，$(1，9)$ 三点，求这个二次函数的解析式．

习题26.1

复习巩固

1. 一个长方形的长是宽的 2 倍，写出这个长方形的面积与宽之间的函数关系式.
2. 某种商品的价格是 2 元，准备进行两次降价. 如果每次降价的百分率都是 x，经过两次降价后的价格 y（单位：元）随每次降价的百分率 x 的变化而变化，y 与 x 之间的关系可以用怎样的函数来表示？
3. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象：

$$y=3x^2，y=-3x^2，y=\frac{1}{3}x^2.$$

4. 分别写出抛物线 $y=4x^2$ 与 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的开口方向、对称轴及顶点.
5. 分别在同一直角坐标系内，描点画出下列各组二次函数的图象，并写出对称轴与顶点：

（1）$y=\frac{1}{3}x^2+3$，$y=\frac{1}{3}x^2-2$；

（2）$y=-\frac{1}{4}(x+2)^2$，$y=-\frac{1}{4}(x-1)^2$；

（3）$y=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$，$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$.

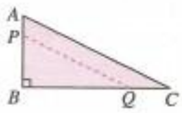
6. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴及顶点，再描点画图：

（1）$y=-3x^2+12x-3$；（2）$y=4x^2-24x+26$；

（3）$y=2x^2+8x-6$；（4）$y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$.

综合运用

7. 如图，在△ABC 中，$\angle B=90°$，$AB=12$ mm，$BC=24$ mm，动点 P 从点 A 开始沿边 AB 向 B 以 2 mm/s 的速度移动，动点 Q 从点 B 开始沿边 BC 向 C 以 4 mm/s 的速度移动，如果 P、Q 分别从 A、B 同时出发，那么△PBQ 的面积 S 随出发时间 t 如何变化？写出函数关系式及 t 的取值范围.



（第 7 题）

8. 一辆汽车的行驶距离 s（单位：m）与行驶时间 t（单位：s）的函数关系式是 $s=9t+\frac{1}{2}t^2$，经 12 s 汽车行驶了多远？行驶 380 m 需要多少时间？

*9. 根据二次函数图象上三个点的坐标，求出函数的解析式：

(1) (−1, 3), (1, 3), (2, 6)；

(2) (−1, −1), (0, −2), (1, 1)；

(3) (−1, 0), (3, 0), (1, −5)；

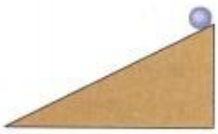
(4) (1, 2), (3, 0), (−2, 20).

*10. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 (−1, −22), (0, −8), (2, 8) 三点，求它的开口方向、对称轴和顶点坐标.

拓广探索

11. 钢球从斜面顶端由静止开始沿斜面滚下，速度每秒增加 1.5 m/s.

(1) 写出滚动的距离 s（单位：m）与滚动的时间 t（单位：s）之间的关系式.（提示：本题中，距离＝平均速度$\bar{v}$×时间 t，$\bar{v}=\frac{v_0+v_t}{2}$，其中，$v_0$ 是开始时的速度，v_t 是 t 秒时的速度）



（第 11 题）

(2) 如果斜面的长是 3 m，钢球从斜面顶端滚到底端用多长时间？

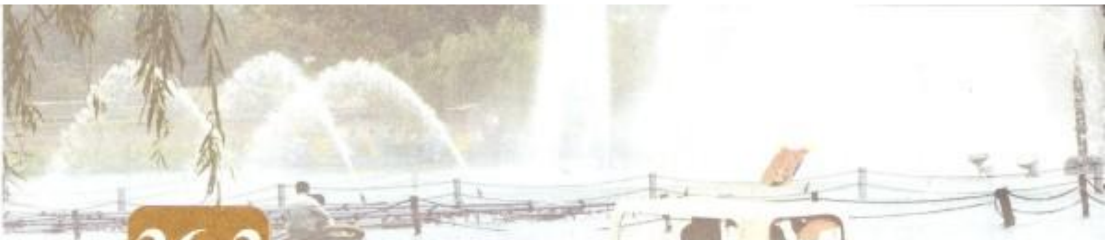
12. 填空：

(1) 已知函数 $y=2(x+1)^2+1$，当 $x<$____时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>$____时，y 随 x 的增大而增大，当 $x=$____时，y 最____；

(2) 已知函数 $y=-2x^2+x-4$，当 $x<$____时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>$____时，y 随 x 的增大而减小，当 $x=$____时，y 最____；

(3) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，$a>0$，当 $x<$____时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>$____时，y 随 x 的增大而增大，当 $x=$____时，y 最____；

(4) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，$a<0$，当 $x<$____时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>$____时，y 随 x 的增大而减小，当 $x=$____时，y 最____.



26.2 用函数观点看一元二次方程

问题　如图 26.2-1，以40 m/s的速度将小球沿与地面成 30°角的方向击出时，球的飞行路线将是一条抛物线. 如果不考虑空气阻力，球的飞行高度 h(单位：m)与飞行时间t(单位：s)之间具有关系

$$h=20t-5t^2.$$

考虑以下问题：

(1) 球的飞行高度能否达到 15 m? 如能，需要多少飞行时间?

(2) 球的飞行高度能否达到 20 m? 如能，需要多少飞行时间?

(3) 球的飞行高度能否达到20.5 m? 为什么?

图 26.2-1

(4) 球从飞出到落地要用多少时间?

分析：由于球的飞行高度 h 与飞行时间 t 有函数关系 $h=20t-5t^2$，所以可以将问题中 h 的值代入函数解析式，得到关于 t 的一元二次方程，如果方程有合乎实际的解，则说明球的飞行高度可以达到问题中 h 的值；否则，说明球的飞行高度不能达到问题中 h 的值.

解：(1) 解方程

$$15=20t-5t^2,$$
$$t^2-4t+3=0,$$
$$t_1=1,\ t_2=3.$$

当球飞行 1 s 和 3 s 时，它的高度为 15 m.

你能结合图 26.2-1 指出为什么在两个时间球的高度为 15 m 吗?

(2) 解方程

$$20=20t-5t^2,$$
$$t^2-4t+4=0,$$
$$t_1=t_2=2.$$

当球飞行 2 s 时，它的高度为 20 m.

你能结合图 26.2-1 指出为什么只在一个时间球的高度为 20 m 吗?

(3) 解方程

$$20.5=20t-5t^2,$$
$$t^2-4t+4.1=0.$$

因为$(-4)^2-4\times4.1<0$，所以方程无实数根．球的飞行高度达不到20.5 m.

(4) 解方程

$$0=20t-5t^2,$$
$$t^2-4t=0,$$
$$t_1=0,\ t_2=4.$$

当球飞行0 s和4 s时，它的高度为0 m，即0 s时球从地面飞出，4 s时球落回地面.

你能结合图26.2-1指出为什么在两个时间球的高度为0 m吗?

从上面可以看出，二次函数与一元二次方程关系密切．例如，已知二次函数$y=-x^2+4x$的值为3，求自变量x的值，可以看作解一元二次方程$-x^2+4x=3$(即$x^2-4x+3=0$)．反过来，解方程$x^2-4x+3=0$又可以看作已知二次函数$y=x^2-4x+3$的值为0，求自变量x的值.

一般地，我们可以利用二次函数$y=ax^2+bx+c$深入讨论一元二次方程$ax^2+bx+c=0$.

思考

下列二次函数的图象与x轴有公共点吗？如果有，公共点的横坐标是多少？当x取公共点的横坐标时，函数的值是多少？由此，你能得出相应的一元二次方程的根吗？

(1) $y=x^2+x-2$；

(2) $y=x^2-6x+9$；

(3) $y=x^2-x+1$.

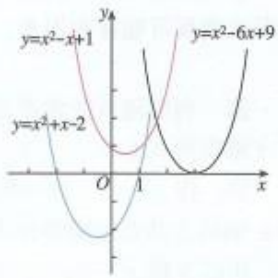


图 26.2-2

这些函数的图象如图 26.2-2 所示．

可以看出：

(1) 抛物线 $y=x^2+x-2$ 与 x 轴有两个公共点，它们的横坐标是-2，1．当 x 取公共点的横坐标时，函数的值是 0．由此得出方程 $x^2+x-2=0$ 的根是-2，1．

(2) 抛物线 $y=x^2-6x+9$ 与 x 轴有一个公共点，这点的横坐标是 3．当 $x=3$ 时，函数的值是 0．由此得出方程 $x^2-6x+9=0$ 有两个相等的实数根 3．

(3) 抛物线 $y=x^2-x+1$ 与 x 轴没有公共点，由此可知，方程 $x^2-x+1=0$ 没有实数根．

反过来，由一元二次方程的根的情况，也可以确定相应的二次函数的图象与 x 轴的位置关系．

归纳

一般地，从二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可知，

(1) 如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有公共点，公共点的横坐标是 x_0，那么当 $x=x_0$ 时，函数的值是 0，因此 $x=x_0$ 就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根．

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的位置关系有三种：没有公共点，有一个公共点，有两个公共点．这对应着一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的三种情况：没有实数根，有两个相等的实数根，有两个不等的实数根．

由上面的结论，我们可以利用二次函数的图象求一元二次方程的根．由于作图或观察可能存在误差，由图象求得的根，一般是近似的．

例 利用函数图象求方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数根（精确到 0.1）．

解：作 $y=x^2-2x-2$ 的图象（图 26.2-3），它与 x 轴的公共点的横坐标大约是-0.7，2.7．

所以方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数根为

$$x_1\approx-0.7,\ x_2\approx2.7.$$

我们还可以通过不断缩小根所在的范围估计一元二次方程的根：

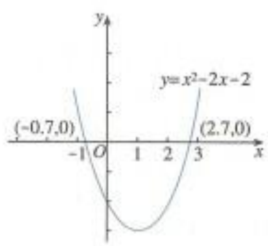


图 26.2-3

观察函数 $y=x^2-2x-2$ 的图象可以发现，当自变量为 2 时的函数值小于 0（点（2，−2）在 x 轴的下方），当自变量为 3 时的函数值大于 0（点（3，1）在 x 轴的上方），因为抛物线 $y=x^2-2x-2$ 是一条连续不断的曲线，所以抛物线 $y=x^2-2x-2$ 在 $2<x<3$ 这一段经过 x 轴，也就是说当自变量取 2，3 之间的某个值时，函数的值为 0，即方程 $x^2-2x-2=0$ 在 2，3 之间有根.

我们可以通过取平均数的方法不断缩小根所在的范围. 例如，取 2，3 的平均数 2.5，用计算器算得自变量为 2.5 时的函数值为 −0.75，与自变量为 3 时的函数值异号，所以这个根在 2.5，3 之间. 再取 2.5，3 的平均数 2.75，用计算器算得自变量为 2.75 时的函数值为 0.062 5，与自变量为 2.5 时的函数值异号，所以这个根在 2.5，2.75 之间.

重复上述步骤，我们逐步得到：这个根在 2.625，2.75 之间，在 2.687 5，2.75 之间……可以看到：根所在的范围越来越小，根所在范围的两端的值越来越接近根的值，因而可以作为根的近似值. 例如，当要求根的近似值与根的准确值的差的绝对值小于 0.1 时，由于 $|2.6875-2.75|=0.0625<0.1$，我们可以将 2.687 5 作为根的近似值.

你能用这种方法得出方程 $x^2-2x-2=0$ 的另一个根的近似值吗（要求根的近似值与根的准确值的差的绝对值小于 0.1）?

这种求根的近似值的方法也适用于更高次的一元方程.

习题26.2

复习巩固

1. 已知函数 $y=x^2-4x+3$.
   （1）画出函数的图象；
   （2）观察图象，当 x 取哪些值时，函数值为 0?
2. 用函数的图象求下列方程的解：
   （1）$x^2-3x+2=0$；　　（2）$-x^2-6x-9=0$；
   （3）$x^2+x+2=0$；　　（4）$1-x-2x^2=0$.

综合运用

3. 如图，一名男生推铅球，铅球行进高度 y（单位：m）与水平距离 x（单位：m）之间的关系是

$$y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}.$$

（1）画出函数的图象；

（2）观察图象，指出铅球推出的距离.

（第3题）

4. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的公共点是 $(-1,0)$，$(3,0)$，求这条抛物线的对称轴.

拓广探索

5. 画出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，利用图象回答：

（1）方程 $x^2-2x-3=0$ 的解是什么；

（2）x 取什么值时，函数值大于 0；

（3）x 取什么值时，函数值小于 0.

6. 下列情形时，如果 $a>0$，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在什么位置？

（1）方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等的实数根；

（2）方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根；

（3）方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根.

如果 $a<0$ 呢？

信息技术应用　　选学

探索二次函数的性质

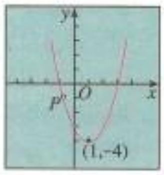


图 1

用某些计算机画图软件（如《几何画板》），可以方便地画出二次函数的图象，进而从图象探索二次函数的性质. 如图 1，用计算机软件画出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，拖动图象上的一点 P，让这点沿抛物线移动，观察动点坐标的变化，可以发现：

图象最低点的坐标是 $(1,-4)$，也就是说，当 $x=1$ 时，y 有最小值 -4；

当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大.

又如图 2，用计算机软件画出函数 $y=-x^2-4x-3$ 的图象，拖动图象上的一点 P，可以发现：

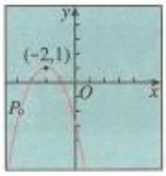


图 2

图象最高点的坐标是 $(-2,1)$，也就是说，当 $x=-2$ 时，y 有最大值 1；

当 $x<-2$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>-2$ 时，y 随 x 的增大而减小.

利用计算机软件的画图功能，很容易利用二次函数的图象解一元二次方程. 要解方程 $ax^2+bx+c=0$，只要用计算机软件画出相应抛物线 $y=ax^2+bx+c$，再让计算机软件显示抛物线与 x 轴的公共点的坐标，就能得出要求的方程的根. 利用图 1，图 2 中的图象试一试，分别求出方程 $x^2-2x-3=0$，$-x^2-4x-3=0$ 的根.

26.3 实际问题与二次函数

前面我们结合实际问题，讨论了二次函数，看到了二次函数在解决实际问题中的一些应用，下面我们进一步用二次函数讨论一些实际问题.

问题 用总长为 60 m 的篱笆围成矩形场地，矩形面积 S 随矩形一边长 l 的变化而变化. 当 l 是多少时，场地的面积 S 最大?

分析：先写出 S 与 l 的函数关系式，再求出使 S 最大的 l 值.

矩形场地的周长是 60 m，一边长为 l，则另一边长为 $\left(\frac{60}{2}-l\right)$ m. 场地的面积

$$S=l(30-l),$$

即

$$S=-l^2+30l \qquad (0<l<30).$$

画出这个函数的图象（图 26.3-1）.

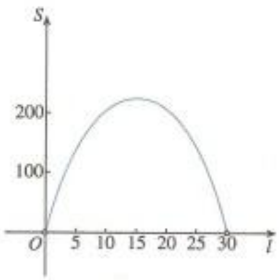


图 26.3-1

可以看出，这个函数的图象是一条抛物线的一部分. 这条抛物线的顶点是函数的图象的最高点，也就是说，当 l 取顶点的横坐标时，这个函数有最大值.

因此，当 $l=-\frac{b}{2a}=-\frac{30}{2\times(-1)}=15$ 时，S 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-30^2}{4\times(-1)}=225.$

也就是说，当 l 是 15 m 时，场地的面积 S 最大（$S=225\ \text{m}^2$）.

一般地，因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点是最低（高）点，所以当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 有最小（大）值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

我们再来解决一些实际问题.

探究1

某商品现在的售价为每件 60 元，每星期可卖出 300 件. 市场调查反映：如调整价格，每涨价1 元，每星期要少卖出 10 件；每降价 1 元，每星期可多卖出 20 件. 已知商品的进价为每件 40 元，如何定价才能使利润最大？

分析：调整价格包括涨价和降价两种情况. 我们先来看涨价的情况.

（1）设每件涨价 x 元，则每星期售出商品的利润 y 随之变化. 我们先来确定 y 随 x 变化的函数式. 涨价 x 元时，每星期少卖 $10x$ 件，实际卖出 $(300-10x)$ 件，销售额为 $(60+x)(300-10x)$ 元，买进商品需付 $40(300-10x)$ 元. 因此，所得利润

$$y=(60+x)(300-10x)-40(300-10x),$$

即

$$y=-10x^2+100x+6\ 000,$$

其中，$0\leqslant x\leqslant 30$.

怎样确定 x 的取值范围？

根据上面的函数，填空：

当 $x=$____时，y 最大，也就是说，在涨价的情况下，涨价____元，即定价______元时，利润最大，最大利润是____________.

（2）在降价的情况下，最大利润是多少？请你参考（1）的讨论自己得出答案.

由（1），（2）的讨论及现在的销售状况，你知道应如何定价能使利润最大了吗？

探究2

计算机把数据存储在磁盘上，磁盘是带有磁性物质的圆盘，磁盘上有一些同心圆轨道，叫做磁道．如图 26.3-2，现有一张半径为45 mm的磁盘．

图 26.3-2

可以查阅有关资料，了解磁盘存储数据的原理．

(1) 磁盘最内磁道的半径为 r mm，其上每0.015 mm的弧长为 1 个存储单元，这条磁道有多少个存储单元？

(2) 磁盘上各磁道之间的宽度必须不小于0.3 mm，磁盘的外圆周不是磁道，这张磁盘最多有多少条磁道？

(3) 如果各磁道的存储单元数目与最内磁道相同，最内磁道的半径 r 是多少时，磁盘的存储量最大？

分析：(1) 最内磁道的周长为 $2\pi r$ mm，它上面的存储单元的个数不超过 $\frac{2\pi r}{0.015}$．

(2) 由于磁盘上各磁道之间的宽度必须不小于0.3 mm，磁盘的外圆周不是磁道，各磁道分布在磁盘上内径为 r 外径为 45 的圆环区域，所以这张磁盘最多有 $\frac{45-r}{0.3}$ 条磁道．

(3) 当各磁道的存储单元数目与最内磁道相同时，磁盘每面存储量＝每条磁道的存储单元数×磁道数．

设磁盘每面存储量为 y，则

$$y=\frac{2\pi r}{0.015}\times\frac{45-r}{0.3},$$

即

$$y=\frac{2\pi}{0.0045}(45r-r^2)\quad(0<r<45).$$

根据上面这个函数式，你能得出当 r 为何值时磁盘的存储量最大吗？

探究3

图 26.3-3 中是抛物线形拱桥，当水面在 l 时，拱顶离水面 2 m，水面宽 4 m．水面下降 1 m，水面宽度增加多少？

图 26.3-3

分析：我们知道，二次函数的图象是抛物线，建立适当的坐标系，就可以求出这条抛物线表示的二次函数．为解题简便，以抛物线的顶点为原点，以抛物线的对称轴为 y 轴建立直角坐标系（图 26.3-4）．

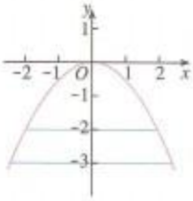


图 26.3-4

可设这条抛物线表示的二次函数为 $y=ax^2$．

由抛物线经过点(2，−2)，可得

$$-2=a\times 2^2,\ a=-\frac{1}{2}.$$

这条抛物线表示的二次函数为 $y=-\frac{1}{2}x^2$．

当水面下降 1 m 时，水面的纵坐标为 $y=-3$．请你根据上面的函数解析式求出这时的水面宽度．

水面下降 1 m，水面宽度增加______ m．

习题26.3

复习巩固

1. 下列抛物线有最高点或最低点吗？如果有，写出这些点的坐标：

（1）$y=-4x^2+3x$；　　（2）$y=3x^2+x+6$.

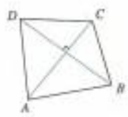
2. 某种商品每件的进价为 30 元，在某段时间内若以每件 x 元出售，可卖出 $(100-x)$ 件，应如何定价才能使利润最大？

3. 飞机着陆后滑行的距离 s（单位：m）与滑行的时间 t（单位：s）的函数关系式是 $s=60t-1.5t^2$. 飞机着陆后滑行多远才能停下来？

4. 已知直角三角形两条直角边的和等于 8，两条直角边各为多少时，这个直角三角形的面积最大，最大值是多少？

5. 从地面竖直向上抛出一小球．小球的高度 h（单位：m）与小球运动时间 t（单位：s）之间的关系式是 $h=30t-5t^2$. 小球运动的时间是多少时，小球最高？小球运动中的最大高度是多少？

（第 5 题）

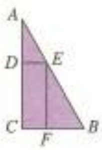


（第 6 题）

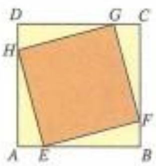
6. 如图，四边形的两条对角线 AC，BD 互相垂直，$AC+BD=10$，当 AC，BD 的长是多少时，四边形 $ABCD$ 的面积最大？

综合运用

7. 一块三角形废料如图所示，$\angle A=30°$，$\angle C=90°$，$AB=12$. 用这块废料剪出一个长方形 $CDEF$，其中，点 D，E，F 分别在 AC，AB，BC 上．要使剪出的长方形 $CDEF$ 面积最大，点 E 应选在何处？



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如上页图，点 E，F，G，H 分别位于正方形 $ABCD$ 的四条边上．四边形 $EFGH$ 也是正方形．当点 E 位于何处时，正方形 $EFGH$ 的面积最小？

9. 某宾馆有 50 个房间供游客居住，当每个房间的定价为每天 180 元时，房间会全部住满．当每个房间每天的定价每增加 10 元时，就会有一个房间空闲．如果游客居住房间，宾馆需对每个房间每天支出 20 元的各种费用．房价定为多少时，宾馆利润最大？

拓广探索

10. 分别用定长为 L 的线段围成矩形和圆，哪种图形的面积大？为什么？

实验与探究　选学

推测植物的生长与温度的关系

科幻小说《实验室的故事》中，有这样一个情节：科学家把一种珍奇植物分别放在不同温度的环境中，经过一定时间后，测试出这种植物高度的增长情况（如下表）．

温度 t/℃	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6
植物高度增长量 l/mm	1	24	39	49	49	41	25	1

由这些数据，科学家推测出植物高度的增长量 l 与温度 t 的函数关系，并由它推测出最适合这种植物生长的温度．

你能想出科学家是怎样推测的吗？

利用上面的实验结果，我们可以进行如下探究：

在表内数据中，当 $t=-2$ 和 $t=0$ 时，植物增长最快；从 0 ℃起随温度逐渐增加，增长量逐渐减小；从 −2 ℃起随温度逐渐减少，增长量逐渐减小．由此可以猜想，l 作为 t 的函数，其图象的形状呈中间高两边低，且有对称性．由此猜想，图象可能是抛物线，即 l 可能是 t 的二次函数．

为检验上述猜想，建立坐标系，以 t 为横坐标，l 为纵坐标，描出表中数据对应的 8 个点，并用平滑曲线连接它们（下页图 1）．可以看出，这条曲线像是抛物线．于是，我们用二次函数来近似地表示 l 与 t 的关系．

设 $l=at^2+bt+c$，如何确定常数 a，b，c？

因为　$t=0$ 时 $l=49$，

所以　$a\times0+b\times0+c=49$，得 $c=49$.

又　$t=-2$ 时 $l=49$；$t=2$ 时 $l=41$，即

$$\begin{cases}(-2)^2a+(-2)b+49=49,\\ 2^2a+2b+49=41.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=-1,\\ b=-2.\end{cases}$$

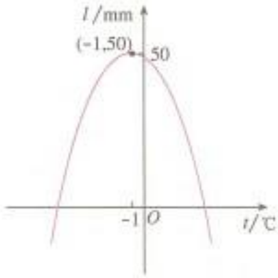


图 1

这样我们得到二次函数

$$l=-t^2-2t+49. \quad ①$$

把表中 t 的其他值代入上式，可以发现对应的 l 值基本与表中值一致，个别不一致的也相差不多（这可能是因为试验中存在观察误差，或者是这个函数只近似反映 l 与 t 的关系）．因此，l 与 t 的关系可以用函数①来描述．

由函数 $l=-t^2-2t+49$ 可知，当 $t=-\dfrac{-2}{2\times(-1)}=-1$ 时，l 有最大值 50，这说明 -1 ℃是最适合这种植物生长的温度．

上面我们根据实际问题中的有关数据，数形结合地求出表示变量间关系的函数，这属于建立模拟函数描述实际问题．有时这样的函数可能只是近似地反映实际规律，但是它对认识事物有一定作用．

数学活动

活动 1 如图 1，在一张纸上作出函数 $y=x^2-2x+3$ 的图象，沿 x 轴把这张纸对折，描出与抛物线 $y=x^2-2x+3$ 关于 x 轴对称的抛物线，这条抛物线是哪个二次函数的图象？

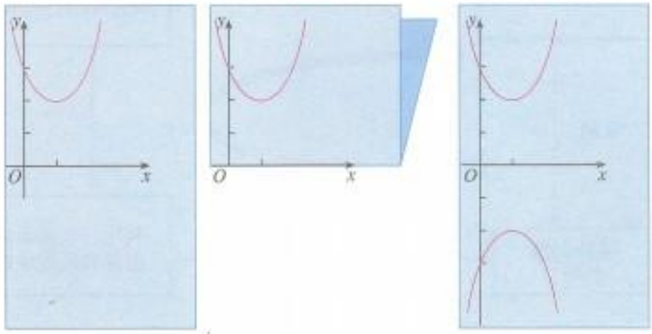


图 1

活动 2 如图 2，从一张矩形纸较短的边上找一点 E，过这点剪下两个正方形，它们的边长分别是 AE，DE. 要使剪下的两个正方形的面积和最小，点 E 应选在何处？为什么？

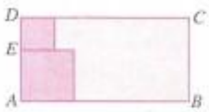
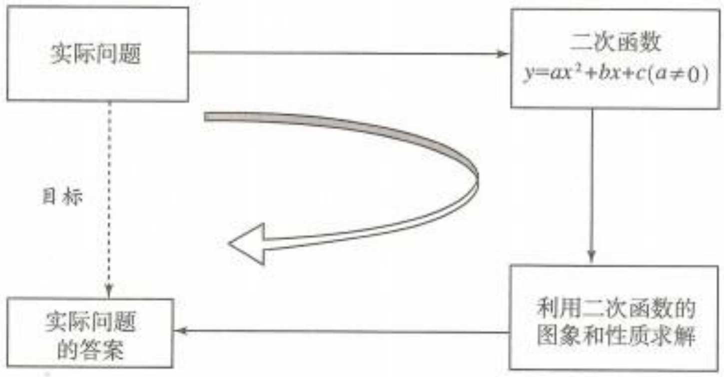


图 2

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 举例说明，一些实际问题中变量之间的关系可以用二次函数表示，列出函数解析式并画出图象.

2. 结合二次函数的图象回顾二次函数的性质，例如根据抛物线的开口方向、顶点坐标，说明二次函数在什么情况下取得最大（小）值.

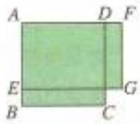
3. 结合抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴的位置关系，说明方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的各种情况.

4. 在日常生活、生产和科研中，常常会遇到求什么条件下可以使材料最省、时间最少、效率最高等问题，其中一些问题可以归结为求二次函数的最大值或最小值. 请举例说明如何分析、解决这样的问题.

5. 回顾一次函数、反比例函数和二次函数，体会函数这种数学模型在反映现实世界的运动变化中的作用.

复习题26

复习巩固



（第 1 题）

1. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 4，E 是 AB 上一点，F 是 AD 的延长线上一点，$BE=DF$．四边形 $AEGF$ 是矩形，则矩形 $AEGF$ 的面积 y 随 BE 的长 x 的变化而变化，y 与 x 之间的关系可以用怎样的函数来表示？
2. 某商场第 1 年销售计算机 5 000 台，如果每年的销售量比上一年增加相同的百分率 x，写出第 3 年的销售量 y 与每年增加的百分率 x 之间的函数关系式.
3. 选择题.

   在抛物线 $y=x^2-4x-4$ 上的一个点是（　　）

   (A) (4，4).　　　　(B) (3，−1).

   (C) (−2，−8).　　　(D) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$.
4. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴及顶点坐标，再描点画图：

   (1) $y=x^2+2x-3$；　　(2) $y=1+6x-x^2$；

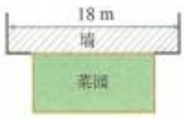
   (3) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+1$；　　(4) $y=-\frac{1}{4}x^2+x-4$.
5. 汽车刹车后行驶的距离 s（单位：m）与行驶的时间 t（单位：s）的函数关系式是 $s=15t-6t^2$．汽车刹车后到停下来前进了多远？

综合运用

*6. 根据下列条件，分别确定二次函数的解析式：

   (1) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 (−3，2)，(−1，−1)，(1，3)；

   (2) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的两交点的横坐标分别是 $-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，与 y 轴交点的纵坐标是 −5.



（第 7 题）

7. 用一段长为 30 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长为 18 m，这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大，最大面积是多少？

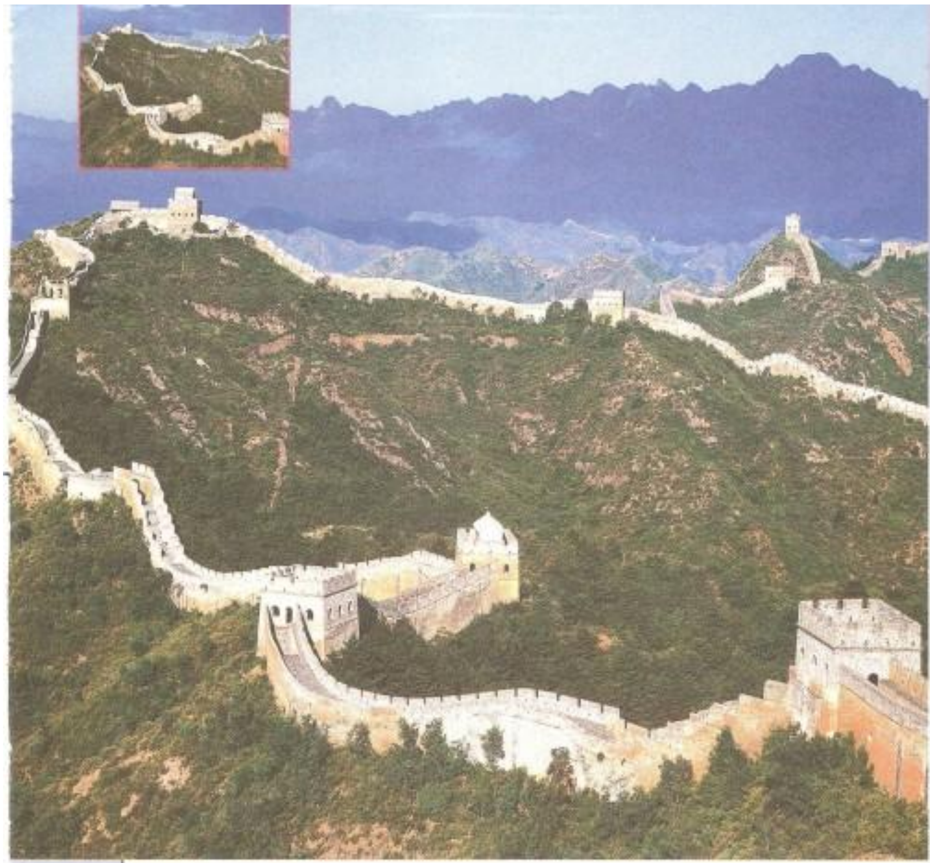
8. 一个滑雪者从 85 m 长的山坡滑下，滑行的距离 s（单位：m）与滑行时间 t（单位：s）的函数关系式是 $s=1.8t+0.064t^2$. 他通过这段山坡需要多长时间？

9. 已知矩形的周长为 36 cm，矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱，矩形的长、宽各为多少时，旋转形成的圆柱的侧面积最大？

拓广探索

10. 在周长为定值 p 的扇形中，半径是多少时，扇形的面积最大？

11. 对某条路线的长度进行 n 次测量，得到 n 个结果 x_1，x_2，…，x_n. 如果用 x 作为这条路线长度的近似值，当 x 取什么值时，$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$ 最小？x 所取的这个值与哪个常用的统计量有关系？



第二十七章 相 似

在现实生活中，我们经常见到形状相同的图形.如国旗上大小不同的五角星，还有不同尺寸同底版的相片等等.这两张大小不等的万里长城图片，它们的各部分都是按一定比例对应的.

这些形状相同的图形之间，在数量关系和位置关系上有什么规律吗？怎样判断两个大小不等的三角形是否形状相同呢？怎么才能按要求放大或缩小一张美丽的图片？

进入这一章的学习吧！在试验、探索和论证之后，你就会得出答案.

27.1 图形的相似

图 27.1-1 中，有用同一张底片洗出的不同尺寸的照片，也有大小不同的两个足球，还有一辆汽车和它的模型，以及排版印刷时使用不同字号排出的文字．所有这些，都给我们以形状相同的图形的形象．我们把这种形状相同的图形叫做**相似图形**（similar figures）．

图 27.1-1

两个图形相似，其中一个图形可以看作由另一个图形放大或缩小得到．例如，放映电影时，投在屏幕上的画面就是胶片上的图形的放大；实际的建筑物和它的模型是相似的；用复印机把一个图形放大或缩小后所得的图形，也都与原来的图形相似．图 27.1-2 是一些两两相似的几何图形的例子．

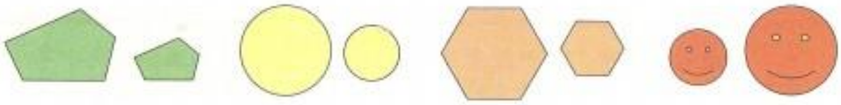


图 27.1-2

思考

图 27.1-3 是人们从平面镜及哈哈镜里看到的不同镜像，它们相似吗？

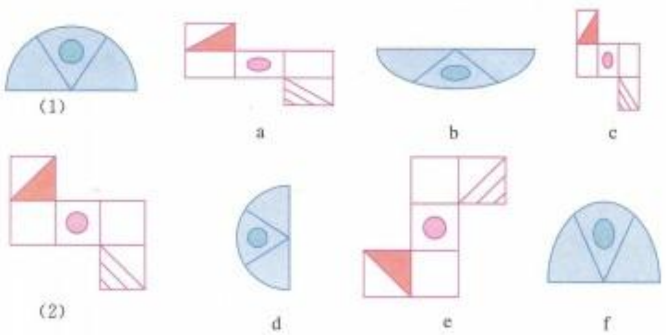
图 27.1-3

练习

1. 如图，从放大镜里看到的三角尺和原来的三角尺相似吗？

（第 1 题）

2. 如图，图形 a～f 中，哪些是与图形（1）或（2）相似的？



（第 2 题）

我们进一步研究相似多边形（similar polygons）的主要特征.

思考

图 27.1-4(1) 中的$\triangle A_1B_1C_1$是由正$\triangle ABC$放大后得到的，观察这两个图形，它们的对应角有什么关系？对应边呢？

对于图 27.1-4(2) 中两个相似的正六边形，你是否也能得到类似的结论？

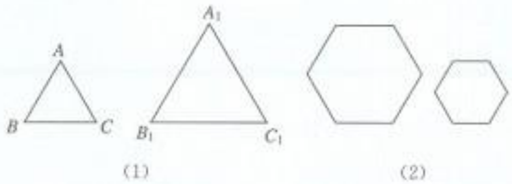


图 27.1-4

对比图 27.1-4(1) 中的$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle ABC$，由正三角形的每个角都等于 60°，可得

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1.$$

另外，由$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$是正三角形可得，$AB=BC=AC$，$A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1$，从而

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$

这说明，正三角形都是相似的，它们的对应角相等，对应边的比相等. 类似地，对于图 27.1-4(2) 中的两个相似的正六边形，也有类似的结论（请你自己证明）.

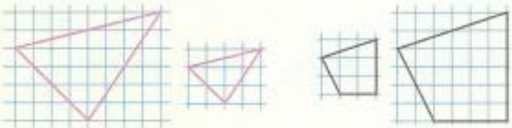
利用这种方法，我们可以得到，相似的正多边形对应角相等，对应边的比相等. 这个结论对于一般的相似多边形是否成立呢？

对于四条线段 a，b，c，d，如果其中两条线段的比（即它们长度的比）与另两条线段的比相等，如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$（即 $ad=bc$），我们就说这四条线段是成比例线段，简称比例线段(proportional segments).

探究

图 27.1-5(1) 是两个相似的三角形，它们的对应角有什么关系？对应边的比是否相等？

对于图 27.1-5 (2) 中两个相似的四边形，它们的对应角、对应边是否有同样的结论？



(1) (2)

图 27.1-5

为了验证你的猜想，可以用刻度尺和量角器量一量.

实际上，对于相似多边形，我们有：

相似多边形对应角相等，对应边的比相等.

反过来，如果两个多边形满足对应角相等，对应边的比相等，那么这两个多边形相似.

我们把相似多边形对应边的比称为**相似比**(similarity ratio).

相似比为 1 时，相似的两个图形有什么关系？

例 如图 27.1-6，四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 相似，求角 α，β 的大小和 EH 的长度 x.

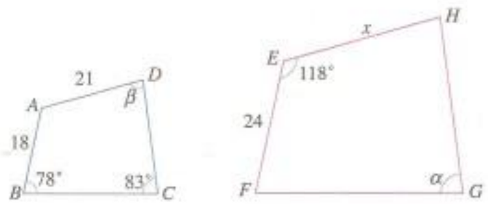


图 27.1-6

解：四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 相似，它们的对应角相等. 由此可得

$$\angle\alpha=\angle C=83^\circ,\ \angle A=\angle E=118^\circ.$$

在四边形 $ABCD$ 中，

$$\angle\beta=360^\circ-(78^\circ+83^\circ+118^\circ)=81^\circ.$$

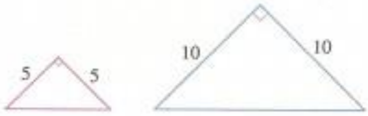
四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 相似，它们的对应边的比相等．由此可得

$$\frac{EH}{AD}=\frac{EF}{AB}，即\frac{x}{21}=\frac{24}{18}.$$

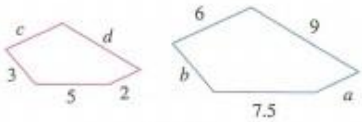
解得 $x=28.$

练习

1. 在比例尺为 1∶10 000 000 的地图上，量得甲、乙两地的距离是30 cm，求两地的实际距离．
2. 如图所示的两个三角形相似吗？为什么？



（第 2 题）



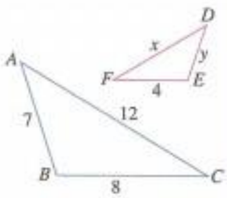
（第 3 题）

3. 如图所示的两个五边形相似，求未知边 a，b，c，d 的长度．

习题27.1

复习巩固

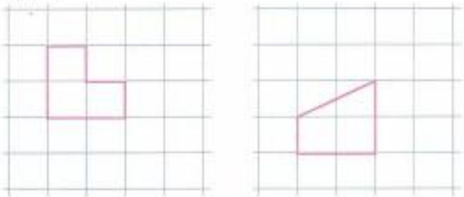
1. 两地的实际距离是 2 000 m，在地图上量得这两地的距离为 2 cm，这个地图的比例尺为多少？
2. 任意两个正方形相似吗？任意两个矩形呢？证明你的结论．
3. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似，求未知边 x，y 的长度．



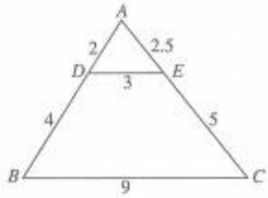
（第 3 题）

综合运用

4. 如图，试着在方格纸中画出与原图形相似的图形，你用的是什么方法？与同学交流一下.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，$DE /\!/ BC$，求$\frac{AD}{AB}$，$\frac{AE}{AC}$，$\frac{DE}{BC}$，并证明$\triangle ADE$与$\triangle ABC$相似.

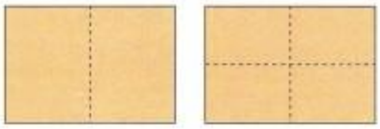
6. 如图，矩形草坪长 30 m，宽 20 m，沿草坪四周有 1 m 宽的环行小路，小路内外边缘所形成的两个矩形相似吗？说出你的理由.

（第 6 题）

7. 如果两个多边形仅有对应角相等，它们相似吗？如果仅有对应边的比相等呢？若不相似，请举出反例.

拓广探索

8. 如图，将一张矩形纸片沿较长边的中点对折，如果得到的两个矩形都和原来的矩形相似，那么原来矩形的长宽比是多少？将这张纸再如此对折下去，得到的矩形都相似吗？



（第 8 题）

27.2 相似三角形

27.2.1 相似三角形的判定

在相似多边形中，最简单的就是相似三角形（similar triangles）．在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，如果

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k,$$

如果$k=1$，这两个三角形有怎样的关系？

即对应角相等，对应边的比相等，我们就说$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似，记作$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比为$k$，$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的相似比为$\frac{1}{k}$．

学习三角形全等时，除了可以通过对所有的对应角和对应边一一验证外，还可以通过简便的方法（SSS，SAS，ASA，AAS）判定两个三角形全等．类似地，判定两个三角形相似时，是不是也存在简便的判定方法呢？为了证明相似三角形的判定定理，我们先来学习下面的平行线分线段成比例定理．

探究1

如图27.2-1，任意画两条直线l_1，l_2，再画三条与l_1，l_2相交的平行线l_3，l_4，l_5．分别度量l_3，l_4，l_5在l_1上截得的两条线段AB，BC和在l_2上截得的两条线段DE，EF的长度，$\frac{AB}{BC}$与$\frac{DE}{EF}$相等吗？任意平移l_5，再度量AB，BC，DE，EF的长度，$\frac{AB}{BC}$与$\frac{DE}{EF}$相等吗？

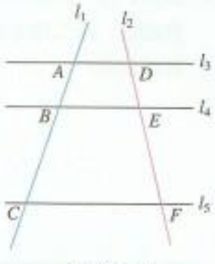


图27.2-1

事实上，当 $l_3 // l_4 // l_5$ 时，都可以得到 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，还可以得到 $\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{DE}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$，$\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}$，等等.

经证明（这里略去）后，人们得到

平行线分线段成比例定理　三条平行线截两条直线，所得的对应线段的比相等.

把这个定理应用到三角形中，会出现下面两种情况（图 27.2-2）.

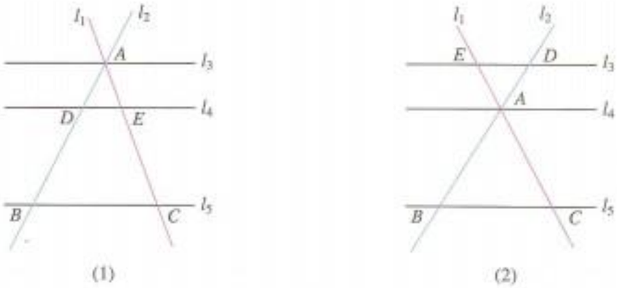


图 27.2-2

在图 27.2-2（1）中，把 l_4 看成平行于△ABC 的边 BC 的直线；在图 27.2-2（2）中，把 l_3 看成平行于△ABC 的边 BC 的直线，那么可以得到

平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段的比相等.

用这个结论可以证明三角形中的对应线段的比相等.

思考

如图 27.2-3，在△ABC 中，$DE // BC$，DE 分别交 AB，AC 于点 D，E，△ADE 与△ABC 有什么关系？

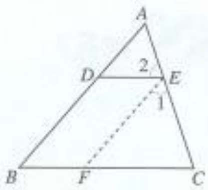


图 27.2-3

直觉告诉我们，△ADE 与△ABC 相似，我们通过相似的定义证明它.

先证明两个三角形的对应角相等.

在$\triangle ADE$与$\triangle ABC$中，$\angle A=\angle A$，

∵ $DE\parallel BC$，

∴ $\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

再证明两个三角形的对应边的比相等.

过点E作$EF\parallel AB$，EF交BC于点F.

∵ $DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$，

∴ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，$\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$.

∵ 四边形$DEFB$是平行四边形，

∴ $DE=BF$.

∴ $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$.

∴ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$.

这样，我们证明了$\triangle ADE$和$\triangle ABC$的对应角相等，对应边的比相等，所以$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$. 因此，我们有如下判定三角形相似的定理：

平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似.

上面我们根据相似三角形的定义，通过证明两个三角形的对应角相等，对应边的比相等得到了一个关于三角形相似的定理.

类似于判定三角形全等的SSS方法，我们能不能通过三边来判断两个三角形相似呢？

探究2

任意画一个三角形，再画一个三角形，使它的各边长都是原来三角形各边长的k倍，度量这两个三角形的对应角，它们相等吗？这两个三角形相似吗？与同学交流一下，看看是否有同样的结论.

容易发现，这两个三角形是相似的. 我们可以利用上面的定理进行证明.

如图 27.2-4，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$，求证 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

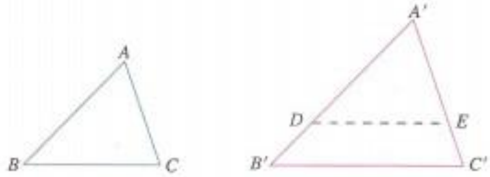


图 27.2-4

证明：在线段 $A'B'$（或它的延长线）上截取 $A'D=AB$，过点 D 作 $DE \parallel B'C'$，交 $A'C'$ 于点 E，根据前面的定理可得 $\triangle A'DE \backsim \triangle A'B'C'$.

$\therefore \frac{A'D}{A'B'}=\frac{DE}{B'C'}=\frac{A'E}{A'C'}$.

又 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$，$A'D=AB$，

$\therefore \frac{A'E}{A'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.

$\therefore A'E=AC$.

同理　$DE=BC$.

$\therefore \triangle A'DE \cong \triangle ABC$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

> 要证明 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，可以先作一个与 $\triangle ABC$ 全等的三角形，证明它与 $\triangle A'B'C'$ 相似. 这里所作的三角形是证明的中介，它把 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 联系起来.

由此我们得到利用三边判定三角形相似的定理（图 27.2-5）：

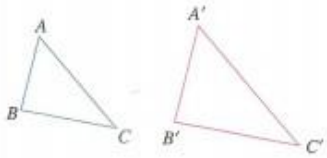


图 27.2-5

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=k$$

$$\Downarrow$$

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$$

如果两个三角形的三组对应边的比相等，那么这两个三角形相似.

类似于判定三角形全等的 SAS 方法，我们能不能通过两边和夹角来判断两个三角形相似呢?

探究3

利用刻度尺和量角器画$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，使$\angle A=\angle A'$，$\frac{AB}{A'B'}$和$\frac{AC}{A'C'}$都等于给定的值k，量出它们的第三组对应边BC和$B'C'$的长，它们的比等于k吗？另外两组对应角$\angle B$与$\angle B'$，$\angle C$与$\angle C'$是否相等？

改变$\angle A$或k值的大小，再试一试，是否有同样的结论？

实际上，我们有利用两边和夹角判定两个三角形相似的定理（图27.2-6）：

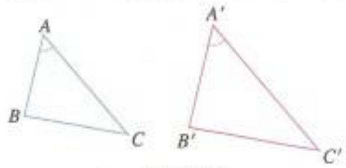


图27.2-6

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=k，\angle A=\angle A'$$

$$\Downarrow$$

$$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$$

如果两个三角形的两组对应边的比相等，并且相应的夹角相等，那么这两个三角形相似.

类似于证明通过三边判定三角形相似的方法，请你自己证明这个定理.

思考

对于$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，如果$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$，$\angle B=\angle B'$，这两个三角形一定相似吗？试着画画看.

例1　根据下列条件，判断$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是否相似，并说明理由：

(1) $\angle A=120^\circ$，$AB=7$ cm，$AC=14$ cm，

$\angle A'=120^\circ$，$A'B'=3$ cm，$A'C'=6$ cm；

(2) $AB=4$ cm，$BC=6$ cm，$AC=8$ cm，

$A'B'=12$ cm，$B'C'=18$ cm，$A'C'=21$ cm.

解：(1) $\because\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{7}{3}，\frac{AC}{A'C'}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}，$

∴ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

又 $\angle A=\angle A'$,

∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

两三角形的相似比是多少？

(2) ∵ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{6}{18}=\dfrac{1}{3}$,

$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{8}{21}$,

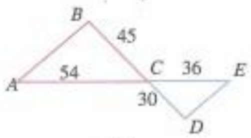
∴ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}\neq\dfrac{AC}{A'C'}$.

要使两三角形相似，不改变 AC 的长，$A'C'$ 的长应当改为多少？

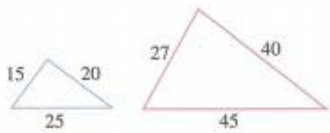
$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的三组对应边的比不等，它们不相似.

练习

1. 根据下列条件，判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，并说明理由：
   (1) $\angle A=40°$，$AB=8$ cm，$AC=15$ cm，
   $\angle A'=40°$，$A'B'=16$ cm，$A'C'=30$ cm；
   (2) $AB=10$ cm，$BC=8$ cm，$AC=16$ cm，
   $A'B'=16$ cm，$B'C'=12.8$ cm，$A'C'=25.6$ cm.
2. 图中的两个三角形是否相似？



(1)



(2)

（第 2 题）

3. 要制作两个形状相同的三角形框架，其中一个三角形框架的三边长分别为 4，5，6，另一个三角形框架的一边长为 2，它的另外两条边长应当是多少？你有几种答案？

观察两副三角尺（图 27.2-7），其中同样角度（30°与 60°，或 45°与 45°）的两个三角尺大小可能不同，但它们看起来是相似的. 一般地，如果两个三角形有两组对应角相等，它们一定相似吗？

图 27.2-7

探究4

作$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$，使得$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，这时它们的第三个角满足$\angle C=\angle C'$吗？分别度量这两个三角形的边长，计算$\frac{AB}{A'B'}$，$\frac{BC}{B'C'}$，$\frac{AC}{A'C'}$，你有什么发现？

把你的结果与邻座的同学比较，你们的结论一样吗？$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似吗？

利用计算机软件，改变这两个三角形边的大小，而不改变它们的角的大小，可以动态地观察对应边的比例关系，有条件的同学可以试一试.

我们可以得到判定两个三角形相似的又一个定理（图 27.2-8）：

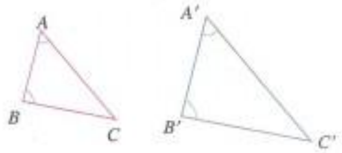


图 27.2-8

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B'$$
$$\Downarrow$$
$$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$$

如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.

类似于证明通过三边判定三角形相似的方法，请你自己证明这个定理.

例 2　如图 27.2-9，弦AB和CD相交于$\odot O$内一点P，求证$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

证明： 连接 AC，DB.

∵　$\angle A$ 和 $\angle D$ 都是 $\overset{\frown}{CB}$ 所对的圆周角，

∴　$\angle A=\angle D$.

同理　$\angle C=\angle B$.

∴　$\triangle PAC\backsim\triangle PDB$.

∴　$\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PC}{PB}$.

即　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

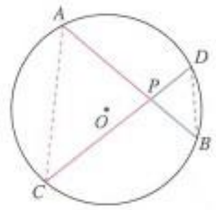


图 27.2-9

由三角形相似的条件可知，若两个直角三角形满足一个锐角对应相等，或两组直角边的比相等，则这两个直角三角形相似.

思考

对于两个直角三角形，我们还可以用“HL”判定它们全等. 那么，满足斜边的比等于一组直角边的比的两个直角三角形相似吗？

下面，我们就来证明这个结论.

如图 27.2-10，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle C'=90^\circ$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$. 求证 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\backsim\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$.

分析： 要证 $\mathrm{Rt}\triangle ABC\backsim\mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$，可设法证 $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$. 若设 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=k$，则只需证 $\dfrac{BC}{B'C'}=k$.

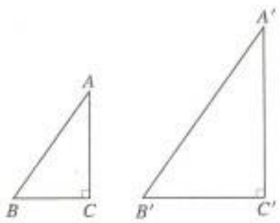


图 27.2-10

证明： 设 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=k$，则 $AB=kA'B'$，$AC=kA'C'$.

由勾股定理，得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$，$B'C'=\sqrt{A'B'^2-A'C'^2}$.

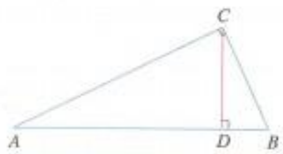
∴　$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{\sqrt{AB^2-AC^2}}{B'C'}=\dfrac{\sqrt{k^2\cdot A'B'^2-k^2\cdot A'C'^2}}{B'C'}=\dfrac{k\cdot B'C'}{B'C'}=k$.

$\therefore \quad \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

$\therefore \quad \mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle A'B'C'$.

练习

1. 底角相等的两个等腰三角形是否相似？顶角相等的两个等腰三角形呢？证明你的结论.
2. 如图，$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，CD 是斜边上的高，$\triangle ACD$ 和 $\triangle CBD$ 都和 $\triangle ABC$ 相似吗？证明你的结论.



（第 2 题）

27.2.2 相似三角形应用举例

利用三角形的相似，可以解决一些不能直接测量的物体的长度的问题，下面请看几个例子.

例 3 据史料记载，古希腊数学家、天文学家泰勒斯曾利用相似三角形的原理，在金字塔影子的顶部立一根木杆，借助太阳光线构成两个相似三角形，来测量金字塔的高度.

如图 27.2-11，如果木杆 EF 长 2 m，它的影长 FD 为 3 m，测得 OA 为 201 m，求金字塔的高度 BO.

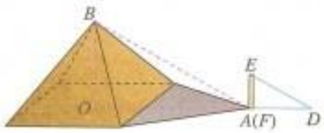


图 27.2-11

怎样测出 OA 的长？

解：太阳光是平行光线，因此

$$\angle BAO=\angle EDF.$$

又 $\angle AOB=\angle DFE=90^\circ$，

$\therefore \quad \triangle ABO \backsim \triangle DEF$.

$\therefore \quad \dfrac{BO}{EF}=\dfrac{OA}{FD}$，

$$BO=\frac{OA\cdot EF}{FD}=\frac{201\times 2}{3}=134.$$

因此金字塔的高为 134 m.

例 4　如图 27.2-12，为了估算河的宽度，我们可以在河对岸选定一个目标点 P，在近岸取点 Q 和 S，使点 P，Q，S 共线且直线 PS 与河垂直，接着在过点 S 且与 PS 垂直的直线 a 上选择适当的点 T，确定 PT 与过点 Q 且垂直 PS 的直线 b 的交点 R. 如果测得 $QS=45$ m，$ST=90$ m，$QR=60$ m，求河的宽度 PQ.

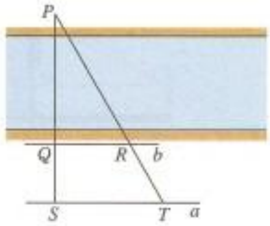


图 27.2-12

解：∵　$\angle PQR=\angle PST=90^\circ$，$\angle P=\angle P$，

∴　$\triangle PQR\backsim\triangle PST$.

∴　$\dfrac{PQ}{PS}=\dfrac{QR}{ST}$，

即　$\dfrac{PQ}{PQ+QS}=\dfrac{QR}{ST}$，$\dfrac{PQ}{PQ+45}=\dfrac{60}{90}$，

$PQ\times 90=(PQ+45)\times 60$.

解得　$PQ=90$.

因此河宽大约为 90 m.

例 5　如图 27.2-13，左、右并排的两棵大树的高分别是 $AB=8$ m和 $CD=12$ m，两树根部的距离 $BD=5$ m. 一个身高 1.6 m 的人沿着正对这两棵树的一条水平直路 l 从左向右前进，当他与左边较低的树的距离小于多少时，就不能看到右边较高的树的顶端点 C？

分析：如图 27.2-13(1)，设观察者眼睛的位置为点 F，画出观察者的水平视线 FG，分别交 AB，CD 于点 H，K. 视线 FA 与 FG 的夹角 $\angle AFH$ 是观察点 A 时的**仰角**. 类似地，$\angle CFK$ 是观察点 C 时的仰角. 由于树的遮挡，区域Ⅰ和Ⅱ都在观察者看不到的区域之内.

解：如图 27.2-13(2)，假设观察者从左向右走到点 E 时，他的眼睛的位置点 F 与两棵树的顶端点 A，C 恰在一条直线上.

由题意可知，$AB\perp l$，$CD\perp l$.

∴　$\triangle AFH\backsim\triangle CFK$.

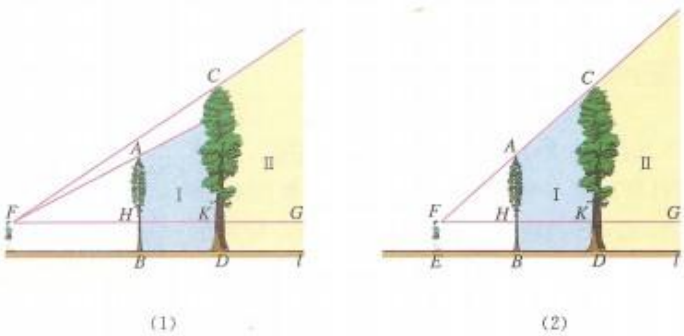


图 27.2-13

$\because \dfrac{FH}{FK}=\dfrac{AH}{CK}$，

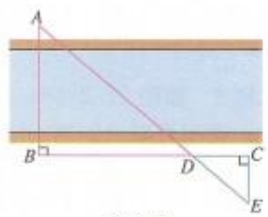
即 $\dfrac{FH}{FH+5}=\dfrac{8-1.6}{12-1.6}=\dfrac{6.4}{10.4}$.

解得$FH=8$.

由此可知，如果观察者继续前进，当他与左边的树的距离小于8 m时，由于这棵树的遮挡，观察者看不到右边树的顶端点C.

练习

1. 在某一时刻，测得一根高为1.8 m的竹竿的影长为3 m，同时测得一栋高楼的影长为90 m，这栋高楼的高度是多少？
2. 如图，测得$BD=120$ m，$DC=60$ m，$EC=50$ m，求河宽AB.



（第2题）

27.2.3　相似三角形的周长与面积

思考

如果两个三角形相似，它们的周长之间有什么关系？两个相似多边形呢？

我们知道，如果$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为$k$，那么$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k$.

因此　$AB=kA'B'$，$BC=kB'C'$，$CA=kC'A'$，

从而　$\dfrac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\dfrac{kA'B'+kB'C'+kC'A'}{A'B'+B'C'+C'A'}=k$.

由此我们得到：

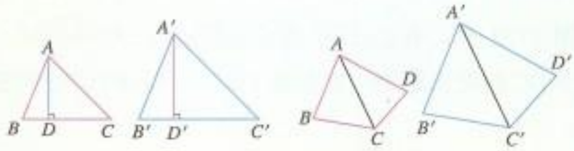
相似三角形周长的比等于相似比.

用类似的方法，还可以得出：

相似多边形周长的比等于相似比.

探究

(1) 如图27.2-14(1)，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为$k_1$，它们对应高的比是多少？面积的比是多少？



(1)　　(2)

图 27.2-14

(2) 如图27.2-14(2)，四边形$ABCD$相似于四边形$A'B'C'D'$，相似比为k_2，它们面积的比是多少？

如图27.2-14(1)，分别作出$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的高AD和$A'D'$.

∵ $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 都是直角三角形，并且 $\angle B=\angle B'$，

∴ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.

∴ $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

∴ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k_1$.

∴ $\dfrac{AD}{A'D'}=k_1$.

所以可以得到：

相似三角形对应高的比等于相似比.

由上述结论，我们有 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\dfrac{BC}{B'C'}\cdot\dfrac{AD}{A'D'}=k_1\cdot k_1=k_1^2$.

这样，我们得到：

相似三角形面积的比等于相似比的平方.

对于图 27.2-14(2) 中的四边形，可以把它们划分为两对三角形，则 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$，我们也可以得出这两个四边形面积的比等于相似比的平方.

对于两个相似多边形，用类似的方法，可以把它们分成若干对相似的三角形，因此可以得到：

相似多边形面积的比等于相似比的平方.

例 6　如图 27.2-15，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，$AB=2DE$，$AC=2DF$，$\angle A=\angle D$，$\triangle ABC$ 的周长是 24，面积是 $12\sqrt{5}$，求 $\triangle DEF$ 的周长和面积.

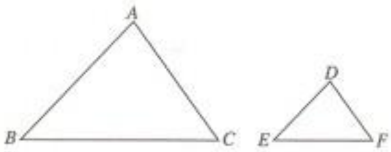


图 27.2-15

解：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

∵ $AB=2DE$，$AC=2DF$，

∴ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

又 $\angle D=\angle A$，

∴ $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$，相似比为$\dfrac{1}{2}$.

∴ $\triangle DEF$ 的周长为$\dfrac{1}{2}\times24=12$，

面积为$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times12\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

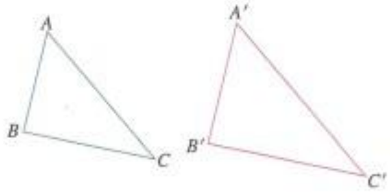
练习

1. 判断：

(1) 一个三角形的各边长扩大为原来的 5 倍，这个三角形的周长也扩大为原来的 5 倍；（　）

(2) 一个四边形的各边长扩大为原来的 9 倍，这个四边形的面积也扩大为原来的 9 倍.（　）

2. 如图，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，它们的周长分别为 60 和 72，且$AB=15$，$B'C'=24$，求 BC，AC，$A'B'$，$A'C'$的长.



（第 2 题）

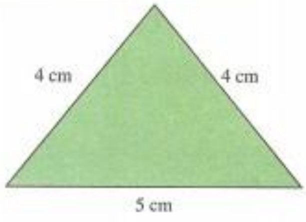
（第 3 题）

3. 蛋糕店制作两种圆形蛋糕，一种半径是 15 cm，一种半径是 30 cm，如果半径是 15 cm 的蛋糕够 2 个人吃，半径是 30 cm 的蛋糕够多少人吃？（假设两种蛋糕高度相同）

4. 在一张复印出来的纸上，一个多边形的一条边由原图中的 2 cm 变成了 6 cm，这次复印的放缩比例是多少？这个多边形的面积发生了怎样的变化？

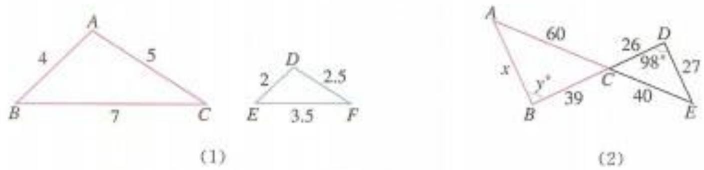
习题27.2

复习巩固



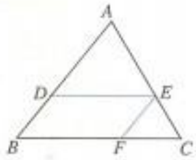
（第 1 题）

1. 有一块三角形的草地，它的一条边长为 25 m，在图纸上，这条边的长为 5 cm，其他两条边的长为 4 cm，求其他两边的实际长度.
2. 根据下列条件，判断$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是否相似，并说明理由：
   (1) $AB=10$ cm，$BC=12$ cm，$AC=15$ cm，$A'B'=150$ cm，$B'C'=180$ cm，$A'C'=225$ cm；
   (2) $\angle A=87^\circ$，$AB=8$ cm，$AC=7$ cm，$\angle A'=87^\circ$，$A'B'=16$ cm，$A'C'=12$ cm；
   (3) $\angle A=70^\circ$，$\angle B=48^\circ$，$\angle A'=70^\circ$，$\angle C'=62^\circ$.
3. 如图，判断两个三角形是否相似，并求出 x 和 y.

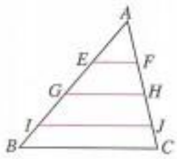


（第 3 题）

4. 如图，$\triangle ABC$中，$DE/\!/BC$，$EF/\!/AB$，求证$\triangle ADE\backsim\triangle EFC$.



（第 4 题）

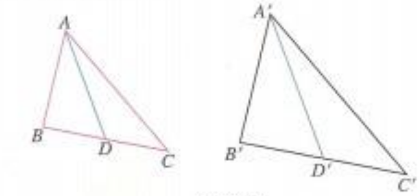


（第 5 题）

5. 图中 $EF/\!/GH/\!/IJ/\!/BC$，找出图中所有的相似三角形.
6. 如果把一个 15 cm×20 cm 的矩形按相似比$\frac{3}{5}$进行变换，得到的新矩形的周长和面积各是多少？

综合运用

7. 如图，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为 k，AD，$A'D'$ 分别是边 BC，$B'C'$ 上的中线，求证 $\dfrac{AD}{A'D'}=k$.

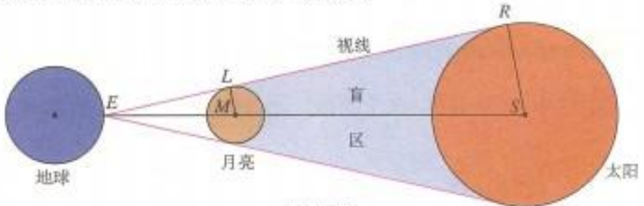


（第 7 题）

（第 8 题）

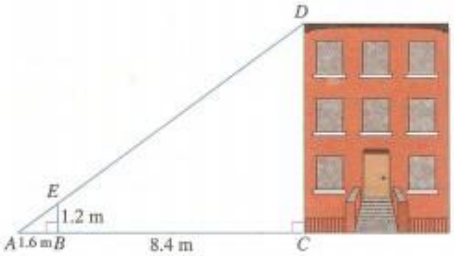
8. 比例规是一种画图工具，利用它可以把线段按一定的比例伸长或缩短．它是由长度相等的两脚 AD 和 BC 交叉构成的．如果把比例规的两脚合上，使螺丝钉固定在刻度 3 的地方（即同时使 $OA=3OD$，$OB=3OC$），然后张开两脚，使 A，B 两个尖端分别在线段 l 的两个端点上，这时 CD 与 AB 有什么关系？为什么？

9. 如图是日食的示意图，如果已知地球表面到太阳中心的距离 ES 约为 1.496×10^8 km，太阳的半径 SR 约为 6.96×10^5 km，月球的半径 LM 约为1 738 km，此时月球中心距地球表面的距离（即图中 EM）为多少？



（第 9 题）

10. 如图，利用标杆 BE 测量建筑物的高度．如果标杆 BE 长 1.2 m，测得 $AB=1.6$ m，$BC=8.4$ m，楼高 CD 是多少？

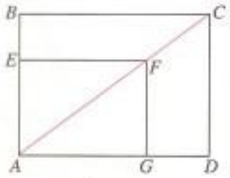


（第 10 题）

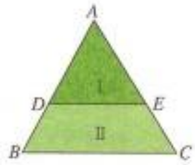
（第 11 题）

11. 如图，为了测量一栋大楼的高度，王青同学在她脚下放了一面镜子，然后向后退，直到她刚好在镜子中看到大楼顶部．这时$\angle LMK$等于$\angle SMT$吗？如果王青身高1.55 m，她估计自己眼睛离地面1.50 m，同时量得$LM=30$ cm，$MS=25$ m，这栋大楼有多高？

12. 如图，四边形$ABCD$是矩形，点F在对角线AC上运动，$EF/\!/BC$，$FG/\!/CD$，四边形$AEFG$和矩形$ABCD$一直保持相似吗？证明你的结论．



（第12题）



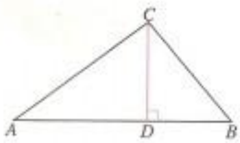
（第13题）

13. 如图，平行于BC的直线DE把$\triangle ABC$分成的两部分面积相等，试确定点D（或E）的位置．

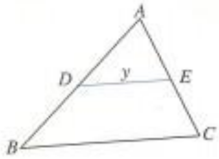
14. 两个立方体的棱长的比为$\frac{m}{n}$，它们的表面积的比为多少？

拓广探索

15. 如图，$\triangle ABC$中，CD是边AB上的高，且$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$，求$\angle C$的大小．



（第15题）



（第16题）

16. 如图，$\triangle ABC$中，$AB=8$，$AC=6$，$BC=9$，如果动点D以每秒2个单位长的速度，从点B出发沿边BA向点A运动，直线$DE/\!/BC$，交AC于E．记x秒时DE的长度为y，写出y关于x的函数关系式，并画出它的图象．

观察与猜想　选学

奇妙的分形图形

下面是两个奇妙的图形，你能发现它们有什么共同的特点吗？

图 1

图 2

图 1 叫做谢尔宾斯基地毯，它最早是由波兰数学家谢尔宾斯基这样制作出来的：把一个正三角形分为全等的 4 个小正三角形，挖去中间的一个小三角形；对剩下的 3 个小正三角形再分别重复以上做法……将这种做法继续进行下去，就能得到小格子越来越多的谢尔宾斯基地毯（图 3）．这种图形中大大小小的三角形之间有什么关系？

图 3

图 2 叫做雪花曲线，它可以从一个等边三角形开始来画：把一个等边三角形的每边分成相同的三段，再在每边中间一段上向外画出一个等边三角形，这样一来就做成了一个六角星．然后在六角星的各边上用同样的方法向外画出更小的等边三角形，出现了一个有 18 个尖角的图形．如此继续下去，就能得到分支越来越多的曲线（图 4）．继续重复上面的过程，图形的外边界逐渐变得越来越曲折、越来越长、图案变得越来越细致，越来越像雪花、越来越美丽了．这种图形的产生过程中大大小小的三角形之间有什么关系？

图 4

我们猜想：上面这样的图形中，存在多种相似关系，例如其中大大小小的三角形是相似的．

事实上，上面的图形中都存在自相似性，即图形的局部与它的整体具有一定程度的相似关系，这样的图形叫做分形图形．分形图形具有奇特的性质，例如，如果把上面那样画雪花曲线的做法无限地继续下去，雪花曲线的周长可以无限长，但它却可以画在一个小小的格子中；它的尖端可以无限多，无数小尖尖布满了整个曲线，但它们彼此却不会相交．从 20 世纪 70 年代起，一个新兴的数学分支——分形几何逐步形成，它的研究对象就是具有自相似性的图形．

再看一个分形图形的例子．画一个大的正五边形，接着画出内嵌的 5 个小正五边形（如果算上中间的一个小正五边形，则正好是 6 个）；在每个小正五边形内再画出 5 个更小的正五边形（图 5）；继续下去，不断重复此过程（图 6），就可以得到有无穷自相似结构的分形图形．你愿意试着画画吗？

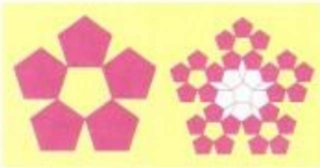


图 5

图 6

27.3 位似

在日常生活中，我们经常见到这样一类相似的图形.

例如，放映幻灯时，通过光源，把幻灯片上的图形放大到屏幕上. 在照相馆中，摄影师通过照相机，把人物的影像缩小在底片上. 图 27.3-1 显示了一个通过灯光放大图片的简单试验.

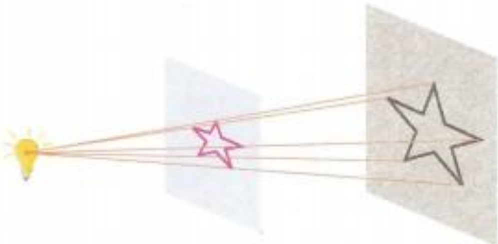


图 27.3-1

这样的放大或缩小，没有改变图形形状，经过放大或缩小的图形，与原图形是相似的，因此，我们可以得到真实的图片和照片.

思考

图 27.3-2 中有多边形相似吗？如果有，那么这种相似有什么特征？

图 27.3-2

图 27.3-2 每幅图中的两个多边形不仅相似，而且对应顶点的连线相交于

一点，对应边互相平行，像这样的两个图形叫做**位似图形**（homothetic figures），这个点叫做**位似中心**.

利用位似，可以将一个图形放大或缩小.

例如，要把四边形 $ABCD$ 缩小到原来的$\frac{1}{2}$，我们可以在四边形外任取一点 O（如图 27.3-3），分别在线段 OA，OB，OC，OD 上取点 A'，B'，C'，D'，使得$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{2}$，顺次连接点 A'，B'，C'，D'，所得四边形 $A'B'C'D'$ 就是所要求的图形.

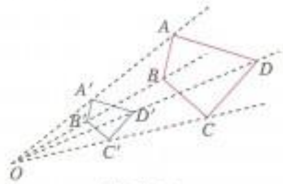


图 27.3-3

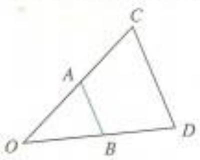
探究

对于上面的问题，还有其他方法吗？如果在四边形外任取一点 O，分别在 OA，OB，OC，OD 的反向延长线上取 A'，B'，C'，D'，使得$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{2}$呢？如果点 O 取在四边形 $ABCD$ 内部呢？

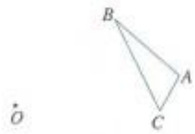
分别画出这时得到的图形.

练习

1. 如图，$\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 是位似图形，AB 与 CD 平行吗？为什么？



（第 1 题）



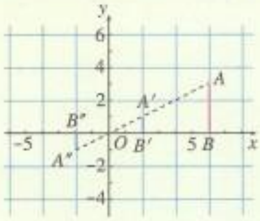
（第 2 题）

2. 如图，以 O 为位似中心，将$\triangle ABC$ 放大为原来的两倍.

在前面几册教科书中，我们学习了在平面直角坐标系中，如何用坐标表示某些平移、轴对称和旋转（中心对称）．一些特殊的相似（如位似）也可以用图形坐标的变化来表示．

探究

如图 27.3-4(1)，在平面直角坐标系中，有两点 $A(6, 3)$，$B(6, 0)$．以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{3}$，把线段 AB 缩小．观察对应点之间坐标的变化，你有什么发现？



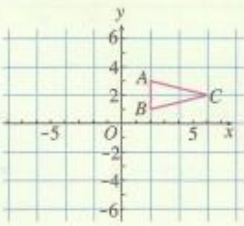


图 27.3-4

如图 27.3-4(2)，$\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别为 $A(2, 3)$，$B(2, 1)$，$C(6, 2)$，以点 O 为位似中心，相似比为 2，将 $\triangle ABC$ 放大，观察对应顶点坐标的变化，你有什么发现？

可以看出，图 27.3-4(1) 中，把 AB 缩小后，A，B 的对应点为 $A'(2, 1)$，$B'(2, 0)$；$A''(-2, -1)$，$B''(-2, 0)$．图 27.3-4(2) 中，把 $\triangle ABC$ 放大后，A，B，C 的对应点为 $A'(\quad,\quad)$，$B'(\quad,\quad)$，$C'(\quad,\quad)$；$A''(\quad,\quad)$，$B''(\quad,\quad)$，$C''(\quad,\quad)$．

不同方法得到的图形坐标是不同的．

归纳

在平面直角坐标系中，如果位似是以原点为位似中心，相似比为 k，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$．

例　如图 27.3-5，四边形 $ABCD$ 的坐标分别为 $A(-6, 6)$，$B(-8, 2)$，$C(-4, 0)$，$D(-2, 4)$，画出它的一个以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ 的位似图形.

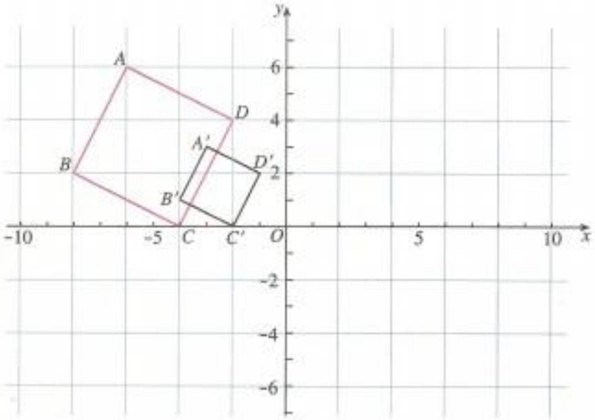


图 27.3-5

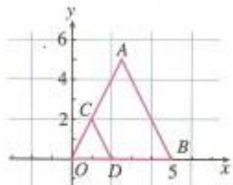
分析：问题的关键是要确定位似图形各个顶点的坐标. 根据前面的规律，点 A 的对应点 A' 的坐标为 $\left(-6\times\frac{1}{2}, 6\times\frac{1}{2}\right)$，即 $(-3, 3)$. 类似地，可以确定其他顶点的坐标.

解：如图 27.3-5，利用位似中对应点的坐标的变化规律，分别取点 $A'(-3, 3)$，$B'(-4, 1)$，$C'(-2, 0)$，$D'(-1, 2)$. 依次连接点 A'，B'，C'，D'，四边形 $A'B'C'D'$ 就是要求的四边形 $ABCD$ 的位似图形.

还可以得到其他图形吗？自己试一试！

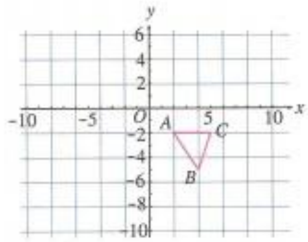
练习

1. 如图表示 $\triangle AOB$ 和把它缩小后得到的 $\triangle COD$，求 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 的相似比.



（第 1 题）

2. 如图，△ABC 三个顶点坐标分别为 $A(2,-2)$，$B(4,-5)$，$C(5,-2)$，以原点 O 为位似中心，将这个三角形放大为原来的 2 倍.



（第 2 题）

至此，我们已经学习了平移、轴对称、旋转和位似，你能说出它们之间的异同吗？你能在图 27.3-6 所示的图案中找到它们吗？

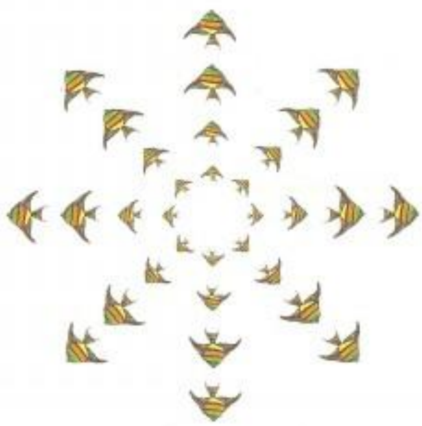
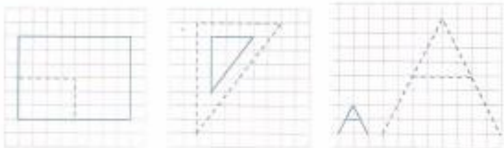


图 27.3-6

习题27.3

复习巩固

1. 如图，如果虚线图形与实线图形是位似图形，求它们的相似比并找出位似中心.



（第1题）

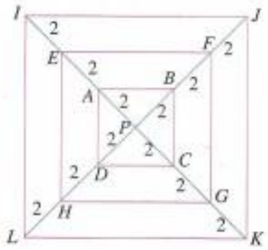
2. 如图，以点 P 为位似中心，将五角星缩小为原来的 $\frac{1}{2}$.

（第2题）

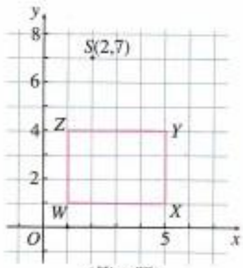
3. $\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别为 $A(2, 2)$，$B(4, 2)$，$C(6, 4)$，以原点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 缩小后得到的 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 对应边的比为 $1:2$，这时 $\triangle DEF$ 各个顶点的坐标分别是多少？

综合运用

4. 如图，正方形 $EFGH$，$IJKL$ 都是正方形 $ABCD$ 的位似图形，点 P 是位似中心.
   (1) 如果相似比为3，正方形 $ABCD$ 的位似图形是哪一个？
   (2) 正方形 $IJKL$ 是正方形 $EFGH$ 的位似图形吗？如果是，求相似比；
   (3) 如果由正方形 $EFGH$ 得到它的位似图形正方形 $ABCD$，求相似比.



（第4题）

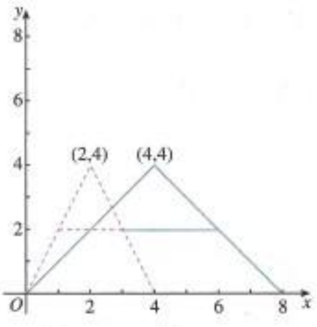


（第5题）

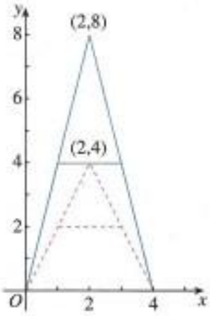
5. 如图，写出矩形 $WXYZ$ 各点的坐标，如果矩形 $STUV$ 相似于 $WXYZ$，$ST/\!/WX$，点 S 的坐标为$(2,\ 7)$，按照下列相似比，分别写出 T，U，V 各点的坐标：

(1) 相似比为 4；　(2) 相似比为$\frac{1}{2}$.

6. 图中的图案与 A 字图案（虚线图案）相比，发生了什么变化？对应点的坐标之间有什么关系？



(1)

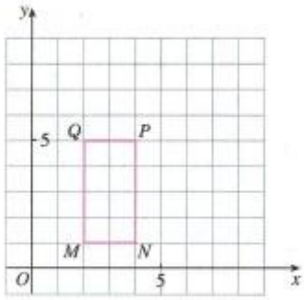


(2)

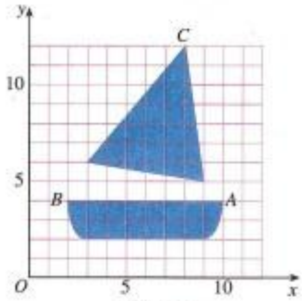
（第 6 题）

拓广探索

7. 如图，画出矩形 $MNPQ$ 以点 Q 为位似中心，相似比为 0.75 的位似图形.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，在平面直角坐标系中，将小船图案以原点为位似中心缩小为原来的$\frac{1}{2}$.

信息技术应用　选学

探索位似的性质

利用图形计算器或计算机等信息技术工具，可以很方便地将图形放大或缩小，还可以探索位似的性质，下面以《几何画板》软件为例说明.

如图1，任意画一个$\triangle ABC$，以点O为位似中心，自选相似比为k，得到位似图形$\triangle A'B'C'$.

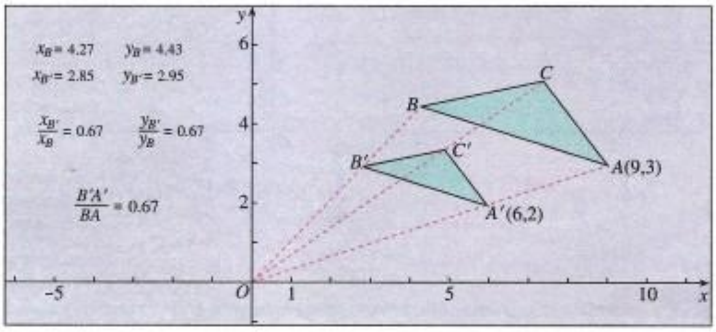


图1

(1) 度量对应边的比，观察结果与k的关系.

(2) 以O为原点建立坐标系，分别度量点A，A'的横坐标，并计算比值；分别度量点A，A'的纵坐标，并计算比值. 观察比值与k的关系. 其他对应点呢?

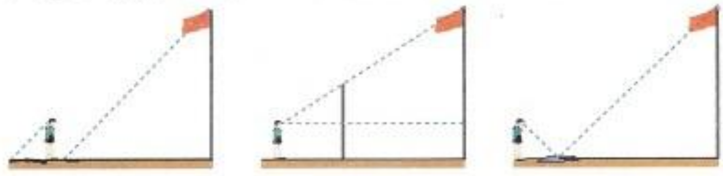
(3) 作线段OA，OA'，OB，OB'，OC，OC'，度量它们，你有什么发现?

(4) 任意改变$\triangle ABC$的位置，你对上面问题得出的结论是否仍然成立? 由此，你能得出位似的一些性质吗?

数学活动

活动 1 测量旗杆的高度

利用相似三角形可以计算那些不能直接测量的物体的高度，图 1 显示了测量旗杆高度的几种方法，你能说出各种方法的道理吗？



利用影子　利用标杆　利用镜子

图 1

用类似的方法，与同学合作，测量校园中一些物体（如旗杆、树木等）的高度.

活动 2 位似与艺术字

观察图 2(1)(2)中的艺术字，你会发现(2)中的字更有立体感.

(1)　(2)

图 2

量一量这两个图中每个艺术字上端的各条线段，你能否发现其中对应线段的比（相当于图 3 中$\frac{AB}{A'B'}$，$\frac{CD}{C'D'}$）有什么关系？

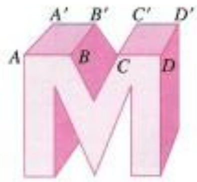


图 3

图 4(1)（2）给出图 2 中由第一种艺术字写出第二种艺术字的一种方法，请找出其中的位似图形以及位似中心，并解释上面所说的对应线段的比的关系.

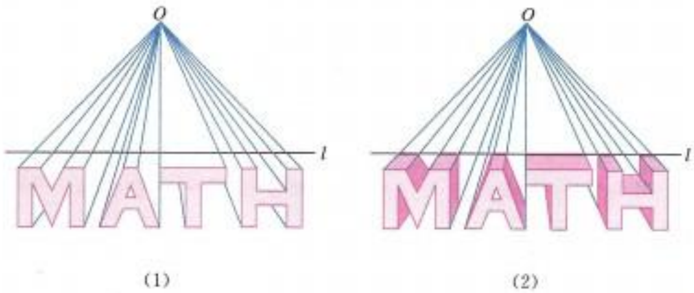
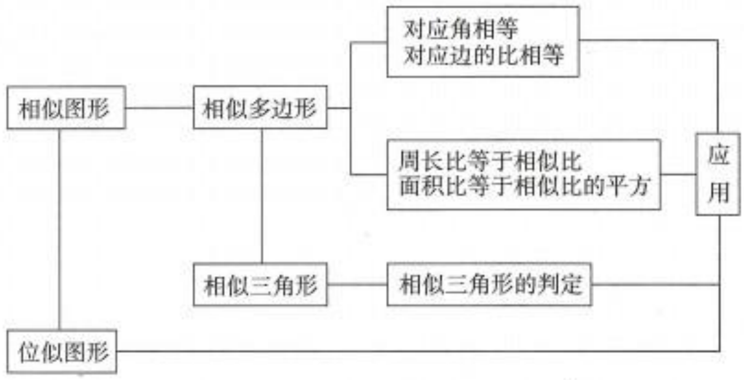


图 4

请你利用位似写出一些立体艺术字，并与同学交流.

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 类似于全等，相似也是图形之间的一种特殊关系．在本章，我们学习了有关相似图形、相似多边形、相似三角形、位似的一些知识．

2. 相似多边形有哪些性质？位似图形呢？如何利用位似将一个图形放大或缩小？

3. 如何判断两个三角形相似？三角形的相似与三角形的全等有什么关系？

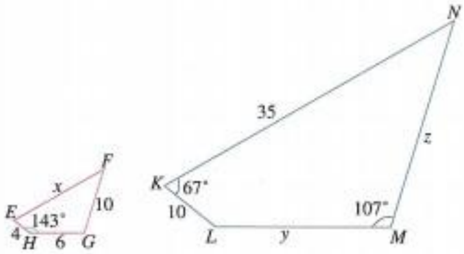
4. 举例说明三角形相似的一些应用．

5. 到现在为止，我们已经学习了平移、轴对称、旋转、位似，你能说出它们之间的异同吗？举出一些它们的实际应用的例子．并结合以上内容，体会从运动的角度研究图形的方法．

复习题27

复习巩固

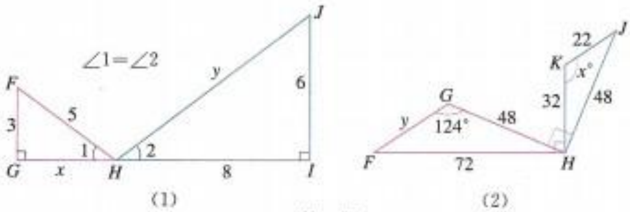
1. 如图，四边形 $EFGH$ 相似于四边形 $KNML$，求 $\angle E$，$\angle G$，$\angle N$ 的度数以及 x，y，z 的值.



（第 1 题）

2. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 5，12，13，与它相似的 $\triangle DEF$ 的最小边长为 15，求 $\triangle DEF$ 的其他两条边长和周长.

3. 根据下列图中所注的条件，判断图中两个三角形是否相似，并求出 x 和 y 的值.



（第 3 题）

4. 李华要在报纸上刊登广告，一块 10 cm×5 cm 的长方形版面要付 180 元的广告费，如果他要把版面的边长扩大为原来的 3 倍，要付多少广告费？（假设单位面积广告费相同）

5. 将如图所示的图形缩小，使得缩小前后对应线段的比为 2∶1.

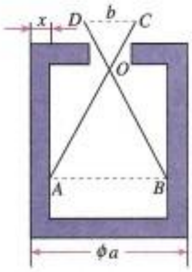
（第 5 题）

综合运用

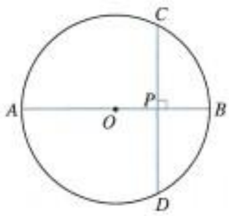
6. 某同学的座位到黑板的距离是 6 m，老师在黑板上要写多大的字，才能使这名同

学看黑板上的字时，与他看相距 30 cm 的教科书的字的感觉相同？（教科书上的小四号字大小约为 0.35 cm×0.4 cm）

7. 如图，已知零件的外径为 a，现用一个交叉卡钳（两条尺长 AC 和 BD 相等）测量零件的内孔直径 AB. 如果 $OA:OC=OB:OD=n$，且量得 $CD=b$，求 AB 以及厚度 x.



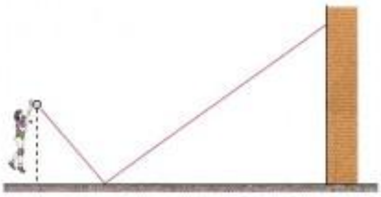
（第 7 题）



（第 8 题）

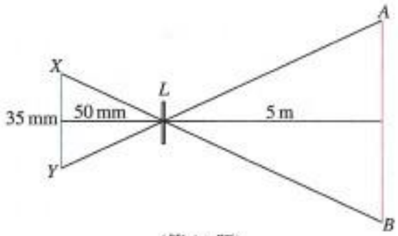
8. 如图，CD 是$\odot O$的弦，AB 是直径，$CD\perp AB$，垂足为 P，求证 $PC^2=PA\cdot PB$.

9. 如图，王芳同学跳起来把一个排球打在离她 2 m 远的地上，排球反弹碰到墙上，如果她跳起击球时的高度是 1.8 m，排球落地点离墙的距离是 6 m，假设球一直沿直线运动，球能碰到墙面离地多高的地方？



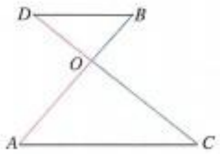
（第 9 题）

10. 如图是一个照相机成像的示意图，如果底片 XY 宽 35 mm，焦距是 50 mm，能拍摄 5 m 外的景物有多宽？如果焦距是 70 mm 呢？



（第 10 题）

11. 如图，AB，CD 相交于点 O，$AC /\!/ BD$，求证 $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.



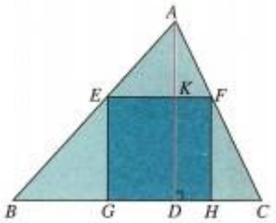
（第 11 题）

（第 12 题）

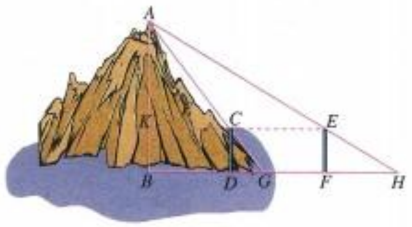
12. 如图，在长为 10 cm，宽为 6 cm 的矩形中，截去一个矩形，使得留下的矩形（图中阴影部分）与原矩形相似，留下矩形的面积是多少？

拓广探索

13. 如图，$\triangle ABC$ 是一块锐角三角形材料，边 $BC=120$ mm，高 $AD=80$ mm，要把它加工成正方形零件，使正方形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上，这个正方形零件的边长是多少？



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 为了求出海岛上的山峰 AB 的高度，在 D 处和 F 处树立标杆 CD 和 EF，标杆的高都是 3 丈，D，F 两处相隔1 000步（1 步等于 6 尺），并且 AB，CD 和 EF 在同一平面内，从标杆 DC 后退 123 步的 G 处，可以看到山峰 A 和标杆顶端 C 在一条直线上；从标杆 FE 后退127 步的 H 处，可看到山峰 A 和标杆顶端 E 在一条直线上．求山峰的高度 AB 及它和标杆 CD 的水平距离 BD 各是多少？（提示：连接 EC 并延长交 AB 于点 K，用 AK 表示 KC 及 KE.）

（本题原是我国魏晋时期数学家刘徽所著《海岛算经》中的第一题：今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直．从前表却行一百二十三步，人目着地，取望岛峰，与表末参合．从后表却行一百二十七步，人目着地，取望岛峰，亦与表末参合．问岛高及去表各几何．）

第二十八章 锐角三角函数

意大利比萨斜塔在1350年落成时就已倾斜，其塔顶中心点偏离垂直中心线2.1 m．1972年比萨地区发生地震，这座高54.5 m的斜塔在大幅度摇摆后仍巍然屹立，但塔顶中心点偏离垂直中心线增至5.2 m，而且还以每年增加1 cm的速度继续倾斜，随时都有倒塌的危险．为此，意大利当局从1990年起对斜塔进行维修纠偏，2001年竣工，使塔顶中心点偏离垂直中心线的距离比纠偏前减少了43.8 cm．

如果要你根据上述信息，用“塔身中心线与垂直中心线所成的角θ(如图)”来描述比萨斜塔的倾斜程度，你能完成吗？

从数学角度看，上述问题就是：已知直角三角形的某些边长，求其锐角的度数．对于直角三角形，我们知道三边之间的关系和两个锐角之间的关系，但我们不知道“边角之间的关系”．因此，这一问题的解答需要学习新的知识．

28.1 锐角三角函数

问题 为了绿化荒山，某地打算从位于山脚下的机井房沿着山坡铺设水管，在山坡上修建一座扬水站，对坡面的绿地进行喷灌．现测得斜坡与水平面所成角的度数是 30°，为使出水口的高度为 35 m，那么需要准备多长的水管？

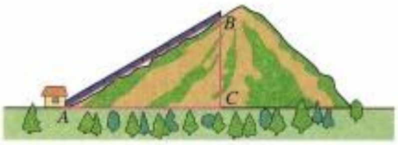


图 28.1-1

这个问题可以归结为，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$BC=35$ m，求 AB（图 28.1-1）．

根据“在直角三角形中，30°角所对的边等于斜边的一半”，即

$$\frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2},$$

可得 $AB=2BC=70$ m，也就是说，需要准备 70 m 长的水管．

思考

在上面的问题中，如果使出水口的高度为50 m，那么需要准备多长的水管？

在上面求 AB（所需水管的长度）的过程中，我们用到了结论：在一个直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么不管三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比值都等于$\frac{1}{2}$．

思考

如图 28.1-2，任意画一个Rt△ABC，使 $\angle C=90°$，$\angle A=45°$，计算$\angle A$ 的对边与斜边的比$\frac{BC}{AB}$，你能得出什么结论？

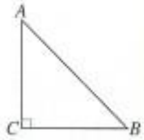


图 28.1-2

如图 28.1-2，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，由于$\angle A=45°$，所以 Rt△ABC 是等腰直角三角形，由勾股定理得

$$AB^2=AC^2+BC^2=2BC^2,$$

$$AB=\sqrt{2}BC.$$

因此

$$\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{\sqrt{2}BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即在直角三角形中，当一个锐角等于 45°时，不管这个直角三角形的大小如何，这个角的对边与斜边的比都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综上可知，在一个 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，当$\angle A=30°$时，$\angle A$ 的对边与斜边的比都等于$\frac{1}{2}$，是一个固定值；当$\angle A=45°$时，$\angle A$ 的对边与斜边的比都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，也是一个固定值. 一般地，当$\angle A$ 取其他一定度数的锐角时，它的对边与斜边的比是否也是一个固定值？

探究

任意画 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$（图 28.1-3），使得 $\angle C=\angle C'=90°$，$\angle A=\angle A'=\alpha$. 那么$\frac{BC}{AB}$与$\frac{B'C'}{A'B'}$有什么关系. 你能解释一下吗？

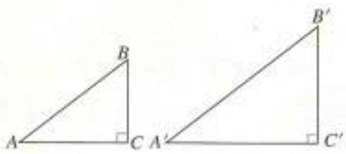


图 28.1-3

在图 28.1-3 中，由于$\angle C=\angle C'=90°$，$\angle A=\angle A'=\alpha$，所以 $Rt\triangle ABC\backsim Rt\triangle A'B'C'$，

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{A'B'},$$

即
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{A'B'}.$$

这就是说，在直角三角形中，当锐角 A 的度数一定时，不管三角形的大小如何，$\angle A$ 的对边与斜边的比都是一个固定值.

如图 28.1-4，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，我们把锐角 A 的对边与斜边的比叫做$\angle A$ 的正弦（sine），记作 $\sin A$，即

$$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}.$$

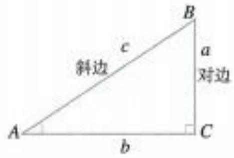


图 28.1-4

例如，当$\angle A=30°$时，我们有

$$\sin A=\sin 30°=\frac{1}{2};$$

当$\angle A=45°$时，我们有

$$\sin A=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 1 如图 28.1-5，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，求 $\sin A$ 和 $\sin B$ 的值.

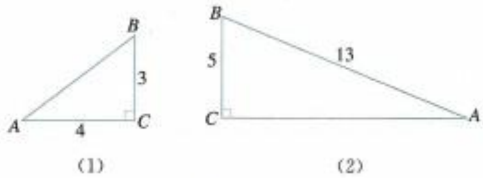


图 28.1-5

解：如图（1），在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

因此
$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5},$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}.$$

如图（2），在 Rt△ABC 中，

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}.$$

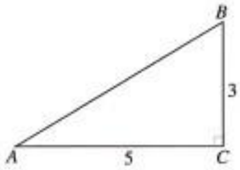
$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12.$$

因此　$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13}.$$

求 sin A 就是要确定 ∠A 的对边与斜边的比；求 sin B 就是要确定 ∠B 的对边与斜边的比.

练习

根据右图，求 sin A 和 sin B 的值.



探究

如图 28.1-6，在 Rt△ABC 中，∠C = 90°，当锐角 A 确定时，∠A 的对边与斜边的比就随之确定. 此时，其他边之间的比是否也随之确定？为什么？

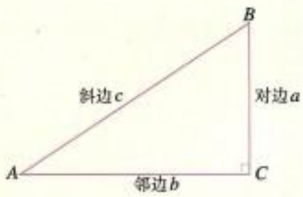


图 28.1-6

类似于正弦的情况，在图 28.1-6 中，当锐角 A 的大小确定时，∠A 的邻边与斜边的比、∠A 的对边与邻边的比也分别是确定的. 我们把∠A 的邻边与斜边的比叫做∠A 的**余弦**（cosine），记作 cos A，即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c};$$

把∠A 的对边与邻边的比叫做∠A 的**正切**（tangent），

对于锐角 A 的每一个确定的值，sin A 有唯一确定的值与它对应，所以 sin A 是 A 的函数. 同样地，cos A，tan A 也是 A 的函数.

记作 $\tan A$，即

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

锐角 A 的正弦、余弦、正切都叫做 $\angle A$ 的**锐角三角函数**（trigonometric function of acute angle）.

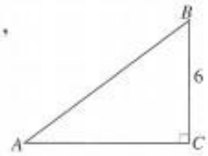


图 28.1-7

例 2 如图 28.1-7，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=6$，$\sin A=\frac{3}{5}$，求 $\cos A$，$\tan B$ 的值.

解：∵ $\sin A=\frac{BC}{AB}$，

∴ $AB=\frac{BC}{\sin A}=6\times\frac{5}{3}=10$.

又 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

∴ $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$，$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3}$.

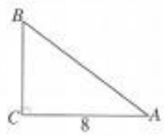
练习

1. 分别求出下列直角三角形中两个锐角的正弦值、余弦值和正切值.

(1) (2)

（第 1 题）

2. 在 Rt△ABC 中，如果各边长都扩大 2 倍，那么锐角 A 的正弦值、余弦值和正切值有什么变化？
3. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=8$，$\tan A=\frac{3}{4}$，求 $\sin A$，$\cos B$ 的值.



（第 3 题）

探究

两块三角尺中有几个不同的锐角？这几个锐角的正弦值、余弦值和正切值各是多少？

图 28.1-8

30°、45°、60°角的正弦值、余弦值和正切值如下表：

锐角 α / 三角函数	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

设图 28.1-8 中每个三角尺较短的边长为 1，利用勾股定理和三角函数的定义可以求出这些三角函数值.

例 3 求下列各式的值：

(1) $\cos^2 60° + \sin^2 60°$；

(2) $\frac{\cos 45°}{\sin 45°} - \tan 45°$.

$\sin^2 60°$ 表示 $(\sin 60°)^2$，即 $(\sin 60°)\cdot(\sin 60°)$.

解：(1) $\cos^2 60° + \sin^2 60°$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=1;$$

(2) $\frac{\cos 45°}{\sin 45°} - \tan 45°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\div\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$=0.$$

例 4　(1) 如图 28.1-9(1)，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=\sqrt{6}$，$BC=\sqrt{3}$，求$\angle A$ 的度数.

(2) 如图 28.1-9(2)，已知圆锥的高 AO 是它的底面半径 OB 的$\sqrt{3}$倍，求 α.

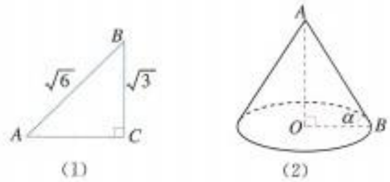


图 28.1-9

解：(1) 在图 28.1-9(1) 中，

∵　$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴　$\angle A=45°$.

(2) 在图 28.1-9(2) 中，

∵　$\tan\alpha=\dfrac{AO}{OB}=\dfrac{\sqrt{3}OB}{OB}=\sqrt{3}$，

∴　$\alpha=60°$.

当A，B为锐角时，若$A\neq B$，则
$\sin A\neq\sin B$，
$\cos A\neq\cos B$，
$\tan A\neq\tan B$.

练习

1. 求下列各式的值：

(1) $1-2\sin 30°\cos 30°$；

(2) $3\tan 30°-\tan 45°+2\sin 60°$；

(3) $\dfrac{\cos 60°}{1+\sin 60°}+\dfrac{1}{\tan 30°}$.

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=\sqrt{7}$，$AC=\sqrt{21}$，求$\angle A$，$\angle B$ 的度数.

通过上面的学习我们知道，当锐角 A 是 30°、45°或 60°等特殊角时，可以求得这些特殊角的正弦值、余弦值和正切值；如果锐角 A 不是这些特殊角，怎样得到它的三角函数值呢？

我们可以借助计算器来求锐角的三角函数值.

例如求 $\sin 18^\circ$，利用计算器的 sin 键，并输入角度值 18，得到结果 $\sin 18^\circ=0.309\ 016\ 994$.

又如求 $\tan 30^\circ 36'$，利用 tan 键，并输入角的度、分值（可以使用 °′″ 键），就可以得到答案 0.591 398 351.

因为 $30^\circ 36'=30.6^\circ$，所以也可以利用 tan 键，并输入角度值 30.6，同样得到答案 0.591 398 351.

> 利用计算器求锐角的三角函数值，或已知锐角三角函数值求相应的锐角时，不同的计算器操作步骤有所不同.

> 使用锐角三角函数表，也可以查得锐角的三角函数值，或根据锐角三角函数值求相应的锐角.

如果已知锐角三角函数值，也可以使用计算器求出相应的锐角.

例如，已知 $\sin A=0.501\ 8$；用计算器求锐角 A 可以按照下面方法操作：

依次按键 2nd F sin，然后输入函数值 0.501 8，得到 $\angle A=30.119\ 158\ 67^\circ$（这说明锐角 A 精确到 1° 的结果为 30°）.

还可以利用 2nd F °′″ 键，进一步得到 $\angle A=30^\circ 07' 08.97''$（这说明锐角 A 精确到 $1'$ 的结果为 $30^\circ 7'$，精确到 $1''$ 的结果为 $30^\circ 7' 9''$）.

> 怎样验算求出的 $\angle A=30^\circ 7' 9''$ 是否正确？

练习

1. 用计算器求下列锐角三角函数值：

   (1) $\sin 20^\circ$，$\cos 70^\circ$；

   $\sin 35^\circ$，$\cos 55^\circ$；

   $\sin 15^\circ 32'$，$\cos 74^\circ 28'$；

   (2) $\tan 3^\circ 8'$，$\tan 80^\circ 25' 43''$.

> 分析第 1(1) 题的结果，你能得出什么猜想，你能说明你的猜想吗？

2. 已知下列锐角三角函数值，用计算器求其相应的锐角：

   (1) $\sin A=0.627\ 5$，$\sin B=0.054\ 7$；

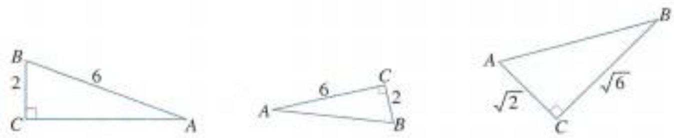
   (2) $\cos A=0.625\ 2$，$\cos B=0.165\ 9$；

   (3) $\tan A=4.842\ 5$，$\tan B=0.881\ 6$.

习题28.1

复习巩固

1. 分别求出图中∠A，∠B 的正弦值、余弦值和正切值.



(1)　　(2)　　(3)

（第 1 题）

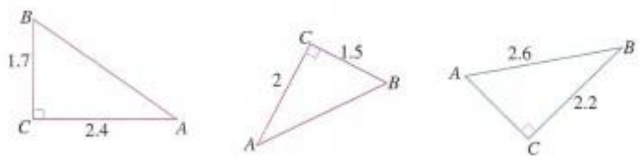
2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，当∠A 的大小确定时，它的正弦值是否会随之确定？余弦值呢？正切值呢？为什么？

3. 求下列各式的值：

（1）$\sin 45°+\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　（2）$1+2\sin 30°\cos 30°$；

（3）$\sin 45°\cdot\cos 60°+\sin 45°$；　　（4）$\cos^2 45°+\tan 60°\cos 30°$.

4. 用计算器求图中∠A 的正弦值、余弦值和正切值.



(1)　　(2)　　(3)

（第 4 题）

5. 已知下列三角函数值，用计算器求锐角 A，B.

（1）$\sin A=0.627\ 5$，$\sin B=0.054\ 7$；

（2）$\cos A=0.625\ 2$，$\cos B=0.165\ 9$；

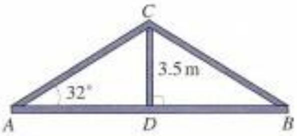
（3）$\tan A=0.881\ 6$，$\tan B=15.94$.

综合运用

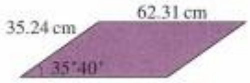
6. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=5$，$\sin A=0.7$，求 $\cos A$，$\tan A$ 的值.

7. 如图，要焊接一个高 3.5 m，底角为 32°的人字形钢架，约需多长的钢材（结果

保留小数点后两位)?



(第7题)



(第8题)

8. 如图，一块平行四边形木板的两条邻边的长分别为62.31 cm和35.24 cm，它们之间的夹角为35°40′，求这块木板的面积（结果保留小数点后两位）.

拓广探索

9. 用计算器求锐角的三角函数值，填入下表：

锐角 A	…	15°	18°	20°	22°	…	80°	82°	84°	…
$\sin A$										
$\cos A$										
$\tan A$										

随着锐角 A 的度数的不断增大，$\sin A$ 有怎样的变化趋势？$\cos A$ 呢？$\tan A$ 呢？你能说明你的结论吗？

10. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle A$ 的正弦、余弦之间有什么关系？（提示：利用三角函数的定义及勾股定理）

阅读与思考　选学

一张古老的三角函数表

人们很早以前就开始研究天文学，以便通过观察天上日月星辰的位置和运行，解决有关计时、历法、航海、地理等许多问题．对天体的观察测量离不开计算，这促进了数学的发展，三角函数的产生和发展与天文学有密切的关系．

保存至今的一张古老的三角函数表，是2世纪的希腊天文学家、地理学家、数学家托勒密（Ptolemy）所著的《天文学大成》一书的一张“弦表”，它对于当时的天文计算有重要作用．这张弦表和我们现在所用的正弦、余弦三角函数表有所不同，它是把半径为60

（古代巴比伦人采用 60 进制记数，这也影响了希腊人）的圆中 x° 的弧所对的弦长制成了表，而 x 的大小从 $0\sim180^\circ$ 每隔 $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ 依次取值．利用我们现在已经学习过的圆和锐角三角函数的知识可知，弧的度数与它所对的圆心角的度数一样，当半径 r 和圆心角 θ 确定后，通过解直角三角形可以求出圆心角所对的弦长 $l=2r\sin\frac{\theta}{2}$（图 1）．当 r 为固定值，θ，l 在表中对应给出时，就隐含了用 $\frac{l}{2r}$ 代表 $\sin\frac{\theta}{2}$ 的值的关系．因此，这张弦表表面上是由弧的度数 θ 对应弦长 l，实际上隐含了由角 θ 对应 $\sin\frac{\theta}{2}$ 的值．也就是说，它相当于现在的正弦函数（$\sin\alpha$）表，其中的角 $\alpha\left(=\frac{\theta}{2}\right)$ 从 $0\sim90^\circ$ 每隔 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ 依次取值．


托勒密

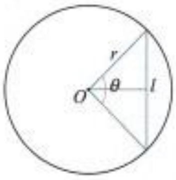


图 1

托勒密在《天文学大成》一书中还介绍了他利用几何方法推导弦表的过程，这需要进行许多仔细的推理和计算．由于当时既没有现成的计算公式，又没有先进的计算工具，所以制作这张弦表要付出艰辛的努力．然而，有了这张弦表后，大大促进了三角学在天文测量等应用方面的发展，人们可以直接利用上述计算结果解决有关问题，这带来很多便利，因此托勒密编制弦表在数学史上是值得纪念的一大贡献．

随着人们对数学研究的不断深入，正弦、余弦、正切等三角函数的概念建立起来，对数的产生使三角函数计算极大地提高了速度，微积分的出现又带来利用级数计算三角函数的方法……后来的三角函数表正是在这些成果的基础上不断改进的．在科学研究、生产实践、军事活动等诸多领域中，这些三角函数表比托勒密编制的弦表发挥了大得多的作用，它们成为许多人手中的、应用极其广泛的计算工具．

随着现代信息技术的高度发展，人们日益普遍地利用计算机、计算器等进行各种计算，这些与时俱进的变化使计算效率有了新的提高．虽然现在直接查三角函数表的做法越来越少了，但是三角函数表的历史功绩是我们永远不能忘记的．

28.2 解直角三角形

先看本章引言提出的有关比萨斜塔倾斜的问题.

1972 年的情形：设塔顶中心点为 B，塔身中心线与垂直中心线的夹角为 A，过点 B 向垂直中心线引垂线，垂足为点 C（如图 28.2-1）. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$BC=5.2$ m，$AB=54.5$ m，

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5.2}{54.5}\approx 0.0954,$$

利用计算器可得$\angle A\approx 5°28'$.

类似地，可以求出 2001 年纠偏后塔身中心线与垂直中心线的夹角.

图 28.2-1

如果将上述问题推广到一般情形，就是：已知直角三角形的斜边和一条直角边，求它的锐角的度数.

一般地，直角三角形中，除直角外，共有 5 个元素，即 3 条边和 2 个锐角，由直角三角形中除直角外的已知元素，求出其余未知元素的过程，叫做解直角三角形.

探究

（1）在直角三角形中，除直角外的 5 个元素之间有哪些关系？

（2）知道 5 个元素中的几个，就可以求其余元素？

如图 28.2-2，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角边，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边分别为 a，b，c，那么除直角 C 外的 5 个元素之间有如下关系：

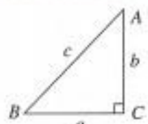


图 28.2-2

（1）三边之间的关系

$$a^2+b^2=c^2\text{（勾股定理）};$$

（2）两锐角之间的关系

$$\angle A+\angle B=90°;$$

（3）边角之间的关系

$$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},$$

$$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c},$$

$$\tan A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

上述(3)中的 A 都可以换成 B，同时把 a，b 互换.

利用这些关系，知道其中的 2 个元素（至少有一个是边），就可以求出其余 3 个未知元素.

例 1　如图 28.2-3，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{6}$，解这个直角三角形.

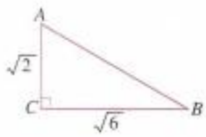


图 28.2-3

解：∵　$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，

∴　$\angle A=60°$.

$\angle B=90°-\angle A=90°-60°=30°$.

$AB=2AC=2\sqrt{2}$.

例 2　如图 28.2-4，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=35°$，$b=20$，解这个直角三角形（结果保留小数点后一位）.

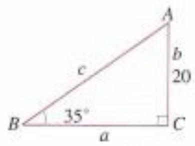


图 28.2-4

解：$\angle A=90°-\angle B=90°-35°=55°$.

∵　$\tan B=\dfrac{b}{a}$，

∴　$a=\dfrac{b}{\tan B}=\dfrac{20}{\tan 35°}\approx 28.6$.

∵　$\sin B=\dfrac{b}{c}$，

∴　$c=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{20}{\sin 35°}\approx 34.9$.

你还有其他方法求出 c 吗？

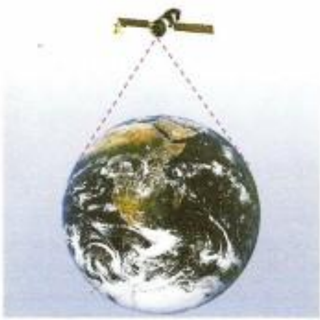
练习

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，根据下列条件解直角三角形：

(1) $a=30$，$b=20$；

(2) $\angle B=72°$，$c=14$.

例 3 2003 年 10 月 15 日“神舟”5 号载人航天飞船发射成功．当飞船完成变轨后，就在离地球表面 350 km 的圆形轨道上运行．如图 28.2-5，当飞船运行到地球表面上 P 点的正上方时，从飞船上能直接看到的地球上最远的点在什么位置？这样的最远点与 P 点的距离是多少（地球半径约为 6 400 km，π 取 3.142，结果保留整数）？



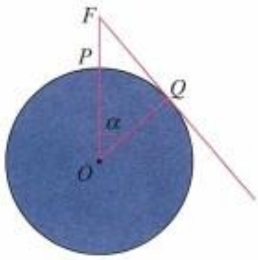


图 28.2-5

分析：从飞船上能直接看到的地球上最远的点，应是视线与地球相切时的切点．

如图 28.2-5，⊙O 表示地球，点 F 是飞船的位置，FQ 是⊙O 的切线，切点 Q 是从飞船观测地球时的最远点．$\overset{\frown}{PQ}$的长就是地面上 P，Q 两点间的距离，为计算$\overset{\frown}{PQ}$的长需先求出$\angle POQ$（即 α）．

> 在解决例 3 的问题时，我们综合运用了圆和解直角三角形的知识．

解：在图 28.2-5 中，FQ 是⊙O 的切线，△FOQ 是直角三角形．

$$\because \quad \cos\alpha=\frac{OQ}{OF}=\frac{6\,400}{6\,400+350}\approx 0.948\,1,$$

∴　$\alpha\approx18.54^\circ$.

∴　$\overset{\frown}{PQ}$的长为

$$\frac{18.54\pi}{180}\times6\ 400\approx\frac{18.54\times3.142}{180}\times6\ 400\approx2\ 071.$$

由此可知，当飞船在 P 点正上方时，从飞船观测地球时的最远点距离 P 点约 2 071 km.

例 4　热气球的探测器显示，从热气球看一栋高楼顶部的仰角为 30°，看这栋高楼底部的俯角为 60°，热气球与高楼的水平距离为 120 m，这栋高楼有多高（结果保留小数点后一位）？

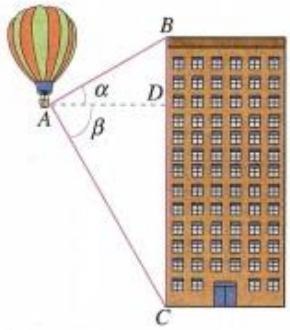


图 28.2-6

分析：我们知道，在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的是仰角，视线在水平线下方的是俯角．因此，在图 28.2-6 中，$\alpha=30^\circ$，$\beta=60^\circ$.

在 Rt△ABD 中，$\alpha=30^\circ$，$AD=120$，所以可以利用解直角三角形的知识求出 BD；类似地可以求出 CD，进而求出 BC.

解：如图 28.2-6，$\alpha=30^\circ$，$\beta=60^\circ$，$AD=120$.

∵　$\tan\alpha=\frac{BD}{AD}$，$\tan\beta=\frac{CD}{AD}$，

∴　$BD=AD\cdot\tan\alpha=120\times\tan30^\circ$

$=120\times\frac{\sqrt{3}}{3}=40\sqrt{3}$，

$CD=AD\cdot\tan\beta=120\times\tan60^\circ$

$=120\times\sqrt{3}=120\sqrt{3}$，

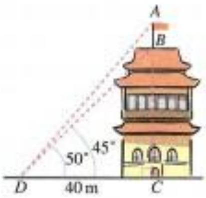
∴　$BC=BD+CD=40\sqrt{3}+120\sqrt{3}$

$=160\sqrt{3}\approx277.1$.

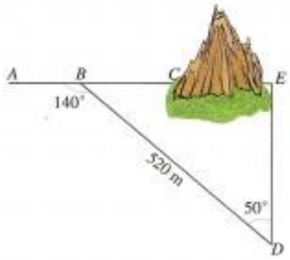
答：这栋楼高约为 277.1 m.

练习

1. 建筑物 BC 上有一旗杆 AB，由距 BC 40 m 的 D 处观察旗杆顶部 A 的仰角为 50°，观察底部 B 的仰角为 45°，求旗杆的高度（结果保留小数点后一位）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，沿 AC 方向开山修路．为了加快施工进度，要在小山的另一边同时施工．从 AC 上的一点 B 取 $\angle ABD=140^\circ$，$BD=520$ m，$\angle D=50^\circ$．那么开挖点 E 离 D 多远正好能使 A，C，E 成一直线（结果保留小数点后一位）？

例 5　如图 28.2-7，一艘海轮位于灯塔 P 的北偏东 65° 方向，距离灯塔 80 海里的 A 处，它沿正南方向航行一段时间后，到达位于灯塔 P 的南偏东 34° 方向上的 B 处．这时，海轮所在的 B 处距离灯塔 P 有多远（结果保留小数点后一位）？

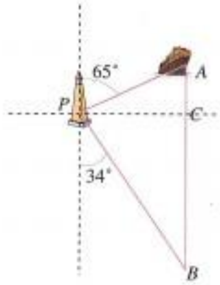


图 28.2-7

解： 如图 28.2-7，在 Rt△APC 中，

$$PC=PA\cdot\cos(90^\circ-65^\circ)$$
$$=80\times\cos 25^\circ$$
$$\approx 72.505.$$

在 Rt△BPC 中，$\angle B=34^\circ$，

$\because\ \sin B=\dfrac{PC}{PB}$，

$\therefore\ PB=\dfrac{PC}{\sin B}=\dfrac{72.505}{\sin 34^\circ}\approx 129.7.$

因此，当海轮到达位于灯塔 P 的南偏东 34° 方向时，它距离灯塔 P 大约 129.7 海里.

归纳

利用解直角三角形的知识解决实际问题的一般过程是：

(1) 将实际问题抽象为数学问题（画出平面图形，转化为解直角三角形的问题）；

(2) 根据条件的特点，适当选用锐角三角函数等去解直角三角形；

(3) 得到数学问题的答案；

(4) 得到实际问题的答案.

解直角三角形有广泛的应用，解决问题时，要根据实际情况灵活运用相关知识. 例如，当我们要测量如图 28.2-8 所示大坝的高度 h 时，只要测出仰角 α 和大坝的坡面长度 l，就能算出 $h=l\sin\alpha$. 但是，当我们要测量如图 28.2-9 所示的山高 h 时，问题就不那么简单了. 这是由于不能很方便地得到仰角 α 和山坡长度 l.

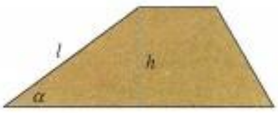


图 28.2-8

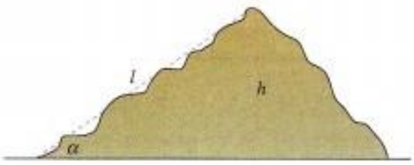


图 28.2-9

与测坝高相比，测山高的困难在于：坝坡是"直"的，而山坡是"曲"的. 怎样解决这样的问题呢？

我们设法"化曲为直，以直代曲". 我们可以把山坡"化整为零"地划分为一些小段，图 28.2-10 表示其中一部分小段. 划分小段时，注意使每一小段上的山坡近似是"直"的，可以量出这段坡长 l_i，测出相应的仰角 α_i，这样就可以算出这段山坡的高度 $h_i=l_i\sin\alpha_i$.

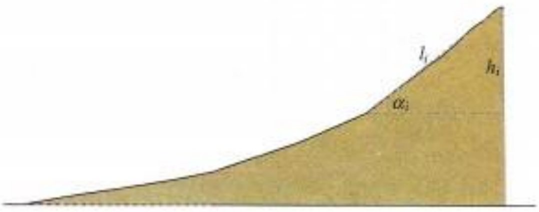


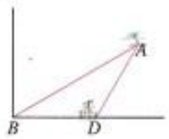
图 28.2-10

在每个小段上，我们都构造出直角三角形，利用上面的方法分别算出各段山坡的高度 h_1，h_2，…，h_n，然后我们再“积零为整”，把 h_1，h_2，…，h_n 相加，于是得到山高 h.

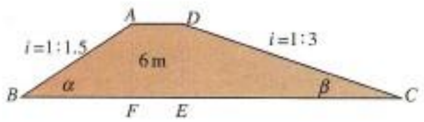
以上解决问题中所用的“化整为零，积零为整”“化曲为直，以直代曲”的做法，就是高等数学中微积分的基本思想，它在数学中有重要地位，在今后的学习中，你会更多地了解这方面的内容.

练习

1. 海中有一个小岛 A，它的周围 8 海里内有暗礁，渔船跟踪鱼群由西向东航行，在 B 点测得小岛 A 在北偏东 $60°$ 方向上，航行 12 海里到达 D 点，这时测得小岛 A 在北偏东 $30°$ 方向上，如果渔船不改变航线继续向东航行，有没有触礁的危险？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$（图中 $i=1:3$ 是指坡面的铅直高度 DE 与水平宽度 CE 的比），根据图中数据求：

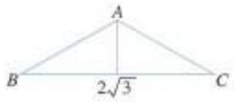
(1) 坡角 α 和 β；

(2) 斜坡 AB 的长（结果保留小数点后一位）.

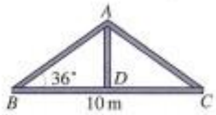
习题28.2

复习巩固

1. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120^\circ$，$BC=2\sqrt{3}$. 求$\triangle ABC$的周长.

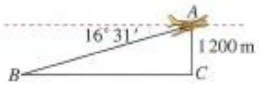


（第1题）

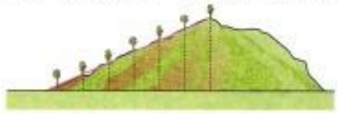


（第2题）

2. 如图，厂房屋顶人字架（等腰三角形）的跨度为10 m，$\angle B=36^\circ$，求中柱AD（D为底边中点）和上弦AB的长（结果保留小数点后两位）.
3. 从高出海平面55 m的灯塔处收到一艘帆船的求助信号，从灯塔看帆船的俯角为21°，帆船距灯塔有多远（结果保留整数）？
4. 如图，某飞机于空中A处探测到目标C，此时飞行高度$AC=1\ 200$ m，从飞机上看地平面指挥台B的俯角$\alpha=16^\circ 31'$. 求飞机A到指挥台B的距离（结果保留整数）.



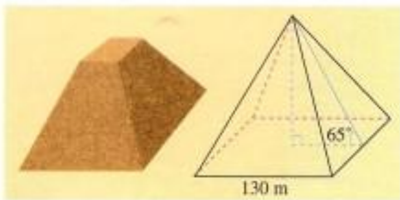
（第4题）


（第5题）

5. 如图，在山坡上种树，要求株距（相邻两树间的水平距离）是5.5 m. 测得斜坡的倾斜角是24°，求斜坡上相邻两树间的坡面距离（结果保留小数点后一位）.

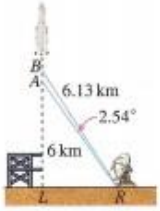
综合运用

6. 一座埃及金字塔被发现时，顶部已经荡然无存，但底部未曾受损，是一个边长为130 m的正方形，且每一个侧面与地面成65°角，这个金字塔原来有多高（结果保留整数）？

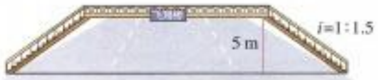


（第6题）

7. 如图，一只运载火箭从地面 L 处发射，当卫星到达 A 点时，从位于地面 R 处的雷达站测得 AR 的距离是 6 km，仰角为 43°．1 s 后，火箭到达 B 点，此时测得 BR 的距离是 6.13 km，仰角为 45.54°，这个火箭从 A 到 B 的平均速度是多少（结果保留小数点后两位）？



（第 7 题）

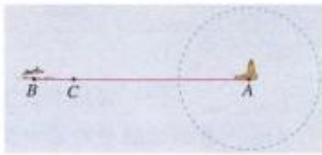


（第 8 题）

8. 为方便行人，打算修建一座高 5 m 的过街天桥，已知天桥的斜面坡度为1∶1.5，计算斜坡的长度（结果保留整数）．

拓广探索

9. 如图，某海域直径为 30 海里的暗礁区中心有一哨所 A，值班人员发现有一轮船从哨所正西方向 90 海里的 B 处向哨所驶来，哨所及时向轮船发出了危险信号，但轮船没有收到信号，又继续前进了 15 海里到达 C 处，此时哨所第二次发出紧急信号．

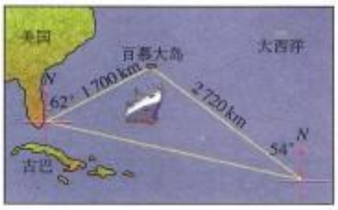


（第 9 题）

（1）若轮船收到第一次信号后，为避免触礁，航向改变角度至少为东偏北 α 度，求 $\sin\alpha$ 的值．

（2）当轮船收到第二次信号时，为避免触礁，轮船航向改变的角度至少应为多少（结果保留小数点后两位）？

10. 根据图中标出的百慕大三角的位置，计算百慕大三角的面积（结果保留整数）．（提示：它的面积等于一个梯形的面积减去两个直角三角形的面积）



（第 10 题）

多年来，很多船只、飞机都在大西洋的一个区域内神秘失踪，这个区域称为百慕大三角，直至现在，人们仍未能破解这个秘密．

数学活动

活动 1　制作测角仪，测量树的高度

（1）把一根细线固定在半圆形量角器的圆心处，细线的另一端系一个小重物，制成一个简单的测角仪，利用它可以测量仰角或俯角（图 1）；

图 1

（2）将这个仪器用手托住，拿到眼前，使视线沿着仪器的直径刚好到达树的最高点（图 2）；

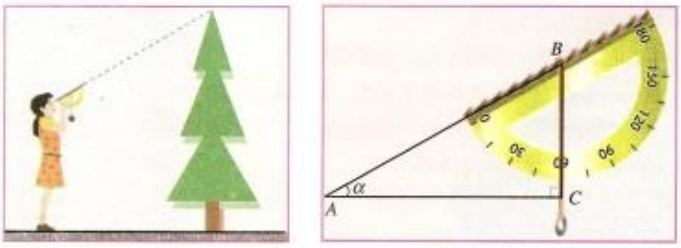


图 2

（3）读出仰角 α 的度数；

（4）测出你到树根的距离；

（5）计算这棵树的高度.

活动 2　利用测角仪测量塔高

(1) 在塔前的平地上选择一点 A，用活动 1 中制作的测角仪测出你看塔顶的仰角 α（图 3）；

(2) 在 A 点和塔之间选择一点 B，测出你由 B 点看塔顶的仰角 β；

(3) 量出 A，B 两点的距离；

(4) 计算塔的高度.

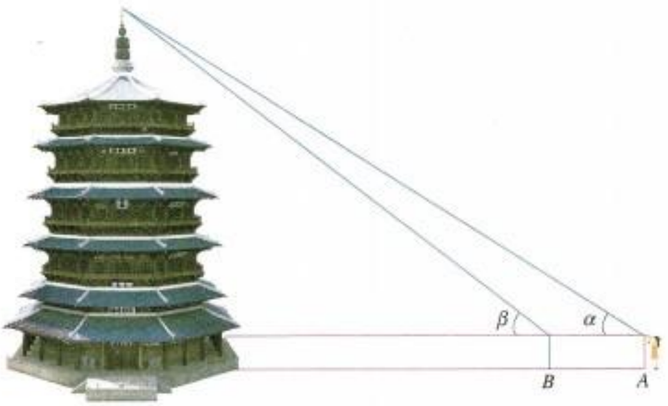


图 3

小　结

一、本章知识结构图

直角三角形中的边角关系 → 锐角三角函数 → 解直角三角形 → 实际问题

二、回顾与思考

1. 我们已经知道直角三角形三边之间的关系和两个锐角之间的关系．通过引进锐角三角函数，我们又建立了它的边角之间的关系，从而使直角三角形得到了更广泛的应用．

请你总结锐角三角函数的定义过程，并写出各锐角三角函数．

2. 在直角三角形中，已知几个元素就可以解直角三角形？请你根据不同的已知条件（例如已知斜边和一个锐角），归纳相应的解直角三角形的方法．

3. 锐角三角函数在实践中有广泛的应用．你能举例说明这种应用吗？

复习题 28

复习巩固

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$a=2$，$\sin A=\frac{1}{3}$，求 $\cos A$ 和 $\tan A$ 的值.

2. 在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AC=4\sqrt{3}$，求 BC 的长.

3. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{2}\cos 45^\circ-\tan 45^\circ$；　(2) $\sqrt{3}\sin 60^\circ+\tan 60^\circ-2\cos^2 30^\circ$.

4. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\cos 76^\circ 39'+\sin 17^\circ 52'$；　(2) $\sin 57^\circ 18'-\tan 22^\circ 30'$；

(3) $\tan 83^\circ 6'-\cos 4^\circ 59'$；　(4) $\tan 12^\circ 30'-\sin 15^\circ$.

5. 已知下列锐角三角函数值，用计算器求锐角 A：

(1) $\cos A=0.765\ 1$；　(2) $\sin A=0.934\ 3$；

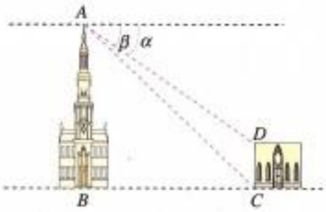
(3) $\tan A=35.26$；　(4) $\tan A=0.707$.

6. 等腰△ABC 的一个内角是 30°，一条边长为 $2\sqrt{3}$. 求△ABC 的周长.

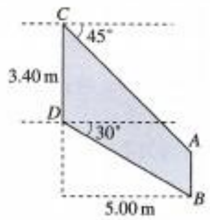
7. 从一艘船看海岸上高为 42 m 的灯塔顶部的仰角为 33°，船离海岸多远（结果保留整数）？

综合运用

8. 如图，两建筑物的水平距离 BC 为 32.6 m，从 A 点测得 D 点的俯角 α 为 $35^\circ 12'$，测得 C 点的俯角 β 为 $43^\circ 24'$，求这两个建筑物的高度（结果保留小数点后一位）.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 某型号飞机的机翼形状如图所示. 根据图中数据计算 AC，BD 和 AB 的长度（结果保留小数点后一位）.

10. 要想使人安全地攀上斜靠在墙面上的梯子的顶端，梯子与地面所成的角 α 一般要满足 $50^\circ \leqslant \alpha \leqslant 75^\circ$（如图）．现有一个长 6 m 的梯子，问：

(1) 使用这个梯子最高可以安全攀上多高的墙（结果保留小数点后一位）？

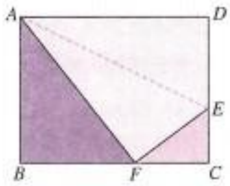
(2) 当梯子底端距离墙面 2.4 m 时，α 的度数等于多少（结果保留整数）？这时人是否能够安全使用这个梯子？

（第 10 题）

11. 如图，折叠矩形 $ABCD$ 的一边 AD，使点 D 落在 BC 边的点 F 处，已知折痕 $AE=5\sqrt{5}$ cm，且 $\tan\angle EFC=\frac{3}{4}$．

(1) $\triangle AFB$ 与 $\triangle FEC$ 有什么关系？

(2) 求矩形 $ABCD$ 的周长．



（第 11 题）

12. 平行四边形中，已知 AB、BC 及其夹角 $\angle B$（$\angle B$ 是锐角），能求出平行四边形 $ABCD$ 的面积 S 吗？如果能，写出用 AB，BC 及其夹角 $\angle B$ 表示 S 的式子．

拓广探索

13. 已知一个圆的半径为 R．

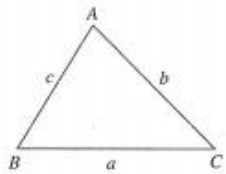
(1) 求这个圆的内接正 n 边形的周长和面积；

(2) 利用 (1) 的结果填写下表：

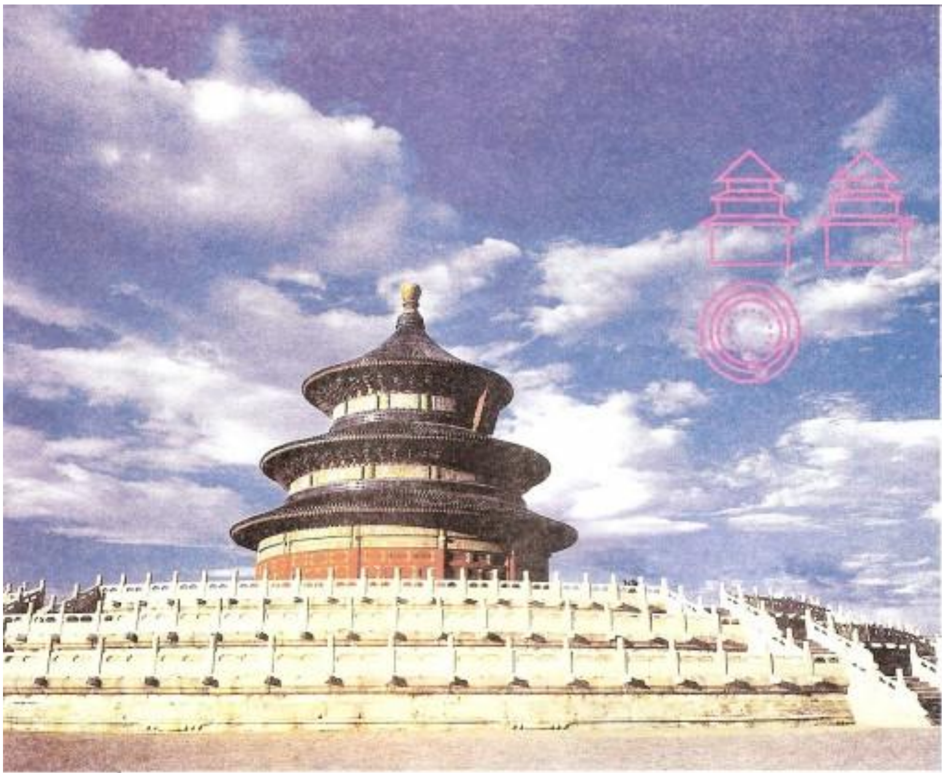
内接正 n 边形	正六边形	正十二边形	正二十四边形	…
内接正 n 边形的周长				
内接正 n 边形的面积				

观察上表，随着圆内接正多边形边数的增加，正多边形的周长（面积）有怎样的变化趋势，与圆的周长（面积）进行比较，你能得出什么结论？

14. 如图，在锐角三角形 ABC 中，探究 $\frac{a}{\sin A}$，$\frac{b}{\sin B}$，$\frac{c}{\sin C}$ 之间的关系（提示：分别作 AB 和 BC 边上的高）．



（第 14 题）



第二十九章

投影与视图

你注意观察过周围物体在日光或灯光下的影子吗？影子和物体有着怎样的联系呢？人们从光线照射物体会产生影子得到启发，抽象出投影的概念，并利用投影原理来绘制视图．在生产实践中，制造机器，建筑高楼，设计火箭……无一不和视图密切相关．

本章中，我们将了解投影的基础知识，并借助投影的原理认识视图，然后进一步讨论：如何由立体图形画出三视图？如何由三视图想象出立体图形？通过学习本章，相信同学们对空间图形的认识会得到进一步的提高．

29.1 投影

物体在日光或灯光的照射下，会在地面、墙壁等处形成影子（图 29.1-1），影子既与物体的形状有关，也与光线的照射方式有关.

图 29.1-1

一般地，用光线照射物体，在某个平面（地面、墙壁等）上得到的影子叫做物体的投影（projection），照射光线叫做投影线，投影所在的平面叫做投影面.

图 29.1-2

> 皮影戏是利用灯光的照射，把影子的形态反映在银幕（投影面）上的表演艺术.

有时光线是一组互相平行的射线，例如太阳光或探照灯光的一束光中的光线（图 29.1-3）. 由平行光线形成的投影是平行投影（parallel projection）. 例如，物体在太阳光的照射下形成的影子（简称日影）就是平行投影. 日影的

方向可以反映时间，我国古代的计时器日晷（图 29.1-4），就是根据日影来观测时间的.

图 29.1-3

图 29.1-4

日晷是利用日影计时的仪器，通常由铜制的指针和石制的带有刻度的圆盘组成. 针影投到刻度盘的不同位置表示不同的时刻.

由同一点（点光源）发出的光线形成的投影叫做中心投影（center projection）. 例如，物体在灯泡发出的光照射下形成影子（图 29.1-5）就是中心投影.

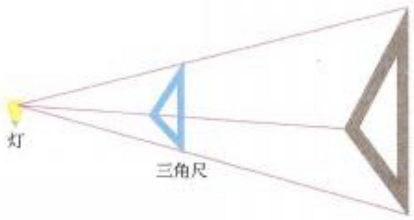


图 29.1-5

练习

把下列物体与它们的投影用线连接起来：

思考

图 29.1-6 表示一块三角尺在光线照射下形成投影，其中图（1）与图（2）（3）的投影线有什么区别？图（2）（3）的投影线与投影面的位置关系有什么区别？

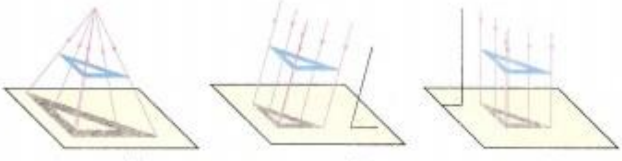


图 29.1-6

图 29.1-6 中，图（1）中的投影线集中于一点，形成中心投影；图（2）（3）中，投影线互相平行，形成平行投影；图（2）中，投影线斜着照射投影面；图（3）中投影线垂直照射投影面（即投影线正对着投影面），我们也称这种情形为投影线垂直于投影面．像图（3）这样，投影线垂直于投影面产生的投影叫做**正投影**．

在实际制图中，人们经常应用正投影的原理．

探究

如图 29.1-7，把一根直的细铁丝（记为线段 AB）放在三个不同位置：

（1）铁丝平行于投影面；

（2）铁丝倾斜于投影面；

（3）铁丝垂直于投影面（铁丝不一定要与投影面有公共点）．

三种情形下铁丝的正投影各是什么形状？

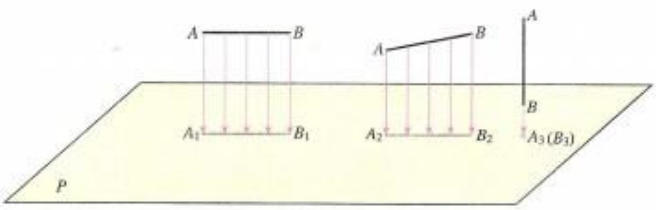


图 29.1-7

通过观察、测量可知：

(1) 当线段 AB 平行于投影面 P 时，它的正投影是线段 A_1B_1，线段与它的投影的大小关系为 AB ______ A_1B_1；

(2) 当线段 AB 倾斜于投影面 P 时，它的正投影是线段 A_2B_2，线段与它的投影的大小关系为 AB ______ A_2B_2；

(3) 当线段 AB 垂直于投影面 P 时，它的正投影是一个点 A_3.

探究

如图 29.1-8，把一块正方形硬纸板 P（例如正方形 $ABCD$）放在三个不同位置：

(1) 纸板平行于投影面；

(2) 纸板倾斜于投影面；

(3) 纸板垂直于投影面.

三种情形下纸板的正投影各是什么形状？

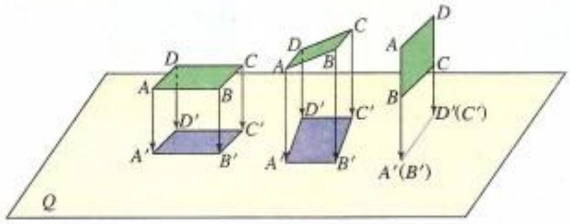


图 29.1-8

通过观察、测量可知：

(1) 当纸板 P 平行于投影面 Q 时，P 的正投影与 P 的形状、大小一样；

(2) 当纸板 P 倾斜于投影面 Q 时，P 的正投影与 P 的形状、大小发生变化；

(3) 当纸板 P 垂直于投影面 Q 时，P 的正投影成为一条线段.

归纳

当物体的某个面平行于投影面时，这个面的正投影与这个面的形状、大小完全相同.

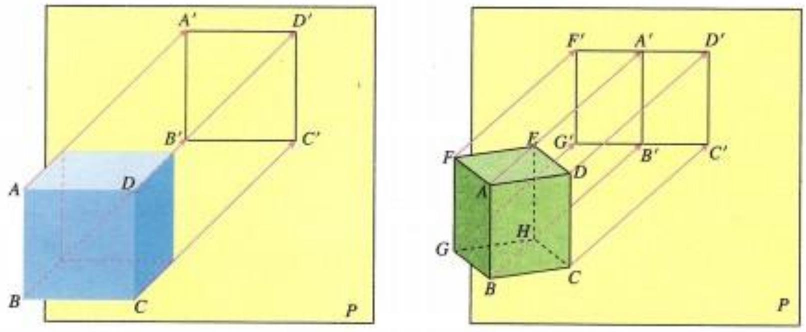
人们经常根据上述规律绘制图纸.

例　画出如图 29.1-9 摆放的正方体在投影面 P 上的正投影.

(1) 正方体的一个面 $ABCD$ 平行于投影面 P（图 29.1-9(1)）；

(2) 正方体的一个面 $ABCD$ 倾斜于投影面 P，上底面 $ADEF$ 垂直于投影面 P，并且上底面的对角线 AE 垂直于投影面 P（图 29.1-9(2)）.

不妨用一个盒子作为模型，观察它在墙壁上的投影.



(1)　　(2)

图 29.1-9

分析：(1) 当正方体在如图 29.1-9(1) 的位置时，正方体的一个面 $ABCD$ 及与其相对的另一面与投影面平行，这两个面的正投影是与正方体的一个面的形状、大小完全相同的正方形 $A'B'C'D'$. 正方形 $A'B'C'D'$ 的四条边分别是正方体其余四个面（这些面垂直于投影面）的投影. 因此，正方体的正投影是一个正方形.

(2) 当正方体在如图 29.1-9(2) 的位置时，它的面 $ABCD$ 和面 $ABGF$ 倾斜于投影面，它们的投影分别是矩形 $A'B'C'D'$ 和 $A'B'G'F'$；正方体其余两个侧面的投影也分别是上述矩形；上、下底面的投影分别是线段 $D'F'$ 和 $C'G'$. 因此，正方体的投影是矩形 $F'G'C'D'$，其中线段 $A'B'$ 把矩形一分为二.

解：(1) 如图 29.1-9(1)，正方体的正投影为正方形 $A'B'C'D'$，它与正方体的一个面是全等关系.

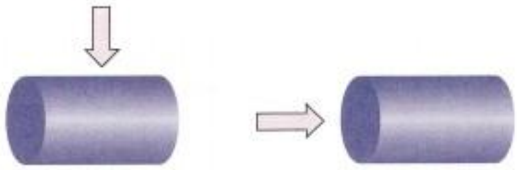
（2）如图 29.1-9（2），正方体的正投影为矩形 $F'G'C'D'$，这个矩形的长等于正方体的底面对角线长，矩形的宽等于正方体的棱长．矩形上、下两边中点连线 $A'B'$ 是正方体的侧棱 AB 及它所对的另一条侧棱 EH 的投影．

物体正投影的形状、大小与它相对于投影面的位置有关．

练习

投影线的方向如箭头所示，画出图中圆柱体的正投影：

（1）　　　　　　（2）



习题 29.1

复习巩固

1．小华在不同时间于天安门前拍了几幅照片，下面哪幅照片是小华在下午拍摄的？

（第 1 题）

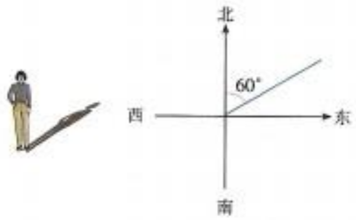
天安门是坐北向南的建筑．

2. 请你用线把图中各物体与它们的投影连接起来：

（第 2 题）

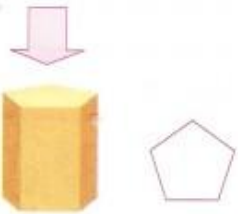
综合运用

3. 如果在阳光下你的身影的方向为北偏东 60°方向，你能说出太阳相对于你的方向吗？



（第 3 题）

4. 下面右图是光线由上到下照射一个正五棱柱（正棱柱的上、下底面是正多边形，侧棱垂直于底面）时的正投影，你能指出这时正五棱柱的各个面的正投影分别是什么吗？



（第 4 题）

5. 一个圆锥的轴截面平行于投影面，圆锥的正投影是边长为 3 的等边三角形，求圆锥的体积和表面积.

拓广探索

6. 画出如图摆放的物体（正六棱柱）的正投影：

（1）投影线由物体前方射到后方；

（2）投影线由物体左方射到右方；

（3）投影线由物体上方射到下方.

（第 6 题）

29.2 三视图

当我们从某一角度观察一个物体时，所看到的图象叫做物体的一个视图（view）. 视图也可以看作物体在某一角度的光线下的投影. 对于同一物体，如果从不同角度观察，所得到的视图可能不同.

我们知道，单一的视图通常只能反映物体的一个方面的形状，为了全面地反映物体的形状，生产实践中往往采用多个视图来反映物体不同方面的形状. 例如图 29.2-1 中右侧的视图，可以多角度地反映飞机的形状.

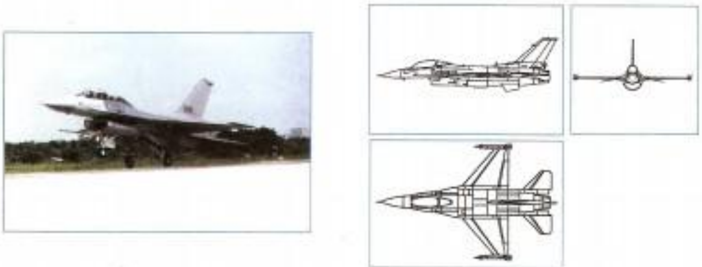


图 29.2-1

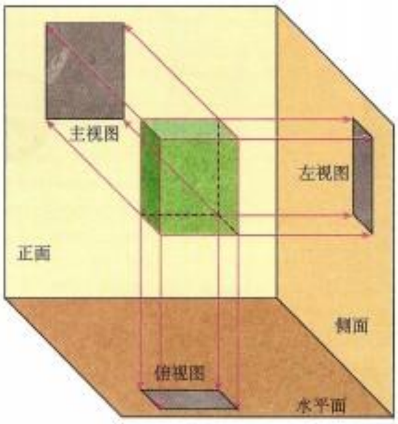
本章中，我们只讨论三视图. 图 29.2-2 是同一本书的三个不同的视图.

图 29.2-2

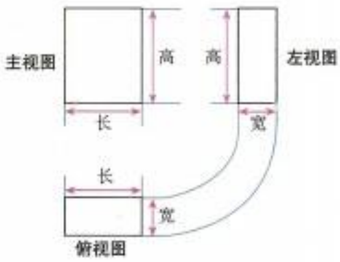
如图 29.2-3(1)，我们用三个互相垂直的平面（例如墙角处的三面墙壁）作为投影面，其中正对着我们的叫做正面，正面下方的叫做水平面，右边的叫做侧面. 一个物体（例如一个长方体）在三个投影面内同时进行正投影，在正面内得到的由前向后观察物体的视图，叫做**主视图**；在水平面内得到的由上向下观察物体的视图，叫做**俯视图**；在侧面内得到由左向右观察物体的视图，叫做**左视图**.

三视图与以前我们学习的从三个方向看物体所得到的图象是一致的，现在我们又从投影的角度来认识这个问题，并且对三个方向作了更明确的规定.

如图 29.2-3(2)，将三个投影面展开在一个平面内，得到这一物体的一张三视图（由主视图、俯视图和左视图组成）. 三视图中的各视图，分别从不同方面表示物体，三者合起来就能够较全面地反映物体的形状.



(1)



(2)

图 29.2-3

三视图位置有规定，主视图要在左上边，它下方应是俯视图，左视图坐落在右边.

三视图中，主视图与俯视图表示同一物体的长，主视图与左视图表示同一物体的高，左视图与俯视图表示同一物体的宽，因此三个视图的大小是互相联系的. 画三视图时，三个视图要放在正确的位置，并且使主视图与俯视图的**长对正**，主视图与左视图的**高平齐**，左视图与俯视图的**宽相等**.

三视图中各视图的大小有什么关系?

正对着物体看，物体左右之间的水平距离、前后之间的水平距离、上下之间的竖直距离，分别对应这里所说的长、宽、高.

在实际生活中人们经常遇到各种物体，这些物体的形状虽然经常各不相同，但是它们一般是由一些基本几何体（柱体、锥体、球等）组合或切割而成的，因此会画、会看基本几何体的视图是非常必要的.

例 1　画出图 29.2-4 所示一些基本几何体的三视图.

圆柱 (1)　正三棱柱 (2)　球 (3)

图 29.2-4

分析：画这些基本几何体的三视图时，要注意从三个方面观察它们. 具体画法为：

1. 确定主视图的位置，画出主视图；

2. 在主视图正下方画出俯视图，注意与主视图“长对正”；

3. 在主视图正右方画出左视图，注意与主视图“高平齐”，与俯视图“宽相等”.

4. 为表示出旋转几何体（圆柱、圆锥、球等）的对称轴，可在视图中加画点划线.

主视图反映物体的长和高，俯视图反映物体的长和宽，左视图反映物体的高和宽.

解：

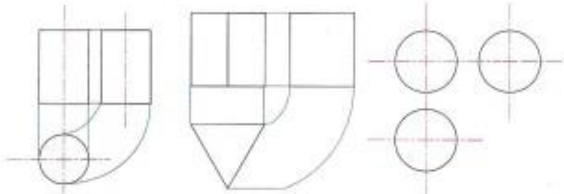
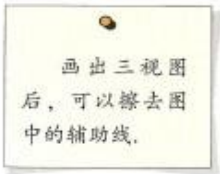


图 29.2-5



例 2　画出图 29.2-6 所示的支架（一种小零件）的三视图，支架的两个台阶的高度和宽度都是同一长度.

分析：支架的形状是由两个大小不等的长方体构成的组合体. 画三视图时要注意这两个长方体的上下、前后位置关系.

解：图 29.2-7 是支架的三视图.

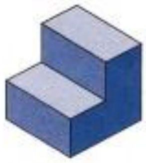


图 29.2-6

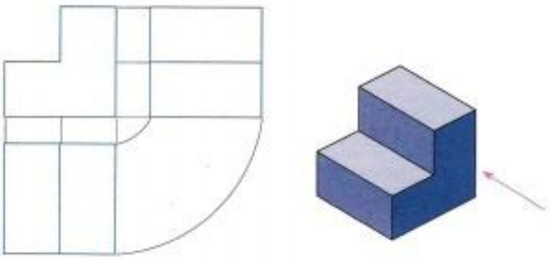


图 29.2-7

例 3　图 29.2-8 是一根钢管的直观图，画出它的三视图.

分析：钢管有内外壁，从一定角度看它时，看不见内壁. 为全面地反映立体图形的形状，画图时规定：看得见部分的轮廓线画成实线，因被其他部分遮挡而看不见部分的轮廓线画成虚线.

图 29.2-8

解：图 29.2-9 是钢管的三视图，其中的虚线表示钢管的内壁.

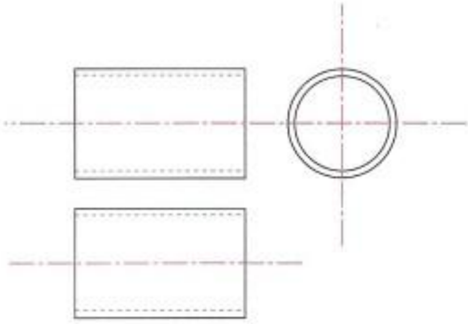


图 29.2-9

练习

1. 画出如图所示的正三棱柱的三视图.

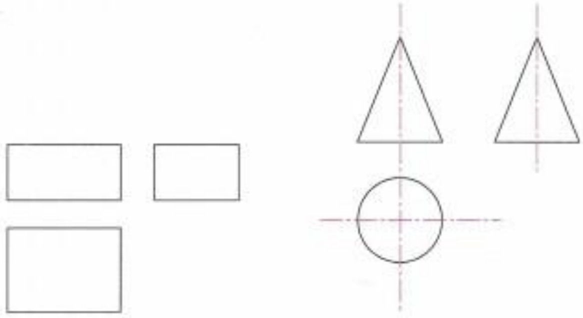
（第 1 题）

（第 3 题）

2. 画出半球和圆锥的三视图.
3. 图中的立体图形可以看成由哪些基本几何体经过怎样的变化得到的？画出它的三视图.

前面我们讨论了由立体图形（实物）画出三视图，下面我们讨论由三视图想象出立体图形（实物）.

例 4　根据三视图（图 29.2-10）说出立体图形的名称.



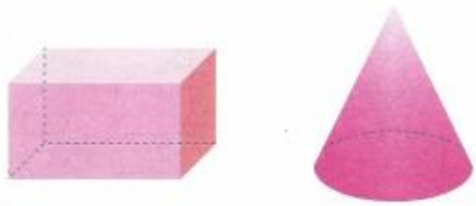
(1)　(2)

图 29.2-10

分析：由三视图想象立体图形时，要先分别根据主视图、俯视图和左视图想象立体图形的前面、上面和左侧面，然后再综合起来考虑整体图形.

解：(1) 从三个方向看立体图形，图象都是矩形，可以想象出：整体是长方体，如图 29.2-11(1) 所示.

(2) 从正面、侧面看立体图形，图象都是等腰三角形；从上面看，图象是圆；可以想象出：整体是圆锥，如图 29.2-11(2) 所示.



(1)　(2)

图 29.2-11

例 5　根据物体的三视图（图 29.2-12）描述物体的形状.

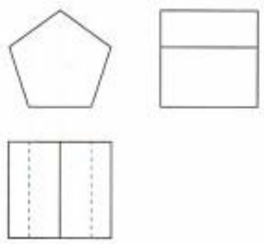


图 29.2-12

请对照三视图与想象出的立体图形，指出三视图中各线条分别是立体图形哪部分的投影.

分析：由主视图可知，物体正面是正五边形；由俯视图可知，由上向下看物体是矩形的，且有一条棱（中间的实线）可见到，两条棱（虚线）被遮挡；由左视图可知，物体的侧面是矩形的，且有一条棱（中间的实线）可见到．综合各视图可知，物体是五棱柱形状的．

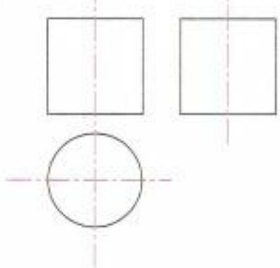
图 29.2-13

解：物体是五棱柱形状的，如图 29.2-13 所示．

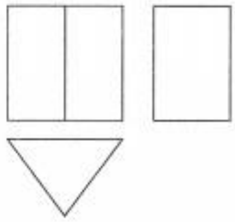
练习

由三视图想象实物形状：

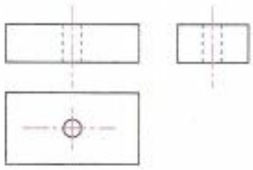
(1)



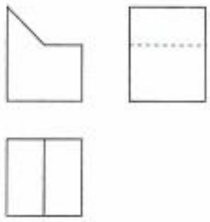
(2)



(3)



(4)



例 6　某工厂要加工一批密封罐，设计者给出了密封罐的三视图（图 29.2-14），请你按照三视图确定制作每个密封罐所需钢板的面积．

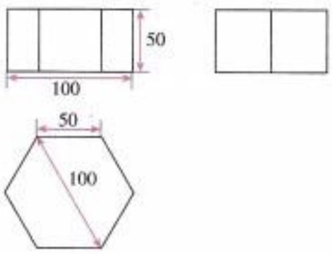


图 29.2-14

分析：对于某些立体图形，沿着其中一些线（例如棱柱的棱）剪开，可以把立体图形的表面展开成一个平面图形——展开图．

在实际的生产中，三视图和展开图往往结合在一起使用．解决本题的思路是，由三视图想象出密封罐的立体形状，再进一步画出展开图，从而计算面积．

解：由三视图可知，密封罐的形状是正六棱柱（图 29.2-15）．

密封罐的高为 50 mm，底面正六边形的直径为 100 mm，边长为 50 mm，图 29.2-16 是它的展开图．

图 29.2-15

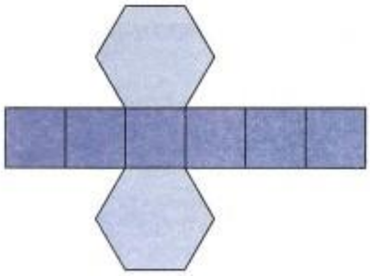


图 29.2-16

由展开图可知，制作一个密封罐所需钢板的面积为

$$6\times50\times50+2\times6\times\frac{1}{2}\times50\times50\sin 60^\circ$$

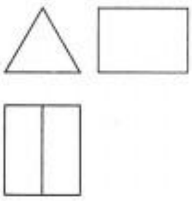
$$=6\times50^2\times\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\approx27\ 990\ (\mathrm{mm}^2).$$

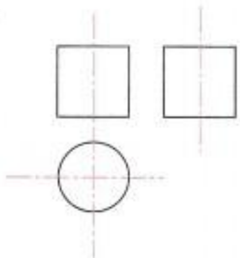
练习

根据几何体的三视图画出它的表面展开图：

(1)



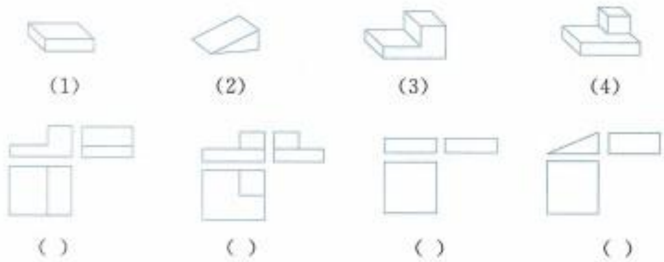
(2)



习题 29.2

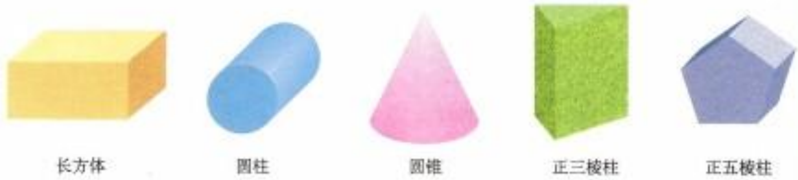
复习巩固

1. 找出与图中的几何体对应的三视图，在三视图下面的括号中填上对应的数码.



(第 1 题)

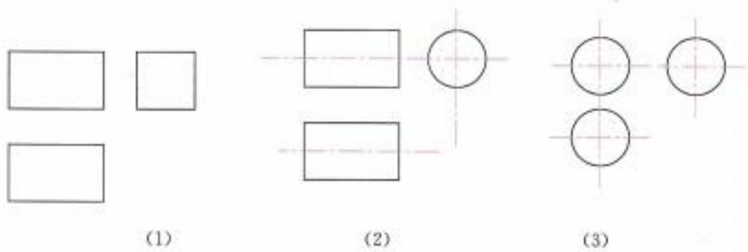
2. 画出图中的几何体的三视图：



(第 2 题)

3. 球的三视图与其摆放位置有关吗？为什么？

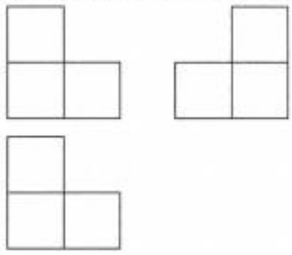
4. 根据下列三视图，分别说出它们表示的物体的形状：



(第 4 题)

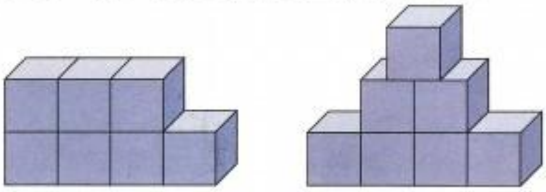
综合运用

5. 根据下面的三视图说出这个几何体是怎样由四个正方体组合而成的.



（第5题）

6. 分别画出图中的由7个小正方体组合而成的立体图形的三视图：



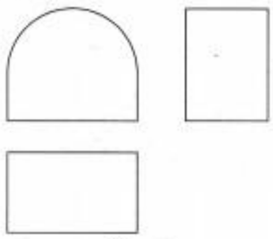
（1） （2）

（第6题）

7. 画出图中的物体的三视图：

（第7题）

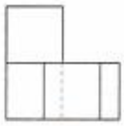
8. 根据三视图描述物体的形状.



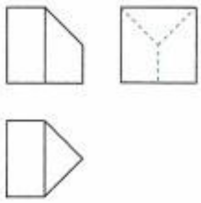
（第8题）

拓广探索

9. 由 5 个相同的小正方体搭成的物体的俯视图如图所示，这个物体有几种搭法？



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 根据三视图描述物体的形状，试画出物体的表面展开图.

阅读与思考 选学

视图的产生与应用

人们很早就意识到图形语言具有特殊的作用. 例如，三千多年前古代埃及的建筑师们要清楚而详尽地表明他们设计的金字塔等伟大建筑物，只用文字表述不行，而必须画图说明问题. 在人们探索如何确切地表示物体的立体形状的过程中，产生并发展了视图的知识.

金字塔（埃及）

意大利艺术家拉斐尔利用透视原理创作的名画《雅典学派》. 画面上不同时代的希腊学者济济一堂，数学家毕达哥拉斯和欧几里得也在其中.

画视图要考虑视线与物体的位置关系，不同的位置关系产生不同的视觉效果，这就是说研究视图不能不研究投影. 公元前 1 世纪，古罗马建筑师维特鲁厄斯写成了《建筑学》

这部古老的著作，其中包括水平投影、正面投影、中心投影和透视作图法的一些早期问题．文艺复兴时期，透视理论有了较大的发展，这一时期许多的艺术作品都应用了透视的原理，而透视原理与中心投影有密切的关系．

画法几何是几何学的一个分支，视图是它研究的主要内容，投影理论是它的基础．法国几何学家加斯帕尔·蒙日（Gaspard Monge）对画法几何的发展有重要贡献．1764 年蒙日用自制的测量工具画出家乡城镇的大比例平面图，1765 年他用画法几何原理绘制了防御工程设计图，但由于军事保密的缘故，他的研究成果 30 年以后才得以公开．1798～1799 年蒙日的《画法几何》出版，它第一次系统阐述在平面内绘制空间物体的一般方法．由于画法几何在工程中有着广泛的应用，因此画法几何又被称为“工程师的语言”．

加斯帕尔·蒙日
（1746—1818）

蒙日的《画法几何》中使用的视图是二视图．二视图由主视图和俯视图组成．后来根据实际需要，由二视图发展为今天在工程中广泛使用的三视图．

你能否举出这样的例子：两个物体的形状不同，但是它们的二视图相同．由这样的例子，你能体会到为什么三视图比二视图有更广泛的应用吗？

29.3 课题学习　制作立体模型

观察三视图，并综合考虑各视图所表示的意思以及视图间的联系，可以想象出三视图所表示的立体图形的形状，这是由视图转化为立体图形的过程．下面我们通过动手实践来体会一下这个过程．

一、课题学习目的

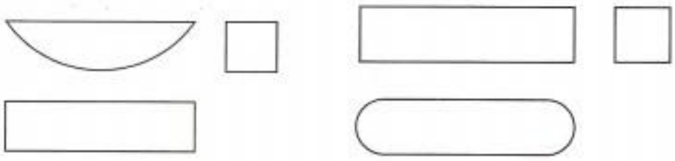
通过根据三视图制作立体模型的实践活动，体验平面图形向立体图形转化的过程，体会用三视图表示立体图形的作用，进一步感受立体图形与平面图形之间的联系．

二、工具准备

刻度尺、剪刀、小刀、胶水、硬纸板、马铃薯（或萝卜）等．

三、具体活动

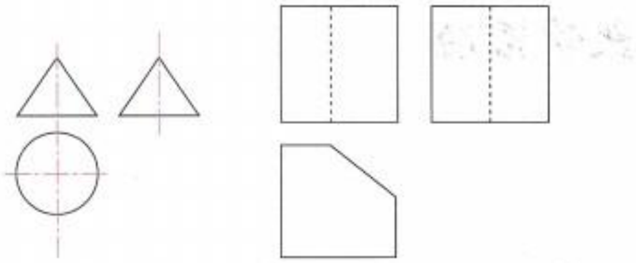
1．以硬纸板为主要材料，分别做出下面的两组视图（图 29.3-1）所表示的立体模型．



(1)　　(2)

图 29.3-1

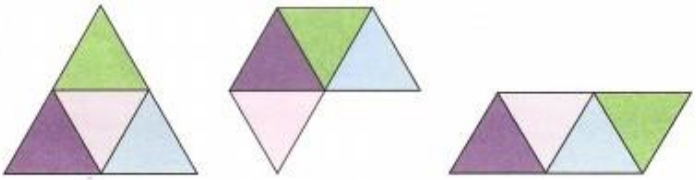
2．按照下面给出的两组视图（图 29.3-2），用马铃薯（或萝卜）做出相应的实物模型．



(1)　　(2)

图 29.3-2

3. 下面的每一组平面图形（图 29.3-3）都是由四个等边三角形组成的.



(1)　　(2)　　(3)

图 29.3-3

（1）指出其中哪些可以折叠成多面体. 把上面的图形描在纸上，剪下来，叠一叠，验证你的答案；

（2）画出由上面图形能折叠成的多面体的三视图，并指出三视图中是怎样体现“长对正，高平齐，宽相等”的；

（3）如果上图中小三角形的边长为 1，那么对应的多面体的表面积各是多少？

四、课题拓广

三视图和展开图都是与立体图形有关的平面图形，了解有关生产实际，结合具体例子，写一篇短文介绍三视图、展开图的应用.

数学活动

活动 1　观察物体，画出三视图

选择你熟悉的一些物体，从不同角度观察它们，画出它们的三视图，然后请同学根据画出的视图说物体的形状，看他们能否说对．如果说不对，请你考虑是否需要改进你画的图．

活动 2　设计几何体，制作模型

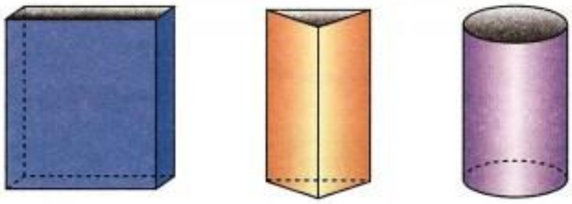
（1）每个同学设计一个几何体，画出三视图；

（2）同学之间交换图纸，按照手中的三视图制作几何体模型；

（3）进行交流，看一看：作出的模型与设计者的想法一致吗？

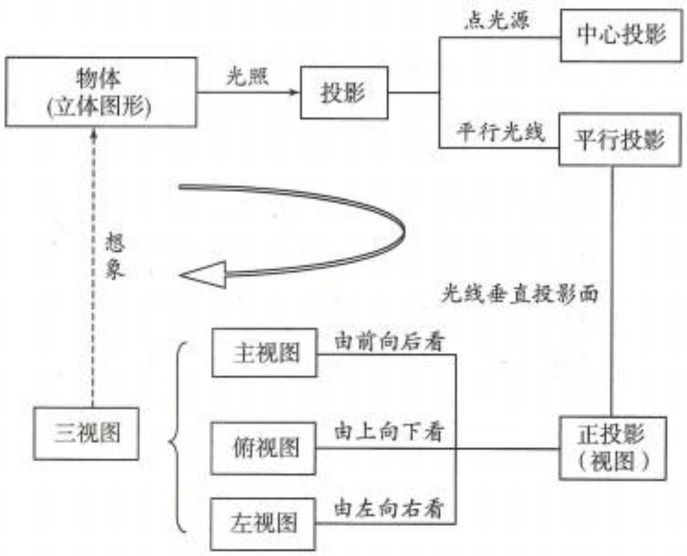
活动 3　设计并制作笔筒

设计你所喜欢的笔筒，画出三视图和展开图，制作笔筒模型．体会设计制作过程中三视图、展开图、实物（即立体模型）之间的关系．



小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 投影是怎样得到的？什么是正投影？平面图形平行于投影面时它的正投影有什么性质？

2. 什么是三视图？它是怎样得到的？画三视图要注意什么？

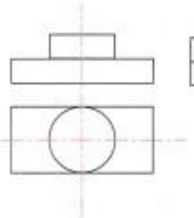
3. 怎样根据三视图想象物体的形状？

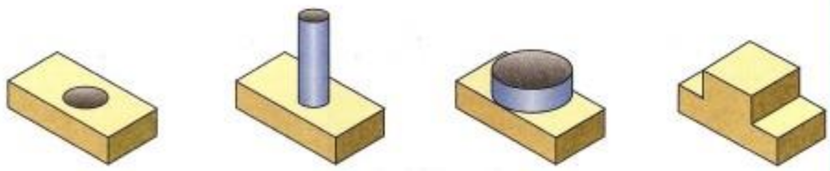
4. 举例说明立体图形与其三视图、展开图可以如何转化，体会平面图形与立体图形之间的联系.

复习题29

复习巩固

1. 找出图中三视图所对应的直观图.

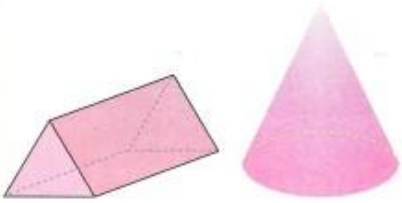




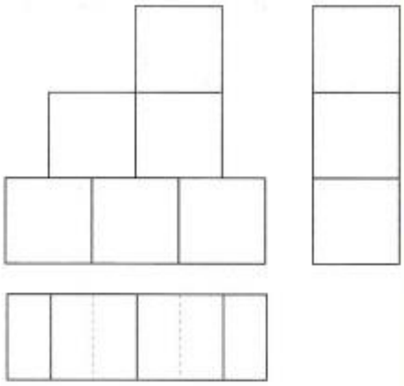
(1) (2) (3) (4)

(第1题)

2. 分别画出图中两个物体的三视图.



(第2题)



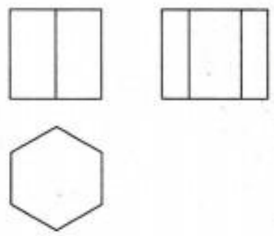
(第3题)

3. 根据三视图描述物体的形状.

综合运用

4. 画出图中几何体（上半部为正三棱柱，下半部为圆柱）的三视图.

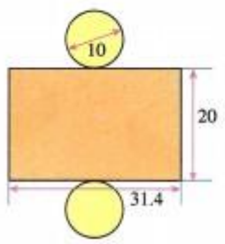
（第 4 题）



（第 5 题）

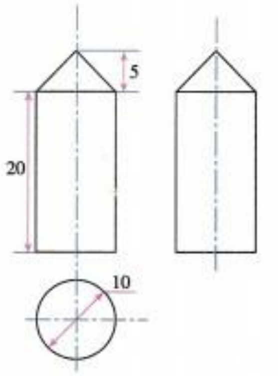
5. 根据三视图描述物体的形状.

6. 根据展开图画出物体的三视图，并求物体的体积和表面积.



（第 6 题）

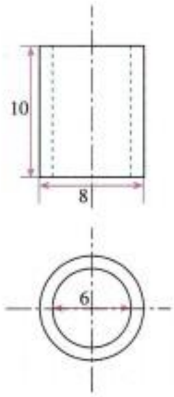
7. 根据三视图求几何体的表面积，并画出物体的展开图.



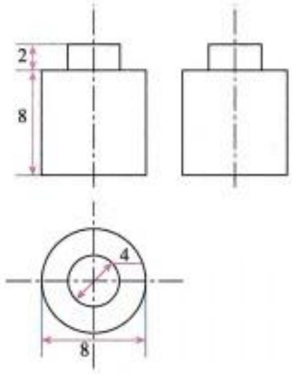
（第 7 题）

拓广探索

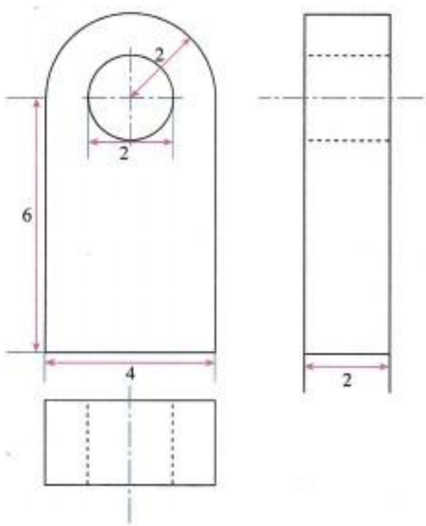
8. 根据下列三视图，求它们表示的几何体的体积（图中标有尺寸）.



(1)



(2)



(3)

（第 8 题）

部分中英文词汇索引

义务教育课程标准实验教科书

数学

ISBN 978-7-107-19606-5

9 787107 196065 >

义务教育课程标准实验教科书　数学　九年级下册

审批号：京发改[2007]1043 号－099　价格举报电话：12358

定价：8.40 元