

第1讲 品味数学思想,走进考研数学

清代诗人袁枚在《随园诗话》里写到：“学如箭镞，才如弓弩，识以领之，方能中鹄”。意思是说：有知识，没有能力，就像只有箭，没有弓，是发射不出去的；但是有了箭与弓，还得有思想、见识。这段话给我们以启示：与知识相比，能力更为重要，而能力的培养，离不开对思想的品味。

即将进入考研复习的考生朋友们，大家一定不能将数学学习完全沉浸在背公式、套题型、搞技巧的海洋中，即使我们将要面对的是一场竞争激烈、以应试为主题的游戏，也绝不妨碍我们在这场游戏中去感受、鉴赏、甚至把玩精妙的数学思想。也许你会惊喜地发现，在与数学思想亲密接触的过程中，你会不知不觉爱上数学。

在本讲中，我们给出考研数学中常用的一些数学思想方法，供考生阅读，在今后的复习过程中，要注重数学思想方法的思考和总结，这对提高我们的数学素养，在考研中取得好成绩，大有裨益。

一、特殊与一般的思想

从特殊到一般，由一般到特殊，是人类认识世界、了解世界的一个普遍规律，也是人们认识数学、了解数学的方法。相对于一般而言，特殊的事物往往显得简单、直观和具体，遇到一个复杂问题，可以先从其特殊性出发，去简化某个问题，另一方面，由于一般比特殊更能反映事物的本质，要想给出一个问题的完整解答，往往需要把问题放在更为一般的情况下研究。在高等数学这门课中，很多概念之间、定理之间体现着特殊与一般的辩证关系，比如数列与函数，比如中值定理中的罗尔定理、拉格朗日定理和柯西中值定理。学过这些知识后不难发现，前者是后者的特殊形式，后者是前者的一般呈现。

下面通过分析等价无穷小与泰勒公式之间的关系，来详细阐述特殊与一般的数学思想，并付诸考研题中。

在极限的计算中，似乎有如下结论：等价无穷小替换只能用在乘除法，而不能使用加减法。于是，下面的解法是错误的：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$$

可是，考生们有没有接着思考：

①当 $x \rightarrow 0$ 时， $x - \sin x$ 中， $\sin x$ 为什么不能用 x 代换？

②当 $x \rightarrow 0$ 时， $x - \sin x$ 到底等价与什么？

先看公式：当 $x \rightarrow 0$ ，

$$\sin x \sim x \tag{1}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \tag{2}$$

在(2)式中，若 $n = 0$ 时，则成为 $\sin x = x + o(x)$ ，从而可以得出 $\sin x \sim x$ （等价无穷小的定义）。同理，若 $n = 1$ 时，(2)式可以变为 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$ ，立即可得 $x - \sin x =$

$\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$,从而可以得到: $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$.

这是考研数学特别爱考的一个等价无穷小,在刚刚结束的 2012 年考研中又考到了. 在本书后面的内容中,会详细讲到.

由上述分析可以得到:等价无穷小是泰勒公式的特殊形式,泰勒公式是等价无穷小的一般情况.

当然,特殊与一般在数学命题上还存在着如下关系:若命题 P 在一般情况下为真,则在特殊情况下 P 也真,我们把这种关系叫做关系 A;A 的逆否命题为:若命题 P 在特殊条件下为假,则在一般条件下 P 也为假,我们把这种关系叫做关系 B. 关系 A 和关系 B 对应着在做选择题时的特例和反例,下面我们选了几道历年的考研试题,你能用特例和反例快速地解出吗?

处 $f(x)$ ()

3. 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a \sqrt{f(x)} + b \sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = (\quad)$

- (A) $ab\pi$ (B) $\frac{ab}{2}\pi$ (C) $\frac{a+b}{2}\pi$ (D) $(a+b)\pi$

4. 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = (\quad)$

- (A) $A^{-1} + B^{-1}$ (B) $A + B$
 (C) $A(A + B)^{-1}B$ (D) $(A + B)^{-1}$

5. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵; 若 $B = E + AB$, $C = A + AC$, 则 $B - C$ 为()

- (A) E (B) $-E$ (C) A (D) $-A$

6. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则下列结论正确的是()

- (A) $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 (B) $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散
 (C) $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 (D) $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

以上 6 题答案分别为(C),(C),(C),(C),(A),(D). 看看自己能做对几道?

解答如下:1. 设 $f(x) = 1, g(x) = 2$, 立即可以排除(A),(B),(D). ((D) 选项错误的原因是 x 不一定大于 0).

2. 设 $f(x) = 2(1 - \cos x)$, 则在点 $x = 0$ 处取得极小值.

$$3. \text{ 设 } f(x) = 1, \text{ 则 } \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = \iint_D \frac{a+b}{2} d\sigma = \frac{a+b}{2} \times \frac{1}{4}\pi \times 4 = \frac{a+b}{2}\pi.$$

4. 令 $A = 1, B = 2$, 则 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$, 而 A 中 $A^{-1} + B^{-1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$, B 中 $A + B = 3$, C 中 $A(A + B)^{-1}B = 1 \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$, D 中 $(A + B)^{-1} = \frac{1}{3}$.

5. 令 $A = 0$, 则 $C = 0, B = E$, 则 $B - C = E$.

6. 令 $f(x) = x^2$, 则 $u_1 = 1, u_2 = 4, u_1 < u_3$, 当 $n \rightarrow \infty, u_n = n^2 \rightarrow +\infty$, 可得 $\{u_n\}$ 发散, 排除(C).

令 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_1 > u_2$, 当 $n \rightarrow \infty, u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, 可得 $\{u_n\}$ 收敛, 排除(B).

令 $f(x) = \frac{1}{x} - x$, 则 $u_1 = 0, u_2 = -\frac{3}{2}, u_1 > u_2$, 当 $n \rightarrow \infty, u_n = \left(\frac{1}{n} - n\right) \rightarrow -\infty$, 可得 $\{u_n\}$ 发散, 排除(A).

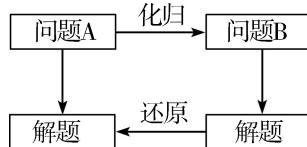
二、等价转化的思想

将题目所给的某种陌生的问题形式, 等价转化为我们所熟知的另一种问题形式, 这是考研数学中普遍且重要的数学思想.

有一个故事说: 一位数学老师, 不想继续从事教师工作, 想改行去做一名消防员, 于是前去面试. 面试官问的第一个问题是: 假如楼道起火怎么办? 这位数学老师说: 如果楼道起火, 我就把灭火器打开, 如何如何灭火, 如何如何疏散人群, 阐述得井井有条, 非常专业.

于是, 面试官又问了他第二个问题: 假如楼道没有起火怎么办? 这位数学老师稍作思考, 给出了一个很雷人的答案: 假如没有起火, 我就把火点起来! 面试官很惊讶地问他原因, 数学老师答: 这样我就把这个问题转化为我所熟悉的问题了!

看起来这是个笑话, 但是却道出了重要的数学思想. 其基本思维过程如下:



从上图可以看出, 解答数学问题的关键在于问题 A \rightarrow 问题 B, 这也就是通常我们所说的等价转化(恒等变形)的方法. 这些方法主要有三个方面:

A. 在已知表达式中进行恒等的代数计算(即加项、减项抑或是同乘同除某因子). 例如:

$$1. \text{求 } I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}.$$

此题虽然为“ $\frac{0}{0}$ ”的未定型, 但若直接使用洛必达法则会发现计算量很大. 那应该怎么处理所求极限呢? 试想一下, 如果求下列极限:

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}, \quad I_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2},$$

$$\text{很多同学会做, } I_1 = \frac{1}{2}, \quad I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4x^2}{2x^2} = 1,$$

$$I_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2(1 + \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[3]{\cos^2 3x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 9x^2}{3x^2} = \frac{3}{2} \quad (\text{当然 } I_3 \text{ 的计算也可以直接}$$

使用等价无穷小替换),那么怎么实现 I_1, I_2, I_3 转变呢?

要做这样的处理:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x - \cos x \sqrt{\cos 2x} + \cos x \sqrt{\cos 2x} - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sqrt{\cos 2x}(1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3. \end{aligned}$$

2. 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$. 这是一道一阶线性非齐次微分方程求解的问题. 若直接代公式, 计算量有点大, 但若在原方程左右两边同乘 e^x , 原方程可化为:

$$y'e^x + ye^x = \cos x \Rightarrow (ye^x)' = \cos x$$

立即可得 $ye^x = -\sin x + c$, 把 $y(0) = 0$ 代入得 $c = 0$.

B. 根据题中的条件要作变量替换, 即通常讲的换元法. 在高等数学中很多重要概念常常需要整体替换. 例如导数的定义 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 在题中经常以 $f'(x_0) = \lim_{g(\Delta x) \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + g(\Delta x)) - f(x_0)}{g(\Delta x)}$ 出现. 求极限时有时需要倒代换, 求不定积分的换元积分法, 书中后续内有详细的阐述, 这里不再重复.

C. 在常见的恒等变形中, 如果说前面所述的中学阶段就有所接触, 那么, 下面所讲的就只有高等数学才涉及. 可以对一个函数先求导后积分, 抑或是先积分后求导. 这里所讲的内容是指对幂级数求和及求函数展开幂级数.(具体内容见本书 12.4.5)

三、逆向思维

逆向思维, 指的是让思维向对立面的方向发展, 从问题的相反面深入探索, 即“反其道而行之”. 在处理有关数学问题时, 从求解回到已知条件, 有时会得出一系列新的理论. 无论是在生活科研上, 甚至是文学作品, 逆向思维的例子比比皆是.“司马光砸缸”的故事中, 有人落水, 常规的思维模式是“救人离水”, 司马光运用逆向思维, “让水离人”. 法拉第 1831 年提出了著名的电磁感应定律是受到了电能够产生磁的启发, 从而萌生了磁是否能产生电的想法. 文学作品中, 马致远的《天净沙·秋思》: 枯藤老树昏鸦, 小桥流水人家, 古道西风瘦马. 夕阳西下, 断肠人在天涯. 这首曲一反前人的创作手法, 全词只是景物的罗列, 但又恰到好处, 不由得令人耳目一新、余音袅袅. 同样, 逆向思维在数学中也有广泛的应用. 就运算而言, 求导与求不定积分就是一种互逆的计算. 第一换元积分法公式实质是复合函数求导公式的逆用.

若 $\int f(u) du = F(u) + C$, 则

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x) \xrightarrow[\varphi(x)=u]{\text{变量替换}} \int f(u) du = F(u) + C \xrightarrow{\text{变量还原}} F(\varphi(x)) + C$$

就**命题**而言, 指的是逆否命题的探讨, 比如, 罗尔定理推论的逆否命题为研究方程根的一个很好的工具, 其内容为: 若方程 $f^{(n)}(x) = 0$ 在 (a, b) 内没有实根, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 上最多只有 n 个实根. 例如: 设 $a \neq 0$, 证 $e^x = ax^2 + bx + c$ 的根不超过三个.

设 $f(x) = e^x - ax^2 - bx - c$, 由于 $f'''(x) = e^x \neq 0$, 立即可得结论.

就证明题而言,有关涉及中值定理的证明构造辅助函数,利用单调性去证明不等式都是逆向思维的应用.

四、建模思想

考试大纲要求的五种能力之一为:综合运用所学知识解决实际问题的能力.这主要指的是针对应用题要转为相应的数学理论来处理.这里不对这个问题进行讨论.众所周知,数学是其他学科的基础,经常把一些数学思想运用到其他学科后有重大理论的出现,经典的有把博弈论运用到经济学,矩阵运用到量子力学等.但反过来,其实有的数学问题,如果建立起其对应的物理模型,会给人一种柳暗花明之感.很多同学最熟悉的也许是德摩根定理($A \cap \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$).若构造两个直流电路图,前者为串联,后者为并联.让我们理解既直观又易懂.接下来我们举个典型的例子:

【例 1.1】设 $f(x)$ 处处可导,其中有两个这样的选项:

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$
(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

如果用纯数学理论去判断,需要使用拉格朗日中值定理.由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, $\exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, $f'(x) > M$ (M 为任意大正数), 在 $[X, x]$ 上使用拉格朗日中值定理有 $f(x) - f(X) = f'(\xi)(x - X)$, 其中 $\xi \in (X, x)$, 则

$f(x) - f(X) = f'(\xi)(x - X) > M(x - X) \rightarrow +\infty$, 故 $f(x) - f(X) \rightarrow +\infty$, 而 $f(X)$ 为确定值,从而 $f(x) \rightarrow +\infty$.

这样处理在考场上挺花费时间的,但如果建立相应的模型,赋予表达式相应的物理意义就马上可以得出答案,把 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 看做是速度与位移的关系(当然,也可以把他们看做是加速度与速度的关系).从而,当 $x \rightarrow +\infty$ 时,速度($f'(x)$)为无穷大,表明运动一直在继续,从而位移($f(x)$)当然为无穷大.同理,当一物体运动方向的位移为无穷大,只要保证速度不为 0 就可以了.故(A)是错误的.

【例 1.2】设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上二阶可导,且 $f(x) = 0$, $f''(x) > 0$, 证 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调上升,且 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 有 $f(x_1 + x_2) > f(x_1) + f(x_2)$.

此题的证明过程如下:

$$\text{令 } \varphi(x) = \frac{f(x)}{x}, x > 0$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \varphi'(x) &= \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - (f(x) - f(0))}{x^2} \\ &= \frac{xf'(x) - xf'(\xi_1)}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi_1)}{x} \\ &= \frac{(x - \xi_1)f''(\xi_2)}{x} > 0, \text{其中 } 0 < \xi_2 < \xi_1 < x, \end{aligned}$$

故 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ 单调递增;

当 $x > 0$.

令 $F(x) = f(x + x_1) - f(x) - f(x_1)$, $x > 0, x_1 > 0$

由于 $f''(x) > 0$,于是 $f'(x)$ 单调递增

$$F'(x) = f'(x+x_1) - f'(x) > 0$$

所以 $F(x)$ 单调递增, 因 $f(0) = 0$, 则 $F(0) = 0$.

当 $x_2 > 0$ 时, $F(x_2) > F(0) = 0$,

故 $f(x_1 + x_2) > f(x_1) + f(x_2)$.

但此题如果建立一个相应的物理模型, $f''(x) > 0$, 理解为加速度为正, 那么速度呈上升趋势, 故随时间而变化的平均速度 $\frac{f(x)}{x}$ 必然单调上升. 同理, 在时间 x_1, x_2 走的路程之和 $f(x_1) + f(x_2)$ 也必定小于在 $(x_1 + x_2)$ 走的路程 $f(x_1 + x_2)$.

【例 1.3】 设 $f(x), 0 \leq x \leq 1$ 连续且单调下降, 则 $\forall 0 < \alpha < 1$, 证 $\alpha \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^\alpha f(x) dx$.

标准的证法: 构造辅助函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt - x \int_0^1 f(x) dx$, 求其导函数, 判断其单调性

(自练).

现在我们换一种角度去理解所证明的不等式: 如果将 x 表示时间, $f(x)$ 表示速度, 那么, $\int_0^1 f(x) dx$ 与 $\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x) dx$ 分别表示在时间 $(0, 1)$ 与 $(0, \alpha)$ 内的平均速度. 由于速度是下降的, 故平均速度也必然下降.

故构造辅助函数 $F(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x) dx, 0 < \alpha \leq 1$,

$$\text{则 } F'(\alpha) = \frac{\alpha f(\alpha) - \int_0^\alpha f(x) dx}{\alpha^2} = \frac{f(\alpha) - f(\xi)}{\alpha} \leq 0,$$

(因 $0 \leq \xi \leq \alpha$, $f(x)$ 单调下降, 故 $f(\xi) \geq f(\alpha)$). 故 $F(\alpha)$ 单调递减, 即当 $0 < \alpha < 1$, 有 $F(\alpha) \geq F(1)$; 即 $\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx$.

【例 1.4】 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

此题为很多高校数学专业研究生入学考试题, 有难度. 2002 年的考题把此题改变为:

$$\text{设 } S(x) = \int_0^x |\cos t| dt,$$

(1) 当 n 为正整数时, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

$$(2) \text{求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}.$$

改编后的考研题因为有了第(1)问的铺垫, 使得整个难度下降, 很容易想到夹逼准则
(注: 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$ 不能使用洛必达法则, 想想为什么).

在求解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ 的过程中, 如果用 x 表示时间, $f(x)$ 表示速度, 那么

$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ 表示 $0 \sim x$ 时间段内的平均速度. 由周期函数的特点, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 这个平均速度就趋向于一个周期内的平均速度 $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.

第2讲 函数、极限与连续

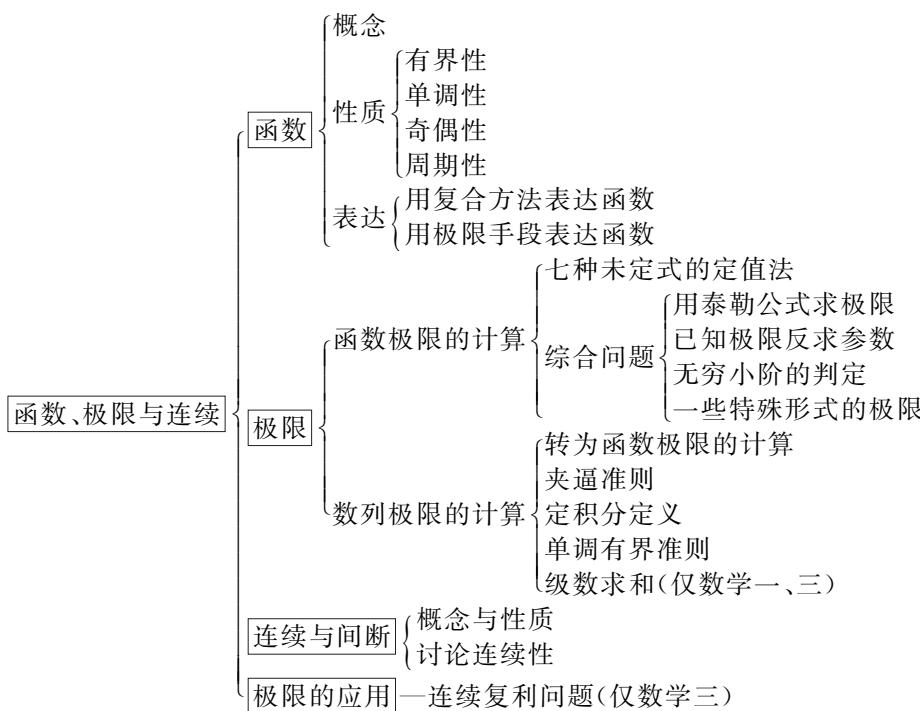
导语

这一讲内容是高等数学的基础，在考研中直接出题的分值每年都能达到20分左右，希望大家开好头，起好步。

大纲要求

1. 函数的概念，函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 复合函数及分段函数的概念，反函数及隐函数的概念.
4. 基本初等函数的性质及其图形，初等函数的概念.
5. 极限的概念，函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 极限的性质及四则运算法则.
7. 极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，利用两个重要极限求极限的方法.
8. 无穷小量、无穷大量的概念，无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.
9. 函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

知识体系



2.1 考试内容分析

2.1.1 函数的概念与性质

1. 邻域

(1) 一维的情形

邻域 以点 x_0 为中心的开区间称为点 x_0 的邻域, 记作 $U(x_0)$.

δ 邻域 设 δ 是一正数, 则称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即 $U(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$. 其中点 x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

δ 去心邻域 定义去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta) : \dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$.

左右 δ 邻域 $\{x \mid 0 < x - x_0 < \delta\}$ 称为点 x_0 的右 δ 邻域, 记作 $U^+(x_0, \delta)$; $\{x \mid x - x_0 < \delta\}$ 称为点 x_0 的左 δ 邻域, 记作 $U^-(x_0, \delta)$.

(2) 二维的情形

δ 邻域 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体, 称为点 P_0 的 δ 邻域, 记为 $U(P_0, \delta)$, 即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\} \text{ 或 } U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}.$$

δ 去心邻域 点 P_0 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(P_0, \delta)$, 即 $\dot{U}(P_0, \delta) = \{P \mid 0 < |P_0P| < \delta\}$. 需要指出, 如果不需要强调邻域的半径 δ , 则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域, 点 P_0 的去心邻域记作 $\dot{U}(P_0)$.

δ 邻域的几何意义 $U(P_0, \delta)$ 表示 xOy 平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心、 $\delta > 0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x, y)$ 的全体.

邻域与区间(区域) 邻域当然属于区间(区域)的范畴, 但事实上, 邻域通常表示“一个局部位置”, 比如“点 x_0 的 δ 邻域”, 就可以称为“点 x_0 的附近”. 于是, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某 δ 邻域内有定义也就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义, 这个“附近”到底有多近多远? 既难以说明也没有必要说明. 有例为证: 2007 年有一道考研数学题说, 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $ylny - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

【注】关于邻域的一组概念非常重要, 因为它涉及我们将要“在一个局部位置”细致地研究问题.

2. 函数

设 x 与 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 若对于每个值 $x \in D$, 变量 y 按照一定的

法则有一个确定的值 y 与之对应, 则称 y 为 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 称 x 为自变量, y 为因变量. 称数集 D 为此函数的定义域, 定义域一般由实际背景中变量的实际意义或者函数对应法则的要求确定. 称相应的函数值的全体 $R = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 为函数的值域. 称为对应法则. 这里我们需要注意函数定义中 y 的唯一性, 在下面的叙述中将作详细讨论.

【注】(1) 单值函数与多值函数 在函数的定义中, 对每个 $x \in D$, 对应的函数值 y 总是唯一的, 这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个对应法则, 按这个法则, 对每个 $x \in D$, 总有确定的 y 值与之对应, 但这个 y 不是唯一的, 于是, 这样的对应法则就不符合函数定义了, 我们称这种法则确定了一个多值函数. 请大家注意, 在考研中所提到的函数是指单值函数, 也就是说当自变量 x 取一个值时, 这个对应法则 f 要保证因变量 y 有唯一的实数值与之对应, 否则就得分成若干个单值函数.

(2) 总结重要的函数如下:

$$\textcircled{1} \quad y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{称为绝对值函数; 其图形如图 2.1 所示.}$$

有一种重要的题目, 是把带有绝对值的函数转化为分段函数来处理, 例如, 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是连续函数, 则

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|] = \begin{cases} g(x), & f(x) \geq g(x) \\ f(x), & f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|] = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x) \\ g(x), & f(x) < g(x) \end{cases}$$

且也都是连续函数.

$$\textcircled{2} \quad y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{称为符号函数; 对于任何实数 } x, \text{ 有 } x = |x| \operatorname{sgn} x.$$

其图形如图 2.2 所示.

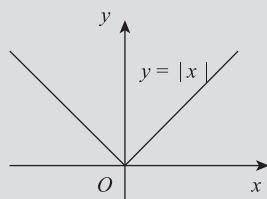


图 2.1

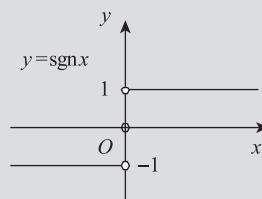


图 2.2

③ $y = \lfloor x \rfloor$, 称为取整函数, 先给出定义. 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $\lfloor x \rfloor$. 如 $\lfloor 0.99 \rfloor = 0$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -1 \rfloor = -1$, $\lfloor -1.99 \rfloor = -2$. 因此, 取整函数 $y = \lfloor x \rfloor$ 的定义域为 R , 值域 $R = \mathbb{Z}$. 它的图形如图 2.3 所示, 在 x 为整数值处图形发生跳跃.

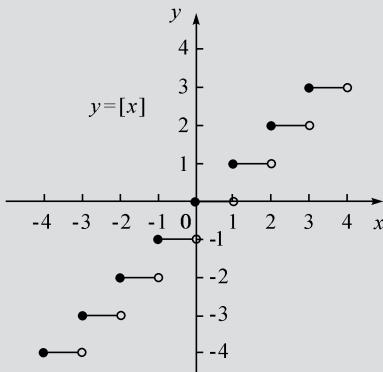


图 2.3

取整函数 $y = \lfloor x \rfloor$ 有性质: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$; $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$; $n\lfloor x \rfloor \leq nx$; $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$, 其中 n 为正整数.

④ 分段函数 在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数. 需要强调一句, 分段函数是用几个式子来表示的一个(注意不是几个)函数. 分段函数的典型形式如下(后面会详细讨论):

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x > x_0 \\ a, & x = x_0 \\ \varphi_2(x), & x < x_0 \end{cases} \quad \text{或} \quad f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \neq x_0 \\ a, & x = x_0 \end{cases}$$

⑤ 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l, l)$ 上的任何函数, 则 $F_1(x) = f(x) - f(-x)$ 必为奇函数; $F_2(x) = f(x) + f(-x)$ 必为偶函数, 如 $e^x - e^{-x}$ 就是奇函数.

⑥ 狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 是一有界的偶函数, 且任何的有理数都是它的周期, 而没有最小的周期.

⑦ 通常把幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 转化为复合函数 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 来处理.

⑧ 反函数 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 R . 如果对于每一个 $y \in R$, 必存在 $x \in D$ 使得 $y = f(x)$ 成立, 则由此定义了一个新的函数 $x = \varphi(y)$. 这个函数就称作为函数 $y = f(x)$ 的反函数, 一般记作 $x = f^{-1}(y)$, 它的定义域为 R , 值域为 D . 相对于反函数来说, 原来的函数也称为直接函数. 有两点要说明.

第一, 直接函数的单值性无法保证其反函数的单值性. 比如直接函数 $y = x^2$ 的反函数是多值函数 $x = \pm \sqrt{y}$; 但如果直接函数是单值单调函数, 就能保证反函数的单值性了. 比如函数 $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ 是单值单调函数, 故它有反函数 $x = \sqrt{y}$.

第二,若把 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 的图形画在同一坐标系中,则它们完全重合. 只有把 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$ 后,它们的图形才关于 $y = x$ 对称,事实上这也是 x 与 y 字母互换的原因.

比如说,设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1 \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2 \\ 12x - 16, & x > 2 \end{cases}$, 请你写出 $f(x)$ 的反函数

$g(x)$ 的表达式. 答案: $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1 \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8 \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8 \end{cases}$

3. 函数的四种特性

(1) 有界性 设 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subset D$. 如果存在某个正数 M , 使对任一 $x \in I$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界. 从几何图形上看, 函数 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间.

【注】(1) 有界还是无界的讨论首先得指明区间 I , 也就是说如果你不告诉我区间是什么, 就问我某某函数是否有界, 我只能拒绝回答. 比如 $y = 1/x$, 在 $(2, +\infty)$ 内有界, 但在 $(0, 2)$ 内无界.

(2) 什么是无界函数? 事实上, 只要在区间 I 上存在点 x_0 使得函数 $f(x)$ 的值为无穷大, 则没有任何两条直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 可以把 I 上的 $f(x)$ “包起来”, 这就叫无界. 注意, 无界函数并不要求所有定义域上的点都使得函数无穷大, 只要存在这样的点 x_0 就可以了. 考研中常出这样的题目: 比如, 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界()

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

【分析与解答】有如下两个重要结论:

① 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界;

② 若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数

$f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有界.

所以, 当 $x \neq 0, 1, 2$ 时, $f(x)$ 连续, 而 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4}$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$,

所以, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界, 故选(A).

(2) 单调性 设 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加. 同理, 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 这是函数单调性的定义, 在今后要谈到的众多考研试题中, 主要是用导数法来讨论函数在某个区间的单调性, 但是定义法不可以忘记.

(3) 奇偶性 设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$). 如果对于任一 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数. 同理, 如果对于任一 $x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数. 我们熟知的是, 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

(4) 周期性 设 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在一个正数 T , 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 从几何图形上看, 在周期函数的定义域内, 每个长度为 T 的区间上, 函数的图形“长得一模一样”.

【注】从图形上来说,

(1) 奇函数 $y = f(x)$ 的图形关于坐标原点对称, 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义时, 必有 $f(0) = 0$;

(2) 偶函数 $y = f(x)$ 的图形关于 Oy 轴对称, 且当 $f'(0)$ 存在时, 必有 $f'(0) = 0$;

(3) 函数 $y = f(x)$ 与 $y = -f(x)$ 的图形关于 Ox 轴对称; 函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 的图形关于 Oy 轴对称;

(4) 函数 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $x = T$ 对称的充分必要条件是 $f(x) = f(2T-x)$ 或 $f(x+T) = f(T-x)$.

4. 复合函数

设 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D) \subset D_1$, 则由下式确定的函数 $y = f[g(x)]$, ($x \in D$) 称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数, 它的定义域为 D , 变量 u 称为中间变量. 对于复合函数, 重要的是熟练掌握分解与复合的技术, 这是考研的一个重点知识点. 详细分析请见后面的例题分析.

2.1.2 函数极限的概念、性质与定理

1. 函数极限定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 若存在常数 A , 对于 $\forall \varepsilon > 0$ (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$|f(x) - A| < \varepsilon$, 则 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{).}$$

写出语言是: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$.

【注】(1) 这里符号“ \forall ”是英文 Arbitrary(任意的,武断的)的首字母上下方向倒着写出来的;符号“ \exists ”是英文 Exist(存在)的首字母左右方向倒着写出来的.

(2) 这里 x 的趋向方式要比数列问题多得多,对于 $x \rightarrow x_0$,既要考虑 x 从 x_0 的左侧(即小于 x_0)无限接近 x_0 : $x \rightarrow x_0^-$;也要讨论 x 从 x_0 的右侧(即大于 x_0)无限接近 x_0 : $x \rightarrow x_0^+$;对于 $x \rightarrow \infty$,既包括 $x \rightarrow -\infty$,也包括 $x \rightarrow +\infty$. 这里不再一一列出,考生应学会写出函数极限的精确定义,提示一下,对于 $x \rightarrow \infty$ 时的极限,其语言为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时,有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. 函数的单侧极限

若当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A ,则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限,记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$;

若当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 无限接近于某常数 A ,则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限,记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$.

3. 函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{且} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

4. 函数极限的性质

唯一性 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,那么这极限唯一.

局部有界性 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$,则存在正常数 M 和 δ ,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $|f(x)| \leq M$.

局部保号性 如果 $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow x_0$),而且 $A > 0$ (或 $A < 0$),那么存在常数 $\delta > 0$,使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

5. 无穷小与无穷大

无穷小定义 如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时,函数 $f(x)$ 的极限为零,那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小. 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0).$$

特别地,以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

无穷大定义 如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时,函数 $|f(x)|$ 无限增大,那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大. 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

无穷小与无穷大的关系 在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

- 无穷小的比较** 设在同一自变量的变化过程中, $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$, 且 $\beta(x) \neq 0$, 则(1)若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;
 (2)若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 同阶的无穷小;
 (3)若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 等价的无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;
 (4)若 $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

【注】并不是任何两个无穷小量都可进行比较的, 这是一个细致的问题, 请大家注意. 比如说, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin \frac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小, 但是却不可以比较, 也就是说既

不是高低阶, 也无同阶可言, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

再比如说, 如果当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 是否一定就有 $\sin[f(x)] \sim f(x)$? 答案是否定的. 举个例子说, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 是否就有 $\sin(x \sin \frac{1}{x}) \sim x \sin \frac{1}{x}$? 我们看到, 在

$x = 0$ 点的任一小的去心邻域内, 总有点 $x = \frac{1}{k\pi} \rightarrow 0$ ($|k|$ 为充分大的正整数), 使

$\frac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}{x \sin \frac{1}{x}}$ 在该点没有定义, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}{x \sin \frac{1}{x}}$ 不存在.

6. 极限运算规则

若 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 那么

- (1) $\lim [kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$, 其中 k, l 为常数;
- (2) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$;

特别地, 若 $\lim f(x)$ 存在, n 为正整数, 则 $\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$.

- (3) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

特别地, 我们提出下面的 7.

7. 无穷小运算规则

- (1) 有限个无穷小的和是无穷小.
- (2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.
- (3) 有限个无穷小的乘积是无穷小. (注意是有限个, 不是无穷个)

$$\text{例如, } f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{[x]}, & x > 1, n = 1 \\ 1, & x < n, ([x] < n), n = 2, 3, \dots \\ \frac{n}{[x]-n+1}, & x \geq n, ([x] \geq n), n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

对于每一个固定的 n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, 且 $f_n(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \text{那么,令 } F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n f_i(x) = \prod_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} f_i(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=\lfloor x \rfloor+1}^n f_i(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \prod_{i=2}^{\lfloor x \rfloor} f_i(x) \\ &= \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \cdot \frac{2}{\lfloor x \rfloor - 1} \cdot \frac{3}{\lfloor x \rfloor - 2} \cdot \cdots \cdot \frac{\lfloor x \rfloor - 2}{3} \cdot \frac{\lfloor x \rfloor - 1}{2} \cdot \lfloor x \rfloor = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

即无穷多个无穷小的乘积不一定再是无穷小了. 怎么理解呢? 这个结论就是一个抽象的极限理论, 可以这样说: 数学上的很多事情, 并不都是能够被人们直观理解并接受的, 这不能不说是一种“遗憾”.

(4) 设 m, n 为正整数, 则

- ① $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l)$, $l = \min\{m, n\}$ (加减法时低阶“吸收”高阶)
- ② $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$, $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$ (乘除法时阶数“累加”)
- ③ $o(kx^m) = k \cdot o(x^m) = o(x^m)$, $k \neq 0$, 为常数 (非零常数不影响阶数)

8. 常用的等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时, 常用的等价无穷小有:

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x,$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

【注】使用时一般都要做广义化: $x \rightarrow u$, 请灵活使用.

9. 函数极限存在准则——夹逼准则

如果函数 $f(x), g(x)$ 及 $h(x)$ 满足下列条件:

$$(1) g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A;$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

【注】(1) 若上述极限过程是 $x \rightarrow x_0$, 则要求函数在 x_0 的某一去心邻域内有定义; 若上述极限过程是 $x \rightarrow \infty$, 则要求函数当 $|x| > X$ (X 为充分大的正数) 时有定义.

(2) 该准则在考研中极其重要, 大题小题都经常用到这个工具, 请大家要给予足够的重视.

(3) 看一个例子, 设任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 是否一定存在? 答案是否定的. $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)]$ 的存在并不能说明 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ 都存在, 从而也不能保证 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在. 例如, 当 $x > 0$ 时, 取

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{x+1}, f(x) = x + \frac{2}{x+1}, g(x) = x + \frac{3}{x+1}$$

则 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在.

10. 洛必达法则

法则一 设(1)当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$)时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;

(2) $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内(或者当 $|x| > X$ (X 为充分大的正数)时)存在,且 $F'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在(或无穷大),}$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

法则二 设(1)当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$)时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于无穷大;

(2) $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内(或者当 $|x| > X$ (X 为充分大的正数)时)存在,且 $F'(x) \neq 0$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} \text{ 存在(或无穷大),}$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

【注】(1)洛必达法则是用来计算“ $\frac{0}{0}$ ”型或者“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式的极限的,不是“ $\frac{0}{0}$ ”型或者“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,就不能用洛必达法则;

(2)如果极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属于“ $\frac{0}{0}$ ”型或者“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,且 $f'(x)$, $F'(x)$ 继续满足法则的条件,则可以继续使用洛必达法则,即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

(3)如果 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在也不为 ∞ ,不能推出 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$ 不存在也不为 ∞ ,简单一点说就是:对于

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$,“右存在,则左存在;但左存在,并不意味着右一定存在”.比如

说,极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$ 存在,而如果使用洛必达法则,会有

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$,这个极限显然不存在.这是一个很细致,很隐蔽的问题,稍不注意就可能出错.

2.1.3 数列极限的概念、性质与定理

1. 数列极限定义

对于 $\forall \varepsilon > 0$ (不论它多么小),总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立,则称数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a ,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果不存在这样的数 a ，就说数列是发散的。

常用的语言是： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. 数列收敛的充要条件

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 对于 $\{x_n\}$ 的任一子数列 $\{x_{n_k}\}$ 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

特别常用的一个是：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a, \text{ 且 } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = a.$$

3. 收敛数列的性质

唯一性 收敛数列 $\{x_n\}$ 的极限必唯一；

有界性 收敛数列 $\{x_n\}$ 必有界；

保号性 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

4. 数列极限运算规则

设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 那么

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B; \quad (3) \text{当 } y_n \neq 0 \ (n=1,2,\dots)$$

且 $B \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$.

5. 数列极限存在准则

准则 I 如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) $y_n \leq x_n \leq z_n \ (n=1,2,3,\dots)$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

准则 II 单调有界数列必有极限.

6. 海涅定理(归结原则)

设 $f(x)$ 在 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在 \Leftrightarrow 对任何以 x_0 为极限的数列

$\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$), 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 存在.

【注】众所周知, 数列极限与函数极限是分别独立定义的, 但是海涅定理是联系数列极限与函数极限之间的桥梁. 它指出, 在极限存在的条件下, 函数极限和数列极限可以相互转化. 虽然可能大家根本没有听说过这个定理, 但是我们都在不知不觉地使用它, 比如,

请你证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 不存在. 若取 $x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$, 则有 $f(x_n) = 0$; 若取 $x_n' =$

$\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi} \rightarrow 0$, 则有 $f(x_n) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \rightarrow \infty$; 根据海涅原则, 极限不存在. 事实上,

$\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow 0$ 时的无界量, 而不是无穷大量.

2.1.4 函数的连续与间断

1. 连续的定义

所谓连续, 有两种定义方法:

(1) 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义, 若

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

则称函数在点 x_0 连续, 点 x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 且有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 这个定义用得最多最广泛.

2. 间断点的定义

(1) 可去间断点

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$, ($f(x_0)$ 甚至可以无定义), 则这类间断点称为可去间断点.

【注】只要修改或者补充 $f(x_0)$, 使得 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = f(x_0)$, 就会使得函数在 x_0

点连续, 于是, 这个点叫做可去间断点, 也叫做可补间断点.

(2) 跳跃间断点

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, 则这类间断点称为跳跃

间断点.

可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点.

(3) 无穷间断点

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则这类间断点称为无穷间断点; 如函数 $y = \frac{1}{x}$ 的 $x = 0$ 为第二类无

穷间断点.

(4) 振荡间断点

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 振荡不存在, 则这类间断点称为振荡间断点; 如函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在点 $x = 0$

没有定义, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数值在 -1 与 1 这两个不同的数之间交替振荡取值, 极限不存

在,故点 $x = 0$ 为函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的第二类振荡间断点.

无穷间断点和振荡间断点都属于第二类间断点.

2.1.5 极限在经济中的应用(仅数学三)

复利与连续复利

复利计算公式 $A_m = A (1 + r)^m$

其中 A 表示一开始的本金, r 表示每一期的利率, m 表示复利的总期数, A_m 表示 m 年后的余额.

① 如果年利率为 r 的利息一年支付 1 次,那么当初始存款为 A 元时, t 年后余额 A_t 则为

$$A_t = A (1 + r)^t.$$

② 如果年利率为 r 的利息一年支付 n 次,那么当初始存款为 A 元时, t 年后余额 A_t 则为

$$A_t = A \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

③ 对于②,当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_t = \lim_{n \rightarrow \infty} A \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = Ae^{rt}$,这称为连续复利.

【注】考试时要弄清楚①②③三种情况,题目会明确告知.

2.2 典型例题分析

2.2.1 函数表达

【例 2.1】设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$, 求 $f[g(x)]$.

【分析与解答】本题考查分段函数的复合方法,是考试重点.对于比较复杂的区间讨论问题,建议大家用几何法.请看具体步骤:

(1)画出 $g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 的图形,如图 2.4 所示;

(2)将 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$ 广义化为 $f(u) = \begin{cases} e^u, & u < 1 \\ u^2 - 1, & u \geqslant 1 \end{cases}$,用边界线 $u = 1$ 将

$g(x)$ 的图形划分为四段: ①、②、③、④, 如图 2.4

所示; 细致说来,

对于①与③, 即, 当 $x < -1$ 或者 $0 \leq x < \sqrt{2}$

时, $g(x)$ 处于边界线 $u = 1$ 下方, $g(x) < 1$, 此时

$$f(u) = e^u;$$

对于②与④, 即, 当 $-1 \leq x < 0$ 或者 $x \geq \sqrt{2}$

时, $g(x)$ 处于边界线 $u = 1$ 上方, $g(x) \geq 1$; 此时

$$f(u) = u^2 - 1.$$

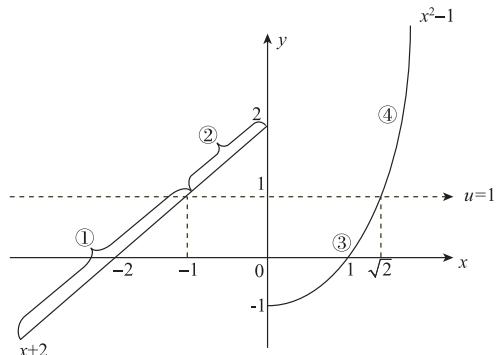


图 2.4

$$(3) \text{ 于是, 一目了然, } f[g(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \cdots ① \\ (x+2)^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \cdots ② \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \cdots ③ \\ (x^2-1)^2 - 1, & x \geq \sqrt{2} \cdots ④ \end{cases}$$

$$\text{【例 2.2】设 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 2e^x - 1, & x \leq 0 \\ x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}, \text{求 } f[g(x)].$$

【分析与解答】本题同样考查分段函数的复合方法. 下面用解析法求解.

$$\text{首先, 广义化, } f[g(x)] = \begin{cases} [g(x)]^2 - 1, & g(x) \leq 0 \\ \ln g(x), & g(x) > 0 \end{cases}$$

由 $g(x)$ 的表达式知,

(1) 当 $g(x) \leq 0$, 即 $\{2e^x - 1 \leq 0\} \cap \{x \leq 0\}$ 或 $\{x^2 - 1 \leq 0\} \cap \{x > 0\}$,

而 $\{2e^x - 1 \leq 0\} \cap \{x \leq 0\} = \{x \leq -\ln 2\} \cap \{x \leq 0\} = \{x \leq -\ln 2\}$,

$\{x^2 - 1 \leq 0\} \cap \{x > 0\} = \{-1 \leq x \leq 1\} \cap \{x > 0\} = \{0 < x \leq 1\}$.

(2) 当 $g(x) > 0$, 即 $\{2e^x - 1 > 0\} \cap \{x \leq 0\}$ 或 $\{x^2 - 1 > 0\} \cap \{x > 0\}$,

而 $\{2e^x - 1 > 0\} \cap \{x \leq 0\} = \{x > -\ln 2\} \cap \{x \leq 0\} = \{-\ln 2 < x \leq 0\}$,

$\{x^2 - 1 > 0\} \cap \{x > 0\} = \{x > 1 \text{ 或 } x < -1\} \cap \{x > 0\} = \{x > 1\}$.

$$\text{综上, 得 } f[g(x)] = \begin{cases} (2e^x - 1)^2 - 1, & x \leq -\ln 2 \\ \ln(2e^x - 1), & -\ln 2 < x \leq 0 \\ (x^2 - 1)^2 - 1, & 0 < x \leq 1 \\ \ln(x^2 - 1), & x > 1 \end{cases}.$$

【注】这种问题也可仿例 2.1 用几何法求解, 请考生自练.

【例 2.3】(I) 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (2x)^n + x^{2n}}$ 的表达式, $x \geq 0$.

(II) 讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

【分析与解答】本题源于前苏联的数学竞赛题,在近些年考研中多次涉及,是用夹逼准则求极限的典型考题. 注意本题的放缩法.

(1) 夹逼准则: ① $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$; ② $y_n \rightarrow A$, $z_n \rightarrow A \Rightarrow x_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$).

(2) 对于 $u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ($u_i \geqslant 0$, n 为有限数), 其放缩法为:

$$1 \cdot u_{\max} \leqslant u_1 + u_2 + \dots + u_n \leqslant n \cdot u_{\max}$$

于是,(I)若 $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, 则 $\sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant 1 \cdot \sqrt[n]{3}$,

若 $\frac{1}{2} \leqslant x < 2$, 则 $2x < \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant 2x \sqrt[n]{3}$,

若 $2 \leqslant x < +\infty$, 则 $x^2 \leqslant \sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}} \leqslant x^2 \sqrt[n]{3}$,

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$, 故

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 2x, & \frac{1}{2} \leqslant x < 2 \\ x^2, & 2 \leqslant x < +\infty \end{cases}$$

(II) 因为 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 2), [2, +\infty)$ 上均连续, 又

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = 1, f(\frac{1}{2}) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4, f(2) = 4,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

2.2.2 七种未定式的定值法

1. “ $\frac{0}{0}$ ”型未定式

常用方法: ①洛必达法则; ②泰勒公式.

值得指出,有些题目在使用洛必达法则之前,需要对所求极限作恒等变形,常用手段为: 幂指函数变成指数函数,有理化,变量替换等.

【例 2.4】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$.

【分析与解答】 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} (e^{1-\cos x} - 1)}{\frac{1}{3}x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3}{2}e$.

【例 2.5】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

【分析与解答】 因 $\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \sim e^{x \ln \frac{2 + \cos x}{3}} - 1 \sim x \ln \frac{2 + \cos x}{3}$,

而 $\ln \frac{2+\cos x}{3} = \ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3}\right) \sim \frac{\cos x - 1}{3} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3} = -\frac{1}{6}x^2$,

故原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}$.

【例 2.6】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$.

【分析与解答】 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - \ln e^{2x}}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin^2 x + e^x}{e^x}\right)}{\ln\left(\frac{x^2 + e^{2x}}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x}\right)}{\ln\left(1 + \frac{x^2}{e^{2x}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{e^x} \cdot \frac{e^{2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1. \end{aligned}$$

【例 2.7】求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$.

【分析与解答】 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1 - x^{x-1})}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x[1 - e^{(x-1)\ln x}]}{1 - x + \ln x}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x-1)\ln x}{1 - x + \ln x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)\ln x + (x-1)}{-1 + 1/x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2-x)\ln x + x(x-1)}{1-x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2-x)\ln x}{1-x} + 1 \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x-1)\ln x + (2x-1)}{-1} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

【例 2.8】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

【分析与解答】 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x \ln(1+x) - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x)-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{1+x}-1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例 2.9】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1+\cos x)(e^x - 1)}$.

【分析与解答】此题为“ $\frac{0}{0}$ ”未定式,若直接使用洛必达法则,

原极限 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x + 2x\sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{2}$, 而 $x \rightarrow 0$ 时, $\cos \frac{1}{x}$ 极限不存在,故法则失效. 事实上,应先化简再计算.

$$\text{原极限} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sin x}{x} + x\sin \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} (2 + 0) = 1.$$

【例 2.10】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$

$$\text{【分析与解答】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (1 - \sqrt{\cos 2x})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (1 - \sqrt{\cos 2x})(1 + \sqrt{\cos 2x})}{x^2 (1 + \sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 4x^2}{x^2} = 1$$

$$\text{故原极限} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

2. “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式

遇到“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型主要是约去分子中的“ ∞ ”因式.

常用方法:①分子、分母同除以最高次幂之项.(在极限的加减运算中,低阶无穷大被高阶无穷大所吸收).

②洛必达法则.

【例 2.11】求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}.$

【分析与解答】注意到 $x \rightarrow -\infty$,

$$\text{故 } \sqrt{4x^2 + x - 1} = \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} = -x \sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + \sin x} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{\sin x}{x^2} \right)} = -x \sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}$$

$$\text{故所求极限为 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{-2 + 1}{-1} = 1.$$

【例 2.12】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1 + e^{\frac{1}{x}})}$.

【分析与解答】为了在使用洛必达法则时使求导数变得简单,先做变量代换,令 $t = \frac{1}{x}$.

$$\text{从而原式} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{2t})}{\ln(1 + e^t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}} \cdot \frac{1 + e^t}{e^t} = 2.$$

【例 2.13】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

【分析与解答】此题为“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”未定式,若用洛必达法则,则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \xrightarrow{\text{洛}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \xrightarrow{\text{洛}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

连续使用完两次法则,又回到了起点,法则失效,正确的做法是先对式子恒等变形.

$$\text{分子分母同乘 } e^{-x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

3. “ $\infty - \infty$ ”型未定式

通常将“ $\infty - \infty$ ”型转化为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型.

常用转化的方法:

- ①通分(函数中有分母);
- ②有理化(函数中有根式);
- ③倒代换(函数中既无分母也无根式).

【例 2.14】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[5]{x^5 + 3x^4 + 4} - x)$.

$$\text{【分析与解答】} \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[5]{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^5}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1}{5} \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^5} \right) = \frac{3}{5}.$$

【例 2.15】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$.

$$\text{【分析与解答】} \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2} \sin 4x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (4x)^2}{6x^2} = \frac{4}{3}.$$

【例 2.16】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}})$.

$$\text{【分析与解答】} \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1$$

【例 2.17】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

$$\text{【分析与解答】} \text{原极限} \xrightarrow{\text{令 } x = \frac{1}{t}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \cdot \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

4. “ $0 \cdot \infty$ ”型

为了能够使用洛必达法则,通常把“ $0 \cdot \infty$ ”转化为“ $\frac{0}{0}$ ”或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,注意:把谁放在分母上去,理论上二者皆可,但为了计算简单,一般把简单元素下放为分母.

【例 2.18】求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x)$.

【分析与解答】先用等价无穷小对 $\ln x$ 化简,当 $x \rightarrow 1$ 时,

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) \sim (x-1) \quad (x \rightarrow 1),$$

$$\text{故原极限 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \ln(1-x)$$

$$\frac{1-x=t}{\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0.$$

【例 2.19】求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+3^x) \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

【分析与解答】原极限 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+3^x) \cdot \frac{2}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(1+3^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 3^x \ln 3}{1+3^x} = 2\ln 3.$$

5. “ ∞^0 ”和“ 0^0 ”型未定式

这两种类型的未定式,一般利用对数恒等式化为“ $0 \cdot \infty$ ”型.

【例 2.20】求极限:① $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^2-1}$; ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

【分析与解答】①原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(x^2-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{e^{x \ln x} - 1} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x \cdot \ln x} = e^0 = 1.$

②原极限 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(x+e^x)}$,

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+e^x}{x+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$, 原极限 $= e$.

6. “ 1^∞ ”型

“ 1^∞ ”型未定式的极限,如“ 0^0 ”型及“ ∞^0 ”型未定式一样,把幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 换成以 e 为底的指数函数形式,即 $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$,从而化为“ $0 \cdot \infty$ ”型,不过,对于“ 1^∞ ”型,用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 去处理也可以.

事实上,由此式直接把 $\lim_{x \rightarrow \square} (1+f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \{(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\}^{f(x) \cdot g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \square} f(x) \cdot g(x)} = e^A$,其中, $A = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \cdot g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ 分别为 $x \rightarrow \square$ 时的无穷小量和无穷大量.

【例 2.21】求下列极限:

$$\text{① } \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【分析与解答】以上 4 例均为“ 1^∞ ”型未定式,用上述“ $1^\infty = e^A$ ”最为方便.

$$\textcircled{1} \text{原极限} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin x}} = e^6.$$

$$\textcircled{2} \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} \\ = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\textcircled{3} \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(a-b)x + ab}{x^2 + (b-a)x - ab} \right)^x = e^{a-b}.$$

$$\textcircled{4} \text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\ln(1+x) - x}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\text{其中, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{【例 2.22】求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}, a_i > 0, \text{且 } a_i \neq 1, i = 1, 2, \dots, n. n \geqslant 2.$$

【分析与解答】

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a_1^x - 1 + a_2^x - 1 + \dots + a_n^x - 1}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x - 1 + a_2^x - 1 + \dots + a_n^x - 1}{nx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \left(\frac{a_1^x - 1}{x} + \frac{a_2^x - 1}{x} + \dots + \frac{a_n^x - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} (\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n)$$

$$= \frac{1}{n} \ln a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

$$\text{故原极限} = e^{\frac{1}{n} \ln a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

【注】这个极限经常用,希望读者可以把该结论记住,对很多“ 1^∞ ”型的极限就可以

直接写出结果,如求极限 $\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + a_3^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ ($a_1, a_2, a_3 > 0$).

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \dots + \sqrt[n]{2013}}{2013} \right)^n = \sqrt[2013]{2013!}$$

2.2.3 函数极限计算的综合题

1. 用泰勒公式求极限

【例 2.23】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$

【分析与解答】请对照着本题的解答过程去看题后的**【注】**并深刻领会.

$$\begin{aligned}\text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2) \cdot \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{x^4} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right]^2 - \left[x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \right]}{x^4} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^4) \right] - \left[x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \right]}{x^4} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

【注】本题用到了泰勒公式这个重要工具. 如果把用洛必达法则求极限比喻为铁路线上行驶的普通的慢速火车, 行驶速度慢, 每一小站还要停, 就像洛必达法则那样每使用一次则分子、分母的无穷小阶数都只能减少一次, 那么, 泰勒公式就是当之无愧的高铁, 省时, 高效, 快捷.(前提是正确使用, 否则也会出错, 且要错就是大错!). 为什么泰勒公式可以有如此大的功效呢? 事实上, 泰勒公式可以把各种类型的函数 $f(x)$ (常见的有 e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$) 都统一近似地表示为同一结构形式: $(x-x_0)$ 的幂函数之和, 使不同函数之间建立起统一的表达式, 从而联系它们就非常方便了.

在记住了泰勒展开式后, 考生在使用它们的过程中经常会出现两个疑问:

(1) 如果只是分子(或分母)中一个函数做泰勒展开, 应展开到 x 的几次幂? 原则是: 盯着分母(或分子)看, 分母(或分子)是 x 的 k 阶无穷小, 则应把该函数展开到 x 的 k 次幂, 可称为“上下同阶”或者为“多退少补”, 例如, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ 的极限, 把 $\sin x$ 展开泰勒公式, 可以把 $\sin x$ 的泰勒公式写成三种形式:

$$\textcircled{1} \quad \sin x = x + o(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\textcircled{3} \quad \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)$$

代入极限式中会发现①式展开的“不够”, ③式展开的“过剩”, ②式刚刚好.

(2) 若所展函数为两个以上函数的代数和, 应展开到 x 的几次幂? 原则是: 分别展开到它们的系数消不掉的 x 次数最低项为止. 例如, $x - \sin x = x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 即可.

最后需要指出无穷小的运算规则: 设 m, n 为正整数, 则

$$\textcircled{1} \quad o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min\{m, n\} \quad (\text{加减法时低阶“吸收”高阶})$$

$$\textcircled{2} \quad o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) \quad x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) \quad (\text{乘除法时阶数“累加”})$$

$$\textcircled{3} \quad o(kx^m) = k \cdot o(x^m) = o(x^m), k \neq 0, \text{ 为常数} \quad (\text{非零常数不影响阶数})$$

了解了泰勒公式的使用, 接下来我们去处理常见的泰勒公式, 去体验其魅力. 熟记下面一组公式:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \textcircled{1}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \textcircled{2}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \textcircled{3}$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \textcircled{4}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \textcircled{5}$$

【注】(1) 对以上公式移项, 可以得到一组差函数的等价无穷小.

$$\text{依次可得: } x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3, \tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3, x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3,$$

$$x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2.$$

(2) 要学会对这组差函数的等价无穷小公式广义化, 例如: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $\text{狗} \rightarrow 0$, 则由 $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$, 可得, 狗 - sin 狗 $\sim \frac{1}{6}\text{狗}^3$; 读者自己去举一反三.

【例 2.24】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\sin x - \sin(\sin x)]}{x^4}$.

【分析与解答】 因 $x \rightarrow 0, \sin x \rightarrow 0$,

$$\text{由 狗 - sin 狗} \sim \frac{1}{6}(\text{狗})^3 (\text{狗} \rightarrow 0)$$

$$\text{得 } \sin x - \sin(\sin x) \sim \frac{1}{6}(\sin x)^3,$$

$$\text{故原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}(\sin x)^4}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

【例 2.25】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)}$.

【分析与解答】因 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x - x \sim -\frac{1}{3}x^3$,

$$\text{故原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{2x^3} = -\frac{1}{6}.$$

【例 2.26】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$.

【分析与解答】因 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x - \sin x \sim \frac{1}{3}x^3$, $\arctan x - \tan x \sim -\frac{2}{3}x^3$,

$$\text{故原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{-\frac{2}{3}x^3} = -\frac{1}{2}.$$

继续看一个综合题.

【例 2.27】当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - (ax + b \sin x) \cos x$ 与 x^3 是等价无穷小, 求常数 a, b .

【分析与解答】因为 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2)$,

$$\begin{aligned} \text{故 } f(x) &= x - \left[ax + b \left(x - \frac{1}{3!}x^3 \right) + o(x^3) \right] \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) \right) \\ &= x - \left[(a+b)x - \frac{1}{6}bx^3 + o(x^3) \right] \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) \\ &= (1 - (a+b))x + \left(\frac{2b}{3} + \frac{a}{2} \right)x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

$$\text{故 } 1 - (a+b) = 0 \quad \frac{2b}{3} + \frac{a}{2} = 1,$$

于是 $a = -2$, $b = 3$.

2. 已知极限反求参数

处理此类问题常用的方法与结论:

a. 若 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0$.

b. 若 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = 0$.

或 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = \infty$, 即二者为同阶无穷大.

c. 若 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x)g(x) = c$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = 0$.

d. 若 $\lim_{x \rightarrow \square} (f(x) - g(x))$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = \infty$, 二者为同阶无穷大.

e. 若 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = c$ 存在, 在分子中加减一些项, 使分子中出现一些典型的差函数的形式, 使 $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x) + p(x) - p(x) + g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x) + p(x)}{h(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x) - g(x)}{h(x)}.$$

拆分后, 其中某项可用泰勒公式直接得结果. 见例 2.30 的解法二.

【例 2.28】若 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax + b) = 0$, 求 a, b .

【分析与解答】由(c)结论, 提示了此题的突破口在于式子左边提取 ∞ 这项.

$$\text{故 原极限} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x} \right) = 0,$$

$$\text{从而 } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a - \frac{b}{x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$b = -\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{1}{2}.$$

【例 2.29】若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n + 7x^4 + 1)^m - x = b$, ($n > 4, b \neq 0$), 求 m, n, b .

【分析与解答】此极限为“ $\infty - \infty$ ”型, 且极限存在, 那么在 $n > 4$ 的条件下, $(x^n + 7x^4 + 1)^m$ 的 x 的最高次幂为 x^{mn} , $mn = 1$, 否则极限一定不存在, 于是

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{x^n + 7x^4 + 1} - x) = b \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt[n]{1 + \frac{7x^4}{x^n} + \frac{1}{x^n}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{7x^4}{x^n} + \frac{1}{x^n} \right) = b \end{aligned}$$

$$\text{因而 } n - 1 = 4, n = 5, b = \frac{7}{5}, m = \frac{1}{5}.$$

【例 2.30】设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析与解答】解法一: 使用泰勒公式

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - ax - bx^2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - \left(\frac{1}{2} + b\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2, \end{aligned}$$

$$\text{因而 } 1 - a = 0, -\left(\frac{1}{2} + b\right) = 2 \Rightarrow a = 1, b = -\frac{5}{2}.$$

解法二: 使用结论(e), 根据泰勒公式容易得到差函数: $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$ (请考生记住此式), 故想办法把分子凑出该形式.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} &= 2 \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x) - x + (ax + bx^2)}{x^2} = 2 \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a-1)x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx^2}{x^2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} - b - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a-1)x}{x^2} = 2,$$

故 $a-1=0 \Rightarrow a=1$.

因而 $-\frac{1}{2}-b=2 \Rightarrow b=-\frac{5}{2}$.

3. 无穷小的阶的判定

常见解法:(1)用定义;(2)用等价无穷小;(3)用泰勒公式. 记住下列结论,对解题非常有帮助.

已知 $f(x)$, $g(x)$ 分别为 $x-a$ 的 m 阶与 n 阶无穷小, 则

(i) 当 $m=n$ 时, $f(x) \pm g(x)$ 为关于 $x-a$ 的 不低于 m 阶的无穷小;

(ii) 当 $f(x)$ 连续且 $x \rightarrow a$ 时, $\int_a^x f(t) dt$ 为 $x-a$ 的 $(m+1)$ 阶无穷小, 此结论可以推

广为一般性的结论, 即当积分上限不是变量 x , 而是函数 $g(x)$, 则 $x \rightarrow a$ 时, $\int_a^{g(x)} f(t) dt$ 为 $(x-a)$ 的 $n(m+1)$ 阶无穷小.

(iii) 当 $f(x)$, $g(x)$ 可导, $f'(x)$, $g'(x)$ 分别为 $x-a$ 的 $(m-1)$ 阶与 $(n-1)$ 阶无穷小. 若 $f'(x)$ 比 $g'(x)$ 的阶高, 则 $f(x)$ 比 $g(x)$ 的阶高, 以此类推.

【例 2.31】当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下面与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是()

- (A) $1-e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ (D) $1-\cos \sqrt{x}$

【分析与解答】由定义: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \stackrel{t=\sqrt{x}}{\longrightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t^2)-\ln(1-t)}{t} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{1-t} \right) = 1$.

(A)(C)(D)选项由等价无穷小可得 $1-e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$, $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $1-\cos \sqrt{x} \sim$

$\frac{1}{2}x$.

【例 2.32】把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列

起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是()

- (A) $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ (B) $\alpha \quad \gamma \quad \beta$ (C) $\beta \quad \alpha \quad \gamma$ (D) $\beta \quad \gamma \quad \alpha$

【分析与解答】由结论(iii)可得: $\frac{d\alpha}{dx} = \cos x^2 \sim x^0$, $\frac{d\beta}{dx} = \tan x \cdot 2x \sim 2x^2$, $\frac{d\gamma}{dx} =$

$\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{2}x$. 故答案选(B).

【例 2.33】当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小中阶数最高的是()

- (A) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ (B) $e^{\sin x} - e^{\tan x}$

(C) $e^{x^2} - \cos x$

(D) $\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t^2) dt$

【分析与解答】(A) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \sim x^2$

(B) $e^{\sin x} - e^{\tan x} = e^{\tan x} (e^{\sin x - \tan x} - 1) \sim \sin x - \tan x \sim -\frac{1}{2}x^3$

(C) $e^{x^2} - \cos x = [1 + x^2 + o(x^2)] - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \sim \frac{3}{2}x^2$

(D) 由结论(ii) 可得 $f(x) = \ln(1+x^2) \sim x^2$.

$$g(x) = \sin^2 x \sim x^2, \text{ 故 } \int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t^2) dt \sim \frac{1}{3}x^6 (\frac{1}{3} \text{ 怎么来的, 请见例 2.61})$$

故正确答案选(D).

4. 一些特殊形式的极限

(1) 一类自变量取值“双向性”的特殊极限问题

也就是对于某些函数, 其左右极限不同, 常见有以下 6 种函数.

① 指数函数 e^x 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限. 注意 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.② $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.③ 含偶次方根函数的极限. 因为 $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 故求 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow x_0$)时的极限, 应分 $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow x_0^+$) 和 $x \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow x_0^-$) 两种情况.④ 取整函数, $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$, 注意到 $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$.⑤ 绝对值函数: 如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$, 注意到 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$.

⑥ 分段函数在分段点(这种情况有可能左右极限相同, 但是作为考试, 要注意左右极限不同的情形).

注意符号: 对于 $x \rightarrow \infty$, 意味着 $x \rightarrow +\infty$, 且 $x \rightarrow -\infty$; 对于 $x \rightarrow x_0$, 意味着 $x \rightarrow x_0^+$, 且 $x \rightarrow x_0^-$.【例 2.34】求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.【分析与解答】当 $x \rightarrow 0$ 时, 式子中含有 $e^{\frac{1}{x}}$, $e^{\frac{4}{x}}$, $|x|$.故需要分 $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$ 两种情况求解.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2 + 0}{1 + 0} - 1 = 1.$$

【注】从此题可以看出：

$x \rightarrow 0$ 时, $\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}}$ 极限不存在, $\frac{\sin x}{|x|}$ 极限也不存在, 但此题两函数相加的极限存在,

可以作为四则运算法则中的一个反例.

【例 2.35】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{x} \right]$.

【分析与解答】对于取整函数有以下两个结论(请牢记)：

$$\textcircled{1} \quad x - 1 < [x] \leqslant x, \quad \textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1,$$

$$\text{于是有 } \frac{2}{x} - 1 < \left[\frac{2}{x} \right] \leqslant \frac{2}{x} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow 2 - x < x \cdot \left[\frac{2}{x} \right] \leqslant 2 \\ x < 0 \Rightarrow 2 - x > x \cdot \left[\frac{2}{x} \right] \geqslant 2 \end{cases}.$$

由夹逼准则得: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{x} \right] = 2$.

【例 2.36】求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 2} - x)$.

$$\text{【分析与解答】} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1} = \infty,$$

故原极限不存在.

(2) 关于抽象函数的极限

这类问题是说: 已知一极限式中含抽象函数, 求另一个含该函数的函数的极限. 通常解法:(1)如果题中不知道抽象函数是否可导, 无法使用洛必达法则, 则对式中其他函数用泰勒展开, 使待求的极限成为已知式子展开的部分因子, 把其作为一个整体. (2)利用函数, 极限, 无穷小关系定理, 把抽象函数具体化.

【例 2.37】已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$.

【分析与解答】解法一: 把 $\sin 6x$ 用泰勒公式展开,

$$\sin 6x = 6x - \frac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3), \text{ 于是}$$

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \frac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3) + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x) - 36x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} - 36 + 0 = 0,$$

$$\text{从而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36.$$

解法二：因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 于是

$\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0 + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量, 则

$$f(x) = \frac{x^3\alpha(x) - \sin 6x}{x}$$

代入欲求极限,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + \frac{x^3\alpha(x) - \sin 6x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x + x^3\alpha(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 36.\end{aligned}$$

【例 2.38】 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x^2} \right]$.

【分析与解答】 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)} = e^3$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)}{x} = 3 \quad \text{①}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right) = 0$,

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{f(x)}{x} \right) = 0$,

由①式可得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 3$.

(3) 两点函数值之差的极限

即求 $\lim_{x \rightarrow \square} [f(b) - f(a)]$ 型的极限. 大多数 $x \rightarrow \square$ 时 $f(b)$ 与 $f(a)$ 的极限是不能确定, 故不能理解为“ $\infty - \infty$ ”的未定型, 求解此型极限最方便的方法就是使用拉格朗日中值定理. 这个内容需要掌握了拉格朗日中值定理的知识后才能阅读.

【例 2.39】 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

【分析与解答】 设函数 $y = \sin t$, 在 $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$ 上连续, $(\sqrt{x}, \sqrt{x+1})$ 内可导, 满足拉格朗日中值定理的条件. 故 $\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} = \cos \zeta (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ ($\sqrt{x} < \zeta < \sqrt{x+1}$).

$$\begin{aligned}\text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \zeta (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \zeta}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.\end{aligned}$$

【例 2.40】 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right)$.

【分析与解答】 原极限等价于求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1} \right)$

令 $f(t) = \arctan t$, $t \in \left[\frac{a}{x+1}, \frac{a}{x} \right]$

由拉氏中值定理可得

$$\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1} = \frac{1}{1+\zeta^2} \left(\frac{a}{x} - \frac{a}{x+1} \right) (\zeta \in \left[\frac{a}{x+1}, \frac{a}{x} \right])$$

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{1+\zeta^2} \left(\frac{a}{x} - \frac{a}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\zeta^2} \frac{ax^2}{x(x+1)} = a. \end{aligned}$$

(4) 已知一点可导, 用导数定义求极限

这个内容需要掌握了导数定义的知识后才能阅读.

在求 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为“ $\frac{0}{0}$ ”型的极限, 如果题中只告诉某一个具体的点可导, 不能使用洛必达法则, 只能使用导数定义.

【例 2.41】已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3}$ 等于()

- (A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

$$\begin{aligned} \text{【分析与解答】原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(f(x) - f(0)) - (2f(x^3) - 2f(0))}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0). \end{aligned}$$

(5) 含变上限积分的极限

这个内容需要掌握了变限积分的概念和求导公式后才能阅读.

通常解法: 先对变限积分化简到直接可以对变量求导; 再使用洛必达法则或积分中值定理.

【例 2.42】设 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$.

【分析与解答】因为 $\int_0^x f(x-t) dt \stackrel{\text{令 } u=x-t}{=} \int_x^0 f(u) (-du) = \int_0^x f(u) du$

原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(u) du} \left(\frac{0}{0} \text{型} \right)$

$$\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u) du + xf(x)} \quad ①$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\zeta)x}{f(\zeta)x + xf(x)} \quad (\zeta \text{介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$= \frac{f(0)}{f(0)+f(0)} = \frac{1}{2}.$$

【注】①式不能再使用洛必达法则化简,因为题中已知条件只是 $f(x)$ 连续.

2.2.4 数列极限的计算

这节内容一直是考研命题的重点,题目不难,要求考生掌握住基本的题目和方法即可.

(1) 当数列通项为具体已知时,通常的解法为:

(i) 夹逼准则;

(ii) 定积分定义;

(iii) 把离散型变量 n 改成连续型变量 x , 应用函数极限的计算方法;

(iv) 利用幂级数求和(仅数学一、三要求);

(v) 利用级数收敛的必要条件(仅数学一、三要求).

(2) 当数列通项由递推关系式 $a_n = f(a_{n-1})$ 给出时,通常有如下解法:

(i) 利用单调有界数列有极限.

理论上需要先证明该极限存在,然后设数列的极限为 A , 在通项两端同时取极限,得到一个关于 A 的方程,解出方程即可. 但实际解题过程中却可以“先斩后奏”,即先求后证,先把极限求出,这给判断此数列的单调性与有界性提供了很好的依据.

(ii) 从给定的递推式出发,设法导出通项的具体表达式,然后再求极限.

【例 2.43】计算下列极限:

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n};$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{-n} + b^{-n}} \quad (0 < a < b);$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}},$$

【分析与解答】 ①运用夹逼准则,注意到这里是有限项相加. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

这个结论要记住.

② 由①的结果,马上可得②式的结果为 $\frac{1}{a}$.

③ 因为 $\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + i}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}}$, 所以 $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + i}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2}}$, 当 $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1, \text{由夹逼准则可得,原极限} = 1.$$

【例 2.44】计算下列极限:

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right);$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right);$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}.$$

【分析与解答】①由 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left[a + \left(\frac{b-a}{n}\right)i\right] \cdot \frac{b-a}{n}$, 可得

$$\text{原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

$$\textcircled{2} \text{原极限} = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos \pi x} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{原极限} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[2 \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right) \right] \\ &= 2 \int_0^1 \ln(1+x) dx = 4\ln 2 - 2. \end{aligned}$$

【例 2.45】求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^n$ (n 为自然数).

【分析与解答】这是“ 1^∞ ”型未定式.

$$\text{原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^n = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}},$$

把数列极限转化为函数极限,

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}, \text{故原极限} = e^{\frac{1}{3}}.$$

【例 2.46】(仅数学一、三)求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$.

【分析与解答】此题及例 2.47 是级数问题,请复习完相关知识后再读.

$$\text{原极限} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{2^i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n},$$

令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$, 用先积后导的方法,

$$\text{则 } f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} dx \right)' = \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n \right)' = \left(\frac{x}{2-x^2} \right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}.$$

故原极限 $= f(1) = 3$.

【例 2.47】(仅数学一、三)求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$.

【分析与解答】记 $u_n = \frac{2^n}{n!}$, 则所求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$ 可视为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项的极限. 如果

该级数收敛,则由级数收敛的必要条件就可求其极限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

【例 2.48】(仅数学一、三) 设 $x_n = \ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n}$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

【分析与证明】本题只供数学一、三的考生使用. 利用无穷级数讨论数列极限的存在性.

给定一个数列 $\{x_n\}$, 讨论 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在性等价于讨论级数 $x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 的敛散性, 详细说来,

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, 给定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 总可以求出其部分和数列 $\{S_n\}$, 反之, 对于给定的数列 $\{S_n\}$, 可令 $u_1 = S_1$, $u_2 = S_2 - S_1$, \dots , $u_n = S_n - S_{n-1}$ 从而构成极数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 级数的问题可转化为数列的问题来研究.

$$\text{故 } x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_1 + \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1})$$

因此, 数列 $\{x_n\}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 的敛散性是一致的.

$$x_{n+1} = \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$x_n = \ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n},$$

$$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1},$$

因为当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ (用导数工具可证明, 请考生自练并牢记该结论), 所以 $\frac{1}{1+n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

故该级数为正项级数, 且 $0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 由

比较判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \right]$ 收敛, 从而数列 $x_n = \ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n}$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

【例 2.49】求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{n \uparrow}}$.

【分析与解答】解法一: 令 $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$, 得 $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ ①
用数学归纳法来证明 $\{x_n\}$ 单调有界.

(1) $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = x_2$ 及 $x_1 = \sqrt{2} < 2$,

(2) 设 $x_n < x_{n+1}$ 及 $x_n < 2$, 则 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + x_{n+1}} = x_{n+2}$,

及 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$,

故 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 对①式两边取极限, 得 $A = \sqrt{A + 2} \Rightarrow A = 2$.

解法二: 由于 $x_1 = \sqrt{2} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}} = 2 \times \cos \frac{\pi}{2 \times 4}$,

\cdots , $x_n = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{2^{n-1} \cdot 4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

【注】解法二过于追求技巧, 因为考研试题还是注重“三基”, 技巧性越强的东西, 就越没有普遍意义, 在考研过程中, 考生可以鉴赏一些技巧, 但是不要一味地追求技巧.

【例 2.50】 设 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$, ($n = 1, 2, \dots$), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求其极

限值.

【分析与解答】 因为 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1$, 所以 $\{a_n\}$ 有下界.

下面再证明 $\{a_n\}$ 单调递减.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)}{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{a_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} (1 + 1) = 1 \quad \text{即 } a_{n+1} \leq a_n,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 代入

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \text{ 得 } A = \frac{1}{2} \left(A + \frac{1}{A} \right) \Rightarrow A = 1, A = -1 \text{ (舍去).}$$

2.2.5 函数的连续与间断

1. 判断间断点

【例 2.51】 设 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则() .

(A) $x = 0$, $x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x = 0$, $x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 第一类间断点

【分析与解答】 由 $f(x)$ 的表达式可知 $x = 0$, $x = 1$ 为其间断点.

$$x \rightarrow 1^+, x - 1 \rightarrow 0^+, \frac{x}{x-1} \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow 0,$$

$x \rightarrow 1^-$, $x - 1 \rightarrow 0^-$, $\frac{x}{x-1} \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -1$,

$x \rightarrow 0^+$, $\frac{x}{x-1} \rightarrow 0^-$, $e^{\frac{x}{x-1}} - 1 \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$,

$x \rightarrow 0^-$, $\frac{x}{x-1} \rightarrow 0^+$, $e^{\frac{x}{x-1}} - 1 \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$,

故 $x = 1$ 是第一类间断点, $x = 0$ 是第二类间断点, 选(D).

【例 2.52】设 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有()。

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点
- (B) 1 个跳跃间断点, 1 个无穷间断点
- (C) 2 个可去间断点
- (D) 2 个无穷间断点

【分析与解答】 $x = 0$ 和 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点, 其余点连续.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

则 $x = 0$ 为可去间断点;

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|} \sin x = \begin{cases} \sin 1, & x \rightarrow 1^+ \\ -\sin 1, & x \rightarrow 1^- \end{cases},$$

因 $\ln x = \ln(1+x-1) \sim x-1$,

则 $x = 1$ 为跳跃间断点. 答案选择(A).

2. 有关连续与间断的概念与性质

【例 2.53】设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则()

- (A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点
- (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点
- (C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点
- (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

【分析与解答】因为 $\varphi(x) = f(x) \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, 若 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 连续, 则 $\varphi(x)$ 必连续, 这与 $\varphi(x)$ 有

间断点矛盾, 故选(D).

(A)(B)(C) 可举反例: 设 $f(x) = 1$, $\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 但 $\varphi[f(x)] = 1$, $[\varphi(x)]^2 = 1$, $f[\varphi(x)] = 1$, 三个函数均无间断点.

【例 2.54】设 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满

- 足()

- (A) $a \leq 0, b < 0$ (B) $a \geq 0, b > 0$
 (C) $a \leq 0, b > 0$ (D) $a \geq 0, b < 0$

【分析与解答】由题意可知: $a + e^{bx} \neq 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内恒成立.

因 $e^{bx} > 0$, 所以 $a \geq 0$.

因 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{bx} = \infty$, 从而 $b < 0$, 因此选(D).

3. 讨论函数的连续性

(1) 分段函数

【例 2.55】试讨论函数 $g(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ e^x + \beta, & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性.

【分析与解答】 $g(0) = (e^x + \beta)|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + \beta) = 1 + \beta = g(0-0)$,

$g(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin \frac{1}{x}$, 所以

当 $\alpha > 0$ 且 $\beta = -1$ 时, 有 $g(0-0) = g(0+0) = g(0) = 0$, 故 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续;

当 $\alpha > 0$ 且 $\beta \neq -1$ 时, 有 $g(0-0) \neq g(0+0)$, 故点 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的第一类跳跃间断点;

当 $\alpha \leq 0$ 时, 点 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的第二类间断点.

【例 2.56】求函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x}, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x^2 - 1}, & x > 0 \end{cases}$ 的间断点, 并判断它们的类型.

【分析与解答】 对于函数 $F(x)$ 的分段点 $x = 0$, 因

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x^2 - 1} = -\sin 1,$$

故 $x = 0$ 是函数 $F(x)$ 的第一类跳跃间断点.

当 $x > 0$ 时, $F(x) = \sin \frac{1}{x^2 - 1}$ 在 $x = 1$ 处没有定义, 且极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{x^2 - 1}$ 不存在. 故

$x = 1$ 是函数 $F(x)$ 的第二类振荡间断点.

当 $x < 0$ 时, $F(x) = \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x}$ 在点列 $x_k = -k\pi - \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \dots$ 处没有定义, 则

这些点都是函数 $F(x)$ 的间断点. 特别对点 $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, 令 $t = x + \frac{\pi}{2}$, 有

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} F(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(2t - \pi)}{2\sin t} = -\frac{\pi}{2},$$

故 $x = -\frac{\pi}{2}$ 是函数 $F(x)$ 的第一类可去间断点; 而点 $x_k = -k\pi - \frac{\pi}{2}, k = 1, 2, \dots$, 显然

是函数 $F(x)$ 的第二类无穷间断点.

(2) 用极限定义的函数

以 x 为参变量, 以自变量 n 的无限变化趋势为极限所定义的函数 $f(x)$, 即 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x, n)$.

此类题第一步先求极限, 注意在求极限过程中 x 不变化, 只是有些题中极限的值会随着 x 的取值范围不同而改变, 故需要对 x 分类讨论.

第二步对第一步的结果讨论间断点.

【例 2.57】 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点并指出其类型.

【分析与解答】 显然 $f(0)$ 无意义.

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+2} - 1}{x^{2n} + 1} = \begin{cases} -1, & 0 < |x| < 1 \\ x^2, & |x| > 1 \\ 0, & |x| = 1 \end{cases}$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$, 则 $x = 0$ 为可去间断点.

$$f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1,$$

$$f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1,$$

则 $x = 1$ 为跳跃间断点.

由于 $f(x)$ 是偶函数, 则 $x = -1$ 也是跳跃间断点.

【例 2.58】 已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 是连续函数, 求 a, b 的值.

【分析与解答】 当 $x = 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \frac{1+a+b}{2}$,

当 $|x| < 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \frac{ax^2 + bx}{1} = ax^2 + bx$,

当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + a \frac{1}{x^{2n-2}} + b \frac{1}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = \frac{1}{x}$,

当 $x = -1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \frac{-1+a-b}{2}$,

于是 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & |x| < 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \\ \frac{1+a+b}{2}, & x = 1 \\ \frac{a-1-b}{2}, & x = -1 \end{cases}$, 只需讨论分界点处的连续性:

$x = 1$ 处, 由 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx) = a + b$, $f(1) = \frac{1+a+b}{2}$.

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $a+b=1$.

$$x=-1 \text{ 处, 由 } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2 + bx) = a-b, f(-1) = \frac{a-b-1}{2},$$

要使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续, 则 $a-b=-1$.

故有 $a=0, b=1$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 是连续函数.

2.2.6 极限的应用(连续复利问题, 仅数学三)

【例 2.59】设某酒厂有一批新酿的好酒, 如果现在(假定 $t=0$)就售出, 总收入为 R_0 (元), 如果窖藏起来, 待来日按陈酒价格出售, t 年末总收入为 $R=R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$. 假定银行的年利率为 r , 并以连续复利计息, 试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大, 并求 $r=0.06$ 时的 t 值.

【分析与解答】根据连续复利公式, 这批酒在窖藏 t 年末售出总收入 R 的现值为 $A(t)=R e^{-rt}$,

$$\text{而 } R = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}, \text{ 故 } A(t) = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}. \text{ 令 } \frac{dA}{dt} = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \left(\frac{1}{5\sqrt{t}} - r \right) = 0, \text{ 得驻点 } t_0 = \frac{1}{25r^2}.$$

$$\text{又 } \frac{d^2A}{dt^2} = R_0 e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt} \left[\left(\frac{1}{5\sqrt{t}} - r \right)^2 - \frac{1}{10\sqrt{t^3}} \right], \text{ 则有 } \frac{d^2A}{dt^2} \Big|_{t=t_0} = R_0 e^{\frac{1}{25r^2}} (-12.5r^3) < 0.$$

于是, $t_0 = \frac{1}{25r^2}$ 是极大值点即最大值点, 故窖藏 $t = \frac{1}{25r^2}$ (年) 售出, 总收入的现值最大.

当 $r=0.06$ 时, $t = \frac{100}{9} \approx 11$ (年).

2.2.7 综合题举例

【例 2.60】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 是 $[a,b]$ 上一个点列, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}}.$$

【分析与解答】本题考虑夹逼准则. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 知 $e^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上非负连续, 且 $0 < m \leq e^{f(x)} \leq M$, 其中 M, m 分别为 $e^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值, 于是 $0 < m \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)} \leq M$, 故,

$$\sqrt[n]{m} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}} \leq \sqrt[n]{M}$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M} = 1$, 根据夹逼准则, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}} = 1$.

【例 2.61】(I) 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim ax^m$, $g(x) \sim bx^n$, 且 $f(x), g(x), a, b$ 均不为 0, 则 $f[g(x)] \sim ab^m x^{mn}$.

(II) 设 $f(x)$ 连续, $f(0) = 1$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x-\sin x} f(x) dx$ 与 $a \ln(1+x^b)$ 为等价无穷小, 则 a, b 的值为()

- (A) $a = \frac{1}{6}, b = -3$ (B) $a = \frac{1}{6}, b = 3$ (C) $a = -\frac{1}{6}, b = -3$ (D) $a = -\frac{1}{6}, b = 3$

【分析与解答】(I) 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[g(x)]}{x^{mn}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[g(x)]}{a [g(x)]^m} \cdot \frac{[g(x)]^m}{(bx^n)^m} \cdot ab^m = ab^m,$$

故, $f[g(x)] \sim ab^m x^{mn}$.

(II) 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$, $\int_0^x f(t) dt \sim x$, 故 $\int_0^{x-\sin x} f(x) dx \sim \frac{1}{6}x^3$.

而 $a \ln(1+x^b) \sim ax^b$, 于是 $a = \frac{1}{6}, b = 3$.

答案选(B).

【注】同理, 请考生判别: 若 $\int_0^{x-\ln(1+x)} \frac{\sin t^2}{t} dt \sim ax^b (x \rightarrow 0)$, 则 a, b 分别为多少?

提示: $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$, $\int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt \sim \frac{1}{2}x^2$, 则 $\int_0^{x-\ln(1+x)} \frac{\sin t^2}{t} dt \sim \frac{1}{8}x^4$, 于是

$$a = \frac{1}{8}, b = 4.$$

【例 2.62】设函数 $f(x)$ 在 $0 < x \leqslant 1$ 时 $f(x) = x^{\sin x}$, 其他的 x 满足关系式 $f(x) + k = 2f(x+1)$, 试求常数 k 使极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

【分析与解答】 因求“ 0^0 ”型不等式极限的常用方法是将该类幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 化为

复合函数 $e^{v(x)\ln u(x)}$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x} = e^0 = 1$.

其中, 通过等价无穷小替代与洛必达法则求得:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = 0.$$

根据题设的关系式 $f(x) = 2f(x+1) - k$ 得,

$$f(x) = \begin{cases} x^{\sin x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2(x+1)^{\sin(x+1)} - k, & -1 < x \leqslant 0 \end{cases}$$

由上述结果 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处右极限 $f(0+0) = 1$; 而其左极限

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [2(x+1)^{\sin(x+1)} - k] = 2 - k,$$

由于极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是存在的, 故 $2 - k = f(0-0) = f(0+0) = 1$, 则常数 $k = 1$.

第3讲 一元函数微分学的概念与计算

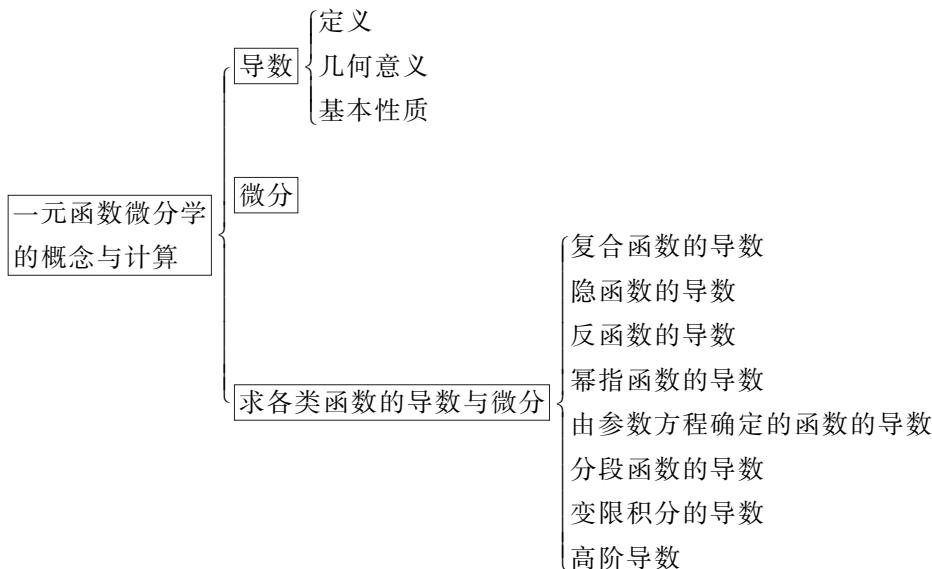
» 导语

导数计算的定义法和公式法是考研的必考内容,而且它是后面多元函数微分学的基础,故极其重要. 导数计算题的计算量不大,难度不大,但是分值却比较高,希望大家努力把握住这一点,争取“会的内容不丢分”. 需要指出的是,高阶导数的计算是这些年考试的重点,它需要比较强的计算能力.

» 大纲要求

1. 导数和微分的概念,导数与微分的关系,导数的几何意义,求平面曲线的切线方程和法线方程,函数的可导性与连续性之间的关系.
2. 导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,基本初等函数的导数公式. 微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性,求函数的微分.
3. 高阶导数的概念,求简单函数的高阶导数.
4. 求分段函数的导数,求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

» 知识体系



3.1 考试内容分析

3.1.1 导数定义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. 若令 $x = x_0 + \Delta x$,

则上式也可写成 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. 当且仅当上述极限存在时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导.

【注】(1) 单侧导数 $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 称该极限为 $f(x)$ 在点

x_0 的右导数; 同理可定义左导数为 $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 左导数和右导

数统称为单侧导数.

(2) 可导的条件

① 必要条件: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

② 充要条件: $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ 都存在, 且 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

(3) 导数的几何意义

$y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数值 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处切线的斜率 k , 则 $k = f'(x_0)$, 于是

曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$;

法线方程为: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. ($f'(x_0) \neq 0$)

(4) 高阶导数定义

$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$, 其中 $n \geq 2$, 为整数, 且 $f^{(n-1)}(x)$ 在

x_0 的某邻域内有定义, $x_0 + \Delta x$ 也在该邻域内.

3.1.2 微分定义

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 且 $x_0 + \Delta x$ 在该邻域内, 对于函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 若存在与 Δx 无关的常数 A , 使得

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x)$$

其中 $o(\Delta x)$ 是在 $\Delta x \rightarrow 0$ 时比 Δx 更高阶的无穷小, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 并称 $A \Delta x$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分, 记作: $dy|_{x=x_0} = A \Delta x$ 或者 $df(x)|_{x=x_0} = A \Delta x$, 又 $\Delta x = dx$, 故 $dy|_{x=x_0} = Adx$.

【注】(1) 判断一点是否可微的程序：

①写增量 $\Delta y = f(x + x_0) - f(x)$ ；

②写线性增量 $A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$ ；

③作极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x}$ ，若该极限等于0，则 $y = f(x)$ 在 x_0 点可微，否则就不可微。

(2) 一元函数可导与可微的关系

$f(x)$ 在点 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A = f'(x_0)$. 需要指出，该关系只对一元函数成立，对于后面的多元函数，要有新的定义和讨论。

3.1.3 求导与微分的基本规则

以下只列求导规则，微分规则完全一致，不再赘述。

1. 四则运算

若以下函数均可导，则

和差的导数 $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$

积的导数 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

【注】 $[u(x)v(x)w(x)]' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$

商的导数 $\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}, v(x) \neq 0$

2. 复合函数的导数(微分)

设 $u = g(x)$ 在点 x (没有下标是泛指的点，下同) 可导， $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导，则 $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$.

写成微分形式： $d\{f[g(x)]\} = f'[g(x)]g'(x)dx$ ，这也就是微分形式的不变性——无论 u 是中间变量还是自变量， $dy = f'(u)du$ 都成立。

【注】 $\{f[g(x)]\}' = \frac{d\{f[g(x)]\}}{dx}$ ，而 $f'[g(x)] = \frac{d\{f[g(x)]\}}{d[g(x)]}$ ，要看清楚求导

符号的位置，不要弄错了。举个例子看。设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x) < 0$ 。若 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是()

- (A) $f'(a) < 0$ (B) $f'(a) > 0$ (C) $f''(a) < 0$ (D) $f''(a) > 0$

【分析与解答】 由于 $g(x_0)$ 是 $g(x)$ 的极值，由费马定理(见中值定理的内容)知 $g'(x_0) = 0$ 。记 $y = f[g(x)]$ ，则 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = f'(a)g'(x_0) = 0$ ，从而 $x = x_0$ 是函数 $y = f[g(x)]$ 的驻点。由于

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [f'(g(x))g'(x)]' = f''(g(x)) [g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x), \frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0} = f'(a)g''(a).$$

由题设知 $g''(a) < 0$, 故, 若 $f'(a) > 0$, 则可得到 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0} < 0$, 这正是函数 $y = f(g(x))$ 在驻点 $x = x_0$ 处取得极大值的充分条件, 故由 $f'(a) > 0$ 可推得 $f(g(x))$ 在 x_0 处取得极大值. 答案选择(B).

3. 反函数的导数

设 $y = f(x)$ 可导且 $f'(x) \neq 0$, 则存在反函数 $x = \varphi(y)$, 且

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \text{ 即 } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

4. 参数方程所确定的函数的导数

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定, 其中 t 是参数, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

5. 隐函数求导法

设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的可导函数, 则

① 方程 $F(x, y) = 0$ 两边对自变量 x 求导, 注意 $y = y(x)$, 即将 y 看作中间变量, 得到一个关于 y' 的方程; ② 解该方程便可求出 y' .

6. 对数求导法

对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子, 一般先取对数再求导. 设 $y = f(x)$,

① 等式两边取对数, 得 $\ln y = \ln f(x)$;

② 两边对自变量 x 求导, 同样注意 $y = f(x)$, 即将 y 看作中间变量, 得

$$\frac{1}{y}y' = [\ln f(x)]' \Rightarrow y' = y [\ln f(x)]'.$$

7. 幂指函数求导法

对于 $u(x)^{v(x)}$ ($u(x) > 0$), 除了用上面的对数求导法外, 还可以先化成指数函数 $u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$, 然后求导

$$[u(x)^{v(x)}]' = [e^{v(x) \ln u(x)}]' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right].$$

8. 高阶导数的运算

① $[u \pm v]^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

$$\begin{aligned} \textcircled{2} (uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + C_n^{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^N C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}. \end{aligned}$$

\textcircled{2}式就是求乘积的高阶导数的莱布尼兹公式,其中 $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

【注】几个初等函数的 n 阶导数公式

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n; \quad (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} (x > 0);$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (x > -1);$$

$$[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n};$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.$$

9. 参数方程确定的函数的二阶导数

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定,其中 t 是参数,则

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \end{cases}$$

10. 反函数的二阶导数

在 $y = f(x)$ 二阶可导的情况下,记 $f'(x) = y'_x$, $\varphi'(y) = x'_y$, ($x'_y \neq 0$),请大家作为练习作下面的推导:

$$\begin{cases} y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y} \\ y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^2} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3} \end{cases}$$

比如,你能熟练求解如下一个题目吗?试从 $x' = \frac{1}{y}$ 中导出下列两个表达式

$$(1) x'' = -\frac{y''}{(y')^3}; \quad (2) x''' = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

【分析与解答】

$$(1) x'' = (x')' = d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{(y')^2} \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

$$\begin{aligned} (2) x''' &= \frac{d\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)}{dy} = \frac{d\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)}{dy} = \frac{d\left(-\frac{y''}{(y')^3}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \\ &= -\frac{y''''(y')^3 - 3(y')^2(y'')^2}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}. \end{aligned}$$

3.2 典型例题分析

3.2.1 关于导数定义的题目

$f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 在试题中常出现如下

两种推广形式:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \text{狗}) - f(x_0)}{\text{狗}},$$

$$(2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \text{狗}) - f(x_0)}{\text{猫}}.$$

【注】(I)其中“狗” $= (x_0 + \text{狗}) - x_0$ 表示自变量的增量,在题中它有各种各样的形式,但必须保证当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,“狗”能以任意方式趋于零.

(II)由定义式中可以看出分子中必须含有 $f(x_0)$ 这一项,即 $f'(x_0)$ 存在与函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f(x_0)$ 有关(只是有些题中 $f(x_0) = 0$,故在题中表面上没有这一项).

(III)定义中分子上自变量的增量与分母上自变量的增量有两种情况:一种是完全相同,即分子中的“狗”与分母中的“狗”完全一样.但题中出现更多的是(2)形式,即分子中出现“狗”,分母中出现“猫”.此时,如果(2)式可以作为函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的充分条件,可以证明“狗”和“猫”的关系为同阶无穷小或“狗”为“猫”的低阶无穷小(读者可以自己证明).

(IV)定义由极限描述,由极限理论可知, $\Delta x \rightarrow 0$,需要 $\Delta x \rightarrow 0^+$, $\Delta x \rightarrow 0^-$ 同时满足.

【例 3.1】设 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为()

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h)$ 存在 (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在
 (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh h)$ 存在 (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在

【分析与解答】对于选项(A),

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cosh h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + 1 - \cosh h) - f(0)}{1 - \cosh h} \cdot \frac{1 - \cosh h}{h^2} \\&= \lim_{\substack{1 - \cosh h \rightarrow 0^+ \\ h \rightarrow 0^+}} \frac{f(0 + 1 - \cosh h) - f(0)}{1 - \cosh h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cosh h}{h^2} = f'_+(0) \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(A) 选项存在, 只说明 $f'_+(0)$ 存在, 说明不了 $f'(0)$ 存在, 故不是充要条件.

对于选项(B),

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + 1 - e^h) - f(0)}{1 - e^h} \cdot \frac{1 - e^h}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ 1 - h \rightarrow 0}} \frac{f(0 + 1 - e^h) - f(0)}{1 - e^h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^h}{h} = f'(0)(-1) = -f'(0) \end{aligned}$$

在,故为充要条件.

对于选项(C),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sinh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h - \sinh) - f(0)}{h^2}$$

由(III)分析可得,此题“狗”= $h - \sin h$, “猫”= h^2 , 因 $h - \sin h$ 为 h^2 的高阶无穷小, 故(C)选项错误.

对于选项(D),

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(0 + 2h) - f(0 + h)]}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(0 + 2h) - f(0)] - [f(0 + h) - f(0)]}{h} \\&\stackrel{(*)}{=} 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + 2h) - f(0)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} \\&= 2f'(0) - f'(0) = f'(0)\end{aligned}$$

上面过程中的 $(*)$ 要成立,需要 $f'(0)$ 存在,故(D)选项是 $f'(0)$ 存在的必要条件. 这是因为 $f(0+2h), f(0+h)$ 对 $x=0$ 处的函数值没有任何要求,也就是说, $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续,甚至没有定义,但极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h)-f(h)]$ 也有可能存在. 例如: $f(x)=$

$\begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点不可导, 但 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h}$ 是存在的.

【例 3.2】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + \tan x)^{10} - (2 - \sin x)^{10}}{\sin x}$.

【分析与解答】此题为用导数定义去求极限,关键在于把此极限构造为导数的广义化的定义式.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + \tan x)^{10} - 2^{10} + 2^{10} - (2 - \sin x)^{10}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + \tan x)^{10} - 2^{10}}{\sin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{10} - (2 - \sin x)^{10}}{\sin x} \\ &= (x^{10})' \Big|_{x=2} + (x^{10})' \Big|_{x=2} = 2 \times 10 \times 2^9 = 10 \times 2^{10}. \end{aligned}$$

【例 3.3】已知 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2013)}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+2013)}$, 求 $f'(1)$.

【分析与解答】

$$\begin{aligned} \text{解法一: } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-3)\cdots(x-2013)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+2013)} \\ &= \frac{2012!}{2014!} = \frac{1}{2013 \times 2014}. \end{aligned}$$

解法二: 记 $f(x) = (x-1)g(x)$, 显然 $g(x)$ 在点 $x=1$ 处可导, 故

$$\begin{aligned} f'(1) &= [(x-1)g(x)]' \Big|_{x=1} \\ &= [g(x) + (x-1)g'(x)] \Big|_{x=1} = g(1) + 0 \cdot g'(1) = g(1) \\ &= \frac{1}{2013 \times 2014}. \end{aligned}$$

【注】在 2012 年的考研中考了类似问题, 在本书总序中也有所提及.

【例 3.4】设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是()

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
- (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$
- (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在
- (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

【分析与解答】有一个重要命题: 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = A$, 则

$f(a)=0$, $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 且 $f'(a)=A$. 请考生按照导数定义自己证明并记住. 由此可知, (A)(C)正确

选项(B): 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 因 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f(-x)] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(-x) = f(0) + f(0) = 0, \text{故 } f(0) = 0.$$

(D) 选项错误原因与例 3.1 的(D)选项一样.

【注】常见结论：

- ①若 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = A$, 则 $f(a) = 0$, $f(x)$ 在点 $x = a$ 处可导, 且 $f'(a) = A$.
- ②若 $f'(x)$ 在点 $x = a$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} = A$, 则 $f'(a) = 0$ 且 $f''(a) = A$, 若 $A \neq 0$, 则 $x = a$ 为 $f(x)$ 的极值点.

3.2.2 导数的几何意义

【例 3.5】已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x = 0$ 的某邻域内满足关系式:

$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

【分析与解答】求切线的方程关键是求斜率, 因 $f(x)$ 的周期为 5, 故在 $(6, f(6))$ 处和点 $(1, f(1))$ 处曲线有相同的斜率, 根据已知条件求出 $f'(1)$.

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} [f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)] = \lim_{x \rightarrow 0} (8x + \alpha(x))$$

$$\text{得 } f(1) - 3f(1) = 0, f(1) = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + \alpha(x)}{\sin x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - f(1) + 3[f(1) - f(1 - \sin x)]}{\sin x} = 8,$$

$$\text{则 } 4f'(1) = 8, f'(1) = 2,$$

$$\text{由 } f(6) = f(1) = 0, f'(6) = f'(1) = 2,$$

$$\text{故所求切线方程为 } y = 2(x - 6).$$

3.2.3 两组易混淆的概念

$$1. f'(x_0) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

不少同学在平时学习过程中, 会把导函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的左右极限 $f'(x_0 - 0)$ 和 $f'(x_0 + 0)$ 当成 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数 $f'_{-}(x_0)$ 和 $f'_{+}(x_0)$, 错误认为 $f'(x_0 - 0) = f'_{-}(x_0)$ 和 $f'(x_0 + 0) = f'_{+}(x_0)$, 实际上这是不同的概念:

$$(1) f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^{-}} f'(x), (2) f'_{-}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^{-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$f(x)$ 在 x_0 点是可导的, 但 $f'(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

例如, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 是可导的, $f'_{-}(0) = f'_{+}(0) = f'(0) = 0$,

$$\text{但其导函数 } f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 左极限 $f'(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \right)$ 不存在, 因而 $f'_{-}(0) \neq f'(0-0)$.

2. 导数存在 $\overset{?}{\equiv}$ 导数连续

设 $y = f(x)$, 若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 即 $f_{+}^{(n)}(x_0) = f_{-}^{(n)}(x_0)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = A \text{ (常数)},$$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 n 阶导数连续. 由此可见,

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的某阶导数存在, 却不一定在该点连续. 当然, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的高阶导数存在, 在该点的低阶导数一定连续.

【例 3.6】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, $f(0) = 0$, $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

① 确定 a , 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

② 证明对以上确定的 a , $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续的一阶导数.

【分析与解答】 ① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$,

当 $x \neq 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 显然连续.

故 $a = f'(0)$ 时, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

② $g'(x) = \begin{cases} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}f''(0), & x = 0 \end{cases}$

其中 $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - xf'(0)}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2}f''(0).$

要使 $g'(x)$ 连续, 须满足 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = g'(0)$,

而 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - xf'(0) + xf'(0) - f(x)}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf''(0) - f(x)}{x^2}$$

$$= f''(0) - \frac{1}{2}f''(0) = \frac{1}{2}f''(0) = g'(0).$$

因而 $g'(x)$ 连续.

【注】此题在计算 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ 时, 不少同学会使用洛必达法则:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + xf''(x) - f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}.$$

(这是错误解法, 你能看出其中的错误吗?)

【例 3.7】设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且 $g(0) = 1$,

$g'(0) = -1$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

【分析与解答】当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 可导, 且

$$f'(x) = \frac{x[g'(x) + e^{-x}] - g(x) + e^{-x}}{x^2}, \text{显然, 当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) \text{ 连续.}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } x = 0 \text{ 时, } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2}[g''(0) - 1], \end{aligned}$$

$$\text{从而, } f'(x) = \begin{cases} \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}[g''(0) - 1], & x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{又因 } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg''(x) - xe^{-x}}{2x} = \frac{1}{2}[g''(0) - 1] \end{aligned}$$

故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 从而 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

3.2.4 一元函数导数的基本性质

总结如下一元函数导数的性质, 对解题会有很大的帮助.

①偶函数的导函数是奇函数, 奇函数的导函数是偶函数.

【证明】设 $f(x)$ 为偶函数, 即 $f(x) = f(-x)$

$$\text{因 } f'(-x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-(x - \Delta x)) - f(-x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -f'(x)$$

故 $f'(x)$ 为奇函数, 同理可证: 奇函数的导函数是偶函数.

② 可导的周期函数的导函数是周期函数, 且周期不变.

③ $y = |x - a|^k$, $k > 1$ 时, 函数在 a 点可导, 当 $k \leq 1$ 时, 函数在 a 点不可导.

$$\begin{aligned}\text{【证明】} I &= f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|x - a|^k}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} |x - a|^{k-1} \cdot \frac{|x - a|}{x - a}\end{aligned}$$

当 $k - 1 > 0$ 时, 即 $k > 1$, $I = 0$;

当 $k - 1 = 0$ 时, 即 $k = 1$. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x - a|}{x - a}$ 不存在, 故 I 不存在, 即 $y = |x - a|^k$ 在 a 点不可导;

当 $k - 1 < 0$ 时, 即 $k < 1$. I 不存在, 即 $y = |x - a|^k$ 在 a 点不可导.

④ 设 $f(x) = (x - a)^k |x - a|$, 当 k 为正整数时, $f(x)$ 在 $x = a$ 处 k 阶可导, 但 $(k+1)$ 阶导数不存在.

$$\text{【证明】} \text{因 } f(x) = \begin{cases} (x - a)^{k+1}, & x \geq a \\ -(x - a)^{k+1}, & x < a \end{cases}$$

当 $x > a$ 时, $f'(x) = (k+1)(x - a)^k$,

当 $x < a$ 时, $f'(x) = -(k+1)(x - a)^k$;

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^k = 0$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} (-(x - a)^k) = 0$$

$$\text{故 } f'(x) = \begin{cases} (k+1)(x - a)^k, & x > a \\ 0, & x = a \\ -(k+1)(x - a)^k, & x < a \end{cases}$$

$$\text{不难得出, } f^{(k)}(x) = \begin{cases} (k+1)! (x - a), & x > a \\ 0, & x = a \\ -(k+1)! (x - a), & x < a \end{cases}$$

而 $f_+^{(k+1)}(a) = (k+1)!$, $f_-^{(k+1)}(a) = -(k+1)!$

即 $f^{(k+1)}(a)$ 不存在.

综上所述, 原命题得证.

⑤ 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 那么

(i) 若 $f(a) \neq 0$ 时, 则 $|f(x)|$ 在 a 点可导;

(ii) 若 $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, 则 $|f(x)|$ 在 a 点可导, 且导数为 0;

(iii) 若 $f(a) = 0$, $f'(a) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 a 点不可导.

【证明】(i) 若 $f(a) \neq 0$ 时,

$$(|f(x)|)'_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \begin{cases} f'(a), & f'(a) > 0 \\ -f'(a), & f'(a) < 0 \end{cases}$$

(ii) 若 $f(a) = 0$, 且 $f'(a) = 0$,

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0, \text{ 得 } \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{x - a} \right| = 0$$

$$\text{故 } (|f(x)|)'_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\left| \frac{f(x)}{x - a} \right| \cdot \frac{|x - a|}{x - a} \right) = 0.$$

(iii) 若 $f(a) = 0, f'(a) \neq 0$,

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{x - a} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} \right| = |f'(a)|$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \left| \frac{f(x)}{x - a} \right| = - \left| \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{x - a} \right| = -|f'(a)|$$

$$\text{故 } (|f(x)|)'_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} \text{ 不存在.}$$

⑥ 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续, 且 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点可导, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导.

【证明】 设 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点导数为 A ,

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = A$$

$$(i) \text{ 若 } f(a) = 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)|}{x - a} = A$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)|}{x - a} \geqslant 0, \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|f(x)|}{x - a} \leqslant 0, \text{ 从而 } A = 0$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = 0, \text{ 从而 } f(x) \text{ 在 } x=a \text{ 点可导.}$$

(ii) 若 $f(a) > 0$, 因 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续, 即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, 故 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, 由极限保号性可得, $x \in U(a)$, $f(x) > 0$ 从而 $A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, 从而 $f(x)$ 在点 a 可导, 且 $f'(a) = A$.

(iii) 若 $f(a) < 0$, 同(ii), 可得 $f'(a) = -A$.

综上所述, $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导.

【例 3.8】若 $f(x) = -f(-x)$, 且在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内()

$$(A) f'(x) < 0, f''(x) < 0 \quad (B) f'(x) < 0, f''(x) > 0$$

$$(C) f'(x) > 0, f''(x) < 0 \quad (D) f'(x) > 0, f''(x) > 0$$

【分析与解答】 $f(x)$ 为奇函数, 由①可得 $f'(x)$ 为偶函数, $f''(x)$ 为奇函数, 故选(C).

【例 3.9】 $f(x) = (x^2 - x - 2) |x^3 - x|$ 的不可导点的个数是()

$$(A) 3 \quad (B) 2 \quad (C) 1 \quad (D) 0$$

【分析与解答】 $f(x) = (x+1)(x-2) |x(x-1)(x+1)|$

由④可知 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导, 故不可导点 $x=0, x=1$ 两个点, 故选(B).

【例 3.10】 $f(x) = 3x^3 + x^2 |x|$, 则 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶 n 为()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【分析与解答】 由④可知: $x^2|x| = (x-0)^2|x-0|$

$n=2$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导. 故选(C).

【例 3.11】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导的充分条件()

- (A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$ (B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$
 (C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$ (D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

【分析与解答】 由⑤可知, 此题选(B).

【例 3.12】 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的()

- (A) 充分必要 (B) 必要但非充分
 (C) 充分但非必要 (D) 既非充分又非必要

【分析与解答】

解法一: 由导数定义

$$\begin{aligned} F'_{+}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^{+}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^{+}} \frac{f(x)+f(x)\sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^{+}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} + \lim_{x \rightarrow 0^{+}} \frac{f(x)\sin x}{x} \\ &= f'_{+}(0)+f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'_{-}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^{-}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= f'_{-}(0)-f(0) \end{aligned}$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 点可导 $\Leftrightarrow F'_{+}(0)=F'_{-}(0) \Leftrightarrow f(0)=0$. 故答案选(A).

解法二: $F(x) = f(x)+f(x)|\sin x|$.

$|\sin x|$ 在 $x=0$ 连续, 但不可导, $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 故 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 点可导的充要条件.

3.2.5 求各类函数的导数与微分

1. 求复合函数的导数

关键搞清楚复合关系, 由表及里一层层地求导.

【例 3.13】 求下列函数的导数:

$$(1) y = a^{a^x} + a^{x^x} + a^{x^a} + a^{a^a} \quad (a>0);$$

$$(2) y = e^{f(x)} \cdot f(e^x);$$

$$(3) y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right), f'(x) = \arctan x^2, \frac{dy}{dx}|_{x=0};$$

$$(4) \text{设 } f(t) \text{ 具有二阶导数, } f\left(\frac{1}{2}x\right) = x^2, \text{ 求 } f(f'(x)), (f(f(x)))'.$$

【分析与解答】

$$(1) y' = a^{x^a} \cdot \ln a + a^x \ln(a \cdot a^x) + a^{x^a} \cdot \ln a \cdot a^{x^a}$$

$$\text{其中, } (x^a)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (\ln a + 1) = x^a (\ln a + 1).$$

$$(2) y' = e^{f(x)} \cdot f'(x) + e^{f(x)} \cdot f'(e^x) e^x.$$

$$(3) y' = f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)'$$

$$= \arctan\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2 \frac{3(3x+2)-3(3x-2)}{(3x+2)^2}$$

$$\text{故 } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{3}{4}\pi.$$

$$(4) \text{令 } t = \frac{1}{2}x, \text{ 则 } f(t) = 4t^2, \text{ 即 } f(x) = 4x^2.$$

$f'(x) = 8x$, 由函数概念得

$$f(f'(x)) = f(8x) = 4 \times (8x)^2 = 256x^2$$

$$(f(f(x)))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) = 8f(x) \cdot 8x = 32x^2 \cdot 8x = 256x^3.$$

2. 求隐函数的导数与微分

方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的可导函数 y 的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 有以下三种方法:

方法 1: 在方程两边同时对 x 求导, 可得到一个含有 y' 的方程, 从中解出 y' .

方法 2: 利用公式 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$, 其中 $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ 分别表示对 x 和 y 的偏导数.

方法 3: 利用一阶微分形式不变性, 在方程两端求微分, 然后解出 $\frac{dy}{dx}$.

【例 3.14】 (1) 设 $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctan \frac{y}{x}}$, 求 y' .

(2) 函数 $y = y(x)$ 由方程 $\cos(x^2 + y^2) + e^x - x^2 y = 0$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

【分析与解答】 (1) 两边取对数, 得 $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \arctan \frac{y}{x}$,

两边同时对 x 求导, 得

$$\frac{2x + 2yy'}{2(x^2 + y^2)} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2}.$$

$$\text{化简可得 } x + yy' = xy' - y, \text{ 故 } y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

(2) **解法一:** 方程两端对 x 求导

$$-\sin(x^2 + y^2)(2x + 2yy') + e^x - 2xy - x^2 y' = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x\sin(x^2 + y^2) + 2xy - e^x}{x^2 + 2y\sin(x^2 + y^2)}$$

解法二: 令 $F(x, y) = \cos(x^2 + y^2) + e^x - x^2 y$

$$F'_x(x, y) = -\sin(x^2 + y^2) \cdot 2x + e^x - 2xy$$

$$F'_y(x, y) = -\sin(x^2 + y^2) \cdot 2y - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{2x\sin(x^2 + y^2) + 2xy - e^x}{x^2 + 2y\sin(x^2 + y^2)}.$$

解法三：方程两端求微分

$$-\sin(x^2 + y^2)(2xdx + 2ydy) + e^x dx - 2xy dx - x^2 dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x\sin(x^2 + y^2) + 2xy - e^x}{x^2 + 2y\sin(x^2 + y^2)}.$$

3. 连乘形式和幂指函数求导法

适用以下形式：①幂指函数 $y = f(x)g(x)$ ，($f(x) > 0$)；②连乘形式；③分式形式；④根式形式等等。用对数求导法，即在函数表达式两端取自然对数，然后在等式两端对自变量求导。

【例 3.15】 $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b$ ($a > 0, b > 0$).

【分析与解答】 两边取对数

$$\ln y = x \ln \frac{a}{b} + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a)$$

求导，得 $y' \cdot \frac{1}{y} = \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}$

$$y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left[\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right].$$

【例 3.16】 $y = \sqrt{e^{\frac{1}{x}}} \sqrt{x} \sqrt{\cos x}$.

【分析与解答】 因 $y = \{e^{\frac{1}{x}} [x^{\frac{1}{2}} \cos^{\frac{1}{4}} x]\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2x}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot \cos^{\frac{1}{8}} x$

故 $\ln y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \ln x + \frac{1}{8} \ln \cos x$

$$y' \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \frac{\sin x}{\cos x}$$

则 $y' = \sqrt{e^{\frac{1}{x}}} \sqrt{x} \sqrt{\cos x} \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \tan x \right).$

4. 求由参数方程确定的函数的导数

【例 3.17】 设 $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du \end{cases}$ ，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析与解答】 应填 0

解法一：因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} \right] \frac{1}{dx} = e^{2t} \left[\frac{2t}{1+t^2} + \ln(1+t^2) \right]$$

所以 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = 0$.

解法二:由 $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du \end{cases}$, 得 $y = \int_0^{-\ln x} \ln(1+u^2) du$, 所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \ln(1+\ln^2 x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left[\ln(1+\ln^2 x) - \frac{2\ln x}{1+\ln^2 x} \right]$$

又当 $t = 0$ 时, $x = 1$, 所以 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = 0$.

【例 3.18】设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ ($t > -1$) 所确定, 其中 $\varphi(t)$ 具有

二阶导数, 且已知 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 证明函数 $\varphi(t)$ 满足方程 $\varphi''(t) - \frac{1}{1+t}\varphi'(t) = 3(1+t)$.

【证明】因为 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{2+2t} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2+2t)\varphi''(t)-2\varphi'(t)}{(2+2t)^2} = \frac{(1+t)\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4(1+t)^3} \end{cases}$

由题设 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 得 $\frac{(1+t)\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4(1+t)^3} = \frac{3}{4(1+t)}$

故 $(1+t)\varphi''(t)-\varphi'(t) = 3(1+t)^2$

即 $\varphi''(t) - \frac{1}{1+t}\varphi'(t) = 3(1+t)$

证毕.

5. 分段函数的导数

【例 3.19】设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 试问当 α 取何值时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处, ①连

续, ②可导, ③一阶导数连续, ④二阶导数存在.

【分析与解答】 ①因当 $\alpha \leq 0$ 时, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

而当 $\alpha > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0$,

故 $\alpha > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

$$\textcircled{2} f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cdot \sin \frac{1}{x}.$$

当 $\alpha - 1 > 0$ 时, 即 $\alpha > 1$ 时, $f'(0) = 0$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导.

$$\textcircled{3} f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 (\alpha > 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\alpha x^{\alpha-1} \frac{1}{\sin x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} \right)$$

当 $\alpha > 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 - 0 = 0 = f'(0)$.

$$\textcircled{4} f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\alpha x^{\alpha-3} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-4} \cos \frac{1}{x} \right)$$

当 $\alpha \leq 3$ 时, $f''(0)$ 不存在; 当 $\alpha > 3$ 时, $f''(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处二阶可导.

【注】由此题可得出结论:

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, & \beta > 0, x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

则当 $\alpha > 0$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续;

当 $\alpha > 1$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导;

当 $\alpha > \beta + 1$ 时, $f(x)$ 的导数在点 $x = 0$ 处连续.

6. 求变限积分的导数

(1) 仅积分限含参变量的变限积分的导数.

利用下面公式去计算.

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x).$$

(2) 积分限及被积函数中含参变量的变限积分的导数.

对此种函数求导, 先利用定积分的性质或变量代换将被积函数中的参变量去掉, 再利用上述公式.

【例 3.20】(1) 设 $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sin(\pi t^2) dt$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $\frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$

【分析与解答】(1) $f'(x) = \sin[\pi(\sin x)^2] \cdot (\sin x)' - \sin[\pi(\cos x)^2] \cdot (\cos x)'$
 $= \sin[\pi(\sin x)^2] \cdot \cos x + \sin x \sin(\pi \cos^2 x).$

(2) $\int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt = -x \int_0^{x^2} \cos t^2 dt,$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^0 x \cos t^2 dt \right) = - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt - x \cdot \cos x^4 \cdot 2x = - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt - 2x^2 \cos x^4.$$

$$(3) \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \stackrel{\text{令 } u = x^2 - t^2}{=} \frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du,$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x = xf(x^2).$$

7. 高阶导数的求法

(1) 有理分式函数的高阶导数

求解步骤为：

- 把所给的有理分式函数表示成多项式与有理真分式的和；
- 把有理真分式分解成部分分式的和；
- 利用 $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}$ 公式来求解.

【例 3.21】 设 $y = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$, 求 $y^{(n)}$ ($n > 1$).

$$\text{【分析与解答】} y = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} = x + 3 + \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{设 } \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}, \text{ 经计算 } A = 8, B = -1.$$

$$\text{故 } y = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} = (x+3) + \frac{8}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

$$y^{(n)} = 8 \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} = 8 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \quad (n > 1).$$

(2) 三角函数

由三角函数运算公式, 把 $f(x)$ 化为 $\sum_{i=1}^M \sin(a_i x) + \sum_{j=1}^N \cos(a_j x)$, 再利用公式计算.

【例 3.22】 设 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$, 求 $y^{(n)}$.

【分析与解答】 因 $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$

$$y^{(n)} = -2^n \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) = -2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

(3) 其他函数的高阶导数

利用莱布尼兹公式, 或用数学归纳法归纳, 递推, 级数知识等.

【例 3.23】 设 $y = e^x \sin x$, 求 $y^{(n)}$.

$$\text{【分析与解答】} y' = e^x \sin x + \cos x \cdot e^x = e^x \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y'' = (\sqrt{2})^2 e^x \sin\left(x + \frac{2}{4}\pi\right)$$

$$\text{归纳可得: } y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n}{4}\pi\right).$$

【例 3.24】 设 $y = \frac{x^n}{1-x} + x \cos^2 x$, 求 $y^{(n)}$ ($n \geq 2$).

【分析与解答】

$$y = \frac{x^n - 1 + 1}{1-x} + x \frac{1 + \cos 2x}{2} = -(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) + \frac{1}{1-x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \cos 2x,$$

$$\text{因为 } (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)^{(n)} = 0, \left(\frac{x}{2}\right)^{(n)} = 0, \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}},$$

$$(x \cos 2x)^{(n)} = C_n^0 x (\cos 2x)^{(n)} + C_n^1 x' (\cos 2x)^{(n-1)}$$

$$= 2^n x \cos\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + n 2^{n-1} \cos\left[2x + (n-1) \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\text{所以, } y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + 2^n x \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) + n 2^{n-1} \cos\left[2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right].$$

【例 3.25】 函数 $y = \ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析与解答】 由于 $y(0) = 0$,

$$y'(x) = \frac{-2}{1-2x} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n,$$

$$\text{所以 } y(x) - y(0) = \int_0^x y'(x) dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n.$$

$$y(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n,$$

$$\text{即有 } \frac{y^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{2^n}{n},$$

$$\text{因此 } y^{(n)}(0) = -2^n (n-1)!.$$

【例 3.26】 设 $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$, 求 $y^{(n)}(0)$.

$$\text{【分析与解答】当 } x \neq 0 \text{ 时, } y = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n},$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \Big|_{x=0} = 1,$$

$$\text{故对任意 } x \in (-\infty, +\infty), \text{ 都有 } y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

$$\text{又 } y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n, \text{ 比较系数, 得}$$

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n = 2k-1) \\ \frac{(-1)^k}{2k+1} & (n = 2k) \end{cases}.$$

【例 3.27】求函数 $f(x) = x^2 \ln(x+1)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ ($n \geq 3$).

【分析与解答】

解法一:由莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)}$$

及 $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, n 为正整数, 则

$$f^{(n)}(x) = x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(x+1)^{n-1}} + n(n-1) \cdot \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(x+1)^{n-2}}$$

$$\text{所以 } f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

解法二:由麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\text{及 } x^2 \ln(1+x) = x^2 \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}) \right]$$

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n-2} + o(x^n),$$

$$\text{比较 } x^n \text{ 的系数得 } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2}, \text{ 所以 } f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

第 4 讲 一元函数积分学的概念与计算

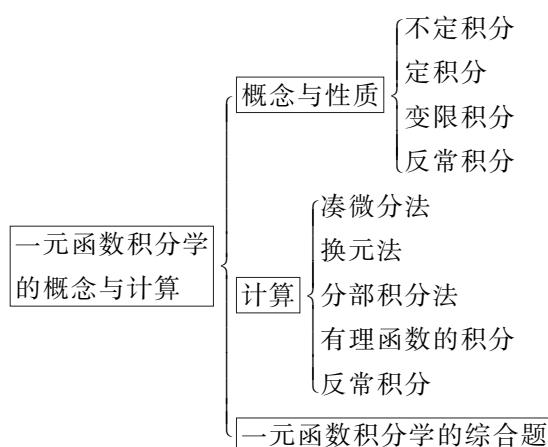
» 导语

本讲讨论一元函数积分的基本概念和基本积分法,从概念角度说,不定积分、定积分、变限积分与反常积分的概念极其丰富但是特别容易混淆,是考研的重点,区分度极高;从计算角度说,和极限计算、导数计算一样,积分的计算能力是考研数学考查的最基本能力,需要考生多花时间,多下力气,所谓熟能生巧(practice makes perfect),只要功夫到家了,积分能力自然就有了.

» 大纲要求

1. 原函数的概念,不定积分的概念.
2. 不定积分的基本公式,不定积分的性质,换元积分法与分部积分法.
3. 有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.
4. 定积分的概念.
5. 定积分的性质及定积分中值定理,换元积分法与分部积分法.
6. 积分上限的函数,会求它的导数,牛顿—莱布尼茨公式.
7. 反常积分的概念和计算(注意这里没有谈到敛散性的判别,但是实际考题却常考收敛).

» 知识体系



4.1 考试内容分析

4.1.1 不定积分、定积分、变限积分与反常积分的概念与性质

1. 不定积分的概念与存在性

(1) 原函数 设函数 $f(x)$ 定义在某区间 I 上, 若存在可导函数 $F(x)$, 对于该区间上任一点都有 $F'(x) = f(x)$ 成立, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

(2) 不定积分 承接上述概念, 称 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 其中 C 为任意常数.

【注】① 考研中常用的原函数的一个具体形式: 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数.

② 上述①事实上也就是如下微积分基本定理: 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

【证明】若 $x \in (a, b)$, 取 Δx 使 $x + \Delta x \in (a, b)$, 则

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt,\end{aligned}$$

使用积分中值定理, 有 $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x$, 其中 ξ 在 x 与 $x + \Delta x$ 之间,

$\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow x$, 于是

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

若 $x = a$, 取 $\Delta x > 0$, 则同理可证 $F'_+(x) = f(a)$; 若 $x = b$, 取 $\Delta x < 0$, 则同理可证 $F'_-(x) = f(b)$.

(3) 原函数(不定积分)存在定理 ① 连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$; ② 含有第一类间断点、无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$.

【注】对于①,事实上它就是上面注的②:微积分基本定理,其证明已经给出;

对于②,设 $F(x)$ 在 (a,b) 内可导,并设 $x = x_0$ 为 $F'(x)$ 的第一类间断点,则只有下述两种情况:

(1) $x = x_0$ 为第一类可去间断点,即 $\lim_{x \rightarrow x_0} F'(x)$ 存在 $= A$,但 $A \neq F'(x_0)$,

而 $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} F'(x) = A$,产生矛盾;

(2) $x = x_0$ 为第一类可去间断点,即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F'(x)$ 存在 $= A_+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} F'(x)$ 存在 $= A_-$,

但 $A_+ \neq A_-$,而由

$$F'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} F'(x) = A_+$$

$$F'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} F'(x) = A_-$$

$F'(x_0)$ 又是存在的,则 $F'_+(x_0) = F'_-(x_0)$,即 $A_+ = A_-$,矛盾;

综上所述(1)与(2)均不可能,即导函数 $F'(x)$ 在 (a,b) 内必定没有第一类间断点,也即含有第一类间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内没有原函数 $F(x)$.

关于②中的无穷间断点,请考生仿照上面的证法自己独立给出证明.

至于第二类振荡间断点是否有原函数呢?举例说来,对于

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{其在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上不连续,它有一个第二}$$

类振荡间断点 $x = 0$,但是它在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在原函数 $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

即,对于 $(-\infty, +\infty)$ 上任一点都有 $F'(x) = f(x)$ 成立.

综合以上几点,可以得出重要结论:可导函数 $F(x)$ 求导后的函数 $F'(x) = f(x)$ 不一定是连续函数,但是如果有关断点,一定是第二类间断点.

2. 定积分的概念、存在与性质

(1) 定积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

【注】①若 $f(x) < 0$, 曲边梯形就在 x 轴下方, 定积分的绝对值仍等于曲边梯形的面积, 但定积分的值是负的;

②当我们说到“ a 到 b 上的定积分”时, 并不要总认为 $a < b$, 事实上, $a > b$ 的情形是完全可以的, 只不过注意, $a < b$ 时, $dx > 0$; $a > b$ 时, $dx < 0$.

③定积分的定义由德国的数学家波恩哈德·黎曼 (Bernhard Riemann) 给出, 故这种积分又被称为黎曼积分.

④定积分的精确定义(重点)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n}$$

“凑定积分定义”的步骤如下:

1° 先提出 $\frac{1}{n}$;

2° 再凑出 $\frac{i}{n}$;

3° 由于 $\frac{i}{n} = 0 + \frac{1-0}{n} i$, 故 $\frac{i}{n}$ 可以读作“0 到 1 上的 x ”, 且 $\frac{1}{n} = \frac{1-0}{n}$, 读作“0 到 1 上的 dx ”,

于是, “凑定义”成功!

比如, 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \frac{n+3}{n^2+9} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n^2} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{【分析与解答】 } I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \frac{n+3}{n^2+9} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{n^2+i^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{n^2+ni}{n^2+i^2}}{\frac{n^2+i^2}{n^2+i^2}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1 + \frac{i}{n}}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \\ &\stackrel{③}{=} \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

(2) 定积分存在定理

定积分的存在性, 也称之为一元函数的(常义)可积性.

这里的“常义”是指“区间有限, 函数有界”, 这也是黎曼积分的前提要求, 故也有人称为“黎曼”可积性, 与后面要谈到的“区间无穷, 函数无界”的“反常”积分有所区别. 在本讲中所谈到的可积性都是指的常义可积性.

①若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

②若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

上述定积分存在定理也称为定积分存在的充分条件.

【注】定积分存在的必要条件 可积函数必有界. 即, 若 $\int_a^b f(x) dx$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界.

不妨这样理解: 当我们任意分割图形底边为若干小段时, 若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上无界, 则至少存在一个小段 Δx , 在 Δx 上, $f(x)$ 可以任意大, 于是一个“小竖条”的面积 $f(x)\Delta x$ 便可以无穷大, 这样, 整个曲边梯形的面积就是无穷大, 于是极限就不存在了, 所以, 可积函数必有界.

(3) 定积分的性质(以下假设所写积分均存在)

性质 1 求区间长度 假设 $a < b$, $\int_a^b dx = b - a = L$ 其中 L 为区间 $[a, b]$ 的长度.

性质 2 积分的线性性质 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx.$$

性质 3 积分的可加(可拆)性 无论 a, b, c 谁大谁小,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

性质 4 积分的保号性 若在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

特殊地, 有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

【注】事实上, 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上非负的连续函数, 且 $f(x)$ 不恒等于零, 则必有 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

【证明】因函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不恒等于零, 且非负, 故至少存在一点 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) \neq 0$, $f(x_0) > 0$.

因函数 $f(x)$ 连续, 故有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$, 按极限的保号性质知, 存在 $\delta > 0$

与 $\eta > 0$, 使得当 $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 时恒有 $f(x) > \eta > 0$.

根据定积分的性质, 便有

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx \geq \eta \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx = 2\eta\delta > 0.$$

作为该命题的推论, 若连续函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足 $f(x) \geq g(x)$, 且 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$, 又 $a < b$, 则必有严格不等式

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

在相应的积分不等式证明与定积分值的估计中, 可以利用这个结论获得严格的不等式结论.

性质5 估值定理 设 M, m 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, L 为区间 $[a, b]$ 的长度, 则有

$$mL \leqslant \int_a^b f(x) dx \leqslant ML.$$

性质6 中值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

3. 不定积分与定积分的联系与区别

以下给出四个例子, 通过讲具体内容来给考生明确区分不定积分与定积分.

【例4.1】设 $f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 则在任意一个包含 $x = 0$ 在其内部的区间 $[a, b]$ 上, 一定不存在原函数. 但由于该 $f(x)$ 满足定积分存在定理, 故定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

【例4.2】设 $f(x) = \begin{cases} 2x\sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处有振荡间断点, 但是容易验证 $F'(x) = f(x)$, ($-\infty < x < +\infty$), 所以 $f(x)$ 存在原函数: $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

但定积分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 不存在, 因为在 $x = 0$ 的邻域 $f(x)$ 无界.

【例4.3】设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 该 $f(x)$ 在包含 $x = 0$ 在内的区间上总不存在原函数,

定积分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 也不存在.

【例4.4】 $f(x) = \begin{cases} 2x\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在原函数 $F(x) =$

$\begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 并且定积分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 也存在.

这里再谈一个大家一直不清晰的问题—— $\int \frac{1}{x} dx = ?$ $\ln |x| + C$.

请回看例4.3, 显然, $x = 0$ 是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷间断点, 故在任意一

一个包含 $x = 0$ 点在内的区间上 $f(x) = \frac{1}{x}$ 都不可积, 也不存在原函数. 所以, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上记号 $\int \frac{1}{x} dx$ 是没有意义的(不存在的东西当然没有意义了). 所以我们不可以把 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ 说成 $\ln|x|$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个原函数.

不过, 如果将 $(-\infty, +\infty)$ 分开, 在 $(0, +\infty)$ 上 $f(x) = \frac{1}{x}$ 有一个原函数 $\ln x$, 即在 $x > 0$ 时, 有 $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$, 同理, 在 $x < 0$ 时, 有 $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$. 把两式合并起来才有 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, 所以严格来说, 它确实不是不定积分公式. 我们把它列入“不定积分公式表”不过是一种“约定俗成”.

4. 变限积分与牛顿—莱布尼兹公式

(1) 变限积分

当 x 在 $[a, b]$ 上变动时, 对应于每一个 x 值, 积分 $\int_a^x f(t) dt$ 就有一个确定的值, $\int_a^x f(t) dt$ 因此是变上限的一个函数, 记作

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

称函数 $\Phi(x)$ 为变上限的定积分. 同理可以定义变下限的定积分和上下限都变化的定积分, 这些都称为变限积分. 事实上, 变限积分就是定积分的推广.

(2) 变限积分的性质

① 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续.

② 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导.

【证明】由于②已经证过, 下面只证①.

$\forall x, x + \Delta x \in [a, b]$ (当 $x = a$ 时, $0 < \Delta x < b - a$; 当 $x = b$ 时, $a - b < \Delta x < 0$), 则 $F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$.

由可积的必要条件可知, 存在 $M > 0$, 在 $[a, b]$ 上有 $|f(x)| \leq M$, 所以有

$$0 \leq |F(x + \Delta x) - F(x)| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)| dt \leq M |\Delta x|,$$

则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |F(x + \Delta x) - F(x)| = 0$, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = 0$, 或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(x + \Delta x) = F(x)$, 得证.

【注】你是否发现: 变限积分 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 只要存在就必然连续.

(3) 变限积分的求导公式

设 $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt$, 则

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right) = f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x).$$

比如, 求 $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} (x^2 - t)f(t) dt$, 其中 $f(t)$ 为已知的连续函数. 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left[x^2 \int_0^{x^2} f(t) dt - \int_0^{x^2} tf(t) dt \right]' = 2x \int_0^{x^2} f(t) dt + x^2 f(x^2) \cdot 2x - x^2 f(x^2) \cdot 2x \\ &= 2x \int_0^{x^2} f(t) dt. \end{aligned}$$

(4) 牛顿—莱布尼兹公式

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{F'(x)=f(x)} F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

【注】刚才已经说到, 间断函数也可能有原函数, 例如,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 不连续, 但显然 $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 因为

$f(x)$ 是在 $[0, 1]$ 上只有一个间断点 ($x = 0$) 的有界函数, 所以可积, 从而 $\int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = \sin 1$.

这里用到了牛顿—莱布尼兹公式的推广: 在积分区间 $[a, b]$ 上只有有限个间断点的被积函数 $f(x)$, 只要原函数在 $[a, b]$ 上连续, 牛顿—莱布尼兹公式仍有效.

5. 反常积分的概念与存在

(1) 无穷区间上反常积分的概念与存在

$$\textcircled{1} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ 的定义} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

若上述极限存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 否则称为发散.

$$\textcircled{2} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \text{ 的定义} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

若上述极限存在, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 收敛, 否则称为发散.

$$\textcircled{3} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ 的定义} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_c^{+\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^c f(x) dx.$$

若右边两个反常积分都收敛,则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛,否则称为发散.

(2) 无界函数的反常积分的概念与存在

①若 b 是 $f(x)$ 的唯一奇点,则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 定义为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

若上述极限存在,则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛,否则称为发散.

【注】这里我们发现,说到 b 是 $f(x)$ 的奇点,即 $x = b$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点,这时 $f(x)$ 是一个无界函数了,积分 $\int_a^b f(x) dx$ 还有可能存在;细心的同学可能会联想到,前面我们不是说:“ $\int_a^b f(x) dx$ 存在的必要条件是 $f(x)$ 有界”吗? 这不是矛盾了吗? 怎么解释呢? 事实上,请注意,我们在前面就强调了,那里的 $\int_a^b f(x) dx$ 被称为定积分(黎曼积分),而这里的 $\int_a^b f(x) dx$ 被称为反常积分,它们并不是一个概念. 所以,没有任何矛盾. 只是当你读完这一段后,最好今后在提到积分存在时,特别强调一下,是定积分存在(黎曼可积,常义可积),还是反常积分存在(广义可积).

②若 a 是 $f(x)$ 的唯一奇点,则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 定义为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx.$$

若上述极限存在,则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛,否则称为发散.

③若 $c \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的唯一奇点,则无界函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 定义为

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

若上述右边两个反常积分都收敛,则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛,否则称为发散.

4.1.2 一元积分学的计算

1. 混合分法

(1) 基本思想 $\int f[g(x)] g'(x) dx = \int f[g(x)] d[g(x)] = \int f(u) du$

当被积函数比较复杂时,拿出一部分放到 d 后面去,若能凑成 $\int f(u) du$ 的形式,则凑微

分成功。比如, $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int \ln^5 x \left[\frac{1}{x} dx \right] = \int \ln^5 x [d(\ln x)] = \frac{\ln^6 x}{6} + C$.

(2) 归纳总结凑微分的思维结构

① 熟练掌握教材中的基本积分公式及常用的凑微分公式。比如能熟练计算下面这种题目：

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^3}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4-(x^{\frac{3}{2}})^2}} = \frac{2}{3} \int \frac{dx^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \right)^2}} = \frac{2}{3} \int \frac{d\left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} \right)^2}} =$$

$$\frac{2}{3} \arcsin\left(\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

② 当被积函数可分为 $f(x)g(x)$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 其中 $f(x)$ 较复杂时, 对 $f(x)$ 求导数(或其主要部分求导), 一般得到 $g(x)$ 的倍数, 既可以是常数倍, 也可以是函数倍, 从而凑微分进行计算. 即: 若 $f(x) = Ag(x)$, 则 $df(x) = Ag(x)dx$, 于是

$$I = \int f(x)g(x)dx = \frac{1}{A} \int f(x)Ag(x)dx = \frac{1}{A} \int f(x)df(x).$$

当对 $f(x)$ 求导得不到 $g(x)$ 的倍数时, 考虑“被积函数的分子分母”, 同乘以或同除以一个适当的因子, 恒等变形以达到凑微分的目的. 一般而言, 因子应根据题设函数给出, 常用的有 $e^{ax}, x^\beta, \sin x, \cos x$ 等. 比如能熟练计算下面这种题目: 计算 $\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x(1 + \cos x e^{\sin x})} dx$.

由于 $(\cos x e^{\sin x})' = -\sin x e^{\sin x} + \cos^2 x e^{\sin x} = (\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x}$, 则

$$d(\cos x e^{\sin x}) = (\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{于是, } I &= \int \frac{(\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x}}{\cos x e^{\sin x} (1 + \cos x e^{\sin x})} dx = \int \frac{d(\cos x e^{\sin x})}{\cos x e^{\sin x} (1 + \cos x e^{\sin x})} \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos x e^{\sin x}} - \frac{1}{\cos x e^{\sin x} + 1} \right) d(\cos x e^{\sin x}) = \ln \left| \frac{\cos x e^{\sin x}}{1 + \cos x e^{\sin x}} \right| + C \end{aligned}$$

2. 换元法

(1) 基本思想

$$\int f(x)dx \xrightarrow{x=g(u)} \int f[g(u)]d[g(u)] \Big|_{u=g^{-1}(x)} = \int f[g(u)]g'(u)du \Big|_{u=g^{-1}(x)}$$

当被积函数不容易积分(比如含有根式, 含有反三角函数)时, 可以通过换元的方法从 d 后面拿出一部分放到前面来, 就成为 $\int f[g(u)]g'(u)du$ 的形式, 若 $f[g(u)]g'(u)$ 容易积分, 则换元成功.

【注】 $x = g(u)$ 需是单调可导函数, 且不要忘记计算完后用反函数 $u = g^{-1}(x)$ 回代.

(2) 归纳总结换元法的思维结构

最核心的是把握住常用的典型代换法.

① 三角函数代换——当被积函数含有如下根式时, 可作三角代换.

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a \sin t, |t| < \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = a \tan t, |t| < \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a \sec t, 0 < t < \frac{\pi}{2} \quad (x > a) \end{cases}$$

② 恒等变形后作三角函数代换——当被积函数含有根式 $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ 时, 可化为以下三种形式 $\sqrt{\varphi^2(x) + k^2}$, $\sqrt{\varphi^2(x) - k^2}$, $\sqrt{k^2 - \varphi^2(x)}$, 再做三角代换.

③ 根式代换——当被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[m]{cx+d}$, $\sqrt{ae^{bx}+c}$ 等时, 一般令根式 $= t$ (因为事实上, 很难通过根号内换元的办法凑成平方, 所以根号无法去掉). 对既含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, 也含 $\sqrt[m]{ax+b}$, 一般取 m, n 的最小公倍数 l , 令 $\sqrt[l]{ax+b} = t$.

④ 倒代换——当被积函数分母的幂次比分子高两次及以上时, 作倒代换, 令 $x = \frac{1}{t}$.

⑤ 复杂函数的直接代换——当被积函数中含有 $a^x, e^x, \ln x, \arcsin x, \arctan x$ 等时, 可考虑直接令复杂函数 $= t$, 值得指出的是, 当 $\ln x, \arcsin x, \arctan x$ 与 $P_n(x)$ 或 e^{ax} 作乘除时, 优先考虑分部积分法.

比如能熟练计算下面这种题目: 计算 $\int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$.

由于 $\sqrt{3+4x-4x^2} = \sqrt{4-(2x-1)^2}$, 令 $2x-1 = 2\sin t$,

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \int \frac{\cos t dt}{(2\sin t + 2)2\cos t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + \sin t} = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \sin t}{1 - \sin^2 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \sin t}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\tan t - \frac{1}{\cos t} \right) + C \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{回代}} \frac{1}{4} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3+4x-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{3+4x-4x^2}} \right) + C.$$

3. 分部积分法

(1) 基本思想

$\int u dv = uv - \int v du$, 一目了然, 这个方法主要适用于求 $\int u dv$ 比较困难, 而 $\int v du$ 比较容易积分的情形.

什么函数积分后会“简单”些? 宜取作 v ; 什么函数微分后会“简单”些? 宜取作 u . 选取的一般原则是 (以下 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式):

① 被积函数为 $P_n(x)e^{kx}, P_n(x)\sin ax, P_n(x)\cos ax$ 等形式时, 一般来说选

取 $u = P_n(x)$;

②被积函数为 $e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx$ 等形式时, u 可以取其中两因子中的任意一个;

③被积函数为 $P_n(x) \ln x, P_n(x) \arcsin x, P_n(x) \arctan x$ 等形式时, 其中一般分别选取 $u = \ln x, u = \arcsin x, u = \arctan x$.

(2) 分部积分法的推广公式与 $\int P_n(x) e^{kx} dx, \int P_n(x) \sin ax dx, \int P_n(x) \cos bx dx$

【例 4.5】 设函数 u 与 v 具有直到第 $(n+1)$ 阶的连续导数, 并根据分部积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$, 请证明:

$$\int u v^{(n+1)} dx = u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)} v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx.$$

【证明】 在公式 $\int u dv = uv - \int v du$ 中以 $v^{(n)}$ 代替 v , 则

$$\boxed{\int u v^{(n+1)} dx} = \int u dv^{(n)} = u v^{(n)} - \int v^{(n)} du = u v^{(n)} - \int u' v^{(n)} dx$$

同理可得

$$\int u' v^{(n)} dx = u' v^{(n-1)} - \int u'' v^{(n-1)} dx$$

$$\int u'' v^{(n-1)} dx = u'' v^{(n-2)} - \int u''' v^{(n-2)} dx$$

.....

$$\int u^n v' dx = u^{(n)} v - \boxed{\int u^{(n+1)} v dx}$$

联立以上式子, 并保留第一个和最后一个积分(上面打框的积分), 便可得到分部积分法的推广公式:

$$\boxed{\int u v^{(n+1)} dx} = u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)} v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx$$

对于 $\int P_n(x) e^{kx} dx, \int P_n(x) \sin ax dx, \int P_n(x) \cos bx dx$ 三种积分, 其中 $P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式(n 为正整数), 令 $u = P_n(x)$, 则 $u^{(n+1)} = 0$, 于是积分便可顺利算出.

比如, 求不定积分 $\int (x^3 + 2x + 6) e^{2x} dx$.

令 $u = x^3 + 2x + 6 = P_3(x)$, 则 $n = 3, u' = 3x^2 + 2, u'' = 6x, u''' = 6, u^{(4)} = 0$; 且令 $v^{(4)} = e^{2x}$, 则 $v''' = \frac{1}{2} e^{2x}, v'' = \frac{1}{4} e^{2x}, v = \frac{1}{8} e^{2x}$.

根据上述分部积分法的推广公式直接计算.

$$\text{原式} = (x^3 + 2x + 6) \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - (3x^2 + 2) \left(\frac{1}{4} e^{2x} \right) + 6x \cdot \left(\frac{1}{8} e^{2x} \right) - 6 \cdot \left(\frac{1}{16} e^{2x} \right) +$$

$$\int 0 \cdot \left(\frac{1}{16} e^{2x} \right) dx = \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{7}{4} x + \frac{17}{8} \right) e^x + C.$$

4. 有理函数的积分

(1) 定义 形如 $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ ($n < m$) 的积分称为有理函数的积分.

(2) 方法 先将 $Q_m(x)$ 因式分解, 再把 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 拆成若干最简有理分式之和.

(3) 分解的基本原则

① $Q_m(x)$ 的一次因式 $(ax + b)$ 产生一项 $\frac{A}{ax + b}$;

② $Q_m(x)$ 的 k 重因式 $(ax + b)^k$ 产生 k 项, 分别为

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k};$$

③ $Q_m(x)$ 的二次单因式 $px^2 + qx + r$ 产生一项 $\frac{Ax + B}{px^2 + qx + r}$;

④ $Q_m(x)$ 的 k 重二次因式 $(px^2 + qx + r)^k$ 产生 k 项

$$\frac{A_1 x + B_1}{px^2 + qx + r} + \frac{A_2 x + B_2}{(px^2 + qx + r)^2} + \dots + \frac{A_k x + B_k}{(px^2 + qx + r)^k}$$

5. 反常积分敛散性的判别

在考试大纲中, 反常积分敛散性判别的要求并不高, 但是近几年却经常出现考题, 且题目出得还比较难, 从这个角度说, 我们还是要比较仔细深入地来研究一下这个问题.

重要结论

(1) 无穷区间的反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$: 在 $p > 1$ 时收敛, 在 $p \leq 1$ 时发散;

(2) 无界函数的反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ (奇点 $x=0$): 在 $p < 1$ 时收敛, 在 $p \geq 1$ 时发散.

4.2 典型例题分析

4.2.1 一元积分学的基本概念与应用

【例 4.6】 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \cos x + \frac{\pi}{4}, & x > 0 \end{cases}$, $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, 则()

- (A) $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数
- (B) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可微, 但不是 $f(x)$ 的原函数
- (C) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不连续

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 但不是 $f(x)$ 的原函数

【分析与解答】 选(D). 请看通常的解法:

求积分并用连续性确定积分常数, 可得

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 + x - \frac{4}{3}, & x \leq 0 \\ \int_{-1}^0 (x^2 + 1) dx + \int_0^x \left(\cos x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \sin x + \frac{\pi}{4}x - \frac{4}{3}, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{但是, } F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\sin x + \frac{\pi}{4}x - \frac{4}{3} \right) - \left(-\frac{4}{3} \right)}{x - 0} = 1 + \frac{\pi}{4},$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(\frac{1}{3}x^3 + x - \frac{4}{3} \right) - \left(-\frac{4}{3} \right)}{x - 0} = 1$$

$\Rightarrow F'_+(0) \neq F'_-(0)$. 根据原函数定义, $F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的原函数.

请考生看看, 我们还有更好的方法解决这个问题吗? 事实上, 由于 $f(x)$ 有第一类间断点, 所以 $F(x)$ 必然不是其原函数, 而变限积分存在就必连续, 所以答案自然选择(D).

$$\text{【例 4.7】} f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

则在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 下列正确的是()

- (A) $f(x)$ 不连续且不可微, $F(x)$ 可微, 且为 $f(x)$ 的原函数
- (B) $f(x)$ 不连续, 不存在原函数, 因而 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数
- (C) $f(x)$ 和 $F(x)$ 均为可微函数, 且 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数
- (D) $f(x)$ 连续, 且 $F'(x) = f(x)$

【分析与解答】 可以验证 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点, 因为:

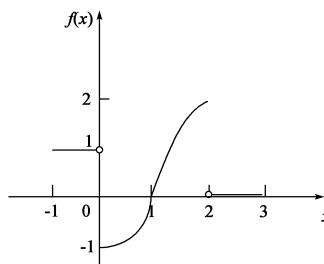
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2} \right) = \text{不存在}, \text{故 } x = 0 \text{ 为 } f(x) \text{ 的第二类振荡间断点, 可能存在原函数.}$$

通过计算:

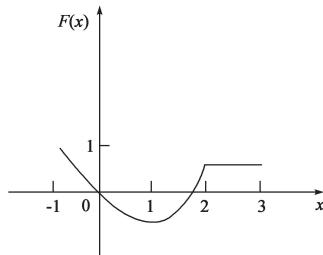
$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x^2} - 0}{x - 0} = 0, \text{ 故 } F(x) \text{ 可微. 即 } F'(x) = f(x), \text{ 故(A)正确.}$$

同样请考生自己得出此题的简捷做法.

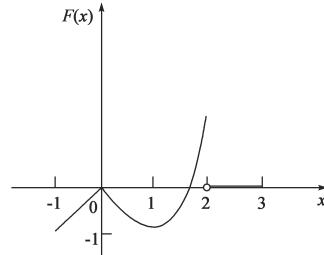
【例 4.8】 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为:



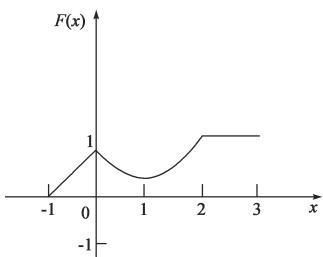
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为()



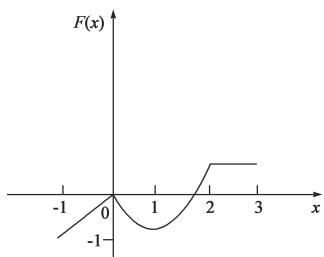
(A)



(B)



(C)



(D)

【分析与解答】本题有三个要点:第一,变限积分存在就必连续,故排除(B);第二, $f(x)$ 有两个第一类间断点,所以排除(A);第三, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 过原点,排除(C). 故答案选择(D).

4.2.2 一元积分学的基本计算

【例 4.9】求下列积分:

$$(1) \int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$$

$$(2) \int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx$$

$$(3) \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx$$

$$(4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx$$

$$(5) \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(6) \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx \quad (7) \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

【分析与解答】

(1) 答案 $-\cot x \cdot \ln \sin x - \cot x - x + C$.

本题考查的知识点是不定积分的分部积分法, 关键是选好 u 和 dv .

令 $u = \ln \sin x$, $\frac{dx}{\sin^2 x} = dv$, 则 $du = \frac{\cos x}{\sin x} dx = \cot x dx$, $v = -\cot x$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx &= -\cot x \cdot \ln \sin x + \int \cot^2 x dx \\ &= -\cot x \cdot \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx \\ &= -\cot x \cdot \ln \sin x - \cot x - x + C.\end{aligned}$$

【注】本题是实考题, 但是令我们惊讶的是, 只有 20% 左右的考生答对此题, 分析原因, 一是部分考生记不住微分公式 $d\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$, 二是部分考生先换元, 令 $u = \sin x$, 得到积分 $\int \frac{\ln u}{u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, 更不容易求解. 少数考生漏掉常数 C , 复习不充分的考生的基础可见一斑.

(2) 答案 $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C$.

本题考查典型的有理函数的不定积分, 首先凑微分, 然后将分母配方.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 6x + 13)}{x^2 - 6x + 13} + 8 \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C.\end{aligned}$$

【注】考试结果表明, 约有三分之一的考生没有答对, 有的考生在凑微分时系数出错, 有的考生积分公式记错, 误以为 $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \arctan \frac{u}{a} + C$, 漏掉 $\frac{1}{a}$, 还有少数考生漏掉积分常数 C .

(3) 答案 $\frac{4}{15}$

因 $x = -(1-x)-1$, 从而可凑微分法.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx &= - \int_0^1 (1-x-1) \sqrt{1-x} dx = - \int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}} dx + \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{5} (1-x)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 - \frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

【注】本题还有如下解法: 令 $\sqrt{1-x} = t$, 则原式 $= \int_0^1 (2t^2 - 2t^4) dt =$ $(\frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5) \Big|_0^1 = \frac{4}{15}$.

(4) 答案 $\frac{\pi}{8}$

本题考查定积分的性质和定积分的计算,由于是对称区间上的定积分,一般利用奇函数,偶函数在对称区间上积分性质简化计算,本题还用到了华里士公式,见本题后面的注.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x) dx \\ = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

【注】有些常用的重要公式希望考生熟记:

基本公式: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \sqrt{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \int_0^{\pi} \sin x dx = 2;$

华里士公式: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正的偶数} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \end{cases}$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx; \int_0^{\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx; \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \neq \int_0^{\pi} f(\cos x) dx$$

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

(5) 答案 $-\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (x^2 + 2) \arccos x - \frac{1}{9} x (x^2 + 6) + C$.

此题计算量大些,考虑用分部积分法.

先计算 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{(x^3-x)+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int x \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ = \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\ = \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1-x^2} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (x^2 + 2) + C.$$

然后分部积分,留 $\arccos x$,移 $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ 到 d 后面,即

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{3} \int \arccos x d(\sqrt{1-x^2}(x^2+2)) \\
&= -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2}(x^2+2) \arccos x + \frac{1}{3} \int \sqrt{1-x^2}(x^2+2) \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2}(x^2+2) \arccos x - \frac{1}{3} \int (x^2+2) dx, \\
&= -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2}(x^2+2) \arccos x - \frac{1}{9} x(x^2+6) + C.
\end{aligned}$$

(6) 答案 $\frac{x}{x-\ln x} + C$.

由于 $(x-\ln x)' \neq 1-\ln x$, 分子分母同时除以 x^2 , $\Rightarrow I = \int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2} dx$

注意到 $\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)' = -\frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow d\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = -\frac{1-\ln x}{x^2} dx$

$$I = -\int \frac{d\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2} = \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} + C = \frac{x}{x-\ln x} + C.$$

(7) 答案 $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} + \sqrt{2} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$.

一般会想到如下解法: 用牛顿-莱布尼茨公式, 令 $t = \tan x$, 则 $x = \arctant$, $dx =$

$$\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{1+(\sqrt{2}t)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C,
\end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}.$$

积分值为负, 这无疑是错误的, 但错在哪里呢?

因为由函数 $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{3\pi}{4}]$ 处无意义, 可知 $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$

既不是 $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ 在整个积分区间 $[0, \frac{3\pi}{4}]$ 上的原函数, 在积分区间 $[0, \frac{3\pi}{4}]$ 上也不是连续

的,故不符合牛顿—莱布尼茨公式及其推广的条件.

如果用换元法呢?令 $t = \tan x$,则 $\alpha = \tan 0 = 0, \beta = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$.

$$\text{所以 } \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int_0^{-1} \frac{dt}{1 + 2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t) \Big|_0^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}.$$

这当然是错的,错在哪里呢?因为当 $t \in [-1, 0]$ 时, $x = \arctant$ 之值不落在原积分区间 $[0, \frac{3\pi}{4}]$ 上.

事实上,补救的办法是将积分区间拆开,

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

$$\text{令 } x = \frac{\pi}{2} - t, \text{ 得 } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1 + \cos^2 t}$$

$$\text{令 } x = \frac{\pi}{2} + t, \text{ 得 } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1 + \cos^2 t}$$

$$\text{由此,得 } \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} + \sqrt{2} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

【注】考生计算定积分时,一定要注意法则条件.

【例 4.10】计算下列积分:

$$(1) \int_{-1}^2 [x] \max\{1, e^{-x}\} dx, \text{ 其中, } [x] \text{ 表示不超过 } x \text{ 的最大整数.}$$

$$(2) \int_0^3 (|x-1| + |x-2|) dx.$$

$$(3) \text{设 } f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } \int_1^3 f(x-2) dx.$$

$$(4) \text{已知 } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, \text{ 求 } \int_{2n}^{2n+2} f(x-2n) e^{-x} dx, \quad n=2,3,\dots.$$

$$\text{【分析与解答】(1) 因分段函数 } [x] = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases},$$

$$\max\{1, e^{-x}\} = \begin{cases} e^{-x}, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{则由定积分的分段可加性得 } \int_{-1}^2 [x] \max\{1, e^{-x}\} dx = \int_{-1}^0 (-1) e^{-x} dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx =$$

$$2 - e.$$

$$(2) \text{因分段函数 } |x-1| + |x-2| = \begin{cases} (1-x) + (2-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1) + (2-x), & 1 < x \leq 2 \\ (x-1) + (x-2), & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

则由定积分的分段可加性得 $\int_0^3 (|x-1| + |x-2|) dx = \int_0^1 (3-2x) dx + \int_1^2 dx + \int_2^3 (2x-3) dx = 5.$

(3) 令 $t = x - 2$, 则由定积分的分段可加性得,

$$\int_1^3 f(x-2) dx = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 (1+t^2) dt + \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{7}{3} - \frac{1}{e}.$$

(4) 令 $t = x - 2n$, 则由定积分的分段可加性与分部积分得,

$$\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n) e^{-x} dx = \int_0^2 f(t) e^{-t-2n} dt = e^{-2n} \int_0^1 t e^{-t} dt + e^{-2n} \int_1^2 (2-t) e^{-t} dt = (1-e^{-1})^2 e^{-2n}.$$

4.2.3 一元函数积分学的综合题

【例 4.11】 设 n 为大于 1 的整数, 试证明不等式 $(n-1)! < e \left(\frac{n}{e}\right)^n < n!.$

【分析与解答】 欲证不等式等价于 $\sum_{k=1}^{n-1} \ln k < 1 + n(\ln n - 1) < \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$,

因为 $y = \ln x$ 在 $[1, n]$ 上严格单调增加, 所以在 $[k, k+1]$ 上有

$\ln k < \ln x < \ln(k+1)$, 利用积分的分段可加性及 $y = \ln x$ 不恒为零, 有

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln k dx < \int_1^n \ln x dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln x dx < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(k+1) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1),$$

由分部积分法得 $\int_1^n \ln x dx = x \ln x \Big|_1^n - \int_1^n dx = n \ln n - n + 1.$

结合二者即得欲证的不等式成立.

【注】 证明这类和式不等式的基本思想基于下列命题:

若函数 $f(x)$ 在 $[1, n]$ 上单调增加, 则有

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \cdots + f(n);$$

若函数 $f(x)$ 在 $[1, n]$ 上单调减少, 则有

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

它的证明思想与本例相同.

【例 4.12】 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx (n > 1)$, 证明:

$$(I) I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}, \text{ 并由此计算 } I_n; (II) \frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}.$$

【分析与解答】 (I) $I_n + I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x (\tan^2 x + 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \sec^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x dtan x = \frac{1}{n-1}.$$

当 $n = 2k$ 时, $I_{2k} = \frac{1}{2k-1} - I_{2k-2} = \frac{1}{2k-1} - (\frac{1}{2k-3} - I_{2k-4})$

$$= \dots = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-3} + \frac{1}{2k-5} - \frac{1}{2k-7} + \dots + (-1)^k \frac{\pi}{4};$$

当 $n = 2k+1$ 时, $I_{2k+1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-4} - \frac{1}{2k-6} + \dots + (-1)^k \frac{\ln 2}{2}$.

$$\text{其中 } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2, \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

(II) 由 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, $0 < \tan x < 1$, 于是

$$\frac{1}{n+1} = I_{n+2} + I_n < 2I_n < I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}, \text{ 则 } \frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}.$$

【例 4.13】 设 $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$, 其中 n 为正整数,

$$(I) \text{ 证明 } I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}; \quad (II) \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}}.$$

【分析与解答】 涉及极限符号“ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ ”和积分符号“ \int_a^b ”的问题, 在近些年的考研中是热

点, 一般可以考虑夹逼准则. 本题设置(I), 是对(II)的求解给出提示.

(I) 对该积分使用分部积分法:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^{n-1} \cdot x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 x^{n-1} d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} x^{n-2} dx \\ &= \frac{n-1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} x^{n-2} dx - \frac{n-1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} x^n dx \\ &= \frac{n-1}{3} I_{n-2} - \frac{n-1}{3} I_n. \end{aligned}$$

于是可得

$$I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}.$$

(II) 由于

$$I_n = \int_0^1 x \cdot x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx \leqslant \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx = I_{n-1}$$

即 $I_n \leqslant I_{n-1}$, 则 I_n 单调递减, 结合(I)的结论, 有

$$\frac{n-1}{n+2} I_{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n+2} I_{n-2} = I_n \leqslant I_{n-1}.$$

该式各项同时除以 $I_{n-1} > 0$, 得

$$\frac{n-1}{n+2} \leqslant \frac{I_n}{I_{n-1}} \leqslant 1.$$

显然, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1$, 故由夹逼准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$.

【注】本题第(II)问还有如下做法: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}}$, 故

$$S^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-2}} = 1, \text{ 于是 } S = 1.$$

4.2.4 反常积分

反常积分主要考的是: 一是计算, 二是判敛. 其中, 计算就是在一道积分题目的求解过程中, 出现无穷区间或者瑕点, 直接代入(做极限计算)即可; 判敛才是难点, 请考生掌握下面的例题, 即可达到要求.

【例 4.14】(1) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n=1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由.

(2) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n=1, 2, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

【分析与解答】(1) 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $0 \leq \ln(1+t) \leq t$.

所以 $0 \leq |\ln t| [\ln(1+t)]^n \leq t^n |\ln t|$,

因此 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$.

(2) 由(1)知, $0 \leq u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$,

因为 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt = -\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}$,

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^n |\ln t| dt = 0$, 由夹逼准则得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

【例 4.15】已知 $\alpha > 0$, 则对于反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ 的敛散情况, 判别正确的是()

- (A) 当 $\alpha \geq 1$ 时, 积分收敛
- (B) 当 $\alpha < 1$ 时, 积分收敛
- (C) 敛散性与 α 的取值无关, 必收敛
- (D) 敛散性与 α 的取值无关, 必发散

【分析与解答】正确答案选择(B).

本题考查反常积分的敛散性的理论判别, 是历届考生复习比较薄弱的知识点.

首先, 考生需要掌握的已知结论是: 对于无界函数的反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ (奇点 $x=0$), 在

$p < 1$ 时收敛, 在 $p \geq 1$ 时发散;

根据上述结论, 作如下讨论:

当 $\alpha < 1$ 时, 取正数 ϵ 充分小, 使得 $\alpha + \epsilon < 1$,

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha+\epsilon} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\epsilon \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\epsilon x^{-\epsilon-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\epsilon} x^\epsilon = 0.$$

故, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{1}{x^{\alpha+\epsilon}}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 高阶的无穷大, 于是 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ 收敛;

当 $\alpha \geq 1$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \frac{\ln x}{x^\alpha} = \infty$, 故, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{1}{x^\alpha}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 低阶的无穷大, 于是

$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha} dx$ 发散.

【例 4.16】已知 $k > 0$, 则对于反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^k}$ 的敛散情况, 判别正确的是()

- (A) 当 $k > 1$ 时, 积分发散
- (B) 当 $k \leq 1$ 时, 积分发散
- (C) 敛散性与 k 的取值无关, 必收敛
- (D) 敛散性与 k 的取值无关, 必发散

【分析与解答】 正确答案选择(B).

本题考查反常积分的敛散性的计算判别法(即: 是否收敛, 通过计算结果来判别), 同样是历届考生复习比较薄弱的知识点, 考生可回顾上例, 那里使用的是理论判别法(即: 是否收敛, 无法通过计算结果来判别, 只能用已有结论做比较判别).

对于 $k = 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$, 发散.

$$\begin{aligned} \text{对于 } k \neq 1, k > 0, \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^k} &= \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{(\ln x)^k} = \frac{1}{1-k} (\ln x)^{1-k} \Big|_2^{+\infty} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{k-1} (\ln 2)^{1-k}, & k > 1 \\ \infty, & k < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

故, 当 $k > 1$ 时, 积分收敛, 当 $k \leq 1$ 时, 积分发散.

第5讲 一元函数微分学的应用

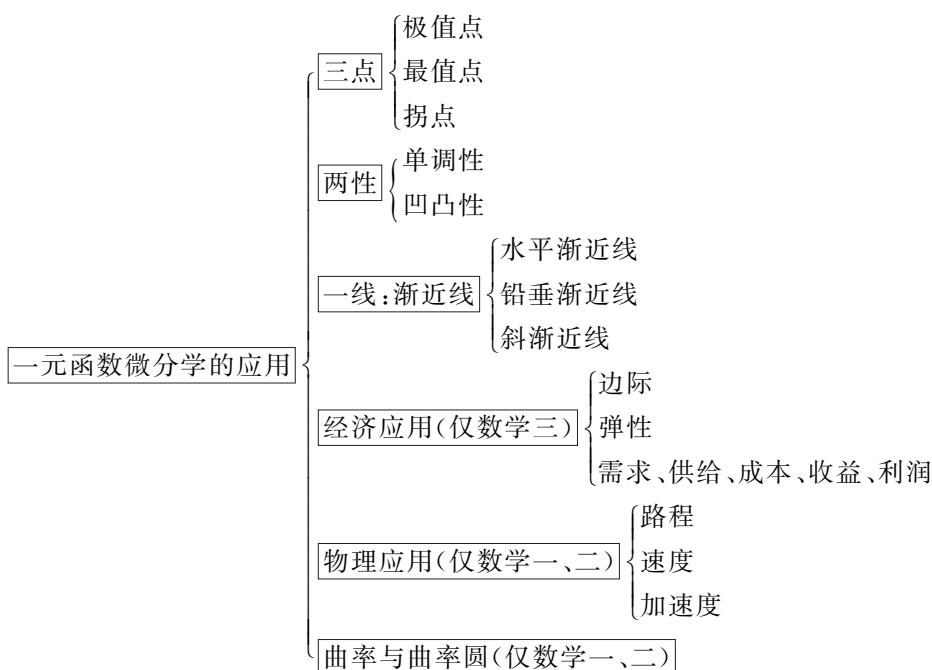
» 导语

导数的几何应用一般以小题(4分)或者大题(10分左右)的形式出现,其中,数学一多出小题,而数学二、三则多出大题。导数的物理应用是数学一、二的专门内容。导数的经济应用是数学三的专门内容。

» 大纲要求

1. 函数的极值概念,用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法,函数最大值和最小值的求法及其应用。
2. 用导数判断函数图形的凹凸性(注:在区间 (a,b) 内,设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凹的;当 $f''(x) < 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凸的),求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线,描绘函数的图形。
3. (仅数学一、二)曲率、曲率圆与曲率半径的概念,计算曲率和曲率半径。
4. (仅数学一、二)导数的物理意义,用导数描述一些物理量。
5. (仅数学三)导数的经济意义,用导数工具求解简单的经济问题。

» 知识体系



5.1 考试内容分析

1. 极值与最值

设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某邻域内有定义, 如果对于该邻域内任何异于点 x_0 的点 x , 都有

$$f(x) < f(x_0) \text{ (或 } f(x) > f(x_0) \text{)},$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处取得极大值(或极小值) $f(x_0)$, 极大值、极小值统称为极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义, 如果存在 $x_0 \in I$, 使得对于该区间 I 上任何异于点 x_0 的点 x , 都有

$$f(x) < f(x_0) \text{ (或 } f(x) > f(x_0) \text{)},$$

则称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处取得最大值(或最小值) $f(x_0)$, 最大值、最小值统称为最值, 使函数取得最值的点称为最值点.

【注】(1) 极值和最值是什么关系? 我们通过两个例子来看.

设 $f(x) = e^x, x \in [0, +\infty)$. $f(0) = e^0 = 1$ 为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值, $f(x) \geqslant f(0)$. 但 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上没有极值. 细致说来: 首先, $x = 0$ 不存在那种邻域 $U(0)$, 使 $x \in U(0)$ 时 $f(x) \geqslant f(0)$, 因为 $x = 0$ 的左半邻域已超出 $f(x)$ 的定义域. 其次, 对于 $(0, +\infty)$ 内的任意 x_0 , 不论 $U(x_0)$ 取得多么小, 对于 $x \in U(x_0)$, 并不总有 $f(x) \geqslant f(x_0)$, 所以此 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上无极小值, 易见也无极大值. 所以, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上无极值.

设 $f(x) = 3x - x^3$, 有 $f'(x) = 3(1 - x^2), f''(x) = -6x, f'(\pm 1) = 0, f''(\pm 1) = \mp 6$, $f(1) = 2$ 为极大值, $f(-1) = -2$ 为极小值. 但该 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无最大值, 也无最小值.

由此可见, 极值点并不一定是最值点, 最值点也不一定是极值点.

但是, 下面这个结论是正确的: 如果 $f(x)$ 在区间 I 上有最值点 x_0 , 并且此最值点 x_0 不是区间 I 的端点而是 I 内部的点, 那么此 x_0 必是 $f(x)$ 的一个极值点. 事实上, 设 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的最大值点, 则对一切 $x \in I$, 有 $f(x) \leqslant f(x_0)$, 又因为 x_0 为 I 内部的点, 故存在一个邻域 $U(x_0) \subset I$, 当 $U(x_0) \subset I$ 时, $f(x) \leqslant f(x_0)$. 按极大值的定义, $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

(2) 常有考生问: 间断点可以是极值点吗? 答案是肯定的. 举出以下四个例子供考生分析.

① $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ |x|, & x \neq 0 \end{cases}$, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 但它是 $f(x)$ 的极大值点.

② $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 但它是 $f(x)$ 的极小值点.

③ $f(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点, 但它是 $f(x)$ 的极小值点.

④ $f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的振荡间断点, 但它是 $f(x)$ 的极大值点.

2. 单调性与极值的判别

(1) 单调性的判别

若 $y = f(x)$ 在区间 I 上有 $f'(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 I 上严格单调增加; 相应的, 若 $y = f(x)$ 在区间 I 上有 $f'(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 I 上严格单调减少.

(2) 一阶可导点是极值点的必要条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且在点 x_0 处取得极值, 则必有 $f'(x_0) = 0$.

(3) 判别极值的第一充分条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 在 x_0 某去心邻域 $U(x_0, \delta)$ 内可导,

① 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值;

② 若当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极大值;

③ 若 $f'(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内不变号, 则点 x_0 不是极值点.

(4) 判别极值的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$.

① 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值;

② 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值.

上述第二充分条件可以推广为判别极值的第三充分条件.

(5) 判别极值的第三充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ($n \geq 2$), 则

① 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值;

② 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值.

3. 凹凸性与拐点的概念

(1) 凹凸性定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意 x_1, x_2 两点, 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $y = f(x)$ 是 I 上的凹函数.

如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $y = f(x)$ 是 I 上的凸函数.

(2) 拐点定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的拐点.

4. 凸凹性与拐点的判别

(1) 判别凹凸性的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导,

①若在 I 上 $f''(x) \geq 0$, 且不在任何子区间上取等号, 则 $f(x)$ 是 I 上的凹函数;

②若在 I 上 $f''(x) \leq 0$, 且不在任何子区间上取等号, 则 $f(x)$ 是 I 上的凸函数.

(2) 判别凹凸性的第二充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0$ ($m = 2, \dots, n-1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ($n > 2$),

则当 n 为奇数时, $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

(3) 二阶可导点是拐点的必要条件

设 $f''(x_0)$ 存在, 且点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线上的拐点, 则 $f''(x_0) = 0$.

(4) 判别拐点的充分条件

设 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 在点 $x = x_0$ 的某去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 内二阶导数存在, 且在该点的左右邻域内 $f''(x)$ 变号(无论是由正变负, 还是由负变正), 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线上的拐点.

【注】 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 上的拐点时, 并不要求 $f(x)$ 在点 x_0 的导数存在, 如 $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 的情形.

5. 漐近线

(1) 水平漐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_1$, 则 $y = y_1$ 为一条水平漐近线;

若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_2$, 则 $y = y_2$ 为一条水平漐近线;

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$, 则 $y = y_0$ 为一条水平漐近线.

(2) 铅直漐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$), 则 $x = x_0$ 为一条铅直漐近线.

【注】 此处的 x_0 一般是函数的无定义点等.

(3) 斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - k_1 x) = b_1$, 则 $y = k_1 x + b_1$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条

斜渐近线.

若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - k_2 x) = b_2$, 则 $y = k_2 x + b_2$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条

斜渐近线.

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = b$, 则

$y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

6. 最值或者取值范围问题(注意区分闭区间上与开区间内的不同提法和求法)

(1) 求闭区间 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最大值 M 和最小值 m

① 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的可疑点——驻点与不可导点, 并求出这些可疑点处的函数值;

② 求出端点的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$;

③ 比较以上所求得的所有函数值, 其中最大者为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 M , 最小者为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值 m .

【注】有时这类问题也可命制为“求连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的值域 $[m, M]$ ”.

(2) 求开区间 (a, b) 内连续函数 $f(x)$ 的最值或者取值范围

开区间的问题要比闭区间复杂, 一般需要全面地考查 $f(x)$ 在区间内的性态, 主要的思考程序是:

① 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的可疑点——驻点与不可导点, 并求出这些可疑点处的函数值;

② 用这些可疑点将区间 (a, b) 划分为若干子区间, 分别讨论子区间上的增减性;

③ 求单侧极限——若 a, b 为有限常数, 则求 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$; 若 a 为 $-\infty$, 则求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; 若 b 为 $+\infty$, 则求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

【注】这类问题有时没有最大值、最小值, 而是求得其上界或者下界.

例如, 讨论 $F(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时的取值范围.

【解】这个范围是开区间 $(0, +\infty)$, 令 $F(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$,

则 $F'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} + \ln(1+x) > 0$, 是单调增函数, 且

$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, 故 $F(x)$ 的取值范围是 $(0, +\infty)$.

7. 作函数图形

给出函数 $f(x)$, 作图的一般程序为:

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域, 并考察它是否有奇偶对称性;

(2) 求 $f'(x), f''(x)$, 用① $f(x)$ 的无定义点, ② $f'(x)=0$ 的点, ③ $f'(x)$ 不存在的点,

④ $f''(x)=0$ 的点, ⑤ $f''(x)=0$ 不存在的点, 将定义域划分为若干子区间, 确定函数在各个子区间上的单调性与凹凸性, 进而确定函数的极值点和拐点;

(3) 确定渐近线(如果有的话);

(4) 作出函数图形.

8. 经济应用(仅数学三)

(1) 边际函数与弹性函数

① 边际函数

设 $f(x)$ 可导 $\begin{cases} \text{数学上称 } f'(x) \text{ 为一阶导数} \\ \text{经济学上称 } f'(x) \text{ 为边际函数} \end{cases}$, 并称 $f'(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的边际值.

② 弹性函数

设 $y=f(x)$ 可导, 称 $\eta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = f'(x) \frac{x}{y} = f'(x) \frac{x}{f(x)}$ 为 $f(x)$ 的弹性函数,

其主要反映 x 变化所致 $f(x)$ 变化的强弱程度或者叫灵敏度.

【注】作为练习, 请考生推导下面一些典型函数的弹性(a, b, λ 为常数):

(1) 常量函数 $f(x) = C$ 的弹性 $\frac{Ex}{Ex} = 0$ (C 为常数);

(2) 线性函数 $f(x) = ax + b$ 的弹性 $\frac{E(ax+b)}{Ex} = \frac{ax}{ax+b}$;

(3) 幂函数 $f(x) = ax^\lambda$ 的弹性 $\frac{E(ax^\lambda)}{Ex} = \lambda$;

特别有 $f(x) = ax$ 的弹性为 1, $f(x) = a/x$ 的弹性为 -1;

(4) 指数函数 $f(x) = be^{\lambda x}$ 得弹性 $\frac{E(be^{\lambda x})}{Ex} = \lambda x$;

指数函数 $f(x) = ba^{\lambda x}$ 的弹性 $\frac{E(ba^{\lambda x})}{Ex} = \frac{E(be^{\lambda x \ln a})}{Ex} = \lambda x \ln a$.

(2) 五个研究对象

① 需求函数: 设需求量为 Q , 价格为 p , 称 $Q=Q(p)$ 为需求函数, 且一般为单减函数.

【注】需求的价格弹性为 $\eta = \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}$

$\left\{ \begin{array}{l} (1) \eta = \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp}, \text{ 从概念上说, 由于 } \frac{dQ}{dp} < 0, \text{ 故 } \eta < 0 \\ (2) \text{ 当题设要求 } \eta > 0 \text{ 时, 我们取 } \eta = -\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \end{array} \right.$

②供给函数:设供给量为 q , 价格 p , 称 $q=q(p)$ 为供给函数,且一般为单增函数.

【注】供给的价格弹性为 $\eta = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} > 0$.

③成本函数——总成本=固定成本+可变成本,即 $C(x) = C_0 + C_1(x)$, 边际成本为 $C'(x)$.

④收益函数 $R(x)$, 边际收益为 $R'(x)$.

⑤利润函数 $L(x) = R(x) - C(x)$, 边际利润为 $L'(x)$.

9. 物理应用(仅数学一、二)

已知质点运动的距离 s 关于时间 t 的函数为 $s=s(t)$, 称它为质点的运动方程(位移方程), 则其速度为: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t)$; 其加速度为: $a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = s''(t)$, 这就是导数的物理意义.

10. 曲率与曲率半径

曲率的计算公式: 设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y=y(x)$ 在其上点 $(x, y(x))$ 处的曲率公式为

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{曲率半径的计算公式 } R = \frac{1}{k} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \quad (y'' \neq 0)$$

5.2 典型例题分析

5.2.1 导数的几何应用

【例 5.1】设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ($n \geq 2$), 证明:

(1) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值;

(2) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值.

【证明】 n 为偶数, 令 $n = 2k$, 构造极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2k}} &\stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{2k(x-a)^{2k-1}} \stackrel{\text{洛}}{=} \cdots \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!(x-a)^{2k-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(2k-1)}(x) - f^{(2k-1)}(a)}{(2k-1)!(x-a)} = \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k)}(a) \neq 0 \end{aligned}$$

当 $f^{(2k)}(a) < 0$ 时, 由极限保号性 $\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2k}} < 0 \Rightarrow f(x) < f(a)$, 故 a 为极大值点;

当 $f^{(2k)}(a) > 0$ 时, 由极限保号性 $\Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{2k}} > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$, 故 a 为极小值点.

【例 5.2】设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0$ ($m = 2, \dots, n-1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ($n > 2$), 证明: 当 n 为奇数时, $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

【证明】 n 为奇数, 令 $n = 2k+1$, 构造极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{(x-a)^{2k-1}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k-1)!(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(2k)}(x)-f^{(2k)}(a)}{(2k-1)!(x-a)} = \frac{1}{(2k-1)!} f^{(2k+1)}(a) \neq 0,$$

当 $f^{(2k+1)}(a) > 0$ 时, $\frac{f''(x)}{(x-a)^{2k-1}} > 0$, 但 $x \rightarrow a^+$ 时, $f''(x) > 0$; $x \rightarrow a^-$ 时, $f''(x) < 0$,

故 $(a, f(a))$ 为拐点.

【例 5.3】求函数 $f(x) = nx(1-x)^n$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n)$.

【分析与解答】容易求得 $f'(x) = n[1-(n+1)x](1-x)^{n-1}$,

$f''(x) = n^2[(n+1)x-2](1-x)^{n-2}$. 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_0 = \frac{1}{n+1} \in (0, 1)$, 且有

$$f''(x_0) = -n^2 \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n-2} < 0, \text{ 则 } x_0 = \frac{1}{1+n} \text{ 为 } f(x) \text{ 的极大值点, 且极大值 } f(x_0) = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+1},$$

将它与边界点函数值 $f(0) = 0, f(1) = 0$, 比较得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n) = f(x_0) = \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+1}$, 且有 $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e}$.

【注】显然, $f(x) = nx(1-x)^n$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 且其最小值 $m = f(0) = f(1) = 0$, 则连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域为 $[m, M]$, 即 $[0, \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}]$.

【例 5.4】给出如下 5 个命题:

(1) 若不恒为常数的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $x_0 \neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 则 $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极大值点;

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, $f''(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内存在且大于零, 则 $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调增加;

(3) 若函数 $f(x)$ 对一切 x 都满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 且 $f'(x_0) = 0, x_0 \neq 0$, 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值;

(4) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 则 $y = y(x)$ 的驻点必定是它的极小值点;

(5) 设函数 $f(x) = xe^x$, 则它的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x_0 = -(n+1)$ 处取得极小值. 正确命题的个数为 ()

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

【分析与解答】对上述五个命题一一论证.

对于(1), 只要注意到: 若 $f(x)$ 在点 x_0 取到极大值, 则 $-f(x)$ 必在点 x_0 处取到极小值, 故该结论错误;

对于(2), 对任意 $x > a$, 由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (a, x)$ 使 $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$, 则,

$$F'(x) = \frac{1}{x-a} [f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}] = \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-a}.$$

由 $f''(x) > 0$ 知, $f'(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调增加, 因此, 对任意的 x 与 ξ , $a < \xi < x$, 有 $f'(x) > f'(\xi)$, 从而由上式得 $F'(x) > 0$, 所以函数 $F(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内单调增加, 该结论正确;

对于(3), 因 $f'(x_0) = 0$, 故所给定的方程为 $f''(x_0) = \frac{1-e^{-x_0}}{x_0}$, 显然, 不论 $x_0 > 0$, 还是 $x_0 < 0$, 都有 $f''(x_0) > 0$, 于是由 $f'(x_0) = 0$ 与 $f''(x_0) > 0$ 得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值, 故该结论错误;

对于(4), 对给定的方程两边求导, 得 $3y^2y' - 2yy' + xy' + y - x = 0$, 再求导, 得

$$(3y^2 - 2y + x)y'' + (6y - 2)(y')^2 + 2y' = 1$$

令 $y' = 0$, 则由上述第一式得 $y = x$, 再将此代入原方程有 $2x^3 - x^2 = 1$, 从而得 $y = y(x)$ 的唯一驻点 $x_0 = 1$, 因 $x_0 = 1$ 时 $y_0 = 1$, 把它们代入上述第二式得 $y''|_{(1,1)} > 0$, 所以唯一驻点 $x_0 = 1$ 是 $y = y(x)$ 的极小值点, 该结论正确;

对于(5), 因为是求 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 的极值问题, 故考虑函数 $f(x) = xe^x$ 的 $(n+1)$ 阶导数 $f^{(n+1)}(x)$, 由高阶导数的莱布尼茨公式得

$$f^{(n)}(x) = x(e^x)^{(n)} + n(e^x)^{(n-1)} = (x+n)e^x,$$

$$f^{(n+1)}(x) = [x + (n+1)]e^x; f^{(n+2)}(x) = [x + (n+2)]e^x,$$

令 $f^{(n+1)}(x) = 0$, 得 $f^{(n)}(x)$ 的唯一驻点 $x_0 = -(n+1)$; 又因 $f^{(n+2)}(x_0) = e^x > 0$, 故点 $x_0 = -(n+1)$ 是 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 的极小值点, 且其极小值为 $f^{(n)}(x_0) = -e^{-(n+1)}$, 该结论正确.

故正确命题一共 3 个, 答案选择(B).

【例 5.5】(仅数学一、二) 求曲线 $y = e^x$ 上的最大曲率及其曲率圆方程.

【分析与解答】 由 $y' = e^x$, $y'' = e^x$ 得曲线 $y = e^x$ 上任意点 $P(x, y)$ 处的曲率为

$$K = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{3/2}},$$

令 $\frac{dK}{dx} = \frac{e^x(1-2e^{2x})}{(1+e^{2x})^{5/2}} = 0$, 得唯一的驻点 $x_0 = -\frac{1}{2}\ln 2$, 因当 $x < -\frac{1}{2}\ln 2$ 时 $\frac{dK}{dx} > 0$,

当 $x > -\frac{1}{2}\ln 2$ 时 $\frac{dK}{dx} < 0$, 故 $x_0 = -\frac{1}{2}\ln 2$ 为曲率 $K = K(x)$ 的极大值点, 亦必是最大值点,

且其最大曲率为, $K|_{x_0} = e^{-\frac{1}{2}\ln 2} (1+e^{-\ln 2})^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

其中, $x_0 = -\frac{1}{2}\ln 2$ 时, $y(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y''(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则曲线 $y = e^x$ 上具有

最大曲率的点 $(x_0, y(x_0))$ 处的曲率圆的曲率半径 $R = \frac{3}{2}\sqrt{3}$,

曲率中心 (ξ, η) 为 $\xi = x_0 - \frac{y'(x_0)[1+(y'(x_0))^2]}{y''(x_0)} = -\frac{1}{2}(3+\ln 2)$,

$\eta = y(x_0) + \frac{1+(y'(x_0))^2}{y''(x_0)} = 2\sqrt{2}$.

它的曲率圆方程为 $(x + \frac{1}{2}(3+\ln 2))^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = \frac{27}{4}$.

【例 5.6】(仅数学一、二)位于上半平面向上凹的曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 0, 在点 $(2,2)$ 处的切线斜率为 1. 已知曲线上任一点处的曲率半径与 \sqrt{y} 及 $(1-y'^2)$ 的乘积成正比, 求该曲线方程.

【分析与解答】由已知, 有 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$,

$$\text{又 } \frac{(1-y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = k\sqrt{y}(1+y'^2),$$

$$\text{即 } k\sqrt{y}y'' = \sqrt{1+y'^2} \quad (\text{因为曲线向上凹, 所以, } y'' > 0.)$$

$$\text{令 } y' = p, y'' = pp', \text{ 有 } k\sqrt{y}pp' = \sqrt{1+p^2}, \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}dp = \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{y}}dy, \text{ 得}$$

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{2}{k}\sqrt{y} + C, \text{ 即 } \sqrt{1+y'^2} = \frac{2}{k}\sqrt{y} + C,$$

$$\text{代 } y(0) = 1, y'(0) = 0, y(2) = 2, y'(2) = 1, \text{ 得 } k = 2, C = 0,$$

$$\text{有 } \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{y}, y' = \sqrt{y-1}, \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = dx, 2\sqrt{y-1} = x + C_1, \text{ 代入 } y(0) = 1, C_1 = 0,$$

$$\text{即 } 2\sqrt{y-1} = x, \text{ 所以, } y(x) = \frac{x^2}{4} + 1.$$

5.2.2 方程根的问题(又称为函数的零点问题)

【例 5.7】设 a 为常数, $f(x) = ae^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的零点

个数情况为()

- (A) 当 $a > 0$ 时 $f(x)$ 无零点, 当 $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 恰有一个零点
- (B) 当 $a > 0$ 时 $f(x)$ 恰有两个零点, 当 $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 无零点
- (C) 当 $a > 0$ 时 $f(x)$ 恰有两个零点, 当 $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 恰有一个零点
- (D) 当 $a > 0$ 时 $f(x)$ 恰有一个零点, 当 $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 无零点

【分析与解答】正确答案选择(D).

本题考查一元微分学的应用, 讨论函数的零点问题.

令 $g(x) = f(x)e^{-x} = a - (1+x+\frac{x^2}{2})e^{-x}$, 由于 $e^{-x} > 0$, $g(x)$ 与 $f(x)$ 的零点完全一样, 又 $g'(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x} \geqslant 0$, 且仅在一点 $x = 0$ 等号成立, 故 $g(x)$ 严格单调增, 所以 $g(x)$ 至多有一个零点, 从而 $f(x)$ 至多有一个零点.

当 $a > 0$ 时, $f(-\infty) < 0, f(+\infty) > 0$, 由连续函数零点定理, $f(x)$ 至少有一个零点, 至少、至多合在一起, 所以 $f(x)$ 正好有一个零点.

当 $a \leq 0$, $f(x)e^{-x} = a - (1+x+\frac{x^2}{2})e^{-x} < 0$, $f(x)$ 无零点.

【注】有人说, $g(x)$ 严格单调增, 则 $f(x)$ 也会严格单调增, 你说对吗? 如果成立, 请你给出严格证明, 如果不一定成立, 你能给出什么情形下成立, 什么情形下不成立吗? 这个讨论很有意义.

【例 5.8】求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

【分析与解答】本题主要考查利用函数单调性、函数极值及函数的零点定理与渐进形态讨论方程实根的存在性问题, 由于方程中含有参数 k , 故要根据其不同取值范围进行讨论, 是一道综合题.

令 $f(x) = k \arctan x - x$, 则 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数, 且 $f(0) = 0$,

$$f'(x) = \frac{k - 1 - x^2}{1 + x^2},$$

当 $k - 1 \leq 0$, 即 $k \leq 1$ 时, $f'(x) < 0 (x \neq 0)$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少, 方程 $f(x) = 0$ 只有一个实根 $x = 0$;

当 $k - 1 > 0$, 即 $k > 1$ 时, 在区间 $(0, \sqrt{k-1})$ 内, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加;

在区间 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少, 所以 $f(\sqrt{k-1})$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最大值, 从而 $f(\sqrt{k-1}) > f(0) = 0$.

又因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{k \arctan x}{x} - 1 \right) = -\infty$,

所以由函数的零点定理, 存在 $\xi \in (\sqrt{k-1}, +\infty)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

由 $f(x)$ 是奇函数及其单调性可知: 当 $k > 1$ 时, 方程 $f(x) = 0$ 有且仅有 3 个不同的实根 $x = -\xi, x = 0, x = \xi$.

【注】教育部考试中心指出, 在 $k > 1$ 的讨论中, 部分考生不能说明 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的最大值大于零, 也不知道如何说明 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内具有函数值小于零的点, 从而不能得到正确结果. 另外, 不能正确地对 k 的取值范围进行讨论也是一种常见的错误, 如有的考生就分为 $k \leq 0$ 和 $k > 0$ 两种情况进行讨论.

【例 5.9】设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且正好有一个根, 求 k 的取值范围.

【分析与解答】令 $f(x) = kx + \frac{1}{x^2} - 1$, $f'(x) = k - \frac{2}{x^3}$, 当 $k \leq 0$ 时, 则区间 $(0, +\infty)$

为单调减区间,

$f(0^+) = +\infty$, $f(+\infty) = \begin{cases} -\infty, & k < 0 \\ -1, & k = 0 \end{cases}$, 所以当 $k \leq 0$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内存

在唯一零点.

除上述情形外, $f(x)$ 也可能有零点, 还必须讨论. 设 $k > 0$, 令 $f'(x) = 0$,

得 $x_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{k}} > 0$, $f(x_0) = 3\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1$, $f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0$,

所以 $f(x_0)$ 为区间 $(0, +\infty)$ 上的最小值, 若 $f(x_0) = 3\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0$, 此 x_0 为唯一正

根, 此时 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$. 若 $f(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 无正零点, 若 $f(x_0) < 0$, 则 $f(x)$ 有两个正零点,

均与要求不符, 故 k 的取值范围应为 $(-\infty, 0] \cup \left\{ \frac{2}{9}\sqrt{3} \right\}$.

5.2.3 导数在物理上的应用(仅数学一、二)

【例 5.10】落在平静水面的石头,产生同心波纹,若最外一圈波半径的增大率总是 6 米/秒,问在 2 秒末扰动水面面积的增大率为 _____ 米²/秒.

【分析与解答】本题填 144π .

本题考查导数的基本应用,是一道基础题.

设在 t 时刻最外一圈波的半径为 $r(t)$, 扰动水面面积为 $s(t)$, 则 $s(t) = \pi r^2(t)$,

故 $s'(t) = 2\pi r(t)r'(t)$, 由题知 $r'(t) = 6$, $r(t) = 6t$,

所以 $s'(2) = 2\pi r(2) \cdot 6 = 144\pi$ (米²/秒).

【例 5.11】设一质点在单位时间内由点 A 从静止开始作直线运动至点 B 停止,两点 A, B 间距离为 1, 证明该质点在 $(0, 1)$ 内总有一时刻的加速度的绝对值不小于 4.

【证明】设质点运动的距离 y 关于时间 t 的函数为 $y = y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, 则有

$$y(0) = 0, y(1) = 1, y'(0) = 0, y'(1) = 0.$$

将 $y(\frac{1}{2})$ 在 $t = 0$ 与 $t = 1$ 处的一阶泰勒公式分别为

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = y(0) + y'(0)\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{1}{2!}y''(\xi_1)\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 = \frac{1}{8}y''(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < \frac{1}{2};$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = y(1) + y'(1)\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{2!}y''(\xi_2)\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = 1 + \frac{1}{8}y''(\xi_2), \quad \frac{1}{2} < \xi_2 < 1.$$

若 $y(\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}$, 则由上述第一式得 $y''(\xi_1) \geq 4$; 若 $y(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$, 由上述第二式得 $y''(\xi_2) <$

-4. 证明完毕.

5.2.4 导数在经济上的应用(仅数学三)

【例 5.12】设某产品的成本函数为 $C = aq^2 + bq + c$, 需求函数为 $q = \frac{1}{e}(d - p)$, 其中 C

为成本, q 为需求量(即产量), p 为单价, a, b, c, d, e 都是正的常数, 且 $d > b$, 求:

(1) 利润最大时的产量及最大利润;

(2) 需求对价格的弹性;

(3) 需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

【分析与解答】(1) 利润函数为 $L = pq - C = (d - b)q - (e + a)q^2 - c$,

令 $L' = (d - b) - 2(e + a)q = 0$, 得 $q = (d - b)/(e + a)$,

因 $L'' = -2(e + a) < 0$,

所以当 $q = (d - b)/(e + a)$ 时, 利润最大, 最大值 $L = (d - b)^2/4(e + a) - c$.

(2) 因为 $q' = -\frac{1}{e}$, 所以需求对价格的弹性为 $\eta = -\frac{p}{q}q' = -\frac{d - eq}{q}(-\frac{1}{e}) = \frac{d - eq}{eq}$.

(3) 由 $|\eta| = 1$, 得 $q = \frac{d}{2e}$.

【例 5.13】(I) 已知一个生产周期内某产品的总成本 C 是产量 x 的函数 $C(x) = \alpha e^{\beta x}$, 其中, α, β 为正常数, 试求使平均成本最小的产量; 并求平均成本最小时的总成本的边际成本.

(II) 试讨论平均成本何时单调增加, 何时单调减少.

【分析与解答】 (I) 生产一件产品时的平均成本 $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{\alpha e^{\beta x}}{x}$. 令

$$\bar{C}'(x) = \frac{\alpha}{x^2} (\beta x - 1) e^{\beta x} = 0, \text{由此解得唯一的驻点 } x = \frac{1}{\beta}. \text{ 由于}$$

$$\bar{C}''(x) \Big|_{x=\frac{1}{\beta}} = \left[\frac{(x^2 \alpha \beta^2 - 2x \alpha \beta + 2\alpha) e^{\beta x}}{x^3} \right] \Big|_{x=\frac{1}{\beta}} = \alpha \beta^3 e > 0,$$

因而当产量 $x = \frac{1}{\beta}$ 时, 其平均成本为极小, 因而它为最小.

当 $x = \frac{1}{\beta}$ 时, 由于 $C'(x) = \alpha \beta e^{\beta x}$, 所以所求的总成本的边际成本为 $C'(\frac{1}{\beta}) = \alpha \beta e$.

(II) 令平均成本 $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ 的导数 $\bar{C}'(x) = \left(\frac{C(x)}{x} \right)' = \frac{x C'(x) - C(x)}{x^2} = 0$, 得边

际成本 $C'(x)$ 等于平均成本 $\frac{C(x)}{x}$.

若在某一产量 x 时, $x C'(x) < C(x)$, 则 $\bar{C}'(x) < 0$. 此时, 平均成本将下降, 这个数学结论是符合经济直觉的, 因为此时意味着第 $x+1$ 件产品的成本小于平均成本, 它的产出将自然降低平均成本. 反之, 若在产量为 x 时, $x C'(x) > C(x)$, 则 $\bar{C}'(x) > 0$, 则平均成本上升. 其原因是第 $x+1$ 件产品的成本超过了平均成本, 它的生产自然是增大平均成本.

【例 5.14】 设一企业生产某产品的需求量 Q 对价格 P 的弹性 $\eta = 2P^2$, 而市场对该产品最大的需求量为 1(万件), 该产品的生产成本为 $\frac{1}{2}Q+1$, (I) 求需求函数; (II) 当 $P \rightarrow +\infty$ 时需求量是否趋于稳定; (III) 设该产品的产量等于需求量, 求该企业获得最大利润的需求量.

【分析与解答】 (I) 由需求对价格的弹性公式 $\eta = -\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP}$, 得 $\frac{dQ}{dP} = -2P$, $Q(0) = 1$,

积分后解得一阶常微分方程的初值问题的解, 即需求函数 $Q = e^{-P^2}$.

(II) 因 $\lim_{P \rightarrow +\infty} Q = \lim_{P \rightarrow +\infty} e^{-P^2} = 0$, 故需求量 Q 有稳定的趋势.

(III) 该产品的利润函数, $L = PQ - \left(\frac{1}{2}Q + 1 \right) = \left(P - \frac{1}{2} \right) e^{-P^2} - 1$,

令 $\frac{dL}{dP} = e^{-P^2} (-2P^2 + P + 1) = 0$, 得驻点 $P_1 = 1$, $P_2 = -\frac{1}{2}$ (舍去),

因 $\frac{d^2L}{dP^2} = e^{-P^2} (4P^3 - 2P^2 - 6P + 1)$, $\frac{d^2L}{dP^2} \Big|_{P=1} = -3e^{-1} < 0$,

故 $P = 1$ 是利润函数的极大值点, 也是其最大值点, 所以当价格 $P = 1$ 时该企业的利润最大, 把 $P = 1$ 代入(I)的需求函数得企业获得最大利润时的需求量为 $Q = e^{-1}$.

第 6 讲 一元函数积分学的应用

导语

本部分内容大题(10分)、小题(4分)都常考,请熟记基本公式,并且在复习的过程中做到:

- (1)仔细读题,认真将题目中的文字叙述翻译成数学表达式;
- (2)用好微元法;
- (3)基本问题为主,不要做过于复杂的数学建模问题.

大纲要求

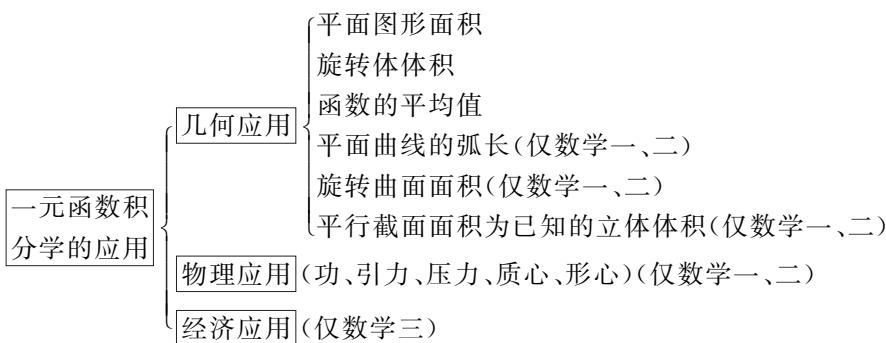
1. 用定积分表达和计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值.

2. (仅数学一、二)用定积分表达和计算平面曲线的弧长、旋转体的侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心、形心等.

3. (仅数学三)利用定积分求解简单的经济应用问题.

注:在考研中,这里所说的定积分可以推广到反常积分,尤其是无穷区间的反常积分.

知识体系



6.1 考试内容分析

假设以下曲线都是连续的.

1. 用定积分表达和计算平面图形面积

(1) 曲线 $y = y_1(x)$ 与 $y = y_2(x)$ 及 $x = a, x = b$ ($a < b$) 所围成的平面图形的面积

$$A = \int_a^b |y_1(x) - y_2(x)| dx.$$

(2) 曲线 $x = x_1(y)$ 与 $x = x_2(y)$ 及 $y = c, y = d$ ($c < d$) 所围成的平面图形的面积

$$A = \int_c^d |x_1(y) - x_2(y)| dy.$$

(3) 曲线 $r = r_1(\theta)$ 与 $r = r_2(\theta)$ 与两射线 $\theta = \alpha$ 与 $\theta = \beta$ ($0 < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$) 所围成的曲边扇形的面积

$$A = \frac{1}{2} \int_a^\beta |r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)| d\theta.$$

2. 用定积分表达和计算旋转体体积

(1) 曲线 $y = y(x)$ 与 $x = a, x = b$ ($a < b$) 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体体积

$$V = \int_a^b \pi y^2(x) dx.$$

(2) 曲线 $y = y_1(x) \geqslant 0$ 与 $y = y_2(x) \geqslant 0$ 及 $x = a, x = b$ ($a < b$) 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体体积

$$V = \pi \int_a^b |y_1^2(x) - y_2^2(x)| dx.$$

(3) 曲线 $y = y(x)$ 与 $x = a, x = b$ ($0 \leqslant a < b$) 及 x 轴围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体体积

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |y(x)| dx.$$

【注】这个公式有时用起来很方便, 现简单推导如下.

取 $[x, x + \Delta x]$ ($\Delta x > 0$), 得到一个小竖条, 如图 6.1 阴影区域所示, 此小竖条绕着 y 轴旋转一周, 成为一个“圆柱壳”, 将其沿任何一条竖线“切开”, 可展开为一个“长方体”, 其体积为 $dV_y = 2\pi x |y(x)| dx$, 故 $V_y = 2\pi \int_a^b x |y(x)| dx$.

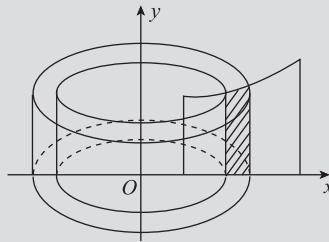


图 6.1

(4) 曲线 $y = y_1(x)$ 与 $y = y_2(x)$ 及 $x = a, x = b$ ($0 \leqslant a < b$) 所围成的图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体体积

$$V = 2\pi \int_a^b x |y_1(x) - y_2(x)| dx.$$

3. 用定积分表达和计算函数的平均值

设 $x \in [a, b]$, 函数 $y(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值为 $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx$.

4. 平面曲线的弧长(仅数学一、二)

(1) 若平面光滑曲线 L 由参数式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ($\alpha \leqslant t \leqslant \beta$) 给出, 则

$$L = \int_a^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

(2) 若平面光滑曲线 L 由 $\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases}$ ($a \leq x \leq b$) 给出, 则

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

(3) 若平面光滑曲线 L 由 $L: r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) 给出, 则

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

5. 旋转曲面面积(仅数学一、二)

(1) 曲线 $y = y(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的曲线弧段绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面面积

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

(2) 曲线 $x = x(t), y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta, x'(t) \neq 0$) 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上的曲线弧段绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面面积

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

6. 平行截面面积为已知的立体体积(仅数学一、二)

在区间 $[a, b]$ 上, 垂直于 x 轴的平面截立体 Ω 所得到的截面面积为 x 的连续函数 $A(x)$, 则 Ω 的体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

【例 6.1】 设一个底面半径为 3 的圆柱体, 被一个与圆柱的底面相交为 $\frac{\pi}{4}$, 且过底面直径 AB 的平面所截, 求截下的楔形体的体积.

【分析与解答】 建立坐标系如图 6.2 所示, 垂直 x 轴的截面是直角三角形,

由题设条件, 这个直角三角形的底边长为 $\sqrt{3^2 - x^2}$, 对边长为

$$\sqrt{3^2 - x^2} \tan \frac{\pi}{4} = \sqrt{3^2 - x^2},$$

故截面面积 $A = \frac{1}{2}(3^2 - x^2)$, 则 $V = \int_{-3}^3 \frac{1}{2}(3^2 - x^2) dx = 18$.

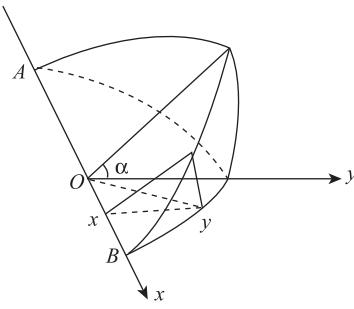


图 6.2

6.2 典型例题分析

6.2.1 几何应用

首先要能够判别以积分形式定义的函数的奇偶性、有界性、单调性、周期性等,这是一个考点;然后就是面积和体积等常规考题了.

【例 6.2】证明连续的奇函数的一切原函数都是偶函数;连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数.

【分析与解答】设 $f(x)$ 是连续函数, 则其一个原函数为 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. 若 $f(x)$ 是连续的奇函数, 即有 $f(x) = -f(-x)$, 且 $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$, 则令 $t = -u$ 得 $F(-x) = \int_a^{-x} f(t) dt = -\int_{-a}^x f(-u) du = \int_{-a}^x f(u) du + \int_a^x f(u) du = 0 + F(x)$.

若 $f(x)$ 是连续的偶函数, 即有 $f(-x) = f(x)$, 则令 $t = -u$ 得

$$F(-x) = \int_a^{-x} f(t) dt = -\int_{-a}^x f(-u) du = -\int_{-a}^x f(u) du - \int_a^x f(u) du = -2 \int_0^a f(u) du - F(x).$$

只有当 $\int_0^a f(u) du = 0$ 时, $F(-x) = -F(x)$, 即在连续的偶函数 $f(x)$ 的原函数中仅有一个原函数为奇函数.

【注】根据本题的结论, 你能判别当 $f(x)$ 为连续函数时, $\int_0^x f(t^2) dt$,

$\int_1^x [f(t) - f(-t)] dt$, $\int_0^x [f(t) + f(-t)] dt$, $\int_0^x [f(t) - f(-t)] dt$ 分别是什么函数
(奇偶性)?

【答案】 $\int_0^x f(t^2) dt$, $\int_0^x [f(t) + f(-t)] dt$ 为奇函数; $\int_0^x [f(t) - f(-t)] dt$,
 $\int_1^x [f(t) - f(-t)] dt$ 为偶函数.

【例 6.3】证明 $f(x) = xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

【分析与解答】由于 e^{t^2} 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续偶函数, 所以 $\int_0^x e^{t^2} dt$ 是连续的奇函数, 从而 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续偶函数, 故只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 由洛必达法则得,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{1}{x} e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2e^{x^2} - \frac{1}{x^2} e^{x^2}} = \frac{1}{2},$$

则由保号性知存在 $X > 0$, 使当 $x > X$ 时, $0 < f(x) < 1$, 即 $f(x)$ 在 $(X, +\infty)$ 内有界, 又

因为 $f(x)$ 在 $[0, X]$ 上连续, 所以其在 $[0, X]$ 上有界, 因此 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 从而在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

【例 6.4】 直线 $y = x$ 将椭圆 $x^2 + 3y^2 = 6y$ 分为两块, 设小块面积为 A , 大块面积为 B , 求 $\frac{A}{B}$ 的值.

【分析与解答】 直线与椭圆的交点为 $(0, 0), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 则

$$A = \int_0^{\frac{3}{2}} (\sqrt{6y - 3y^2} - y) dy = \int_0^{\frac{3}{2}} (\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - (y-1)^2} - y) dy = I_1 - I_2,$$

令 $y-1 = \sin t$, 则

$$I_1 = \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{3} \sqrt{1 - (y-1)^2} dy = \sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = \sqrt{3} \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \frac{3}{8},$$

而 $I_2 = \int_0^{\frac{3}{2}} y dy = \frac{9}{8}$, 所以 $A = \frac{4\sqrt{3}\pi - 9}{12}$, 由于椭圆面积为 $\sqrt{3}\pi$,

故 $B = \sqrt{3}\pi - \frac{4\sqrt{3}\pi - 9}{12} = \frac{8\sqrt{3}\pi + 9}{12}$, 从而有 $\frac{A}{B} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$.

【例 6.5】 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{-nx} - (x^2 + 1)}$, 求曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = -\frac{x}{2}$ 所围成平面

图形绕 Ox 轴所旋转成旋转体的体积.

【分析与解答】 先求 $f(x)$ 的表达式, 注意到函数 e^x 在 $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 的极限, 可知,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{-x}{x^2 + 1}, & x > 0 \end{cases}, \text{且 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

当 $x > 0$ 时, $y = f(x)$ 与 $y = -\frac{x}{2}$ 的交点坐标为 $x = 1$, 且显然 $0 < x < 1$ 时 $-\frac{x}{2} >$

$\frac{-x}{x^2 + 1}$, 所以所求旋转体体积

$$\int_0^1 [\pi \left(\frac{-x}{x^2 + 1} \right)^2 - \pi \left(-\frac{x}{2} \right)^2] dx = \pi \left[\int_0^1 \left(\frac{-x}{x^2 + 1} \right)^2 dx - \int_0^1 \left(-\frac{x}{2} \right)^2 dx \right] = \pi \left[\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{12} \right] = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} \right) \pi. \quad \text{其中, 令 } x = \tan t \text{ 得,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t}{\sec^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【例 6.6】 设曲线 $y = e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{\sin x}$ 在 $x \geq 0$ 部分与 Ox 轴所围成的平面区域记为 σ , 试求平面区域 σ 绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积 V .

【分析与解答】 函数 $y = e^{-\frac{1}{2}x} \sqrt{\sin x}$ 的定义域只能是使 $\sin x$ 取正值的区间, 即 $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], k = 0, 1, 2, \dots$, 则平面区域 σ 绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积为

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \pi e^{-x} \sin x dx,$$

因为由分部积分得

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx,$$

故得定积分

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) e^{-x} \Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi}) e^{-2k\pi},$$

于是所求的体积

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}(1 + e^{-\pi}) \sum_{k=0}^n e^{-2k\pi} = \frac{\pi}{2}(1 + e^{-\pi}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (e^{-2\pi})^n}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{\pi}{2(1 - e^{-\pi})}.$$

【例 6.7】(仅数学一、二) 对数螺线 $r = e^{\theta}$ 相应于自 $\theta = 0$ 到 $\theta = \varphi (\varphi > 0)$ 的一段弧长

为 _____.

$$\begin{aligned} \text{【分析与解答】 } L &= \int_0^\varphi \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta = \int_0^\varphi \sqrt{e^{2\theta} + a^2 e^{2\theta}} d\theta \\ &= \sqrt{1 + a^2} \int_0^\varphi e^{\theta} d\theta = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (e^{\varphi} - 1). \end{aligned}$$

【例 6.8】(仅数学一、二)(I) 设曲线在极坐标下的方程为 $\theta = f(r), a \leq r \leq b, f$ 在 $[a, b]$ 上可导, 求证: 曲线的长度

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (rf'(r))^2} dr.$$

(II) 已知曲线在极坐标下得方程为 $\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), 1 \leq r \leq 3$, 求其长度.

【分析与解答】 本题是专门给数学一、二命制的求曲线弧长的计算型问题, 设置的第一问会给考生提示. 对于数学一, 曲线积分是家常便饭, 但是数学二也请注意, 曲线弧长计算也是你们的重点.

(I) 由曲线在极坐标下的方程为 $\theta = f(r), a \leq r \leq b$, 写出该曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = r \cos f(r) \\ y = r \sin f(r) \end{cases}, a \leq r \leq b$$

于是

$$\begin{cases} dx = \cos f(r) dr - rf'(r) \sin f(r) dr, \\ dy = \sin f(r) dr + rf'(r) \cos f(r) dr, \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} (dx)^2 + (dy)^2 &= (dr)^2 + (rf'(r))^2 (dr)^2 \\ &= (1 + (rf'(r))^2) (dr)^2 \end{aligned}$$

故

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (rf'(r))^2} dr.$$

(II) 由题设, 命 $f(r) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, 则有

$$f'(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right), rf'(r) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right),$$

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + (rf'(r))^2} dr = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2} dr = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(r + \frac{1}{r}\right) dr = 2 + \frac{1}{2} \ln 3.$$

6.2.2 物理应用(仅数学一、二)

【例 6.9】设某容器形状是由曲线 $x = f(y)$ 在 Ox 轴上方部分绕 Oy 轴旋转而成的立体, 今按速率 $2t \text{ cm}^3/\text{s}$ 往里面倒水, 为使水平面上升速度恒为 $\frac{2}{\pi} \text{ cm/s}$, $f(y)$ 应是怎样的函数?

【分析与解答】 设 t 时刻水平面高度为 $h = h(t)$, 则 $h(0) = 0$, $\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi}$, 因此, $h = \frac{2}{\pi}t$,

当水面高度为 h 时的水量为 $V(h) = \int_0^h \pi f^2(y) dy$.

因此, $\frac{dV}{dh} = \pi f^2(h)$, 由于 $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = \pi f^2(h) \frac{2}{\pi} = 2f^2(h)$ 及题设 $\frac{dV}{dt} = 2t$ 知 $f(h) = \sqrt{t}$, 所以 $f(\frac{2}{\pi}t) = \sqrt{t}$, 由此解得 $f(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}y}$.

【例 6.10】一椭圆形钢板正好垂直浸没于水(相对密度 $\rho = 1$)中, 其短轴垂直于水面, 长轴长和短轴长分别为 $2a, 2b$, 求椭圆形钢板一侧所受的静压力.

【分析与解答】 设 x 轴为水平面, 椭圆形钢板占区域, 如图 6.3 所示:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y+b)^2}{b^2} \leqslant 1 \quad (-a \leqslant x \leqslant a, -2b \leqslant y \leqslant 0),$$

在水深 $-y$ 处, 压强为 $(-y)\rho g$, 故水深 $-y$ 处的薄片 $[y, y+dy]$ 上受到的微静压力

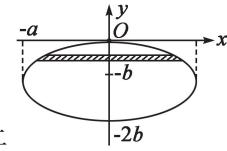


图 6.3

$$dp = (-y)\rho g \cdot 2x dy = -2gya \sqrt{1 - \frac{(y+b)^2}{b^2}} dy$$

椭圆形钢板受到的总静压力

$$\begin{aligned} p &= \int_{-2b}^0 dp = -2ga \int_{-2b}^0 y \sqrt{1 - \frac{(y+b)^2}{b^2}} dy = -2ga \int_{-b}^b (t-b) \sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}} dt \\ &= 2bg \int_{-b}^b a \sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}} dt \quad (\int_{-b}^b \text{ 为半个椭圆面积}) = 2bg \cdot \frac{\pi ab}{2} = \pi ab^2 g. \end{aligned}$$

【例 6.11】设水的密度为 1, 现把一个半径为 1, 相对密度为 0.1 的均质球体放入水中.

(I) 求该球体在水中的深度 h 应满足的方程;

(II) 证明(I)所建立的方程在开区间 $(0, 2)$ 内有唯一的实根 h_0 ;

(III) 如果对该球体施加压力, 把它的一半压入水中, 求其克服浮力所做的功 W 关于 h_0 的表达式.

【分析与解答】 取该球体的球面在水下的最低点为坐标系的原点, 过原点与球心的直线为 Ox 轴, 且其正向取为垂直于水平面向上方向.

因球体在水中的深度为 h , 故水平面的方程为 $x = h$, 又球面在该平面坐标系 Oxy 的截面圆方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

(I) 由上述分析便知, 球体在水下部分的体积

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h [1 - (x - 1)^2] dx = \pi(h^2 - \frac{1}{3}h^3),$$

因水的密度为 1, 由物理知识知, 球体所受的浮力为 $\pi(h^2 - \frac{1}{3}h^3)$, 它应该等于球体的重量 $\frac{4}{3}\pi \times 0.1 = \frac{2}{15}\pi$, 化简得 h 应满足的方程为 $5h^3 - 15h^2 + 2 = 0$.

(II) 显然, 函数 $f(h) = 5h^3 - 15h^2 + 2$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上连续, 又 $f(0) = 2 > 0$, $f(2) = -18 < 0$, 则根据闭区间上连续函数的性质得方程 $5h^3 - 15h^2 + 2 = 0$ 在开区间 $(0, 2)$ 内至少存在一个实根.

因为在 $0 < h < 2$ 时, $f'(h) = 15h^2 - 30h < 0$, 故 $f(h)$ 在 $0 < h < 2$ 内严格单调减少, 于是方程 $5h^3 - 15h^2 + 2 = 0$ 在 $(0, 2)$ 内有唯一实根 h_0 , h_0 表示在不加外力时该球体放入水中处于平衡状态时这个球体在水下的深度.

(III) 将球体下压需克服浮力做功, 注意到把球体下压 dx , 克服浮力 $\pi(x^2 - \frac{1}{3}x^3)$ 所作的微元功为 $dW = \pi(x^2 - \frac{1}{3}x^3)dx$, 则所求的克服浮力所做的功

$$W = \pi \int_{h_0}^1 (x^2 - \frac{1}{3}x^3) dx = \pi(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}h_0^3 + \frac{1}{12}h_0^4).$$

6.2.3 经济应用(仅数学三)

【例 6.12】设某顾客拥有某种消费品的数量为 q 时再购入一个单位数量, 他愿意付出的金额为 $D(q)$, 且 D 是 q 的连续函数, 试推导该顾客为了拥有数量 Q 的该消费品而愿意付出的钱款. 若 $D(q) = 4(25 - q^2)$, 试求顾客为了获得 3 个单位的消费品而愿意付出的总金额.

【分析与解答】一般来说, 顾客已拥有某类商品越多, 他们进一步购买该商品愿意付出的价格就越低, 故 $D(q)$ 是 q 的减函数, 假设顾客的购物过程分为 n 次进行, 为此, 将 $[0, Q]$ 做一剖分

$$0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_{i-1} < q_i < \cdots < q_n = Q$$

则他们愿意付出的总款项为 $\sum_{i=1}^n D(q_{i-1})(q_i - q_{i-1})$.

相当于剖分无限加密, 我们可合理地认为: 顾客为了获得数量 Q 的该产品愿意付出的代价为 $A = \int_0^Q D(q) dq$.

当 $D(q) = 4(25 - q^2)$, $Q = 3$ 时顾客愿意付出的总金额为 $A = \int_0^3 4(25 - q^2) dq = 254$.

【例 6.13】已知某产品的总产量 θ 对时间 t 的变化率 $\theta'(t) = 225t^{-2}e^{-\frac{15}{t}}$ (吨/天), $\theta(0) = 0$, 求

(I) 投产后多少天平均日产量达到最大? 最大值是多少?

(II) 达到最大值后再生产 30 天, 求这 30 天的平均日产量.

【分析与解答】 (I) 总产量 $\theta(t) = \int_0^t \theta'(t) dt = \int_0^t \frac{225}{t^2} e^{-\frac{15}{t}} dt = 15e^{-\frac{15}{t}} \Big|_0^t = 15e^{-\frac{15}{t}}$.

因此生产 t 天后的平均日产量为 $f(t) = \frac{\theta(t)}{t} = \frac{15}{t} e^{-\frac{15}{t}}$, 令 $f'(t) = 15t^{-3}(15-t)e^{-\frac{15}{t}} = 0$,

得驻点 $t = 15$. 由于 $t > 15$ 时 $f'(t) < 0$; $t < 15$ 时 $f'(t) > 0$, 因此, $t = 15$ 是平均日产量 $f(t)$ 唯一的极大值点, 也是其最大值点, 最大值为 $f(15) = e^{-1}$ (吨/天).

(II) 由于 $\frac{1}{30} \int_{15}^{45} \theta'(t) dt = \frac{1}{30} [\theta(45) - \theta(15)] = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{3}} - e^{-1})$, 所以达到最大值后再生

产 30 天, 这 30 天的平均日产量为 $\frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{3}} - e^{-1})$ (吨/天).

6.2.4 综合题

【例 6.14】 设 $g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\frac{xt+1}{xt+2})^{x^3 t}$, $f(x) = \int_0^x g(t) dt$.

(I) 证明 $y = f(x)$ 为奇函数, 并求其曲线的水平渐近线;

(II) 求曲线 $y = f(x)$ 与它所有水平渐近线及 Oy 轴围成图形的面积.

【分析与解答】 显然, $g(0) = 1$, 而当 $x \neq 0$ 时由“ 1^∞ ”型极限得

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{xt+2} \right)^{-\frac{1}{xt+2} x^3 t} \right] = e^{-x^2}, \quad x \neq 0,$$

其中, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^3 t}{xt+2} = x^2$, 则不论

x 是否为零都有 $g(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

(I) 因令 $t = -u$ 有 $f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = - \int_0^x e^{-u^2} du = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数,

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故 $y = f(x)$ 有两条水平渐近线 $y = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(II) 由所考虑的平面图形的对称性及分部积分法得所求的面积为

$$S = 2 \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - f(x) \right] dx = 2 \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right] dx = 2x \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right) \Big|_0^{+\infty} +$$

$$2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 1,$$

其中, 由洛必达法则得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-x^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$,

$$\text{而 } 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = - \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(-x^2) = (-e^{-x^2}) \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

第7讲 中值定理

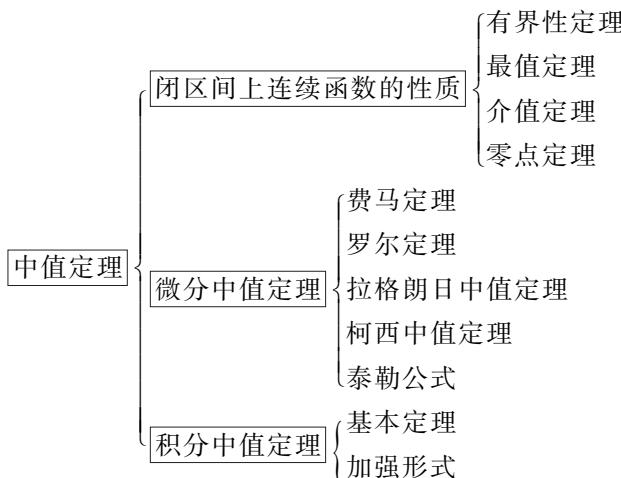
» 导语

中值定理在考研数学中具有特殊的地位,因为它是考试大纲规定范围内为数不多的一种逻辑推理问题,分析性和综合性强,对考生的数学能力要求较高.这一块内容几乎每年都出10分或者11分的大题,但历来考题得分率不高.究其原因,主要是同学们对逻辑证明问题比较怕,复习缺乏系统性和逻辑性,训练不到位.我们需要在这个问题上狠下工夫.

» 大纲要求

- 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、零点定理和介值定理).
- 罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理、柯西(Cauchy)中值定理、泰勒(Taylor)定理(泰勒公式).

» 知识体系



7.1 考试内容分析

1. 有界性定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $|f(x)| \leqslant M$ ($M > 0$).

2. 最值定理

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 其中, m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值.

3. 介值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则当 $m \leqslant \mu \leqslant M$ 时, $\exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \mu$.

4. 零点定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

5. 费马定理

设 $f(x)$ 满足在 x_0 点处 $\begin{cases} 1) \text{ 可导} \\ 2) \text{ 取极值} \end{cases}$, 则 $f'(x_0) = 0$.

【注】① 条件是结论成立的充分条件, 而不是必要条件.

例如: $y = x^3$, $y' = 3x^2$, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, 但显然 $f(0)$ 不是极值.

② 定理内容中的 x_0 为区间内的点.

③ 该定理可用于证明方程 $f(x) = 0$ 有一个根: 找一个 $F(x)$, 使 $F'(x) = f(x)$, 然后去说明 $F(x)$ 在某点 x_0 处取得极值且 $F'(x_0)$ 存在, 立即可以说明 $f(x_0) = 0$.

例如, 证明达布定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f'(a) < c < f'(b)$, 则 $\exists x_0 \in (a,b)$, 使 $f'(x_0) = c$.

【证明】构造函数 $F(x) = f(x) - cx$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最小值, 不妨设 $F(x_0) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} F(x)$,

因 $F'(a) = f'(a) - c < 0$, $F'(b) = f'(b) - c > 0$,

$$F'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < 0, \text{ 由极限保号性可知,}$$

在 $(a, a + \delta)$ 内 $F(x) < F(a)$.

$$F'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} > 0, \text{ 同理可得在 } (b - \delta, b) \text{ 内,}$$

$F(x) < F(b)$, 故 $x_0 \neq a$, $x_0 \neq b$, 故 $a < x_0 < b$,

即 $F(x)$ 在开区间 (a,b) 的内点处取得最小值, 由费马定理可得 $F'(x_0) = 0$, 即有 $f'(x_0) = c$.

6. 罗尔定理

设 $f(x)$ 满足以下三条 $\begin{cases} 1) [a,b] \text{ 上连续} \\ 2) (a,b) \text{ 内可导, 则 } \exists \xi \in (a,b), \text{ 使得 } f'(\xi) = 0. \\ 3) f(a) = f(b) \end{cases}$

【注】① 条件是结论成立的充分条件,而不是必要条件.

② 推论: 在罗尔定理中,若 $f(a) = f(b) = 0$,让其相等的两函数值为 0,则在 (a, b) 内必有一点 ξ ,使 $f'(\xi) = 0$,换个角度去阐述这句话,若方程 $f(x) = 0$ 有两个根 $x_1 = a, x_2 = b$,那么,方程 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少存在一个根.此话等价于若方程 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内没有一个实根,即 $f'(x) \neq 0$,则 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 上至多只有一个实根.于是我们可得一个重要结论:若 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内有且仅有 m 个根,则 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 上至多只有 $(m + 1)$ 个根.

③ 应用

i) 处理方程根的问题,证明 $f(x) = 0$ 有一个根,那么,去找 $F'(x) = f(x)$,验证 $F(x)$ 在某闭区间 $[a, b]$ 上满足罗尔定理的条件,注意这与零点定理去证明方程根的存在性不同.

ii) 证明适合某种条件 ξ 的存在性,这是本讲的核心重点与难点.

例如,证明方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根.

【证明】令 $f(x) = 2^x - x^2 - 1$,因 $f(0) = 0, f(1) = 0$,

$f(2) = -1 < 0, f(5) = 6 > 0$,则方程在 $(2, 5)$ 内至少有一个零点,即原方程至少有三个实根,又

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x, f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2, f'''(x) = 2^x \ln^3 2 \neq 0,$$

从而得知原方程最多三个实根,故原题得证.

7. 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$ 满足以下两条 $\begin{cases} 1) [a, b] \text{ 上连续} \\ 2) (a, b) \text{ 内可导} \end{cases}$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

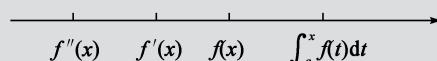
【注】① 结论还可以写成以下形式:

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)](b - a), 0 < \theta < 1.$$

因为无论 a, b 之间关系如何, ξ 总介于 a, b 之间,

$$\text{由于 } 0 < \frac{\xi - a}{b - a} = \theta < 1, \text{ 得 } \xi = a + \theta(b - a), 0 < \theta < 1.$$

② 该定理是连接函数值与导函数之间的一座桥梁,所以,对于数轴上相邻二者之间都可以使用:



不仅仅局限于 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 之间.

③ 这是用途最广的一个中值定理,可用于:

i) 证明某函数为常数.

例如: 证明 $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$ ($x \geq 1$).

【证明】若 $f(x)$ 在某区间上的导函数恒为零, 则该函数在此区间上必为常数.

设 $f(x) = 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ ($x \geq 1$), 由于

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-[4x^2/(1+x^2)^2]}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

故 $f(x) \equiv c$ (常数), 又因为 $f(1) = \pi$, 所以 $c = \pi$.

ii) 有界的讨论(两道很经典的考题).

例: 设 $f(x)$ 处处可导, 则()

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

【分析与解答】 答案为(D)选项, 证明如下: 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则存在 $x_0 > 0$, 当

$x > x_0$ 时, $f'(x) > k$ (正常数),

由拉氏定理可得 $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > k(x - x_0)$ $x_0 < \xi < x$,

故 $f(x) > f(x_0) + (x - x_0)$, 从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(A)(C)取 $f(x) = x$, (B)取 $f(x) = x^2$, 就可排除.

例: 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则()

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

【分析与解答】 关于(B)的正确性证明如下:

在 $(0, +\infty)$ 内任取一点 x , $f(x)$ 在 $[x, x+1]$ 上满足拉格朗日定理条件,

故 $f(x+1) - f(x) = f'(\zeta)$ $\zeta \in (x, x+1)$.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\zeta \rightarrow +\infty$. 因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\zeta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

因此, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

取 $f(x) = \sin x$, 可知(C)(D)不正确; 取 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, 知(A)不正确.

8. 柯西中值定理

设 $f(x), g(x)$ 满足 $\begin{cases} 1) [a, b] \text{ 上连续} \\ 2) (a, b) \text{ 内可导, 则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ 使得 } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \\ \text{且 } g'(x) \neq 0 \end{cases}$

【注】①定理中如果 $g(x) = x$, 那么就成了拉格朗日中值定理, 这里易犯的一个错误就是在证明定理时, 不少考生分别对 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上分别应用拉格朗日定理.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ 其中 } a < \xi < b.$$

错误的原因在于分子、分母中的两个 ξ 不一样, 所有的中值定理只说明了 ξ 的存在性.

②作用: 用来证明不等式及适合某种条件 ξ 的存在性, 涉及两个不同函数改变量与其在某点导数关系的命题需用柯西中值定理.

9. 泰勒公式

(1) 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 n 阶导数连续, (a, b) 内具有 $n+1$ 阶导数, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n +$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(2) 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n +$$

$$o((x - x_0)^n)$$

【注】当 $x_0 = 0$ 时的泰勒公式称为麦克劳林公式, 就是

$$\begin{cases} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \end{cases}$$

【注】① 泰勒公式中带拉格朗日余项, 可以用来证明适合某种条件 ξ 的存在性、不等式、方程根的问题等, 而带有佩亚诺余项的泰勒公式用于求极限、高阶导数、无穷小阶的判定.

② 题中出现高阶可导就是用泰勒公式的标志.“高阶”具体指的是三阶或三阶以上. 如果题中是二阶可导, 可用也可不用, 因为 $f''(\xi)$ 也可以通过对 $f'(x)$ 再使用罗尔定理可得.

③ 使用泰勒公式去证明, 解题步骤分三步:

- i) 写出比最高阶导数低一阶的泰勒展开式.
- ii) 恰当选择等式两边的 x 与 x_0 (x_0 由已知条件或所证结论的形式确定, x 一般选择区间的端点或区间的中点).
- iii) 根据最高阶导数的大小或对具体展开式进行放缩或整理.

10. 积分中值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使下式成立:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

【注】把函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值定义为 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

11. 加强形式的积分中值定理

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使下式成立:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

【证明】令 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, 由于 $\Phi'(x) = f(x), x \in [a, b]$,

且 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理, 那么 $\exists \xi \in (a, b)$,

使得 $\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$,

所以 $\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = f(\xi)(b-a)$.

7.2 典型例题分析

中值定理证明题是难点, 也是重点, 不少同学在学习这部分内容时总觉得没有思路, 不知如何动笔, 其实, 我们可以先从两个角度入手.

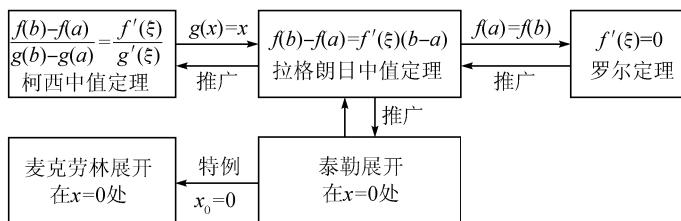
第一个角度, 从题中所证结论, 看所证的中值是属于开区间, 还是闭区间, 细心的同学会发现, 上述 11 个定理结论中的 ξ 是“开闭有别”的, 故在解题过程第一步根据所给区间不一

样而对定理有所筛选.

第二个角度,从题中所证的中值等式本身特点去分析,一般来说,含有导数用5、6、7、8、9,含有积分用10、11,如果二者都没有,就用1、2、3、4.

然后,我们取上述两个角度的交集,你会惊喜地发现,可以选择的定理不多,例如:题中证明 $\xi \in (0,1)$,使得 $f(\xi) = 1 - \xi$,分析可知,此题选用零点定理.

事实上,中值定理大部分题是这样的特点,区间是开区间的,中值的等式含有导数,也就是选用5、6、7、8、9,四个定理的关系由下图所示:



罗尔定理 \rightarrow 拉格朗日中值定理 \rightarrow 柯西中值定理,是特殊与一般的关系,后面两个定理的证明是通过利用罗尔定理得到的.换句话说,三者不知该如何选择,以罗尔定理为中心,当然,拉格朗日中值定理侧重在证结论中含有两个中值(尤其是两个不同的中值),或是需要具体写出原函数与导函数之间的关系.泰勒公式是拉格朗日在导数的阶数上的一种推广,而使用泰勒公式题中有明显的特征(高阶导数).这样就把重点放在如何正确地运用罗尔定理了.罗尔定理成立的三个条件:① $[a,b]$ 上连续;②开区间 (a,b) 上可导;③ $f(a) = f(b)$,结论是 $\exists \xi \in (a,b)$,使 $f'(\xi) = 0$.

考试要点:

- (1)首先要根据所证结论是构造对哪个函数运用罗尔定理,即构造辅助函数.
 - (2)命题人破坏条件③,让考生自己在给定的区间内寻找两个相等的函数值点.
- 出题角度:**只考查(2),只考查(1),综合题为(1),(2)全考.

7.2.1 一组使用最值、介值定理的典型题

【例7.1】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上[连续], $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$,则在 $[a,b]$ 内至少有一点 ξ ,使 $f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$.

【分析与解答】因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,

所以 $m \leq f(x) \leq M$ (m , M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.)

$$m \leq f(x_1) \leq M \quad ①$$

$$m \leq f(x_2) \leq M \quad ②$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$m \leq f(x_n) \leq M \quad (n)$$

$$① + ② + \dots + (n) \Rightarrow nm \leq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq nM$$

故 $m \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leqslant M.$

由介值定理可得 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$

【例 7.2】证明积分中值定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在 $\eta \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a).$$

【证明】因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在最大值 M 与最小值 m .

$$\text{故 } m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x) dx \leqslant M(b-a),$$

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leqslant M.$$

由连续函数介值定理知: $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$

【例 7.3】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$, 证明存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

【证明】因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 故 $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

因为 $g(x) > 0$, $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$,

$$\text{所以 } m \int_a^b g(x) dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x) dx \leqslant M \int_a^b g(x) dx, m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leqslant M,$$

$$\text{从而 } \exists \xi \in [a, b], \text{ 使得 } f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

【例 7.4】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有 一阶连续导数, $f(0) = 0$, 证至少存在一点 $\xi \in [0, 1]$, 使得 $f'(\xi) = 2 \int_0^1 f(x) dx.$

【证明】 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 故 $m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

$$f(x) - f(0) = f'(\eta)(x-0) (0 < \eta < x) \Rightarrow f(x) = xf'(\eta),$$

$$\text{因 } m \leqslant f'(\eta) \leqslant M \Rightarrow mx \leqslant f'(\eta)x \leqslant Mx \Rightarrow \int_0^1 mx dx \leqslant \int_0^1 f(x) dx \leqslant \int_0^1 Mx dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 2mx dx \leqslant 2 \int_0^1 f(x) dx \leqslant \int_0^1 2Mx dx, m = 2m \cdot \frac{1}{2} \leqslant 2 \int_0^1 f(x) dx \leqslant 2M \cdot \frac{1}{2} = M,$$

由介值定理可得: $\exists \xi \in [0, 1]$, 使 $f'(\xi) = 2 \int_0^1 f(x) dx.$

【例 7.5】设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有 二阶连续导数, $f(0) = 0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 η , 使 $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$.

【分析与解答】(1) 对任意 $x \in [-a, a]$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

$$(2) \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f'(0)x dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx,$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 由最值定理: $m \leq f''(x) \leq M$, $x \in [-a, a]$.

$$m x^2 \leq f''(\xi)x^2 \leq M x^2,$$

$$\frac{2}{3}ma^3 = m \int_{-a}^a x^2 dx \leq \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx \leq M \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{2}{3}Ma^3,$$

$$m \cdot \frac{a^3}{3} \leq \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx = \int_{-a}^a f(x) dx \leq \frac{a^3}{3} \cdot M,$$

$$m \leq \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx \leq M.$$

由介值定理, 至少存在一点 $\eta \in [-a, a]$, 使得 $f''(\eta) = \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx$.

【例 7.6】设 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$, 证在 $[-1, 1]$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 3$.

【证明】 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\eta)(x - x_0)^3$

取 $x_0 = 0$, $x = 1$ 代入:

$$f(1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0)(1 - 0)^2 + \frac{1}{6}f'''(\eta_1)(1 - 0)^3, \quad \eta_1 \in (0, 1) \quad ①$$

取 $x = -1$ 代入:

$$f(-1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0)(-1 - 0)^2 + \frac{1}{6}f'''(\eta_2)(-1 - 0)^3, \quad \eta_2 \in (-1, 0) \quad ②$$

$$① - ② \Rightarrow f(1) - f(-1) = \frac{1}{6}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] = 1 - 0 \quad ③$$

$$m \leq f'''(x) \leq M, \quad m \leq f'''(\eta_1) \leq M,$$

$$m \leq f'''(\eta_2) \leq M \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] \leq M,$$

③ 代入 $m \leq 3 \leq M$, 由介值定理 $f'''(\xi) = 3$.

7.2.2 一组使用罗尔定理的典型题

【例 7.7】设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$. 试证必存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

【证明】函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 那么其在 $[0, 2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m , 于是

$$m \leq f(0) \leq M, m \leq f(1) \leq M, m \leq f(2) \leq M$$

$$m \leq \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \leq M$$

由介值定理知,至少存在一点 $\eta \in [0,2]$,使得 $f(\eta) = \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1$.

于是便有 $f(\eta) = 1 = f(3)$,满足罗尔定理条件,于是存在 $\xi \in (\eta,3) \subset (0,3)$,使 $f'(\xi) = 0$.

【例 7.8】设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内有二阶导数,且 $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3)$. 证明:

(1) 存在 $\eta \in (0,2)$,使得 $f(\eta) = f(0)$.

(2) 存在 $\xi \in (0,3)$,使得 $f''(\xi) = 0$.

【证明】(1) 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ($0 \leq x \leq 2$),则 $\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0)$.

根据拉格朗日中值定理,存在 $\eta \in (0,2)$,使得 $F(2) - F(0) = 2F'(\eta) = 2f(\eta)$.

即 $\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$.

由题设 $\int_0^2 f(x) dx = 2f(0)$,从而 $f(\eta) = f(0)$.

(2) 由于 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续,则其在 $[2,3]$ 上必有最大值 M 和最小值 m ,于是 $m \leq f(2) \leq M$, $m \leq f(3) \leq M$.

故 $m \leq \frac{f(2)+f(3)}{2} \leq M$.

根据连续函数的介值定理,存在 $\xi \in [2,3]$,使 $f(x) = \frac{f(2)+f(3)}{2}$.

由题设, $\frac{f(2)+f(3)}{2} = f(0)$,故 $f(\xi) = f(0)$.

由(1)的结果可知 $f(0) = f(\eta) = f(\xi)$,且 $0 < \eta < \xi \leq 3$. 根据罗尔定理,存在 $\xi_1 \in (0,\eta)$, $\xi_2 \in (\eta,\xi)$,使 $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$,从而存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,3)$,使 $f''(\xi) = 0$.

【注】本题是考研真题,在教育部考试中心的考试分析中指出:很多考生在证明(1)

时由积分中值定理得 $\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$ ($0 \leq \eta \leq 2$). 用此方法可得 $f(\eta) = f(0)$,但 η 的范围没有说明在开区间 $(0,2)$ 内.

接下来学习如何构造辅助函数.

1. 逐项还原

【例 7.9】(I) 证明拉格朗日中值定理:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,则存

在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(II) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ 内可导, ($\delta > 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

【证明】由 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, 将其中的 ξ 换成变量 x , $f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$,

将等式左端整合成一个函数的导数.

$$\left(f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x \right)' = 0$$

则 $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$ 便是所需要的辅助函数, 而这里的辅助函数是所证等式一项一项还原得到的, 故简称“逐项还原”, 柯西中值定理的证明如出一辙.

(I) 令 $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$

因 $\varphi(a) = \varphi(b) = \frac{bf(b) - af(b)}{b - a}$

故由罗尔定理可得, $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$,

即 $f(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(II) 由拉氏定理, 得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(\xi)x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi)$

其中 $0 < \xi < x$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi) = A$, 故 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

2. 组合还原

【例 7.10】设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $g(\xi) \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \int_a^\xi g(x) dx$.

【证明】把 ξ 改为 x , 中值等式为 $\varphi(x) = g(x) \int_b^x f(t) dt + f(x) \int_a^x g(t) dt = 0$,

这时, 若单独去看二项, 寻找 $\square' = g(x) \int_b^x f(t) dt$,

$(\quad)' = f(x) \int_a^x g(t) dt$, $\square(\quad)$ 均不好找, 但若把它们看做一个整体, 借助于 $(uv)' = u'v + v'u$, 立即发现 $\left(\int_a^x g(t) dt \cdot \int_b^x f(t) dt \right)' = \varphi(x)$.

故辅助函数为 $F(x) = \int_a^x g(t) dt \int_b^x f(t) dt$.

令 $F(x) = \int_a^x g(t) dt \int_b^x f(t) dt$, 在 $[a, b]$ 上运用罗尔定理, 可得 $\xi \in (a, b)$, $g(\xi) \int_\xi^b f(x) dx = f(\xi) \int_a^\xi g(x) dx$.

3. 同加减因子, 同乘除因子后再组合还原

主要以 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$ 和 $\xi f'(\xi) + kf(\xi) = 0$ 这两种模型为主, 不易找 $(F(x))' = f'(x) + \lambda f(x)$ 和 $(G(x))' = xf'(x) + kf(x)$.

但在 $f'(x) + \lambda f(x) = 0$ 等式两边同乘 $e^{\lambda x}$,

$$\boxed{e^{\lambda x}} \quad \boxed{f'(x) +} \quad \boxed{e^{\lambda x} \lambda} \quad \boxed{f(x)=0}$$

可得 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$, 对 $F(x)$ 运用罗尔定理, 就能得到 $f'(x) + \lambda f(x) = 0$.

同理: 在 $xf'(x) + kf(x) = 0$ 等式两边同乘 x^{k-1} ,

$$\boxed{x^k} \quad \boxed{f'(x) +} \quad \boxed{kx^{k-1}} \quad \boxed{f(x)=0}$$

可得 $G(x) = x^k f(x)$, 对 $G(x)$ 运用罗尔定理, 就能得到 $xf'(x) + kf(x) = 0$.

【注】掌握两个基本模型后,一定要学会变化,这里“+”号可以变“-”号, λ 可以推广为一个函数.

【例 7.11】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

【证明】令 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$,

$$F(a) = e^{\lambda a} f(a) = 0, F(b) = e^{\lambda b} f(b) = 0,$$

故对 $F(x) = e^{\lambda x} f(x)$ 在 $[a,b]$ 上运用罗尔定理, 可得 $\exists \xi \in (a,b)$, $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

【例 7.12】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

证:(1)存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$;

(2)对任意实数 λ , 存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

【证明】(1)令 $F(x) = f(x) - x$, 由零点定理知, $\exists \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \quad \text{使 } F(\eta) = 0,$$

$$F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0 \quad \text{使 } F(\eta) = 0.$$

$$(2) \text{令 } \varphi(x) = (f(x) - x)e^{-\lambda x} \quad \varphi(0) = 0, \varphi(\eta) = 0$$

由罗尔定理知 $\exists \xi \in (0, \eta)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 故证.

【例 7.13】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) \cdot f(1) > 0$, $f(1) +$

$$\int_0^1 f(x) dx = 0, \text{试证: 至少存在一点 } \xi \in (0,1), \text{使 } f'(\xi) = \xi f(\xi).$$

【证明】令 $F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$

$$f(1) + \int_0^1 f(x) dx = f(1) + f(c) = 0, c \in (0,1),$$

由此可知 $f(c) \neq 0$, 否则 $f(1) = 0$, 与题设 $f(0)f(1) > 0$ 矛盾, 不妨设 $f(c) > 0$, 则 $f(1) < 0$, $f(0) < 0$.

由连续函数的零点定理知存在 $a \in (0,c)$, $b \in (c,1)$,

使 $f(a) = f(b) = 0$, 即 $F(a) = F(b)$, 由罗尔定理可知,

存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $F'(\xi) = 0$,

$$\text{即 } e^{-\frac{\xi^2}{2}} f'(\xi) - e^{-\frac{\xi^2}{2}} \xi f(\xi) = 0.$$

$$\text{故 } f'(\xi) = \xi f(\xi).$$

【例 7.14】设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导且 $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = 2$, 证

$$\exists \xi \in (1,2), \text{ 使 } f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}.$$

【证明】令 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$,

$$F(1) = f(1) = \frac{1}{2}, F(2) = \frac{1}{2}, \text{ 由罗尔定理可得},$$

$$\exists \xi \in (1,2), \text{ 使 } f'(\xi) = \frac{2f(\xi)}{\xi}.$$

【例 7.15】设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $g''(x) \neq 0$, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 证:

(1) 在 (a,b) 内, $g(x) \neq 0$;

(2) 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ , 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

【分析】第一问就是罗尔定理推论的应用;

第二问: 要证 $f(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0$,

把 ξ 改成 x , $f(x)g''(x) - f''(x)g(x) = 0$,

$$f(x)g''(x) + [f'(x)g'(x) - f'(x)g'(x)] - f''(x)g(x) = 0$$

$$\Rightarrow (f(x)g'(x))' - (f'(x)g'(x))' = 0$$

故辅助函数为

$$F(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

【证明】(1) 设 $c \in (a,b)$, $g(c) = 0$.

由 $g(a) = g(c) = g(b) = 0$, $g(x)$ 在 $[a,c]$, $[c,b]$ 上两次运用罗尔定理可得 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$.

其中 $\xi_1 \in (a,c)$, $\xi_2 \in (c,b)$,

对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上运用罗尔定理, 可得 $g''(\xi_3) = 0$.

因已知 $g''(x) \neq 0$, 故 $g(c) \neq 0$.

(2) $F(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上运用罗尔定理. $F(a) = 0$, $F(b) = 0$.

故, $\exists \xi \in (a,b)$, 使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

4. 求解微分方程

【例 7.16】 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, $f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x} f(x) dx$ ($k > 1$).

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

【分析】 把 ξ 改成 x 后, $f'(x) = (1 - x^{-1})f(x)$, 用前三种方法失效后, 会发现, 这种看起来没有规律的中值等式, 要去构造辅助函数 $F(x)$, 实际上是去求解一个常微分方程 $g(x, f(x), f'(x)) = 0$, 本题要求解的微分方程为 $f'(x) = (1 - x^{-1})f(x)$,

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = x - \ln x + c_1$$

$$\Rightarrow \ln f(x)x = x + c_1$$

$$\Rightarrow xf(x) = e^{x+c_1} = ce^x$$

$$\Rightarrow xe^{-x}f(x) = c$$

$$\text{故 } F(x) = xe^{-x}f(x).$$

【证明】 令 $F(x) = xe^{-x}f(x)$,

$$\text{因 } f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x} f(x) dx = \eta e^{1-\eta} f(\eta), \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{k}\right),$$

$$F(1) = e^{-1}f(1) = \eta e^{1-\eta} f(\eta) = F(\eta),$$

故在 $[\eta, 1] \subset [0, 1]$ 上, 对 $F(x)$ 运用罗尔定理,

可得 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

【注】 本题型在历年考试中出现多次.

① 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $f(1) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x) dx$, 证存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

② 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且满足 $f(1) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x) dx$,

证: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

③ 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)} \arctan x dx = \frac{1}{2}$, $f(1) = 0$, 证在 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使 $(1 + \xi^2)f'(\xi)\arctan \xi = -1$ (这种题有快捷的做法, 你能看出来吗?)

7.2.3 一组使用拉格朗日中值定理的典型题

什么情况下用拉格朗日中值定理?

①有些题既可用罗尔定理,也可用拉格朗日定理,只是后者比前者更方便,因为不需要去寻找两个相等的函数值点.

②形式上不要局限,只要条件符合, $f''(x)$, $f'(x)$, $f(x)$, $\int_a^x f(t)dt$ 相邻之间皆可使用定理.

③题中出现积分与导数之间的等式或者不等式,一般来说,需要用 $f(x)$ 在某区间上使用定理,建立起它们之间的联系.

④题中出现两个不同的中值,需要把给定的区间变成两个小区间,两次使用定理,此时,插入的点的函数值有时需要利用结论反推.

⑤题中结论等式一边中的分母含有因子 $(b-a)$,往往考虑利用定理去证明,但要防范 $(b-a)$ 隐形,因为所给区间为 $[0,1]$.

【例 7.17】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=1$, $f(0)=0$,试证在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ ,使 $f(\xi)+f'(\xi)=e^{1-\xi}$.

【分析】将 $f(\xi)+f'(\xi)=e^{1-\xi}$,整理成 $e^\xi(f(\xi)+f'(\xi))=e$,左边组合还原,右边逐项还原,可得辅助函数为 $F(x)=e^x f(x)-ex$.

【证明】证法一:令 $F(x)=e^x f(x)-ex$,

因为 $F(1)=ef(1)-e=0$, $F(0)=e^0 f(0)-e \cdot 0=0$,

对 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上运用罗尔定理,可得 $\exists \xi \in (0,1)$.

使 $f(\xi)+f'(\xi)=e^{1-\xi}$.

证法二:令 $F(x)=e^x f(x)$, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,由拉格朗日中值定理可得.

$$\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=F'(\xi), (\xi \in (0,1)),$$

$F(1)=e$, $F(0)=0$, $F'(\xi)=e^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]$,

故有 $e=e^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]$,得证.

【例 7.18】在区间 $[0,a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$,且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得极大值. 证 $|f'(0)|+|f'(a)| \leq Ma$.

【证明】 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得极大值,不妨设 $f'(c)=0$.

$f'(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,a]$ 之间分别使用拉氏定理,

$$f'(c)-f'(0)=cf''(\xi_1), \xi_1 \in (0,c),$$

$$f'(a)-f'(c)=(a-c)f''(\xi_2), \xi_2 \in (c,a) \Rightarrow$$

$$|f'(0)|+|f'(a)|=c|f''(\xi_1)|+(a-c)|f''(\xi_2)| \leq CM+(a-c)M=aM.$$

【例 7.19】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数, $f(a)=0$,

$$\text{证 } \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \geq \frac{2}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx.$$

【证明】因为 $f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$ ，

$$\text{所以 } |f(x)| = |f'(\xi)|(x - a) \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| \int_a^b (x - a) dx = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \frac{(b-a)^2}{2} \right|.$$

【例 7.20】 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

证: ①存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$.

②存在两个不同的点 m, n , 使得 $f'(m)f'(n) = 1$.

【证明】①令 $F(x) = f(x) + x - 1$ $F(0) = -1$ $F(1) = 1$,

由零点定理, $\xi \in (0,1)$ 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

②在 $[0, \xi]$ 与 $[\xi, 1]$ 两区间分别使用拉氏定理,

$$f(\xi) - f(0) = f'(m)(\xi - 0), m \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } \xi \text{ 之间} \quad ①$$

$$f(1) - f(\xi) = f'(n)(1 - \xi), n \text{ 介于 } \xi \text{ 与 } 1 \text{ 之间} \quad ②$$

整理可得 $f'(m)f'(n) = 1$.

【例 7.21】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{3}$, 证明:

存在 $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

【分析】两个不同的中值点 η, ξ , 二次使用拉格朗日中值定理, 如何寻找函数, 由 $f'(\xi) - \xi^2 + f'(\eta) - \eta^2 = 0$, 逐项还原可得, $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$.

【证明】设 $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$, 由题可知 $F(0) = 0$, $F(1) = 0$,

在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上分别应用拉格朗日中值定理.

$$\text{有 } F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = F'(\xi)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}(f'(\xi) - \xi^2), \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = F'(\eta)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f'(\eta) - \eta^2), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\text{二式相加, } F(1) - F(0) = \frac{1}{2}(f'(\xi) - \xi^2) + \frac{1}{2}(f'(\eta) - \eta^2) = 0,$$

$$\text{即 } f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2.$$

7.2.4 一组使用柯西中值定理的典型题

柯西定理关键是要从结论看出两个不同类函数的两点函数值之差, 故经常需要对式子化简, 使字母同一化; 若结论中是证明在某区间内至少存在 ξ, η , 使得某个 ξ, η 的等式成立 (注: 题中并未注明 ξ, η 是不同的两点), 这时①将所证等式两边分, 使一端只含 ξ , 另一端仅含 η ; ②观察含 ξ 的关系式, 看是一个函数在 ξ 求导所得, 还是两个不同的函数在 ξ 点导数的商, 由此选择用拉格朗日定理还是用柯西定理. ③观察含 η 的等式, 与②一样. ④由②③得到

的关系式推出所证结论.

【例 7.22】设 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上可导, 则 $\exists \xi \in (1,2)$, 使 $f(2)-2f(1)=\xi f'(\xi)-f(\xi)$.

【分析与解答】

解法一: 把所证等式 ξ 改为 x ,

$$\text{得 } xf'(x)-f(x)=f(2)-2f(1),$$

$$\text{两边同除 } \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{f(2)-2f(1)}{x^2},$$

$$\text{得 } \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(-\frac{1}{x}\right)'(f(2)-2f(1)).$$

$$\text{故辅助函数 } F(x)=\frac{f(x)+f(2)-2f(1)}{x},$$

令 $F(x)=\frac{f(x)+f(2)-2f(1)}{x}$, $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续 $(1,2)$ 内可导, 且 $F(2)=$

$$F(1)=f(2)-f(1).$$

由罗尔定理, $\exists \xi \in (1,2)$, 使 $F'(\xi)=0$,

$$\text{即 } f(2)-2f(1)=\xi f'(\xi)-f(\xi).$$

解法二: 令 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$, $G(x)=\frac{1}{x}$, 由柯西定理

$$\text{得 } \frac{\frac{f(2)}{2}-\frac{f(1)}{1}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{1}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1).$$

【注】前者解法更具有普遍性, 再次让读者体会到两个定理之间的联系.

【例 7.23】 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f'(x) \neq 0$.

证: $\exists \xi, \eta \in (a,b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

$$\text{【分析】 } f'(\xi)=\frac{e^b-e^a}{b-a} \frac{f'(\eta)}{e^\eta},$$

左边 $f'(\xi)$ 可以对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上运用拉格朗日中值定理得到, 右边 $\frac{f'(\eta)}{e^\eta}$ 是对 $f(x)$, e^x 在 $[a,b]$ 上运用柯西定理得到.

【证明】因为 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$, $\xi \in (a,b)$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}, \quad \eta \in (a,b),$$

两式相比, 得

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=\frac{f'(\xi)e^\eta}{f'(\eta)},$$

即

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b - a} e^{-\eta}.$$

7.2.5 一组使用泰勒公式的典型题

【例 7.24】设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证 $f(x) > x$

【证明】因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 得 $f(0) = 0, f'(0) = 1$

因 $f(x)$ 二阶可导, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶泰勒公式成立.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

因 $f''(x) > 0$,

故 $f(x) > x$, 原命题得证.

【例 7.25】设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = g(a) = 0$, 证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f''(\xi)g(\xi) + 2f'(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g''(\xi) = 0$.

【证明】令 $F(x) = f(x)g(x)$, 在 $x=a$ 点展开 Taylor 公式.

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{1}{2}F''(\xi)(x-a)^2 (a < \xi < x) \quad ①$$

令 $x=b$, 代入 ① 式,

$$\text{则 } F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \frac{1}{2}F''(\xi)(b-a)^2 (a < \xi < b) \quad ②$$

因 $f(a) = f(b) = g(a) = 0$, 则 $F(a) = F(b) = 0$, 且 $F'(a) = 0$ 代入 ② 式, 得 $F''(\xi) = 0$.

$$\text{即 } f''(\xi)g(\xi) + 2f'(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g''(\xi) = 0$$

【例 7.26】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$.

【证明】将 $f(x)$ 在 a 点, b 点展开 Taylor 公式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2 \\ &= f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2 \quad a < \xi_1 < x \quad ① \end{aligned}$$

$$f(x) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2 \quad a < \xi_2 < b \quad ②$$

令 $x = \frac{a+b}{2}$, ② - ① 得

$$0 = f(b) - f(a) + \frac{(b-a)^2}{4} \cdot \frac{1}{2} (f''(\xi_2) - f''(\xi_1))$$

$$\text{得 } \frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2} = \frac{1}{2} |f''(\xi_2) - f''(\xi_1)| \leq \frac{1}{2} (|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|)$$

$$\text{令 } |f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\},$$

则 $\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|) \leq \frac{1}{2} \times 2 \times |f''(\xi)| = |f''(\xi)|$

故原命题得证.

【例 7.27】设 $x > 0$, 证明:

$$(1) \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}. \text{ 其中 } \theta(x) \text{ 是 } x \text{ 的函数}, 0 < \theta(x) < 1.$$

$$(2) \text{进一步证明 } \frac{1}{4} < \theta(x) < \frac{1}{2}.$$

【证明】(1) 设 $f(t) = \sqrt{t}$, 在 $[x, x+1]$ 上对其使用拉氏中值定理, 有

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) = f'[x + \theta(x)(x+1-x)] = f'(x + \theta(x)) \Rightarrow \text{得证.}$$

$$(2) \text{由 } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}} \Rightarrow \theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} [\sqrt{x(x+1)} - x]$$

$$\theta'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{4x^2+4x} - 1 \right] > 0.$$

故 $\theta(x)$ 单增,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}. \text{ 得证.}$$

【例 7.28】设 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有二阶连续导数且 $f''(x) \neq 0$. 证明:

(1) 对于任意非零 $x \in (-1, 1)$, 存在唯一 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使得 $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$ 成立.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

【证明】(1) 对 $f(x)$ 在 $[0, x]$ 上使用拉氏中值定理.

$$f(x) - f(0) = f'(0) + \theta(x) \cdot (x-0) \cdot x \quad (*)$$

$$\text{即 } f(x) = f(0) + xf'(\theta(x) \cdot x), (0 < \theta(x) < 1)$$

又 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续且 $\neq 0$, 故保号.(介值定理反推)

于是不妨设 $f''(x) > 0$. $f(x)$ 严格单调, 故 $\theta(x)$ 唯一.

(2) 由拉格朗日中值定理, 有 $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$,

$$\text{由泰勒公式, 有 } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

$$\text{故, } f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 = xf'(\theta(x)x),$$

$$\frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{x} = \frac{1}{2}f''(\xi).$$

联想到 $f''(\theta) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(0 + \theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x) \cdot x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(0 + \theta(x)x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(0 + \theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x) \cdot x} \theta(x)$$

$$= f''(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} f''(\xi) = \frac{1}{2} f''(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

【例 7.29】设 $f(x) = \arcsin x$, ξ 为 $f(x)$ 在 $[0, t]$ 上拉格朗日中值定理的中值, $0 < t < 1$, 求极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{t}$.

【分析与解答】因 $f(x) = \arcsinx$ 在 $[0, t]$ 上连续, 在 $(0, t)$ 内可导, 对它用拉格朗日中值定理, 得

$$\arcsin t - 0 = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}(t-0) , \quad 0 < \xi < t < 1 .$$

由此解得 $\xi = \sqrt{1 - \left(\frac{t}{\arcsint}\right)^2}$, 并令 $\mu = \arcsint$ 有

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\xi}{t} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\mu^2 - \sin^2 \mu}{\mu^2 \sin \mu}} = \sqrt{\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{\mu^2 - \sin^2 \mu}{\mu^4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7.2.6 综合题解析

【例 7.30】设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 内连续, 且当 $x > a$ 时, $f'(x) > l > 0$, 其中 l 为常数. 若 $f(a) < 0$, 则在区间 $\left(a, a + \frac{|f(a)|}{l}\right)$ 内方程 $f(x) = 0$ 的实根个数为()

【分析与解答】

对 $f(x)$ 在 $[a, a + \frac{|f(a)|}{l}]$ 上使用拉格朗日中值定理, 得

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{l}\right) - f(a) = f'(\eta) \frac{|f(a)|}{l},$$

由 $f'(x) > l > 0$, 得

$$f\left(a + \frac{|f(a)|}{l}\right) - f(a) > |f(a)|,$$

$$\text{即 } f\left(a + \frac{|f(a)|}{l}\right) > |f(a)| + f(a) \geqslant 0,$$

从而 $f\left(a + \frac{|f(a)|}{l}\right) > 0$. 又由题设 $f(a) < 0$, $f(x)$ 在区间 $\left[a, a + \frac{|f(a)|}{l}\right]$ 的端点同号, 根据零点定理, $\exists \xi \in \left(a, a + \frac{|f(a)|}{l}\right)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

由于 $f'(x) > 0 (x > a)$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(a, a + \frac{|f(a)|}{l}\right)$ 是单调递增函数, 故零点 ξ 只有一个, 答案选择(B).

【例 7.31】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 在 (a, b) 内可导, $b - a \geqslant 4$. 求证: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) < 1 + f^2(\xi)$.

【分析】将要证不等式中的 ξ 用 x 替换,问题变成要证: $\exists x \in (a,b)$, 使得 $f'(x) < 1 + f^2(x)$

$$\Leftrightarrow \exists x \in (a, b), \text{使得 } \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} < 1 \Leftrightarrow \exists x \in (a, b), \text{使得 } [\arctan f(x)]' < 1.$$

$$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in (a, b), \text{使得 } \frac{|\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1)|}{x_2 - x_1} < 1.$$

【证明】根据条件 $b - a \geqslant 4$. 可以取得 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 使得 $\pi < x_2 - x_1 < 4$.

又因为 $|\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1)| \leqslant |\arctan f(x_2)| + |\arctan f(x_1)| \leqslant \pi$,

所以对函数 $\arctan f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上用拉格朗日中值定理,便知 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$,

使得

$$\frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)} = [\arctan f(x)]' \Big|_{x=\xi} = \frac{\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1)}{x_2 - x_1} < 1$$

【例 7.32】设 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 满足① $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = -\infty$;

② $f'(x) + f^2(x) + 1 \geqslant 0, \forall x \in (a, b)$. 求证: $b - a \geqslant \pi$.

【证明】 $\forall x_1 < x_2 \in (a, b)$, 对函数 $\arctan f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上用拉格朗日中值定理, 便

知 $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得 $\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1) = \frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}(x_2 - x_1)$.

进一步由条件②推出 $\frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)} \geqslant -1$, 故有

$$\arctan f(x_2) - \arctan f(x_1) \geqslant -(x_2 - x_1). \quad (1)$$

由条件①, 在上述不等式(1)中, $x_1 \rightarrow a+0, x_2 \rightarrow b-0$, 即得

$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \geqslant -(b-a), \text{即 } b-a \geqslant \pi.$$

【例 7.33】(I) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)| \leqslant a$,

$|f''(x)| \leqslant b$, 其中 a, b 为非负常数. 证明对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $|f'(x)| \leqslant 2a + \frac{b}{2}$.

(II)(变体形式一) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有二阶导数, 又知对 $\forall x > 0$, 有 $|f(x)| \leqslant a, |f''(x)| \leqslant b$, 其中 a, b 为常数. 求证: $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{ab}$.

(III)(变体形式二) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶导数, 又知对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$|f(x)| \leqslant a, |f''(x)| \leqslant b,$$

其中 a, b 为常数. 求证: $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2ab}$.

【证明】(I) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 则展开泰勒公式为

$$f(u) = f(x) + f'(x)(u-x) + \frac{f''(\xi)}{2!}(u-x)^2, \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } u \text{ 之间.}$$

分别令 $u=0, u=1$ 得

$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(-x)^2, \quad 0 < \xi_1 < x < 1,$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2!} (1-x)^2, \quad 0 < x < \xi_2 < 1,$$

两式相减, 得

$$f'(x) = [f(1) - f(0)] - \frac{1}{2} [f''(\xi_2) (1-x)^2 - f''(\xi_1)x^2],$$

于是

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2} |f''(\xi_2)| (1-x)^2 + \frac{1}{2} |f''(\xi_1)| x^2 \\ &\leq a + a + \frac{1}{2} b [(1-x)^2 + x^2], \end{aligned}$$

在 $0 < x < 1$ 时, 有 $(1-x)^2 + x^2 \leq 1$, 所以 $|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

(II) $\forall x > 0, h > 0$ 写出二阶带拉格朗日余项的泰勒公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta h) \frac{1}{2}h^2, \quad 0 < \theta < 1.$$

移项得到

$$f'(x)h = f(x+h) - f(x) - f''(x+\theta h) \frac{1}{2}h^2.$$

因为 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 所以有

$$|f'(x)| \leq \frac{2a}{h} + \frac{h}{2}b = \frac{1}{2h}(bh^2 + 4a),$$

即

$$bh^2 - 2h|f'(x)| + 4a \geq 0.$$

将上式看成关于 h 的二次三项式非负, 其判别式应满足

$$|f'(x)|^2 \leq 4ab, \text{ 即 } |f'(x)| \leq 2\sqrt{ab}.$$

(III) $\forall x \in (-\infty, +\infty), \forall h > 0$ 写出二阶带拉格朗日余项的泰勒公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta_1 h) \frac{1}{2}h^2, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x-\theta_2 h) \frac{1}{2}h^2, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

以上两式相减, 得到

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{1}{2}h^2 [f''(x+\theta_1 h) - f''(x-\theta_2 h)].$$

由此解得

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{4}h [f''(x+\theta_1 h) - f''(x-\theta_2 h)].$$

应用条件 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 即有

$$|f'(x)| \leq \frac{a}{h} + \frac{h}{2}b, \text{ 即 } bh^2 - 2h|f'(x)| + 2a \geq 0.$$

将上式看成是关于 h 的非负二次三项式, 其判别式应满足

$$|f'(x)|^2 \leq 2ab, \text{ 即 } |f'(x)| \leq \sqrt{2ab}.$$

第8讲 多元函数微分学的概念与计算

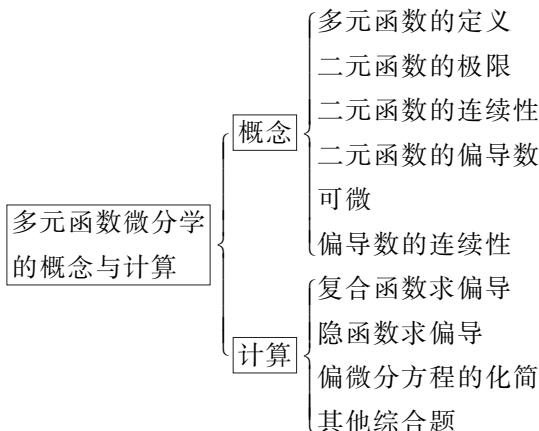
» 导语

从本讲开始进入多元函数的体系,本讲内容是考研重点,一般会在每年的考试中出至少一个小题(4分)和一个大题(10分左右),有时结合其他知识出综合题. 本讲是多元函数微分学的公共考点,有两个,分别为:(1)若干重要的基本概念;(2)多元函数微分法.

» 大纲要求

1. 多元函数的概念,二元函数的几何意义.
2. 二元函数的极限与连续的概念以及有界闭区域上连续函数的性质.
3. 多元函数偏导数和全微分的概念,求全微分,全微分存在的必要条件和充分条件,全微分形式的不变性.
4. 多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.
5. 隐函数存在定理,求多元隐函数的偏导数.

» 知识体系



8.1 考试内容分析

8.1.1 若干重要概念

1. 多元函数的定义

设 D 是平面上的一个点集,如果对于每一个点 $P(x,y) \in D$, 变量 z 按照一定的法则总有一个确定的值和它对应,则称 z 是变量 x,y 的二元函数,记为 $z = f(x,y)$ 或 $z = f(P)$.

点集 D 称为该函数的定义域, x, y 称为自变量, 数集 $\{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为该函数的值域.

类似地, 可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 以及三元以上函数.

2. 二元函数的极限

定义 设二元函数 $f(x, y)$ 定义在区域 D 上, 点 $P_0(x_0, y_0)$ 在 D 内或者在 D 的边界上, 如果存在常数 A , 对于任给的正数 ϵ , 总存在正数 δ , 只要点 $P(x, y) \in D$ 满足 $0 < |P - P_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, 恒有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$ 成立, 则称 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限, 记为 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$, 此极限称为二重极限.

【注】(1) 如果 $P(x, y)$ 以不同方式趋于 $P(x_0, y_0)$ 时, 函数趋于不同的值, 则可以判定该函数在 (x_0, y_0) 点的极限值不存在, 即 $\lim_{p \rightarrow p_0} f(p)$ 不存在, 这是由“极限若存在, 必唯一”决定的, 在考研中是重点.

(2) 能够区分累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 与二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.

前两个事实上是两次求一元函数的极限, 称为求累次极限, 而最后一个求二元函数的极限, 称为求二重极限.

举例来说,

$$\textcircled{1} \text{ 对于 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{ 可计算其累次极限}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

$$\text{而其二重极限 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 1, & k = 1 \end{cases}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) \text{ 不}$$

存在; 由此可知, 两个累次极限存在, 二重极限不一定存在;

$\textcircled{2}$ 对于 $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$. $f(x, y)$ 在原点的两个累次极限都不存在, 但是 $0 \leq |f(x, y)| \leq |x| + |y|$, 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (|x| + |y|) = 0$, 根据夹逼准则, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

由此可知, 两个累次极限不存在, 二重极限可能存在;

于是, 累次极限存在性和二重极限存在性之间没有必然联系.

不过下面两个结论是正确的:

结论1:若累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 和二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 都存在,则三者相等.

结论2:若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在且不相等,则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在.

上面所述的这个(2),了解即可.

3. 二元函数的连续性

如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续. 如果 $f(x, y)$ 在区域

D 上每一点都连续,则称 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续.

【注】验证二元函数 $f(x, y)$ 在某一点 (x_0, y_0) 是否连续是考研的重点,但是如果不能连续,对于多元函数是不讨论间断点的分类的.

4. 二元函数的偏导数

(1) 定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义,若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数,记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, z_x' \Big|_{(x_0, y_0)}, \text{或 } f_x'(x_0, y_0).$$

$$\text{于是, } f_x'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$f_y'(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

(2) 高阶偏导数 如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内的偏导数 $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$ 仍具有偏导数,则它们的偏导数称为函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数. 按照对变量求导次序的不同有如下四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f_{yy}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f_{yx}(x, y).$$

其中 $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$ 称为二阶混合偏导数. 同样可得三阶、四阶以及 n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

5. 可微

(1) 定义 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) ,$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$ 而仅与 x, y 有关, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微, 而称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分, 记作 dz , 即 $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

(2) 可微的必要条件 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微, 则该函数在点 (x, y) 处的两个偏导数都存在, 且 $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$.

【注】由于对于自变量 x, y , 有 $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, 则全微分 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

(3) 可微的充分条件 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x, y) 处连续,

则该函数在点 (x, y) 处可微.

【注】判别函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处是否可微的程序:

(1) 写出全增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$;

(2) 写出线性增量 $A\Delta x + B\Delta y$, 其中 $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$;

(3) 作极限 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$,

若该极限等于 0, 则 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点可微, 否则, 就不可微.

6. 偏导数的连续性

对于 $z = f(x, y)$, 讨论其在某特殊点 (x_0, y_0) (比如二元分段函数的分段点) 处偏导数是否连续, 是考研的重点, 其步骤为:

(1) 用定义法求 $f'_x(x_0, y_0)$;

(2) 用公式法求 $f'_x(x, y)$;

(3) 计算 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_x(x, y)$, 看 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_x(x, y) = f'_x(x_0, y_0)$ 与 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f'_y(x, y) = f'_y(x_0, y_0)$ 是否

成立, 若上述两等式都成立, 则称 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的偏导数是连续的.

8.1.2 多元函数微分法

多元函数的微分法规则是大家本科学习时的重点, 但不是难点, 一般没有什么困难的地方, 注意以下三个要点, 做题时细心一点, 并多加训练即可.

1. 链式求导规则

(1) 复合函数的中间变量均为一元函数的情形

设 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(t), v = \psi(t)$, 则 $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$, 且

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

(2)复合函数的中间变量均为多元函数的情形

设 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, 则 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

(3)复合函数的中间变量既有一元函数, 又有多元函数的情形

设 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(y)$, 则 $z = f[\varphi(x, y), \psi(y)]$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dy}$$

2. 无论 z 对谁求导, 也无论 z 已经求了几阶导, 求导后的新函数仍然具有与原函数完全相同的复合结构.

3. 注意书写规范.

8.2 典型例题分析

8.2.1 多元函数微分学的概念题

【例 8.1】 设 $f(x)$ 可导, $F(x, y) = \frac{\int_{-y}^y f(x+t) dt}{2y}$, $-\infty < x < +\infty, y > 0$,

(I) 求 $\lim_{y \rightarrow 0^+} F(x, y)$; (II) $\forall y > 0$, 求 $\frac{\partial F}{\partial x}$; (III) 求 $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial x}$.

【分析与解答】 本题形式上的研究对象是多元函数, 事实上, 问题的主体知识是一元函数的极限、导数问题, 需要考生在计算的全过程中把握住“谁是变量”.

$$(I) \lim_{y \rightarrow 0^+} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\int_{-y}^y f(x+t) dt}{2y} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} = f(x).$$

$$(II) \text{ 由于 } \int_{-y}^y f(x+t) dt \xrightarrow{x+t=u} \int_{x-y}^{x+y} f(u) du, \text{ 故 } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2y} \cdot [f(x+y) - f(x-y)].$$

$$(III) \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2y} = \frac{1}{2} \left[\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} + \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(x-y) - f(x)}{-y} \right]$$

$$= \frac{1}{2}(f'_+(x) + f'_-(x)) = \frac{1}{2} \cdot 2f'(x) = f'(x).$$

【注】本题中的(Ⅲ)不可以用洛必达法则求解,因为题设条件未给出“ $f(x)$ 的导函数连续”这样的条件.

【例 8.2】试分析下列各个结论是函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微的充分条件还是必要条件.

(1)二元函数的极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ 存在.

(2)二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有界.

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$.

(4) $F(x) = f(x, y_0)$ 在点 x_0 处可微, $G(y) = f(x_0, y)$ 在点 y_0 处可微.

(5)曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处存在切平面.(仅数学一要求)

(6) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f'_x(x, y_0) - f'_x(x_0, y_0)] = 0$, $\lim_{y \rightarrow y_0} [f'_y(x_0, y) - f'_y(x_0, y_0)] = 0$.

(7) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$.

【分析与解答】 结论(1)~(5)中每一个分别都是 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微的必要条件,而非充分条件. 结论(7)是 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微的充分必要条件;而结论(6)是其非充分又非必要条件.

因 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微,故 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续,即 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$,则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ 必存在,于是 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 某邻域有界.

结论(3)表示一元函数 $F(x) = f(x, y_0)$ 在 x_0 处连续, $G(y) = f(x_0, y)$ 在 y_0 处连续,它是二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续的必要条件,而非充分条件. 而 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续又是其可微的必要条件,且非充分条件.

只要在 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的全微分定义

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

中取特殊情况,分别令 $\Delta y = 0$ 与 $\Delta x = 0$ 即证得结论(4).

因为由函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微知, $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 都存在,故曲面 $f(x, y) - z = 0$ 在 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处法矢量 $\vec{n} = f'_x(x_0, y_0)\vec{i} + f'_y(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}$ 不是零矢量. 于是结论(5)成立.

结论(6)的 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f'_x(x, y_0) - f'_x(x_0, y_0)] = 0$ 表示偏导函数 $f'_x(x, y)$ 在 $y = y_0$ 时的一元函数 $f'_x(x, y_0)$ 在 x_0 处连续,它仅是二元偏导函数 $f'_x(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续的一个必要条件,对 $\lim_{y \rightarrow y_0} [f'_y(x_0, y) - f'_y(x_0, y_0)] = 0$ 有类似的结果. 而 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微又是 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处连续的另一个必要条件,所以结论(6)既不是

充分条件又是必要条件.

结论(7)的等价形式是 $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = o(\rho)$, $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, 它是相应全微分定义中 $A = 0$, $B = 0$ 的情形, 则结论(7)是其可微的充分必要条件.

【例 8.3】设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{f(x, y) - a - bx - cy}{\ln(1 + x^2 + y^2)} = 1$, 其中 a, b, c 为常数.

(I) 讨论 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微, 若可微则求出 $df(x, y)|_{(0,0)}$;

(II) 讨论 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否取极值, 说明理由.

【分析与解答】(I) 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时 $\ln(1 + x^2 + y^2) \sim x^2 + y^2$, 由

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{f(x, y) - a - bx - cy}{\ln(1 + x^2 + y^2)} = 1,$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} [f(x, y) - a - bx - cy] = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x, y) = a.$$

由 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性即得 $f(0, 0) = \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x, y) = a$.

再由极限与无穷小的关系可知,

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - bx - cy}{x^2 + y^2} = 1 + o(1) \quad (o(1) \text{ 为当 } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ 时的无穷小量})$$

$$\Rightarrow f(x, y) - f(0, 0) - bx - cy = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)o(1) = o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0),$$

$$\text{即 } f(x, y) - f(0, 0) = bx + cy + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0).$$

由可微性概念 $\Rightarrow f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微且 $df(x, y)|_{(0,0)} = bdx + cdy$.

(II) 由 $df(x, y)|_{(0,0)} = bdx + cdy \Rightarrow \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = b, \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = c$. 于是当 b, c 不同时为零

时 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不取极值.

当 $b = c = 0$ 时, 由于

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + y^2} = 1 > 0,$$

又由极限保号性 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ 时,

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^2 + y^2} > 0, \text{ 即 } f(x, y) > f(0, 0).$$

因此 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取极小值.

8.2.2 多元函数微分学的计算题

【例 8.4】已知函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值, $z = f(x + y, f(x, y))$. 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)}$.

【分析与解答】本题主要考查二元复合函数求二阶偏导数的方法, 由于题中 $f(x, y)$ 本身就是一个中间变量, 所以在求偏导数的过程中, 要分清 $f(u, v)$ 对中间变量的偏导数与 $f(x, y)$ 对自变量的偏导数的记号.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(x+y, f(x,y)) + f'_2(x+y, f(x,y)) \cdot f'_1(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11}(x+y, f(x,y)) + f''_{12}(x+y, f(x,y)) \cdot f'_2(x, y) + f''_{21}(x+y, f(x,y)) \cdot f'_1(x, y) + f''_{22}(x+y, f(x,y)) \cdot f'_2(x, y)$$

$$f(x, y) + f'_1(x, y)[f''_{21}(x+y, f(x,y)) + f''_{22}(x+y, f(x,y)) \cdot f'_2(x, y)]$$

由题意知 $f'_1(1,1) = 0, f'_2(1,1) = 0$,

$$\text{从而 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = f''_{11}(2,2) + f'_2(2,2) \cdot f''_{12}(1,1).$$

$$\text{或者令 } u = x+y, v = f(x,y), \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} +$$

$$\left[\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right] \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\text{由题意知 } \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 0, \left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 0,$$

$$\text{且 } u|_{(1,1)} = 2, v|_{(1,1)} = f(1,1) = 2,$$

$$\text{从而 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right|_{(2,2)} + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{(2,2)} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)}.$$

【注】①一些考生将解答中的记号 $f'_1(x+y, f(x,y))$ 错写成 $f'_x(x+y, f(x,y))$, 将 $f''_{12}(x+y, f(x,y))$ 错写成 $f''_{xy}(x+y, f(x,y))$, 表明这些考生在概念上是模糊的, 因为 $f'_1(x+y, f(x,y))$ 记号是指复合函数对第一个中间变量求偏导, 而记号 $f'_x(x+y, f(x,y))$ 的含义是不清楚的;

②本题中一些考生将 $f'_1(x+y, f(x,y))$ 和 $f'_1(x, y)$ 不加区别地都记作 f'_1 , 最后将 $(x, y) = (1, 1)$ 代入时, 就导致把 $f''_{11}(2,2)$ 写成 $f''_{11}(1,1)$ 等错误, 所以考生在学习时对数学记号的含义必须下工夫弄清楚, 不能什么都“简化”.

【例 8.5】设函数 $f(x, y)$ 可微, 又 $f(0,0) = 0, f'_x(0,0) = a, f'_y(0,0) = b$, 且 $\varphi(t) = f[t, f(t, t^2)]$, 求 $\varphi'(0)$.

【分析与解答】 在 $\varphi(t) = f[t, f(t, t^2)]$ 中令 $u = t, v = f(t, t^2)$, 得

$$\varphi(t) = f(u, v),$$

$$\varphi'(t) = f'_u(u, v) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + f'_v(u, v) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= f'_u(u, v) \cdot 1 + f'_v(u, v) \cdot [f'_u(u, v) \cdot 1 + f'_v(u, v) \cdot 2t]$$

$$= f'_u[t, f(t, t^2)] + f'_v[t, f(t, t^2)] \cdot [f'_u(t, f(t, t^2)) + f'_v(t, f(t, t^2)) \cdot 2t],$$

所以

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= f'_u(0,0) + f'_v(0,0) \cdot [f'_u(0,0) + f'_v(0,0) \cdot 2 \cdot 0] \\ &= a + b[a + 0] = a(1+b). \end{aligned}$$

【例 8.6】设 $z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$, 其中 f 及 φ 可微, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【分析与解答】令 $u = xy, v = x+y$, 则

$$z = \frac{1}{x}f(u) + y\varphi(v).$$

由于 f 及 φ 可微, 而 $u = xy, v = x+y$, 均为初等函数, 故满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. 这里先求

$\frac{\partial z}{\partial y}$ 较为简便一些. 由复合函数的求导法则, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x}f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi(v) + y\varphi'(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{1}{x}f'(xy) \cdot x + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y) \cdot 1 \\ &= f'(xy) + \varphi(x+y) + y \cdot \varphi'(x+y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

【注】若先求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 再求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2}f(u) + \frac{1}{x}f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y\varphi'(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{y}{x}f'(xy) + y\varphi'(x+y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2}f'(xy) \cdot x + \frac{1}{x}[f'(xy) + yf''(xy) \cdot x] + \varphi'(x+y) + y \cdot \varphi''(x+y) \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

由此可见, 后一种求导顺序相对而言较前一种计算量大一些, 也就是说, 求混合偏导数时, 不同的求导顺序繁简程度不一定一致.

【例 8.7】设 $z = \sin xy + \varphi(x+y, \frac{y}{x})$. 其中 φ 可微, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【分析与解答】令 $u = x+y, v = \frac{y}{x}$, 则 $\varphi(x+y, \frac{y}{x}) = \varphi(u, v)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}[\sin(xy)] + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= y\cos(xy) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= y\cos(xy) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{1}{y} \\ &= y\cos(xy) + \varphi'_1 + \frac{1}{y}\varphi'_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [y \cos(xy)] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi'_1 + \frac{1}{y} \varphi'_2 \right] \\
&= \cos(xy) - xy \sin(xy) + \left[\frac{\partial \varphi'_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi'_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \\
&\quad \left[-\frac{1}{y^2} \varphi'_2 + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial \varphi'_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi'_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\
&= \cos(xy) - xy \sin(xy) + [\varphi''_{11} \cdot 1 + \varphi''_{12} \cdot (-\frac{x}{y^2})] - \frac{1}{y^2} \varphi'_2 + \\
&\quad \frac{1}{y} \left[\varphi''_{21} \cdot 1 + \varphi''_{22} \cdot (-\frac{x}{y^2}) \right] \\
&= \cos(xy) - xy \sin(xy) + \varphi''_{11} - \frac{x}{y^2} \varphi''_{12} - \frac{1}{y^2} \varphi'_2 + \frac{1}{y} \varphi''_{21} - \frac{x}{y^3} \varphi''_{22}.
\end{aligned}$$

【注】抽象的多元函数的二阶偏导数计算中,最容易出错的地方是:对一阶偏导数

$\frac{\partial f}{\partial u} = f'_u(u, v)$ 再求偏导数这一步. 出错的原因常是忽视了 $f'_u(u, v)$ 与 $f'_v(u, v)$ 仍然是与 $z = f(u, v)$ 保持相同复合结构的复合函数,而容易被误解为仅仅是 u 或 v 的函数,从而导致如下的错误

$$\frac{\partial}{\partial x} f'_u(u, v) = f''_{uu}(u, v) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x} f'_v(u, v) = f''_{vv}(u, v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

漏掉含 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ 的项.

【例 8.8】设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay, \end{cases}$ 可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求

常数 a .

【分析与解答】把 $z = z(x, y)$ 看成复合函数 $z = z(u, v)$, $u = x - 2y$, $v = x + ay$, 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v}, \text{有}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(-2) + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}a + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}(-2) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}a = -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(-2) - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}a + a \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}(-2) + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \text{把上述}$$

$$\text{结果代入原方程,经整理后得 } (10 + 5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6 + a - a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

由题意知, a 应满足 $\begin{cases} 6+a-a^2=0, \\ 10+5a \neq 0, \end{cases}$ 由此解得 $a=3$.

【例 8.9】设 $y=f(x,z)$, 其中 z 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的 x,y 的函数, 且 f 与 F 具有连续的一阶偏导数. 试证当 $\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ 时, 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

【证明】由方程组

$$\begin{cases} y = f(x,z) & (1) \\ F(x,y,z) = 0 & (2) \end{cases}$$

确定了两个函数: $y=y(x), z=z(x)$. 由(1)、(2)两式两边对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \end{cases}$$

若

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0,$$

则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial z} \\ -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}}.$$

第 9 讲 多元函数微分学的应用

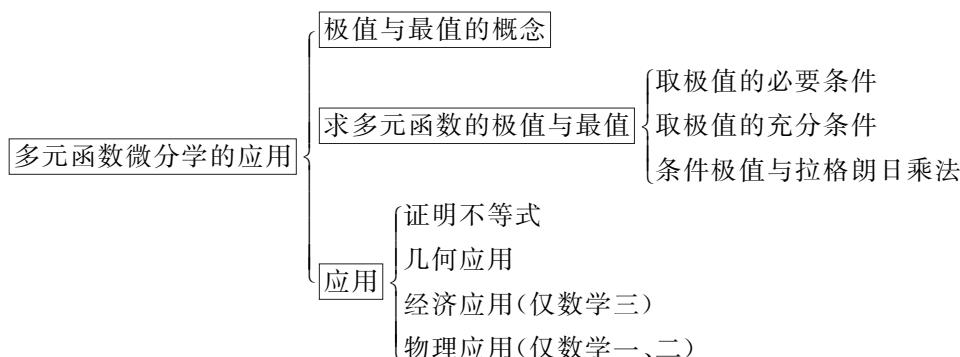
» 导语

本讲安排多元函数的极值与最值问题,是这几年的重要考点,几乎年年都是大题,分值很高,请大家关注.

» 大纲要求

1. 多元函数极值和条件极值的概念.
2. 多元函数极值存在的必要条件,二元函数极值存在的充分条件,求二元函数的极值.
3. 用拉格朗日乘数法求条件极值,求简单多元函数的最大值和最小值.
4. 解决一些简单的应用问题.

» 知识体系



9.1 考试内容分析

1. 极值与最值的概念

(1) 极值 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义, 如果对于该邻域内任何异于 (x_0, y_0) 的点 (x, y) , 都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) > f(x_0, y_0)),$$

则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极大值(或极小值) $f(x_0, y_0)$, 极大值、极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点.

(2) 最值 设函数 $z = f(x, y)$ 在某区域 D 上有定义, 如果对于该区域 D 上任何异于

(x_0, y_0) 的点 (x, y) , 都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \text{ (或 } f(x, y) > f(x_0, y_0) \text{)},$$

则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得最大值(或最小值) $f(x_0, y_0)$, 最大值、最小值统称为最值. 使函数取得最值的点称为最值点.

2. 多元函数极值与最值问题的理论依据

(1) 二元函数取极值的必要条件

设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) $\begin{cases} \text{一阶偏导数存在} \\ \text{取极值} \end{cases}$, 则 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$.

【注】① 该必要条件同样适用于三元及以上函数.

② 上述条件并不充分, 也就是说, 使 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$ 的点并不一定是该函数的极值点, 例如函数 $z = xy$ 在点 $(0, 0)$ 并无极值, 但它的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} = y, \frac{\partial z}{\partial y} = x$ 在点 $(0, 0)$ 处却都等于零. 如果把满足两个偏导数都等于零的点叫做驻点, 则可微函数的极值点就必是它的驻点. 尽管这里只给出了必要条件, 但是该条件对于具体求解极值问题常是很重要的, 因为通过它, 我们可以找出函数 z 的全部驻点, 然后只要从这不多的几个驻点中找极值点.

③ 如果函数在个别点处的偏导数不存在, 这些点当然不是驻点, 但也可能是极值点. 例如, 函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处的偏导数不存在, 但该函数在点 $(0, 0)$ 处却取得了极小值, 因此, 在考虑函数的极值问题时, 除了考虑函数的驻点外, 如果有偏导数不存在的点, 那么对这些点也应当考虑.

(2) 二元函数取极值的充分条件(Δ 判别法)

记 $\begin{cases} f''_{xx}(x_0, y_0) = A \\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B \\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C \end{cases}$, 则 $\Delta = B^2 - AC$ $\begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{极值} & \begin{cases} A < 0 \Rightarrow \text{极大值} \\ A > 0 \Rightarrow \text{极小值} \end{cases} \\ > 0 \Rightarrow \text{非极值} \\ = 0 \Rightarrow \text{方法失效, 另谋他法} \end{cases}$

【注】① 该充分条件不适用于三元及以上函数.

② $\Delta = 0$ 时, 只能说明该判别方法失效, 而不能确定该点是否为极值点, 说得明确一点, 考生不可据此说该点无法判断. 如果出现此情形, 请从极值定义出发去讨论问题, 见例题 9.3.

(3) 条件极值与拉格朗日乘法

求目标函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的极值, 则

① 构造辅助函数

$$F(x, y, z, \lambda, u) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + u\psi(x, y, z)$$

② 求偏导数, 建立方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + u\psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + u\psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + u\psi'_z = 0 \\ F'_{\lambda} = \varphi(x, y, z) = 0 \\ F'_{\mu} = \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

③ 解上述方程组得 (x_0, y_0, z_0) ;

④ 根据实际问题, 必存在最值, 所得即所求.

3. 多元函数极值与最值的考题分类

(1) 无条件极值 $\begin{cases} \text{显函数} \\ \text{隐函数} \end{cases} + \Delta$ 判别法;

(2) 闭区域边界上的最值;

(3) 闭区域上的最值.

4. 求函数 $f(x, y)$ 在某区域 D 上的最值的程序

(1) 求出 $f(x, y)$ 在 D 内所有可疑点处的函数值;

(2) 求出 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最值;

(3) 比较所有得到的函数值, 其中最大者即为最大值, 最小者即为最小值.

在实际问题中, 如果可以判断出 $f(x, y)$ 的最大值(最小值)一定在 D 的内部取得, 且 $f(x, y)$ 在 D 内只有一个驻点, 则可以断定该驻点处的函数值就是 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值(最小值).

9.2 典型例题分析

9.2.1 求多元函数的极值与最值

【例 9.1】 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0$, $f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是()

- (A) $f(0) > 1, f''(0) > 0$ (B) $f(0) > 1, f''(0) < 0$
 (C) $f(0) < 1, f''(0) > 0$ (D) $f(0) < 1, f''(0) < 0$

【分析与解答】 应选(A). 本题是考研常考题, 考查二元抽象函数取极值的充分条件, 严格按照判别步骤去做, 并不困难.

由 $z = f(x)\ln f(y)$, 计算各个偏导数, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x) \ln f(y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f(x) \frac{f'(y)}{f(y)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x) \ln f(y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{f'(x)f'(y)}{f(y)}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x) \frac{f''(y)f(y) - [f'(y)]^2}{[f(y)]^2}.$$

$$\text{在点 } (0,0) \text{ 处, 由于 } A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} = f''(0) \ln f(0), B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)} = 0, C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(0,0)}$$

$$= f''(0),$$

所以当 $f(0) > 1$ 且 $f''(0) > 0$ 时, 有 $B^2 - AC = -[f''(0)]^2 \ln f(0) < 0$,

$A = f''(0) \ln f(0) > 0$, 即这时函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值, 同时, 由上述计算知选项(B), (C)和(D)都不满足, 故应选(A).

【例 9.2】设函数 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^y$, 则函数 $z = f(x, y)$ ()

- | | |
|--------------|--------------|
| (A) 无极值 | (B) 有有限个极值 |
| (C) 有无穷多个极大值 | (D) 有无穷多个极小值 |

【分析与解答】应选(C). 本题是二元具体函数求极值问题, 由于涉及的三角函数是周期函数, 故极值点的个数有可能无穷, 给判别带来一定的难度, 事实证明, 考生对这类问题把握不好, 请复习备考的同学们注意加强对本题的理解和记忆.

$$\text{由 } \begin{cases} z'_x = -(1 + e^y) \sin x = 0 \\ z'_y = e^y (\cos x - 1 - y) = 0 \end{cases}$$

得驻点为 $(k\pi, \cos k\pi - 1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\text{又, } z''_{xx} = -(1 + e^y) \cos x, z''_{xy} = -e^y \sin x, z''_{yy} = e^y (\cos x - 2 - y).$$

(1) 当 $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ 时, 驻点为 $(k\pi, 0)$, 从而 $A = z''_{xx}(k\pi, 0) = -2$, $B = z''_{xy}(k\pi, 0) = 0$, $C = z''_{yy}(k\pi, 0) = -1$,

于是 $B^2 - AC = -2 < 0$, 而 $A = -2 < 0$, 即驻点 $(k\pi, 0)$ 均为极大值点, 因而函数有无穷多个极大值;

(2) 当 $k = \pm 1, \pm 3, \dots$ 时, 驻点为 $(k\pi, -2)$, 此时 $A = z''_{xx}(k\pi, -2) = -(1 + e^{-2})$, $B = z''_{xy}(k\pi, -2) = 0$, $C = z''_{yy}(k\pi, -2) = e^{-2}$

于是 $B^2 - AC = (1 + e^{-2}) \cdot e^{-2} > 0$, 即驻点 $(k\pi, -2)$ 为非极值点;

综上所述, 故选(C).

【例 9.3】设 $f(x, y) = kx^2 + 2kxy + y^2$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值, 求 k 的取值范围.

【分析与解答】由 $f(x, y) = kx^2 + 2kxy + y^2$, 可得

$$f'_x(x, y) = 2kx + 2ky, f''_{xx}(x, y) = 2k$$

$$f'_y(x, y) = 2kx + 2y, f''_{yy}(x, y) = 2,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 2k,$$

于是,

① 若 $\Delta = B^2 - AC = 4k^2 - 4k < 0$ 且 $A = 2k > 0$, 故 $0 < k < 1$;

② 若 $\Delta = B^2 - AC = 4k^2 - 4k = 0$, 则 $k = 0$ 或 $k = 1$,

当 $k = 0$ 时, $f(x, y) = y^2$, 由于 $f(x, 0) \equiv 0$, 于是点 $(0,0)$ 非极小值点.

当 $k = 1$ 时, $f(x, y) = (x + y)^2$, 由于 $f(x, -x) \equiv 0$, 于是点 $(0, 0)$ 也为极小值点.
综上所述, k 的取值范围为 $(0, 1)$.

【注】本题貌似简单,但是请考生勿忘讨论 $\Delta = 0$ 时的情形,否则会被扣分.

【例 9.4】设 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 证明由方程 $f(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 在 $x = a$ 处取得极值 $b = \varphi(a)$ 的必要条件是

$$f(a, b) = 0, f'_x(a, b) = 0, f'_y(a, b) \neq 0.$$

且当 $r(a, b) > 0$ 时, $b = \varphi(a)$ 是极大值; 当 $r(a, b) < 0$ 时, $b = \varphi(a)$ 是极小值, 其中

$$r(a, b) = \frac{f''_{xx}(a, b)}{f'_y(a, b)}.$$

【分析与解答】本题是一道新颖的计算性证明题, 考查抽象函数的极值判别和高阶偏导数计算, 计算量大, 难度不小.

$y = \varphi(x)$ 在 $x = a$ 处取得极值的必要条件是 $\varphi'(a) = 0$. 而

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} \quad (f'_y(x, y) \neq 0).$$

设 $b = \varphi(a)$, 则有

$$f(a, b) = 0, \frac{f'_x(a, b)}{f'_y(a, b)} = 0;$$

于是 $f'_x(a, b) = 0, f'_y(a, b) \neq 0$. 又

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= -\frac{[f''_{xx}(x, y) + f''_{xy}(x, y) \cdot \varphi'(x)] \cdot f'_y(x, y) - f'_x(x, y)[f''_{yx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) \cdot \varphi'(x)]}{[f'_y(x, y)]^2} \\ &= -\frac{[f''_{xx}(x, y) + f''_{xy}(x, y) \cdot \left(-\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}\right)] \cdot f'_y(x, y) - f'_x(x, y)[f''_{yx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) \cdot \left(-\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}\right)]}{[f'_y(x, y)]^2} \\ &= -\frac{f''_{xx}(x, y) \cdot [f'_y(x, y)]^2 - f''_{xy}(x, y) \cdot f'_x(x, y) \cdot f'_y(x, y) - f'_x(x, y) \cdot f''_{yx}(x, y) \cdot f'_y(x, y) + f''_{yy}(x, y) \cdot [f'_x(x, y)]^2}{[f'_y(x, y)]^3}, \end{aligned}$$

$$\varphi''(a) = -\frac{f''_{xx}(a, b) \cdot [f'_y(a, b)]^2}{[f'_y(a, b)]^3} = -\frac{f''_{xx}(a, b)}{f'_y(a, b)}.$$

当 $\frac{f''_{xx}(a, b)}{f'_y(a, b)} > 0$ 时, $\varphi''(a) < 0$, 故 $b = \varphi(a)$ 是极大值;

当 $\frac{f''_{xx}(a, b)}{f'_y(a, b)} < 0$ 时, $\varphi''(a) > 0$, 故 $b = \varphi(a)$ 是极小值.

【例 9.5】求二元函数 $z = f(x, y) = x^2 y (4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值, 最大值与最小值.

【分析与解答】由方程组 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = 0, \\ f'_y(x, y) = x^2(4 - x - y) - x^2 y = 0. \end{cases}$ 得 $x = 0 (0 \leqslant y \leqslant 6)$

及点 $(4, 0), (2, 1)$. 点 $(4, 0)$ 及线段 $x = 0 (0 \leqslant y \leqslant 6)$ 在 D 的边界上, 只有点 $(2, 1)$ 在 D 内部, 可能是极值点.

$$f''_{xx} = 8y - 6xy - 2y^2, f''_{xy} = 8x - 3x^2 - 4xy, f''_{yy} = -2x^2.$$

$$\text{在点}(2, 1) \text{ 处 } A = f''_{xx} |_{(2,1)} = -6, B = f''_{xy} |_{(2,1)} = -4, C = f''_{yy} |_{(2,1)} = -8.$$

$B^2 - AC = -32 < 0$, 因此点(2, 1)是 $z = f(x, y)$ 的极大值点, 极大值 $f(2, 1) = 4$.

在 D 的边界 $x = 0 (0 \leq y \leq 6)$ 及 $y = 0 (0 \leq x \leq 6)$ 上 $f(x, y) = 0$, 在边界 $x + y = 6$ 上, $y = 6 - x$, 代入 $f(x, y)$ 中得 $z = 2x^3 - 12x^2 (0 \leq x \leq 6)$. 由 $z' = 6x^2 - 24x = 0$ 得 $x = 0, x = 4$. 在边界 $x + y = 6$ 上对应 $x = 0, 4, 6$ 处 z 值分别为:

$$z|_{x=0} = 2x^3 - 12x^2|_{x=0} = 0,$$

$$z|_{x=4} = 2x^3 - 12x^2|_{x=4} = -64,$$

$$z|_{x=6} = 2x^3 - 12x^2|_{x=6} = 0.$$

因此知 $z = f(x, y)$ 在边界上最大值为 0, 最小值为 $f(4, 2) = -64$, 将边界上最大值和最小值与驻点(2, 1)处的值比较得, $z = f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最大值为 $f(2, 1) = 4$; 最小值为 $f(4, 2) = -64$.

【例 9.6】求函数 $z = x^2 + y^2 + 2x + y$ 在区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值与最小值.

【分析与解答】由于 $x^2 + y^2 \leq 1$ 是有界闭区域, $z = x^2 + y^2 + 2x + y$ 在该区域上连续, 因此一定能取到最大值与最小值.

$$(1) \text{解方程组 } \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{由于 } (-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 > 1,$$

即 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 不在区域 D 内, 舍去.

(2) 函数在区域内部无偏导数不存在的点.

(3) 再求函数在边界上的最大值与最小值点, 即求 $z = x^2 + y^2 + 2x + y$ 在满足约束条件 $x^2 + y^2 = 1$ 的条件极值点. 此时, $z = 1 + 2x + y$.

用拉格朗日乘法, 作拉格朗日函数 $L(x, y, \lambda) = 1 + 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$,

$$\begin{cases} L'_x = 2 + 2\lambda x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} L'_y = 1 + 2\lambda y = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由(1), (2)解得 $x = -\frac{1}{\lambda}$, $y = -\frac{1}{2\lambda}$. 把它们代入(3), 有 $\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^4} - 1 = 0$, 解得 $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

或 $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 代入(1), (2)得 $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$ 所有三类最值怀疑点仅有两个, 由于

$$z\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1 + \sqrt{5}, z\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \sqrt{5}, \text{ 所以最小值 } m = 1 - \sqrt{5}, \text{ 最大值 } M = 1 + \sqrt{5}.$$

9.2.2 多元函数的极值与最值的应用

【例 9.7】求内接于椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的体积最大的长方体.

【分析与解答】设该内接长方体为 v , $p(x, y, z)$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 是长方体的一个顶点, 且位于椭球面上, 由于椭球面关于三个坐标平面对称, 所以 $v = 8xyz$, $x > 0, y > 0, z > 0$ 且满足条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. 因此, 需要求出 $v = 8xyz$ 在约束条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 下的极值.

设 $L(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$, 求出 L 的所有偏导数, 并令它们都等

$$\begin{cases} L'_x = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L'_y = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L'_z = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{于 } 0, \text{ 有 } \begin{cases} L'_x = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L'_y = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L'_z = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} L'_x = 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0, \\ L'_y = 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0, \\ L'_z = 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$L'_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad (4)$$

(1), (2), (3) 分别乘以 x, y, z , 有 $8xyz = -\frac{2\lambda x^2}{a^2}, 8xyz = -\frac{2\lambda y^2}{b^2}, 8xyz = -\frac{2\lambda z^2}{c^2}$,

得 $\frac{2\lambda x^2}{a^2} = \frac{2\lambda y^2}{b^2} = \frac{2\lambda z^2}{c^2}$, 于是 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 或 $\lambda = 0$ ($\lambda = 0$ 时, $8xyz = 0$, 不合题意, 舍去), 把 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 代入(4), 有 $\frac{3z^2}{c^2} - 1 = 0$, 解得 $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$, 从而 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

由题意知, 内接于椭球面的长方体的体积没有最小值, 而存在最大值, 因而以点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 为顶点所作对称于坐标平面的长方体即为所求的最大长方体, 体积为 $v = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

【例 9.8】在第一象限的椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上求一点, 使过该点的法线与原点的距离最大.

【分析与解答】设 $T(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$, 则有 $\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2}x$, $\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = 2y$.

椭圆上任意一点 (x, y) 处的法线方程为 $\frac{X-x}{\frac{1}{2}x} = \frac{Y-y}{2y}$, 即 $-\frac{1}{2}Y + \frac{2}{x}X - \frac{3}{2} = 0$.

原点到该法线的距离为 $d = \frac{3/2}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2}}$.

记 $f(x, y) = \left(\frac{1}{2y}\right)^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2$, $x > 0, y > 0$, 约束条件为 $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$,

构造拉格朗日乘子函数 $h(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

根据条件极值的求解方法, 先求 $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-16 + \lambda x^4}{x^3}$, $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, \lambda) =$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-1 + 4\lambda y^4}{y^3},$$

令 $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial h}{\partial y} = 0$, 得联立方程组:

$$\begin{cases} -16 + \lambda x^4 = 0, \\ -1 + 4\lambda y^4 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

由(1)式得 $-16 + \lambda x^4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{16}{x^4}$; 由(2)式得 $-1 + 4\lambda y^4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4y^4}$;

所以有 $\frac{16}{x^4} = \frac{1}{4y^4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \sqrt{2} x$. 代入(3)式得到 $\frac{x^2}{4} + \left(\frac{1}{4} \sqrt{2} x\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$,

$$y = \frac{1}{4} \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

根据实际问题, 距离最大的点是存在的, 驻点只有一个, 所得及所求, 故可断定所求的点为 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

【例 9.9】(仅数学三) 厂家生产的一种产品同时在两个市场销售, 售价分别为 p_1 和 p_2 , 销售量分别为 q_1 和 q_2 , 需求函数分别为 $q_1 = 24 - 0.2p_1$ 和 $q_2 = 10 - 0.05p_2$, 总成本函数为 $C = 35 + 40(q_1 + q_2)$.

试问: 厂家如何确定两个市场的售价, 能使其获得的总利润最大? 最大总利润为多少?

【分析与解答】 总收入函数为 $R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 24p_1 - 0.2p_1^2 + 10p_2 - 0.05p_2^2$.

总利润函数为 $L = R - C = 32p_1 - 0.2p_1^2 - 0.05p_2^2 - 1395 + 12p_2$.

由极值的必要条件, 得方程组 $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_1} = 32 - 0.4p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial p_2} = 12 - 0.1p_2 = 0 \end{cases}$.

解此方程组得 $p_1 = 80, p_2 = 120$.

由问题的实际含义可知, 当 $p_1 = 80, p_2 = 120$ 时, 厂家所获得的总利润最大, 其最大总利润为

$$L|_{p_1=80, p_2=120} = 605.$$

【例 9.10】(仅数学一) 设有一小山, 取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面, 其底部所占的区域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 - xy \leqslant 75\}$, 小山的高度函数为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$.

(1) 设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上一点, 问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 记该最大值为 $g(x_0, y_0)$, 写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说, 要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使(1)中的 $g(x, y)$ 达到最大值的点, 试确定攀登起点的位置.

【分析与解答】(1) 由梯度的几何意义知, $h(x, y)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处沿梯度

$$\text{grad}h(x, y)|_{(x_0, y_0)} = (y_0 - 2x_0)i + (x_0 - 2y_0)j$$

方向的方向导数最大. 方向导数的最大值为该梯度的模, 所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}.$$

(2) 令 $f(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$. 由题意, 只需求 $f(x, y)$ 在约束条件 $75 - x^2 - y^2 + xy = 0$ 下的最大值点.

令 $L(x, y, \lambda) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy)$, 则

$$\begin{cases} L'_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0 & (1) \\ L'_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L'_{\lambda} = 75 - x^2 - y^2 + xy = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) 式与(2)式相加可得 $(x + y)(2 - \lambda) = 0$, 从而得 $y = -x$ 或 $\lambda = 2$.

若 $\lambda = 2$, 则由(1)式得 $y = x$, 再由(3)式得 $x = \pm 5\sqrt{3}$, $y = \pm 5\sqrt{3}$.

若 $y = -x$, 则由(3)式得 $x = \pm 5$, $y = \mp 5$. 于是得到四个极值点

$$M_1(5, -5), M_2(-5, 5), M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3}).$$

由于 $f(M_1) = f(M_2) = 450$, $f(M_3) = f(M_4) = 150$. 故 M_1 或 M_2 可作为攀登的起点.

第 10 讲 二重积分

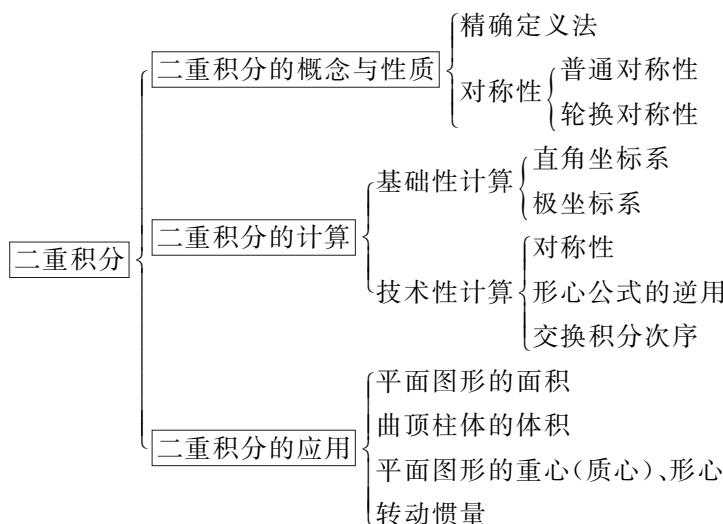
» 导语

二重积分是数学一、二、三的考生在多元积分学上唯一的公共考试内容,也是历年考研中的必考题,基本上会考查一个大题和一个小题。二重积分计算上的细节很多,出题的角度很多,这些年的考试中,命题人通过新颖的手法给出了不少精彩的题目,值得我们很好地去品味,放在下面具体去讲解。在导语中关键强调一点,二重积分重在计算,思路上说,难度不高;计算上讲,却不容易。历届考生的考试结果告诉我们,即使一个很常规的二重积分计算题,最终统计出的结果也会有很高的难度和较好的区分度,为什么?因为很多考生计算不过关,请大家引以为戒。

» 大纲要求

1. 二重积分的概念、性质,二重积分的中值定理。
2. 二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)。
3. 二重积分的应用(用二重积分求平面图形的面积、曲顶柱体的体积、重心(质心)、形心、转动惯量等)

» 知识体系



10.1 考试内容分析

10.1.1 二重积分的概念、性质与对称性

1. 二重积分的概念

设二元函数 $f(x, y)$ 定义在有界闭区域 D 上, 则二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

【注】(1) 将 D 无限分割的 $\Delta\sigma_i > 0$, λ 为所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值, 强调该极限与对区域 D 的分割方式无关;

(2) 其几何背景是以 $f(x, y)$ 为曲顶、有界闭区域 D 为底的曲顶柱体的体积:

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma;$$

(3)(数学一、二要求)其物理背景是以 $f(x, y)$ 为面密度的平面区域 D 的质量:

$$M = \iint_D f(x, y) d\sigma;$$

(4) 要了解二重积分的存在性, 也称为二元函数的可积性. 设平面有界闭区域 D 由一条或者几条逐段光滑闭曲线所围成, 当 $f(x, y)$ 在 D 上连续时, 或者当 $f(x, y)$ 在 D 上有界, 且在 D 上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的, 则它在 D 上可积, 也就是二重积分存在.

2. 二重积分的性质

性质 1 区域面积 $\iint_D d\sigma = A$, 其中 A 为区域 D 的面积.

性质 2 可积函数必有界 当 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积时, 则 $f(x, y)$ 在 D 上必有界.

性质 3 积分的线性性质 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_D [k_1 f(x, y) + k_2 g(x, y)] d\sigma = k_1 \iint_D f(x, y) d\sigma + k_2 \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

性质 4 积分的可加性 当 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积时, $D_1 \cup D_2 = D, D_1 \cap D_2 = \emptyset$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

性质 5 积分的保号性 当 $f(x, y), g(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积时, 若在 D 上,

$f(x, y) \leq g(x, y)$, 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

特殊地有

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

性质 6 估值定理 设 M, m 分别是 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大值和最小值, A 为 D 的面积, 则有

$$mA \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA.$$

性质 7 中值定理 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, A 为 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)A.$$

3. 普通对称性与轮换对称性

(1) 普通对称性

设区域 D 关于 y 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(x, y) = f(-x, y) \\ 0, & f(x, y) = -f(-x, y) \end{cases}$$

(2) 轮换对称性

若把 x 与 y 对调后, 区域 D 不变(或称区域 D 关于 $y = x$ 对称), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

这就是轮换对称性.

10.1.2 二重积分的计算

1. 直角坐标系下的计算法

$$(1) \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

其中 D 为 X 型区域: $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b$;

$$(2) \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,$$

其中 D 为 Y 型区域: $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d$.

这里的下限必须小于等于上限.

2. 极坐标系下的计算法

$$(1) \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr. \quad (\text{极点 } O \text{ 在区域 } D \text{ 外部})$$

$$(2) \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr. \quad (\text{极点 } O \text{ 在区域 } D \text{ 边界上})$$

$$(3) \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr. \quad (\text{极点 } O \text{ 在区域 } D \text{ 内部})$$

3. 极坐标系与直角坐标系选择的一般原则

(1) 先看被积函数是否为 $f(x^2 + y^2)$, $f(\frac{y}{x})$, $f(\frac{x}{y})$ 等形式;

(2) 再看积分区域是否为圆或者圆的一部分.

若两者兼是,那么优先选用极坐标系. 否则,就优先考虑直角坐标系.(这只是一个一般原则,是大方向,请大家一定不要教条化.)

4. 极坐标系与直角坐标系的互相转化

把握两个桥梁就可以,一是用好 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 这个公式,二是画好区域 D 的图形,确定好

上下限的转化.

10.1.3 二重积分的应用

1. 几何量

若 D 是所占的平面区域,则其面积为 $A = \iint_D d\sigma$.

2. 重心(质心)与形心

对于平面薄片,面密度 $\rho(x, y)$ 连续, D 是薄片所占的平面区域,则计算重心 \bar{x}, \bar{y} 的公式为

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$$

【注】第一,在考研的范畴内,重心就是质心;第二,当密度 $\rho(x, y)$ 为常数时,重心就是形心. 以后的三重积分和线面积分(仅为数学一考试内容)的应用中,也是这样的说法,到那里不再重复说明.

3. 转动惯量

对于平面薄片,面密度 $\rho(x, y)$ 连续, D 是薄片所占的平面区域,则该薄片对于 x 轴, y 轴和原点 O 的转动惯量 I_x , I_y 和 I_o 分别为

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma, I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma, I_o = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) d\sigma.$$

10.2 典型例题分析

10.2.1 二重积分的概念与性质题

本部分主要考查二重积分的对称性(包括普通对称性和轮换对称性)、积分的保号性等,题目出法比较灵活,是考研中区分度比较好的题目.

【例 10.1】记平面区域 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$,计算如下二重积分:

(1) $I_1 = \iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} d\sigma$, 其中, $f(t)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续正值函数, 常数 $a > 0, b > 0$;

$$(2) I_2 = \iint_D (e^{\lambda x} - e^{-\lambda y}) d\sigma, \text{常数 } \lambda > 0.$$

【分析与解答】(1) 易见,积分区域 D 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形,故其面积 $S_D = 2$,因为积分区域 D 关于直线 $y = x$ 对称,则由二重积分的性质便有 $I_1 = \iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} d\sigma = \iint_D \frac{af(y) + bf(x)}{f(y) + f(x)} d\sigma = \frac{1}{2} \cdot \iint_D \frac{(a+b)[f(x) + f(y)]}{f(x) + f(y)} d\sigma = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \iint_D d\sigma = a+b$.

(2) 因为积分区域 D 关于直线 $y = x$ 对称,又分别关于 Oy 轴, Ox 轴对称; 函数 $e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}, e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}$ 分别关于 x, y 为奇函数,则由二重积分的性质得

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_D (e^{\lambda x} - e^{-\lambda y}) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D [(e^{\lambda x} - e^{-\lambda y}) + (e^{\lambda y} - e^{-\lambda x})] d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) d\sigma + \frac{1}{2} \iint_D (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) d\sigma = 0. \end{aligned}$$

【例 10.2】设 $p(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负连续, $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且有相同的单调性,其中 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, 判别 $I_1 = \iint_D p(x)f(x)p(y)g(y) dx dy$, $I_2 = \iint_D p(x)f(y)p(y)g(y) dx dy$ 的大小,并说明理由.

【分析与解答】

$$I_1 - I_2 = \iint_D p(x)p(y)g(y)(f(x) - f(y))dxdy$$

由于 D 关于 x 与 y 对称, 所以 $I_1 - I_2$ 又可以写成

$$I_1 - I_2 = \iint_D p(x)p(y)g(x)(f(y) - f(x))dxdy$$

所以

$$2(I_1 - I_2) = \iint_D p(x)p(y)(g(y) - g(x))(f(x) - f(y))dxdy$$

因 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同, 所以 $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geqslant 0$,
从而知 $I_1 - I_2 \leqslant 0$, 有 $I_1 \leqslant I_2$.

【例 10.3】设函数 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = x + \iint_D y f(u, v) dudv$, 其中 D 由 $y = \frac{1}{x}$,

$x = 1$, $y = 2$ 围成, 求 $f(x, y)$.

【分析与解答】 这是一道综合题目, 表面看来很复杂, 只要分析清楚了并不难. 首先可以知道积分 $\iint_D f(u, v) dudv$ 是一个常数, 因此 $f(x, y) = x + \iint_D y f(u, v) dudv$ 变为 $f(x, y) = x + y \iint_D f(u, v) dudv$, 两边再求二重积分就可以解决了.

设 $A = \iint_D f(u, v) dudv$, 则 $A = \iint_D f(x, y) dxdy$. 故

$$f(x, y) = x + \iint_D y f(u, v) dudv = x + yA,$$

两边求二重积分, 则 $A = \iint_D (x + Ay) dxdy = \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^1 (x + Ay) dx = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}$,

从而 $A = \frac{1}{2}$, 故 $f(x, y) = x + \frac{1}{2}y$.

【例 10.4】求极限 $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t^3} \int_0^t dx \int_{x^2}^{t^2} \arctan[\cos(3x + 5\sqrt{y})] dy$.

【分析与解答】 记 $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant t, x^2 \leqslant y \leqslant t^2\}$, 则

$$\int_0^t dx \int_{x^2}^{t^2} \arctan[\cos(3x + 5\sqrt{y})] dy = \iint_D \arctan[\cos(3x + 5\sqrt{y})] d\sigma,$$

使用二重积分的中值定理, 可知存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使

$$\iint_D \arctan[\cos(3x + 5\sqrt{y})] d\sigma = A \arctan[\cos(3\xi + 5\sqrt{\eta})],$$

其中 A 为区域 D 的面积, 是 t 的函数,

$$A = \iint_D d\sigma = I = \int_0^t dx \int_{x^2}^{t^2} dy = \frac{2}{3}t^3.$$

而当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $D \rightarrow (0, 0)$, 所以 $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$, 于是

$$\arctan[\cos(3\xi + 5\sqrt{\eta})] \rightarrow \frac{\pi}{4},$$

从而有

$$I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} A \arctan[\cos(3\xi + 5\sqrt{\eta})] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \left(\frac{2}{3} t^3 \right) \lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan[\cos(3\xi + 5\sqrt{\eta})] = \frac{\pi}{6}.$$

10.2.2 二重积分的交换积分次序

【例 10.5】 交换下列累次积分 I 的积分次序.

$$(1) I_1 = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(2) I_2 = \int_{\frac{1}{4}}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_0^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4y})} f(x, y) dx + \int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4y})}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx;$$

【分析与解答】 (1) 由累次积分 I_1 的积分限容易写出其对应的二重积分的积分区域 $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, 它们可表示为

$$\sigma_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1 \right\},$$

$$\sigma_2 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9-x^2}, 1 \leqslant x \leqslant 3 \right\}.$$

显然, 平面区域 σ 的边界曲线为抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$, 上半圆弧 $y = \sqrt{9-x^2}$ 与直线 $y=0$,

则 σ_1, σ_2 也可以写为

$$\sigma_1 = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{2y} \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \right\},$$

$$\sigma_2 = \left\{ (x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{9-y^2}, 0 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{2} \right\}.$$

于是, 累次积分 I_1 交换积分次序后为

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\sqrt{2y}}^1 f(x, y) dx + \int_0^{2\sqrt{2}} dy \int_1^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx.$$

(2) 由累次积分 I 的积分限容易写出其对应的二重积分的积分区域为 $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$,

其中

$$\sigma_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}, \frac{1}{4} \leqslant y \leqslant 1 \right\},$$

$$\sigma_2 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4y}), 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{4} \right\},$$

$$\sigma_3 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4y}) \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{4} \right\}.$$

根据区域 σ 的图形可知, σ 的边界曲线是由上半圆 $y = \sqrt{1-x^2}$, 直线 $x=0$ 与抛物线 $y = x - x^2$ 组成, 故可用不等式表示为

$$\sigma = \left\{ (x, y) \mid x - x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1 \right\}.$$

于是, 累次积分 I 化为另一种先对 y 后对 x 的累次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_{x-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

【例 10.6】设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^x \left[\int_0^t u f(u^2 + t^2) du \right] dt$, 求 $F''(x)$.

【分析与解答】令 $\int_0^t u f(u^2 + t^2) du = g(t) \Rightarrow F(x) = \int_0^x g(t) dt$, 故 $F'(x) = g(x) = \int_0^x u f(u^2 + x^2) du$.

再令 $t = u^2 + x^2$, 则 $F'(x) = \frac{1}{2} \int_{x^2}^{2x^2} f(t) dt$, $F''(x) = 2x f(2x^2) - x f(x^2)$.

【例 10.7】设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^x \left[\int_t^x f(u+t) du \right] dt$, 证明 $F''(0) = f(0)$.

【分析与解答】交换积分次序. 则 $F(x) = \int_0^x \left[\int_0^u f(u+t) dt \right] du$

令 $\int_0^u f(u+t) dt = g(u) \Rightarrow F(x) = \int_0^x g(u) du \Rightarrow F'(x) = g(x) = \int_0^x f(x+t) dt$,

再令 $v = x+t$, 则 $F'(x) = \int_x^{2x} f(v) dv$, 于是 $F''(x) = 2f(2x) - f(x)$, 故 $F''(0) = f(0)$.

10.2.3 二重积分的计算题

【例 10.8】计算 $I = \iint_D \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dxdy$, $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$.

【分析与解答】用曲线 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 = 0$ 将 D 划分为 D_1 与 D_2 .

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \iint_{D_1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right) d\sigma + \iint_{D_2} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) d\sigma \\ &= \iint_{D_1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right) d\sigma + \iint_{D-D_1} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) d\sigma \\ &= \iint_{D_1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right) d\sigma + \iint_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) d\sigma - \iint_{D_1} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) d\sigma \\ &= 2 \iint_{D_1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right) d\sigma + \iint_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) d\sigma \end{aligned}$$

其中,

$$I_1 = \iint_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$I_2 = \iint_{D_1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right) d\sigma = \iint_{D_1} \left[\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 - \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right] dxdy.$$

$$D_1: \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$\text{令 } X = x - \frac{1}{2\sqrt{2}}, dX = dx, Y = y - \frac{1}{2\sqrt{2}}, dY = dy$$

于是,

$$D_1 : X^2 + Y^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\iint_{D_1} \left(\frac{1}{4} - X^2 - Y^2\right) dXdY = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - r^2\right) r dr = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) = \frac{\pi}{32}$$

$$I = 2I_2 + I_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{2} = \frac{9}{16}\pi.$$

【例 10.9】计算 $I = \iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dxdy$, 其中 $D = \{(x,y) | x+y \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

【分析与解答】本题考查二重积分的计算, 是一道计算量较大的难题.

首先, 由 x 与 y 的轮换对称性, 有

$$I = \iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dxdy = \iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{x}{y})}{\sqrt{1-x-y}} dxdy,$$

$$\begin{aligned} 2I &= \iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dxdy + \iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{x}{y})}{\sqrt{1-x-y}} dxdy \\ &= \iint_D \frac{(x+y)\ln \frac{(x+y)^2}{xy}}{\sqrt{1-x-y}} dxdy \\ &= 2 \iint_D \frac{(x+y)\ln(x+y)}{\sqrt{1-x-y}} dxdy - 2 \iint_D \frac{(x+y)\ln x}{\sqrt{1-x-y}} dxdy, \end{aligned}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(x+y)\ln(x+y)}{\sqrt{1-x-y}} dy - \int_0^1 \ln x dx \int_0^{1-x} \frac{x+y}{\sqrt{1-x-y}} dy.$$

$$\text{令 } x+y = u (\text{视 } x \text{ 为常数}), \text{ 得 } I = \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{u \ln u}{\sqrt{1-u}} du - \int_0^1 \ln x dx \int_x^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du.$$

交换积分次序, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 du \int_0^u \frac{u \ln u}{\sqrt{1-u}} dx - \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du \int_0^u \ln x dx \\ &= \int_0^1 \frac{u^2 \ln u}{\sqrt{1-u}} du - \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du \int_0^u \ln x dx \\ &= \int_0^1 \frac{u^2 \ln u}{\sqrt{1-u}} du - \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} (u \ln u - u) du \\ &= \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} du = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

【注】本题最后一步有多种解法, 你能想出多少方法? 比比看什么方法最简单?

【例 10.10】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0) = 1$, 且满足

$$\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(t) dx dy, \text{ 其中 } D_t = \{(x,y) | 0 \leq y \leq t-x, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1),$$

求 $f(x)$ 的表达式.

【分析与解答】本题是实考题, 主要考查二重积分的概念与计算、变上限函数的求导、简单微分方程的求解等, 是一道综合题.

$$\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \int_0^t dx \int_0^{t-x} f'(x+y) dy = \int_0^t [f(t) - f(x)] dx = tf(t) - \int_0^t f(x) dx,$$

$$\text{又 } \iint_{D_t} f(t) dx dy = \frac{t^2}{2} f(t), \text{ 由题设有 } tf(t) - \int_0^t f(x) dx = \frac{t^2}{2} f(t).$$

$$\text{两边求导整理得 } (2-t)f'(t) = 2f(t), \text{ 解得 } f(t) = \frac{C}{(2-t)^2},$$

$$\text{代入 } f(0) = 1, \text{ 得 } C = 4, \text{ 故 } f(x) = \frac{4}{(2-x)^2} (0 \leq x \leq 1).$$

【注】教育部考试中心指出, 实考下来, 本题的难度值竟然是 0.285, 区分度却很好, 为 0.652. 说明这种问题是今后考研还会命制的.

【例 10.11】(I) 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

(II) 当 $x \rightarrow 1^-$ 时, 求与 $\int_0^{+\infty} x^t dt$ 等价的无穷大量.

【分析与解答】本题考查二重积分的计算和无穷大量的比较问题, 是一道具有一定难度的综合性考题, 这类问题提法新颖, 计算量大, 逻辑性强, 对考生的恒等变形能力要求较高. 考生在考研时要注意: 一般第(I)问是第(II)问的提示, 给解决第(II)问搭建了一个台阶, 考生要充分重视这个逻辑提示.

(I) 记 $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, 则

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy = \iint_{\substack{0 \leq x < +\infty \\ 0 \leq y < +\infty}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r dr = -\frac{\pi}{4} (e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty}) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

故

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(II) 要解决第二个问题, 需要首先弄清楚以下几个要点:

$$(1) x \rightarrow x_0 \text{ 时, } f(x) \text{ 与 } g(x) \text{ 为等价无穷大} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \end{cases}$$

(2) 无穷大量的表达形式众多, 有一种常用的形式: $\frac{1}{(x-x_0)^p}$ 或 $\frac{1}{(x_0-x)^p}$, 此题

$x \rightarrow 1^-$, 故考虑用 $\frac{1}{(1-x)^p}$. 于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt}{\frac{1}{(1-x)^p}} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^p \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^p \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln x} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^p \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt (*). \end{aligned}$$

根据第一问的提示, 我们要凑出“ e^{-u^2} ”这种形式, 故令 $t^2 \ln \frac{1}{x} = u^2$, 即

$$t \sqrt{\ln \frac{1}{x}} = u \Rightarrow \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dt = du$$

$$\text{则 } (*) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^p}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^p}{\sqrt{-\ln(1+x-1)}} \stackrel{1-x=y}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^p}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

取 $p = \frac{1}{2}$, 极限值为 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 故 $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 与 $\int_0^{+\infty} x^t dt$ 为 $x \rightarrow 1^-$ 时的等价无穷大量.

10.2.4 二重积分的证明题

【例 10.12】 证明 $\int_0^1 dx \int_0^1 (xy)^{xy} dy = \int_0^1 x^x dx$.

【分析与解答】 本题看似是二重积分问题, 事实上, 用代换 $t = xy$ 可将累次积分化为定积分.

在 $\int_0^1 (xy)^{xy} dy$ 中, 视 x 为常数, 令 $t = xy, dt = xdy$, 当 y 从 0 变到 1 时, t 从 0 变到 x , 则

$$\int_0^1 (xy)^{xy} dy = \int_0^x t^t \frac{1}{x} dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^t dt,$$

从而

$$\int_0^1 dx \int_0^1 (xy)^{xy} dy = \int_0^1 \frac{1}{x} dx \int_0^x t^t dt = \int_0^1 t^t dt \int_t^1 \frac{1}{x} dx = - \int_0^1 t^t \ln t dt$$

于是也就是要证明

$$- \int_0^1 t^t \ln t dt = \int_0^1 t^t dt,$$

移项后就是要证明

$$\int_0^1 t^t (1 + \ln t) dt = 0.$$

事实上,

$$t^t (1 + \ln t) = e^{t \ln t} (1 + \ln t) = e^{t \ln t} d(t \ln t) = d(e^{t \ln t})$$

故

$$\int_0^1 t^t (1 + \ln t) dt = e^{t \ln t} \Big|_0^1 = 0.$$

【例 10.13】设 $F(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 求 $I = \iint_D F(x, y) dx dy$, 并

证明: $I \leq 2(M - m)$, 其中 M 和 m 分别是 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值和最小值.

$$\begin{aligned} \text{【分析与解答】 } I &= \int_a^b dx \int_c^d \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dy = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=c}^{y=d} dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f(x, d)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, c)}{\partial x} \right) dx = (f(x, d) - f(x, c)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= (f(b, d) + f(a, c)) - (f(a, d) + f(b, c)), \end{aligned}$$

显见, $I \leq 2(M - m)$.

【注】2011 年考研试题出现了类似这样的问题, 本题在前, 考题在后.

【例 10.14】(I) 设 $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 若 f''_{xy} 与 f''_{yx} 在 D 上连续, 证明

$$\iint_D f''_{xy}(x, y) dx dy = \iint_D f''_{yx}(x, y) dx dy.$$

(II) 设 D 为 xOy 平面上的区域, 若 f''_{xy} 与 f''_{yx} 都在 D 上连续, 证明 f''_{xy} 与 f''_{yx} 在 D 上相等.

【分析与解答】 本题考查二重积分的计算, 是比较新颖的非常规考题, 涉及抽象的理论推导, 在 2011 年考研中已经有所涉及, 本题的设计同样比较独特, 希望考生多加体会和总结.

$$\begin{aligned} \text{(I) 证明: } \iint_D f''_{xy}(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f''_{xy}(x, y) dy = \int_a^b f'_x(x, y) \Big|_c^d dx \\ &= \int_a^b [f'_x(x, d) - f'_x(x, c)] dx = f(x, d) \Big|_a^b - f(x, c) \Big|_a^b \\ &= f(b, d) - f(a, d) + f(a, c) - f(b, c). \end{aligned}$$

$$\text{同理, } \iint_D f''_{yx}(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f''_{yx}(x, y) dx = f(b, d) - f(a, d) + f(a, c) - f(b, c).$$

结论成立.

(II) 证明: 用反证法.

设 $\exists P_0(x_0, y_0) \in D$, 有 $f''_{xy}(x_0, y_0) \neq f''_{yx}(x_0, y_0)$.

不妨设 $f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{yx}(x_0, y_0) > 0$,

由于

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} [f''_{xy}(x, y) - f''_{yx}(x, y)] = f''_{xy}(x_0, y_0) - f''_{yx}(x_0, y_0) > 0.$$

由极限的保号性, $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0$, 当 $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$ 时有 $f''_{xy}(x, y) - f''_{yx}(x, y) > \varepsilon_0$.

取 $D_0 = \left\{ (x, y) \mid x_0 - \frac{\delta}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\delta}{2}, y_0 - \frac{\delta}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{\delta}{2} \right\} \subset U(P_0, \delta)$

于是, $\iint_{D_0} [f''_{xy}(x, y) - f''_{yx}(x, y)] dx dy \geq \iint_{D_0} \varepsilon_0 dx dy = \varepsilon_0 \delta^2 > 0$.

由(I), $\iint_{D_0} [f''_{xy}(x, y) - f''_{yx}(x, y)] dx dy = 0$, 出现矛盾, 故 $f''_{xy}(x, y)$ 与 $f''_{yx}(x, y)$ 在 D 上相等.

10.2.5 二重积分的应用性问题

【例 10.15】(仅数学一)一个半径为 1, 高为 3 的开口圆柱形水桶, 在距底为 1 处有两个小孔(小孔的面积忽略不计), 两小孔连线与水桶轴线相交, 试问该水桶最多能装多少水?

(仅数学二、三)求 $V(t) = \iint_{D_t} ((t-1)y+1) dx dy$ 的最大值, 其中 $D_t = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, -\frac{1}{t-1} \leq y \leq 1\}$, $2 \leq t \leq 3$.

【分析与解答】对于数学一, 本题是典型的应用型计算题, 也就是首先要考生根据题目的文字表述, 翻译出数学表达式, 然后进行计算. 对于数学二、三, 本题会直接命制成计算题, 降低题目的难度. 需要指出的是, 这种“动区域(也就是区域是随着某个参数变化而变化)”的二重积分不容易计算, 而且本题还要求最值, 需要用到导数工具. 总之, 本题是一道综合性较强的题目, 这类问题的区分度在考研中一直很高.

对于数学一, 首先, 考生需要画出示意图. 显然, 水桶竖直放置时, 装水至水面高度为 1 时, 水将从两小孔流出, 此时装水量为 $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. 所以要使水桶多盛水, 通过水桶倾斜来增加盛水量. 用数学语言来描述, 即过两孔连线做一张动平面, 问题就是求出动平面与桶底、桶壁围成的部分有最大的体积. 如图 10.1 所示.

将两孔 A, B 连线, 过此连线的平面方程为 $z = ky + 1$, 其中 k 为参数. 设动平面与桶口唯一交点 M 的坐标为 $(0, 1, t)$, 代入平面方程, 得 $k = t-1$, 则以 t 为参数的动平面的方程为

$$\pi: z = (t-1)y + 1.$$

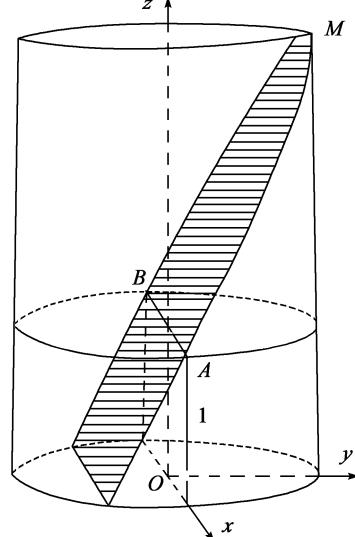


图 10.1

于是平面 π 与面 Oxy 的交线为 $y = -\frac{1}{t-1}$, 在倾斜水桶以改变盛水量时, 要求此交线要始终在水桶底面上, 故 $-\frac{1}{t-1} \geq -1 \Rightarrow t \geq 2$, 于是可得参数 t 的取值范围是: $2 \leq t \leq 3$, 盛水量为 $V(t) = \iint_{D_t} ((t-1)y+1) dx dy$, 其中 $D_t = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, -\frac{1}{t-1} \leq y \leq 1\}$, 且要求 $2 \leq t \leq 3$.

于是问题就翻译如下:

求 $V(t) = \iint_{D_t} ((t-1)y+1) dx dy$ 的最大值, 其中 $D_t = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1, -\frac{1}{t-1} \leq y \leq 1\}$, $2 \leq t \leq 3$,

这就成为了数学一、二、三共同需要解决的计算题了.

$$\begin{aligned} V(t) &= \iint_{D_t} ((t-1)y+1) dx dy = \int_{-\frac{1}{t-1}}^1 ((t-1)y+1) dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{t-1}}^1 2\sqrt{1-y^2} ((t-1)y+1) dy = 2 \int_{-\frac{1}{t-1}}^1 \sqrt{1-y^2} dy + \int_{-\frac{1}{t-1}}^1 2(t-1)y \sqrt{1-y^2} dy \\ &= 2 \int_{-\frac{1}{t-1}}^1 (1-y) \sqrt{1-y^2} dy + 2t \int_{-\frac{1}{t-1}}^1 y \sqrt{1-y^2} dy, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} V'(t) &= -2 \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \cdot \frac{1}{(t-1)^2} \sqrt{1 - \frac{1}{(t-1)^2}} + 2 \int_{-\frac{1}{t-1}}^1 y \sqrt{1-y^2} dy - 2t \left(-\frac{1}{t-1}\right) \cdot \\ &\quad \frac{1}{(t-1)^2} \sqrt{1 - \frac{1}{(t-1)^2}} \\ &= 2 \int_{-\frac{1}{t-1}}^1 y \sqrt{1-y^2} dy = -\frac{2}{3} (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-\frac{1}{t-1}}^1 \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{(t-1)^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \frac{(t(t-2))^{\frac{3}{2}}}{(t-1)^3} > 0. \end{aligned}$$

$V(t)$ 单调增加, 故

$$\begin{aligned} V_{\max} &= V(3) = \iint_{D_3} (2y+1) dx dy = \int_{-\frac{1}{2}}^1 (2y+1) dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \\ &= 4 \int_{-\frac{1}{2}}^1 y \sqrt{1-y^2} dy + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-y^2} dy = \frac{2}{3}\pi + \frac{3}{4}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

【例 10.16】求下列曲面所围成的立体的体积:

$$(1) z = 1 - x^2 - y^2, z = 0; (2) z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 8x, z = 0.$$

【分析与解答】 (1) $V = \iint_D (1-x^2-y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr = 2\pi \int_0^1 (r-r^3) dr = \frac{\pi}{2}$;

(2) 投影区域 D 是 $(x-4)^2 + y^2 \leq 4^2$, $V = \iint_D \frac{1}{4}(x^2 + y^2) d\sigma = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{8\cos\theta} r^3 dr = 96\pi$.

【例 10.17】求柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所截得部分体积.

【分析与解答】 $V = 4 \iint_{D_1} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x \text{ 且 } y \geq 0\}$,

用极坐标计算, 在极坐标下 $D_1: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta \end{cases}$, 于是

$$V = 4 \iint_{D_1} \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4 - r^2} r dr = \frac{32}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

【例 10.18】 设平面薄片所占的区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 它在 (x, y) 处的面密度 $\rho(x, y) = x^2 y$, 求此薄片的重心.

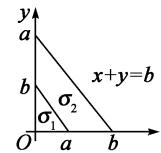
【分析与解答】 设此薄片的重心为 (\bar{x}, \bar{y}) ,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma} = \frac{\int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^3 y dy}{\int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 y dy} = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{1}{35}} = \frac{35}{48}; \\ \bar{y} &= \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma} = \frac{\int_0^1 dx \int_{x^2}^x x^2 y^2 dy}{\frac{1}{35}} = \frac{\frac{1}{54}}{\frac{1}{35}} = \frac{35}{54}. \end{aligned}$$

【例 10.19】 设平面区域 σ 由 σ_1 与 σ_2 组成, 其中, $\sigma_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq a - x, 0 \leq x \leq a\}$, $\sigma_2 = \{(x, y) \mid a \leq x + y \leq b, x \geq 0, y \geq 0\}$, 如图 10.2 所示, 它的面密度

$$\mu(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & (x, y) \in \sigma_1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \in \sigma_2. \end{cases}$$

试求(I) 该薄板 σ 的质量 m ; (II) 薄板 σ_1 关于 Oy 轴的转动惯量 J_1 与 σ_2 关于原点的转动惯量 J_0 .



【分析与解答】 (I) 根据重积分的分块可加性, 得薄板 σ 的质量

$$m = \iint_{\sigma} \mu(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma_1} e^{-(x+y)} dx dy + \iint_{\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

$$\text{其中, } \iint_{\sigma_1} e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^a e^{-x} dx \int_0^{a-x} e^{-y} dy = \int_0^a e^{-x} (1 - e^{x-a}) dx = 1 - (1+a)e^{-a}.$$

注意到直线 $y = a - x$ 与 $y = b - x$ 在极坐标系中的方程为

$$r = \frac{a}{\cos\theta + \sin\theta} \text{ 与 } r = \frac{b}{\cos\theta + \sin\theta},$$

$$\text{则 } \iint_{\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{a}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\frac{b}{\cos\theta + \sin\theta}} \frac{1}{r} r dr = (b-a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc(\theta + \frac{\pi}{4}) d\theta = \frac{b-a}{\sqrt{2}} \left[\ln \tan \frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{4}) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{b-a}{\sqrt{2}} [\ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1)] = \sqrt{2}(b-a)\ln(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

因此,薄片 σ 的质量为

$$m = \iint_{\sigma} \mu(x, y) d\sigma = 1 - (1+a)e^{-a} + \sqrt{2}(b-a)\ln(\sqrt{2}+1).$$

(II) 薄板 σ_1 关于 Oy 轴的转动惯量

$$\begin{aligned}
J_1 &= \iint_{\sigma_1} \mu x^2 d\sigma = \int_0^a x^2 e^{-x} dx \int_0^{a-x} e^{-y} dy = \int_0^a x^2 e^{-x} (1 - e^{x-a}) dx \\
&= \int_0^a x^2 e^{-x} dx - e^{-a} \int_0^a x^2 dx = -(x^2 + 2x + 2) e^{-x} \Big|_0^a - \frac{1}{3} a^3 e^{-a} \\
&= 2 - (\frac{1}{3} a^3 + a^2 + 2a + 2) e^{-a}.
\end{aligned}$$

$$\text{其中, } \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} + C.$$

薄板 σ_2 关于原点的转动惯量在极坐标系中计算得

$$\begin{aligned}
J_0 &= \iint_{\sigma_2} \mu(x^2 + y^2) d\sigma = \iint_{\sigma_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{a}{\cos\theta + \sin\theta}}^{\frac{b}{\cos\theta + \sin\theta}} r^2 dr \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^3 - a^3}{(\cos\theta + \sin\theta)^3} d\theta \\
&= \frac{b^3 - a^3}{3} \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^3(\theta - \frac{\pi}{4}) d\theta \\
&= \frac{b^3 - a^3}{6\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \sec(\theta - \frac{\pi}{4}) \tan(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \ln \left| \sec(\theta - \frac{\pi}{4}) + \tan(\theta - \frac{\pi}{4}) \right| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{b^3 - a^3}{6\sqrt{2}} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)).
\end{aligned}$$

其中,由分部积分法得

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x dx &= \int \sec x \sec^2 x dx = \sec x \tan x - \int \tan x \sec x \tan x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx,
\end{aligned}$$

$$\text{移项得 } \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

第 11 讲 微分方程

» 导语

考研的微分方程主要任务是计算,其次是应用。它的理论性不强,但是计算量较大;在应用方面主要是几何上的应用,然后是经济应用(数学三)和物理应用(数学一、二)。

值得指出,近几年的考研试题中经常出现很普通的微分方程的求解问题,而且分值占到 9 分或者 10 分,所以提醒大家注意的是,要重视微分方程的基本问题和基本运算。

» 大纲要求

数学一、二、三的公共考试内容

1. 微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念。
2. 变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的解法。
3. 线性微分方程解的性质及解的结构。二阶常系数齐次线性微分方程的解法。自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程的解法。某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程。
4. 会用微分方程解决一些简单的应用问题。

数学一、二的单独考试内容

会用降阶法解下列形式的微分方程: $y^{(n)} = f(x)$, $y'' = f(x, y')$ 和 $y'' = f(y, y')$ 。

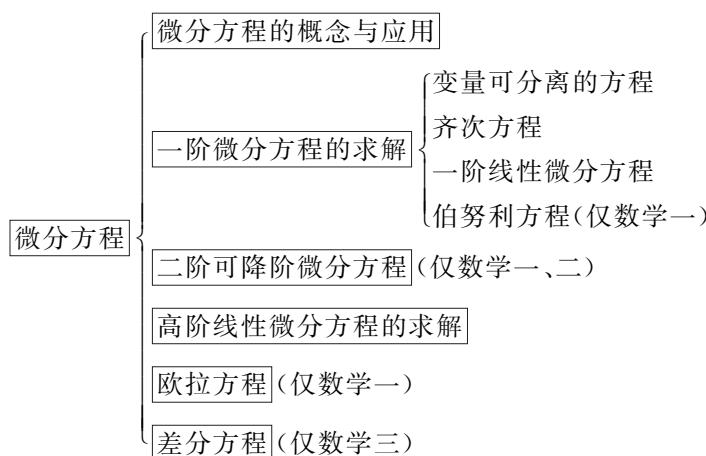
数学一的单独考试内容

伯努利方程和全微分方程,简单的变量代换解某些微分方程。

数学三的单独考试内容

一阶常系数线性差分方程的求解方法。

» 知识体系



11.1 考试内容分析

11.1.1 微分方程的概念及其应用

1. 概念

微分方程 含有未知函数的导数(或者微分)的方程,称为微分方程. 一般写成

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ 或 } y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

【注】(1)未知函数是一元函数的微分方程,称为常微分方程;未知函数是多元函数的微分方程,称为偏微分方程. 这两种方程在考研中都有涉及,其中常微分方程的求解是主体.

(2)方程中未知函数导数的最高阶数,称为微分方程的阶. 如 $y^{(4)} - y''' + y\sin x = x^2$ 就是四阶方程. 阶数为一阶的方程称为一阶微分方程;阶数为二阶及以上的方程称为高阶微分方程.

微分方程的解 若将函数代入微分方程,使方程成为恒等式,则该函数称为微分方程的解. 即,设 $y = y(x)$ 在区间 I 上连续且有直到 n 阶的导数,使

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0,$$

则称 $y = y(x)$ 为该微分方程在区间 I 上的一个解.

【注】(1)若微分方程的解中含有独立常数的个数等于微分方程的阶数,则称该解为微分方程的通解,不含任意常数的解称为特解. 即,若 $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ 是 n 阶微分方程 $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$ 在区间 I 上的解,其中 C_1, C_2, \dots, C_n 为 n 个独立的任意常数, $x \in I$, 则称它为该微分方程的通解.

(2)一般地,确定通解中常数的条件就是初始条件,如给出

$$y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1},$$

其中 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 为 n 个给定的数,这是考生比较容易掌握的,但是如果题目出得比较新颖,还可以把初始条件改成“极限形式”等,比如这样一个例子(掌握一阶线性微分方程的解法后再读此题):求微分方程 $xy' + (1-x)y = e^{2x} (0 < x < +\infty)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ 的特解.

首先化其为标准形式, $y' + \frac{1-x}{x}y = \frac{1}{x}e^{2x}$, 于是其通解为

$$y = e^{-\int \frac{1-x}{x} dx} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} e^{\int \frac{1-x}{x} dx} dx + C \right] = e^{-\ln x + x} \left[\int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot e^{\ln x - x} dx + C \right]$$

$$= \frac{1}{x} e^x \left[\int e^x dx + C \right] = \frac{1}{x} [e^x + C].$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^x [e^x + C] = 1$ 得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + C}{x} = 1$, 故 $C = -1$, 所以原方程满足条件 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ 的特解为 $y = \frac{1}{x} e^x (e^x - 1)$.

考生读完此题发现, 事实上, 题目并不困难, 只是增加了极限计算的工作量. 这里想提醒大家, 数学题出得新颖, 并不意味着一定难, 求解它的过程, 仍然是基本且经典的. 考生在平时的复习过程中, 可以多见识一些新颖的提法, 或者自己思考一下, 这种问题如果换个说法怎么出等等, 这对于培养数学能力不无裨益.

11.1.2 一阶微分方程的求解

1. 变量可分离的方程

能写成 $y' = f(x)g(y)$ 形式的方程称为变量可分离型方程. 其解法为:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

2. 可化为变量可分离的方程

(1) 形如 $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ 的方程, 其中 a, b 全都不为零. 其解法为:

令 $u = ax + by + c$, 则 $\frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$, 带入原方程得 $\frac{du}{dx} = a + bf(u)$;

(2) 齐次微分方程 形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ 或者 $\frac{dx}{dy} = \varphi(\frac{x}{y})$ 的方程. 其解法为:

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = u \cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 于是原方程变为 $\frac{du}{dx} \cdot x + u = f(u)$, 即

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

3. 一阶线性微分方程

形如 $y' + p(x)y = q(x)$ 的方程, 其中 $p(x), q(x)$ 为已知的连续函数. 其计算公式为:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C \right).$$

4. 伯努利方程

形如 $y' + p(x)y = q(x)y^n$ ($n \neq 0, 1$) 的方程, 其中 $p(x), q(x)$ 为已知的连续函数. 其解法为:

(1) 先变形为 $y^{-n} \cdot y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$.

(2) 令 $z = y^{1-n}$, 得 $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$, 则 $\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$.

(3) 解此一阶线性微分方程即可.

11.1.3 二阶可降阶微分方程的求解

1. $y'' = f(x, y')$ 型(方程中不显含未知函数 y)

(1) 令 $y' = p(x)$, $y'' = p'$, 则原方程变为一阶方程 $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$;

(2) 若求得其解为 $p = \varphi(x, C_1)$, 即 $y' = \varphi(x, C_1)$, 则原方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

2. $y'' = f(y, y')$ 型(方程中不显含有自变量 x)

(1) 令 $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$, 则原方程变为一阶方程 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$;

(2) 若求得其解 $p = \varphi(y, C_1)$, 则由 $p = \frac{dy}{dx}$ 可得 $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$, 分离变量得 $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$;

(3) 两边积分, $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$, 即可求得原方程的通解.

11.1.4 高阶线性微分方程的求解

1. 二阶线性微分方程的概念

(1) 方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 称为二阶线性微分方程, 其中 $p(x), q(x)$ 叫系数函数, $f(x)$ 叫自由项, 均为已知的连续函数.

当 $f(x) \equiv 0$ 时, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 为齐次方程;

当 $f(x)$ 不恒等于 0 时, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 为非齐次方程.

(2) 方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 称为二阶常系数线性微分方程, 其中 p, q 为常数, $f(x)$ 叫自由项.

当 $f(x) \equiv 0$ 时, $y'' + py' + qy = 0$ 为齐次方程;

当 $f(x)$ 不恒等于 0 时, $y'' + py' + qy = f(x)$ 为非齐次方程.

2. 二阶线性微分方程的解的结构

(1) 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解, 且 $y_1(x)/y_2(x) \neq C$ (常数), 则称 $y_1(x), y_2(x)$ 是该方程的两个线性无关的解, 且 $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的通解.

(2) 若 $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的通解, $y^*(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的一个特解, 则 $y(x) + y^*(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的通解.

(3) 若 $y_1^*(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$ 的解, $y_2^*(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$ 的解, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的解.

3. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解

对于 $y'' + py' + qy = 0$, 其对应的特征方程为 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 求其特征根, 有以下三种情况请大家牢记. 以下 C_1, C_2 为任意常数.

(1) 若 $p^2 - 4q > 0$, 设 λ_1, λ_2 是特征方程的两个不等实根, 即 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 可得其通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

(2) 若 $p^2 - 4q = 0$, 设 λ_1, λ_2 是特征方程的两个相等的实根, 即二重根, 令 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 可得其通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}.$$

(3) 若 $p^2 - 4q < 0$, 设 $\alpha \pm \beta i$ 是特征方程的一对共轭复根, 可得其通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

4. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

对于 $y'' + py' + qy = f(x)$, 考研大纲规定我们需要掌握以下两种情况:

(1) 自由项 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ 时, 特解要设定为 $y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)x^k$

其中,
$$\begin{cases} e^{\alpha x} \text{ 照抄} \\ Q_n(x) \text{ 为 } x \text{ 的 } n \text{ 次一般多项式} \\ k = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2 \\ 1 & \alpha = \lambda_1 \text{ 或 } \alpha = \lambda_2 \\ 2 & \alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \end{cases}$$

(2) 自由项 $f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x)\cos \beta x + P_n(x)\sin \beta x]$ 时, 特解要设定为

$$y^* = e^{\alpha x} [Q^{(1)}(x)\cos \beta x + Q^{(2)}(x)\sin \beta x]x^k$$

其中,
$$\begin{cases} e^{\alpha x} \text{ 照抄} \\ l = \max\{m, n\}, Q^{(1)}(x), Q^{(2)}(x) \text{ 分别为 } x \text{ 的两个不同的 } l \text{ 次一般多项式} \\ k = \begin{cases} 0 & \alpha \pm \beta i \text{ 不是特征根} \\ 1 & \alpha \pm \beta i \text{ 是特征根} \end{cases} \end{cases}$$

5. n 阶常系数齐次线性微分方程的解

方程 $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ 称为 n 阶常系数线性齐次微分方程, 其中 p_1, p_2, \dots, p_n 为常数, 其对应的特征方程为 $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$, 求出其特征根, 有如下情况, 需要大家牢记. 以下大写的英文字母均为任意常数.

(1) 特征根为单实根 λ 时, 微分方程通解中对应一项 $C e^{\lambda x}$;

- (2) 特征根为 k 重实根 λ 时, 微分方程通解中对应 k 项 $(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$;
(3) 特征根为单复根 $\alpha \pm \beta i$ ($\beta > 0$) 时, 微分方程通解中对应两项 $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;
(4) 特征根为 k 重复根 $\alpha \pm \beta i$ ($\beta > 0$) 时, 微分方程通解中对应 $2k$ 项
 $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$.

11.1.5 欧拉方程(仅数学一要求)

形如 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$ 的方程称为欧拉方程, 其中 p 与 q 为常数, $f(x)$ 为已

知函数. 它有固定的解法:

(1) 当 $x > 0$ 时, 令 $x = e^t$, 则 $t = \ln x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}; \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

方程化为 $\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$

即可求解(别忘了用 $t = \ln x$ 回代成 x 的函数).

(2) 当 $x < 0$ 时, 令 $x = -e^t$, 同理可得.

【例 11.1】求解微分方程 $(1+x)^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 3(1+x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6(1+x) \frac{dy}{dx} - 6y = 0$.

【分析与解答】欲求解的方程是欧拉方程, 令 $1+x = e^t$, 则由复合函数的求导法则有

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{(1+x)^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{1}{(1+x)^3} \frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{3}{(1+x)^3} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2}{(1+x)^3} \frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

把它们代入原方程, 则原方程化为常系数线性齐次微分方程

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 11 \frac{dy}{dt} - 6y = 0,$$

其特征方程为 $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$, 特征根 $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$,

则 $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$.

因 $1+x = e^t$, 故原方程的通解为 $y(x) = C_1(1+x) + C_2(1+x)^2 + C_3(1+x)^3$.

11.1.6 差分方程(仅数学三要求)

形如 $y_{x+1} + ay_x = f(x)$, $a \neq 0$ 的方程, 称为一阶常系数线性差分方程. 现在的考研大纲中, 已经删去了它的经济学应用, 只要求大家会求解这种方程即可, 请同学们类比一阶常系数线性微分方程的解法去记忆, 很容易记住.

(1) 先看齐次方程. 对于 $y_{x+1} + ay_x = 0$, 其特征方程为 $\lambda + a = 0 \Rightarrow \lambda = -a$, 则通解为

$y = C(-a)^x$, C 为任意常数.

(2) 再看非齐次方程. $y_{x+1} + ay_x = P_m(x)\lambda^x$, 其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式, 则

$$\text{设定 } y^* = \lambda^x Q_m(x) \cdot x^k \quad \text{其中, } \begin{cases} 1) \lambda^x \text{ 照抄} \\ 2) Q_m(x) \text{ 为 } x \text{ 的 } m \text{ 次多项式} \\ 3) k = \begin{cases} 0, \lambda \neq -a \\ 1, \lambda = -a \end{cases} \end{cases}$$

11.2 典型例题分析

11.2.1 利用微分方程的形式解题

【例 11.2】 设 $y = y(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 满足 $y(a) = y(b) = 0$ 的解, 其中 $p(x)$ 与 $q(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $q(x) < 0$, 求当 $x \in [a, b]$ 时 $y(x)$ 的表达式.

【分析与解答】 本题是利用微分方程的形式解题的典型问题, 综合了中值定理, 且用到了反证思想, 是一道有一定难度的综合题.

严格说来, 无论对于数学一、二还是三, 方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 并非考试大纲要求范围内的方程形式, 因为方程为二阶, $p(x)$ 与 $q(x)$ 均为函数(且 $p(x)$ 与 $q(x)$ 的具体形式未给出), 所以该方程叫做变系数二阶微分方程. 这种问题往往是直接从式子本身分析, 因为微分方程本身就反映了函数 $y(x)$ 及其各阶导数之间的关系.

由于 $y(a) = y(b) = 0$, 设想, 总不会在 $x \in [a, b]$ 时, $y(x) \equiv 0$ 吧? 于是设存在 $x_1 \in (a, b)$ 使 $y(x_1) \neq 0$, 不妨设 $y(x_1) > 0$, 由于 $y(a) = y(b) = 0$, 所以在 $[a, b]$ 上必存在最大值 $M > 0$, 设 $y(x_0) = M$, $x_0 \in (a, b)$, 根据费马定理, 有 $y'(x_0) = 0$;

又由于 $y(x)$ 为方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解, 所以

$$y''(x_0) + p(x_0)y'(x_0) + q(x_0)y(x_0) = 0,$$

即得 $y''(x_0) = -q(x_0)y(x_0) > 0$, 由极值判别的充分条件, $y(x_0)$ 为 $y(x)$ 的极小值, 与前矛盾;

若存在 $x_1 \in (a, b)$ 使 $y(x_1) < 0$, 同理可推出矛盾, 故 $y(x) \equiv 0$.

【例 11.3】 已知 $y = y(x)$ 是微分方程 $(x^2 + y^2)dy = dx - dy$ 的任意解, 并在 $y = y(x)$ 的定义域内取 x_0 , 记 $y_0 = y(x_0)$.

(I) 证明 $y(x) < y_0 + \frac{\pi}{2} - \arctan x_0$;

(II) 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ 存在.

【分析与解答】 本题以微分方程的概念为载体, 考查一元微积分学的综合知识, 是一道有一定难度的综合题.

(I) 将微分方程 $(x^2 + y^2)dy = dx - dy$ 变形为 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$, 于是 $\frac{dy}{dx} > 0$, 则

$y = y(x)$ 为严格单调增函数, 根据单调有界准则, 只要证明 $y(x)$ 有界即可.

对 $dy(x) = \frac{1}{1+x^2+y^2(x)}dx$ 两边从 x_0 到 x 积分, 得

$$\int_{x_0}^x dy(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{1+x^2+y^2(x)} dx,$$

$$\text{于是 } y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{1}{1+x^2+y^2(x)} dx.$$

$$\text{设 } x \geq x_0, \text{ 则 } y(x) \leq y(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= y(x_0) + \arctan x - \arctan x_0 < y_0 + \frac{\pi}{2} - \arctan x_0.$$

(II) $y(x)$ 有上界, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ 存在.

同理可证, 当 $x \leq x_0$ 时有 $y(x)$ 下界, 所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ 也存在. 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ 也存在.

11.2.2 一阶微分方程的求解

【例 11.4】已知曲线 $y = y(x)$ 经过点 $(1, e^{-1})$, 且在点 (x, y) 处的切线方程在 y 轴上的截距为 xy , 求该曲线方程的表达式.

【分析与解答】本题以几何问题为载体, 让考生根据问题描述建立微分方程, 然后求解, 是一道简单的综合题, 是考研的重要出题形式.

曲线 $y = f(x)$ 在点 (x, y) 处的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$, 令 $X = 0$, 得到截距为 $xy = y - xy'$, 即 $xy' = y(1 - x)$,

此为一阶可分离变量的方程, 于是, $\frac{dy}{y} = \frac{1}{x} - 1$, $\ln y = \ln x - x + \ln C$, 得到 $y = \frac{Cx}{e^x}$,

又 $y(1) = e^{-1}$, 故 $C = 1$, 于是曲线方程为 $y = \frac{x}{e^x}$.

【例 11.5】求解 $(1 + e^{-\frac{x}{y}})ydx + (y - x)dy = 0$.

【分析与解答】方程化为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{(1+e^{-\frac{x}{y}})y} = \frac{\frac{x}{y}-1}{1+\frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y}}.$$

此为齐次方程, 故令 $u = \frac{x}{y}$, 则 $x = uy$, $\frac{dx}{dy} = y \frac{du}{dy} + u$, 代入上述方程得

$$y \frac{du}{dy} + u = \frac{u-1}{1+e^{-u}},$$

整理得

$$\frac{1+e^u}{u+e^u} du = -\frac{1}{y} dy.$$

积分得

$$\begin{aligned}\ln(u + e^u) &= -\ln|y| + C_1, \\ (u + e^u)y &= C,\end{aligned}$$

将 $u = \frac{x}{y}$ 代入得, $\left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}\right)y = C$, 故原方程的通解为 $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

【例 11.6】设 $\varphi(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 且 $\Phi'(x) = \varphi(x)$, $\Phi(0) = 0$.

(I) 求方程 $y' + y \sin x = \varphi(x)e^{\cos x}$ 的通解.

(II) 方程是否有以 2π 为周期的解? 若有, 请写出所需条件, 若没有, 请说明理由.

【分析与解答】本题考查微分方程的求解与解的讨论, 尤其是(II)关于解的讨论, 是考生在考场上的难点, 请复习备考的学生重视.

(I) 该方程为一阶线性微分方程, 通解为

$$\begin{aligned}y &= e^{-\int \sin x dx} \left(\int \varphi(x) e^{\cos x} e^{\int \sin x dx} dx + C \right) \\ &= e^{\cos x} \left(\int \varphi(x) e^{\cos x} \cdot e^{-\cos x} dx + C \right) \\ &= e^{\cos x} \left(\int \varphi(x) dx + C \right) = e^{\cos x} [\Phi(x) + C].\end{aligned}$$

(II) 因为 $\Phi'(x) = \varphi(x)$, 所以 $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt + C_1$, 又 $\Phi(0) = 0$, 于是, $\Phi(x) =$

$$\int_0^x \varphi(t) dt,$$

$$\text{而 } \Phi(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} \varphi(t) dt = \int_0^x \varphi(t) dt + \int_x^{x+2\pi} \varphi(t) dt = \Phi(x) + \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt,$$

所以, 当 $\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0$ 时, $\Phi(x+2\pi) = \Phi(x)$, 即 $\Phi(x)$ 以 2π 为周期.

因此, 当 $\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0$ 时, 方程有以 2π 为周期的解.

【例 11.7】设有方程 $y' + P(x)y = x^2$, 其中 $P(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \leqslant 1 \text{ 时}, \\ \frac{1}{x}, & \text{当 } x > 1 \text{ 时}. \end{cases}$ 试求在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数 $y = y(x)$, 使之在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内都满足方程, 且满足初值条件 $y(0) = 2$.

【分析与解答】本题虽是基本题, 但其特色在于当 x 的取值范围不同时, 系数 $P(x)$ 不同, 这样所求解的方程就不一样, 解的形式自然也会不一样, 最后要根据解 $y = y(x)$ 是连续函数, 确定任意常数.

当 $x \leqslant 1$ 时, 方程及其初始条件为 $\begin{cases} y' + y = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$, 求解得

$$y = e^{-\int_0^1 dx} \left[\int x^2 e^{\int_0^1 dx} dx + C \right] = e^{-x} \left[\int x^2 e^x dx + C \right] = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x}.$$

由 $y(0) = 2$ 得 $C = 0$, 故 $y = x^2 - 2x + 2$.

当 $x > 1$ 时, 方程及其初始条件为 $\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$, 求解得

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int x^2 e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = e^{-\ln x} \left[\int x^2 e^{\ln x} dx + C \right] = \frac{1}{x} \left[\int x^3 dx + C \right] = \frac{1}{4} x^3 + \frac{C}{x},$$

综上, 得

$$y(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{4} x^3 + \frac{C}{x}, & x > 1 \end{cases}.$$

又 $y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 有 $f(1^-) = f(1^+) = f(1)$, 即 $1 - 2 + 2 = \frac{1}{4} + C$, 从

而 $C = \frac{3}{4}$.

所以

$$y(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{4} x^3 + \frac{3}{4x}, & x > 1 \end{cases}.$$

【例 11.8】 设 $\begin{cases} x \frac{dy}{dx} - (2x^2 + 1)y = x^2, x \geq 1 \\ y(1) = y_1 \end{cases}$,

(I) 用变限积分表示满足上述初值问题的解 $y(x)$;

(II) 讨论 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ 是否存在, 若存在, 给出条件, 若不存在, 说明理由.

【分析与解答】 一般认为, 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的计算公式为

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left(\int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + C \right),$$

而本题是要求写成变限积分形式

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \left[\int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^t p(s) ds} q(t) dt + C \right],$$

请考生仔细分辨这里的变量表达形式.

由于本题表达形式比较复杂, 且写出表达式后还要进行极限讨论, 故本题对于考生是一道难题.

(I) 初值问题可写成 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \left(2x + \frac{1}{x} \right)y = x, x \geq 1 \\ y(1) = y_1 \end{cases}$

由上述变限积分形式的通解公式, 有:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int_1^x \left(2t + \frac{1}{t} \right) dt} \left[\int_1^x t e^{-\int_1^t \left(2s + \frac{1}{s} \right) ds} dt + y_1 \right] \\ &= e^{-1} x e^{x^2} \left[\int_1^x e^{-t^2} dt + y_1 e^{-1} \right] \end{aligned}$$

(II) 由 $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^1 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-t^2} dt$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_1^x e^{-t^2} dt + y_1 e^{-1} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-t^2} dt + y_1 e^{-1},$$

若 $y_1 \neq e \left(\int_0^1 e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \infty$,

若 $y_1 = e \left(\int_0^1 e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x e^{-t^2} dt + y_1 e^{-1}}{\frac{1}{x} e^{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{-\frac{1}{x^2} e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}$

$$= -\frac{1}{2}.$$

11.2.3 高阶微分方程的求解

1. 高阶可降阶的方程

【例 11.9】求解 $y'' = e^{2y} + e^y$, 且 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

【分析与解答】令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = y' \frac{dp}{dy} = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程, 有

$$pp' = e^{2y} + e^y, \quad \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + e^y + \frac{1}{2}C,$$

$$p^2 = e^{2y} + 2e^y + C,$$

即

$$y'^2 = e^{2y} + 2e^y + C$$

又 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, 有 $C = 1$,

$$\text{所以 } y'^2 = e^{2y} + 2e^y + 1 = (e^y + 1)^2,$$

$$\text{因此 } y' = e^y + 1 \quad (y'(0) = 2 > 0),$$

即

$$\frac{1}{e^y + 1} dy = dx,$$

有

$$\int \frac{e^y + 1 - e^y}{e^y + 1} dy = \int dx,$$

$$y - \ln(e^y + 1) = x + C_1.$$

代入 $y(0) = 0$ 得 $C_1 = -\ln 2$, 所以, 该初值问题的解为

$$y - \ln(1 + e^y) = x - \ln 2.$$

【例 11.10】求解 $\begin{cases} xy'' - y' \ln y' + y' \ln x = 0 \\ y(1) = 2, y'(1) = e^2 \end{cases}$.

【分析与解答】令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$, 代入原方程得

$$x \frac{dp}{dx} - p \ln p + p \ln x = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p \ln p - p \ln x}{x} = \frac{p \ln \frac{p}{x}}{x},$$

此为齐次方程, 令 $\frac{p}{x} = u$, 则 $p = xu$, $\frac{dp}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 代入上式得

$$u + x \frac{du}{dx} = u \ln u,$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

两边积分得

$$\ln |\ln u - 1| = \ln x + C.$$

$$\frac{\ln u - 1}{x} = C_1,$$

$$u = e^{C_1 x + 1}.$$

故

$$p = xu = x \cdot e^{C_1 x + 1}.$$

由 $y'(1) = e^2$ 即 $p(1) = e^2$, 得 $C_1 = 1$, 从而 $p = xe^{x+1}$, 即

$$\frac{dy}{dx} = xe^{x+1}.$$

两边积分

$$y = \int xe^{x+1} dx = (x-1)e^{x+1} + C_2.$$

由 $y(1) = 2$ 得 $C_2 = 2$, 故所求微分方程的特解为 $y = (x-1)e^{x+1} + 2$.

2. 高阶线性常系数微分方程

【例 11.11】利用变换 $y = f(e^x)$ 求微分方程 $y'' - (2e^x + 1)y' + e^{2x}y = e^{3x}$ 的通解.

【分析与解答】令 $t = e^x$, $y = f(t) \Rightarrow y' = f'(t) \cdot e^x = tf'(t)$,

$$y'' = (tf'(t))'_x = e^x f'(t) + tf''(t) \cdot e^x = tf'(t) + t^2 f''(t),$$

代入方程得 $t^2 f''(t) + tf'(t) - (2t+1)tf'(t) + t^2 f(t) = t^3$, 即

$$f''(t) - 2f'(t) + f(t) = t.$$

解得 $f(t) = (C_1 + C_2 t)e^t + t + 2$, 所以 $y'' - (2e^x + 1)y' + e^{2x}y = e^{3x}$ 的通解为

$$y = (C_1 + C_2 e^x)e^{e^x} + e^x + 2.$$

【例 11.12】以 $y_1 = te^t$, $y_2 = \sin 2t$ 为其两个特解的四阶常系数齐次线性微分方程为 _____.

【分析与解答】本题填 $y^{(4)} - 2y'' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$.

本题是微分方程求解的逆问题, 需要考生准确掌握高阶常系数齐次线性微分方程解的结构.

由 $y_1 = te^t$ 可知 $y_3 = e^t$ 亦为其解, 由 $y_2 = \sin 2t$ 可得 $y_4 = \cos 2t$ 也是其解, 故所求方程对应的特征方程的根 $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$.

其特征方程为 $(\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 4) = 0$, 即 $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$,

故所求的微分方程为: $y^{(4)} - 2y'' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$.

事实上其通解为: $y = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t$.

【例 11.13】求二阶常系数线性微分方程 $y'' + \lambda y' = 2x + 1$ 的通解, 其中 λ 为常数.

【分析与解答】 对应齐次方程 $y'' + \lambda y' = 0$ 的特征方程 $r^2 + \lambda r = 0$ 的特征根为 $r = 0$ 或 $r = -\lambda$.

(1) 当 $\lambda \neq 0$ 时, $y'' + \lambda y' = 0$ 的通解为 $y = C_1 + C_2 e^{-\lambda x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

设原方程的特解形式为 $y^* = x(Ax + B)$, 代入原方程, 比较同次幂项的系数, 解得

$$A = \frac{1}{\lambda}, B = \frac{\lambda - 2}{\lambda^2}, \text{ 故原方程的通解为 } y = C_1 + C_2 e^{-\lambda x} + x\left(\frac{1}{\lambda}x + \frac{\lambda - 2}{\lambda^2}\right).$$

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, $y'' = 2x + 1$, 积分两次得方程的通解为 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$.

11.2.4 综合计算题

【例 11.14】(I) 用 $x = e^t$ 化简微分方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = 16x \ln x$ 为 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 5y = 16te^t$;

(II) 求解 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 5y = 16te^t$.

【分析与解答】 本题考查在已有提示下化简微分方程、二阶常系数线性微分方程的求解, 是一道具有一定计算量的综合题.

$$\begin{aligned} (\text{I}) \text{ 令 } x = e^t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ = \left(-\frac{1}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{e^t} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \cdot \frac{1}{e^t} \\ = \frac{1}{e^{2t}} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \\ \Rightarrow e^{2t} \cdot \frac{1}{e^{2t}} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 3e^t \cdot \frac{1}{e^t} \cdot \frac{dy}{dt} + 5y = 16te^t \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 5y = 16te^t \quad (*).$$

(II) 求解 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 5y = 16te^t$

① 齐次方程 $y'' + 2y' + 5y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$

$\Rightarrow y_{\text{齐通}}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$.

② 令 $y^*(t) = (at + b)e^t$ 代入 (*) $\Rightarrow a = 2, b = -1$

故 $y_{\text{通}}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + (2t - 1)e^t$

$\Rightarrow y(x) = x^{-1}[C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x)] + x(2 \ln x - 1)$.

11.2.5 微分方程的应用

1. 几何应用

【例 11.15】设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y) (x > 0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

(1) 试求曲线 L 的方程;

(2) 设 L 位于第一象限部分的一条切线, 使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

【分析与解答】(1) 设曲线 L 过点 $P(x, y)$ 的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$. 令 $X = 0$, 则得该切线在 y 轴上的截距为 $y - xy'$.

由题设知 $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则此方程可化为 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$, 解之得

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

由 L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 知 $C = \frac{1}{2}$. 于是 L 方程为 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$, 即 $y = \frac{1}{4} - x^2$.

(2) 设第一象限内曲线 $y = \frac{1}{4} - x^2$ 在点 $P(x, y)$ 处的切线方程为 $Y - \left(\frac{1}{4} - x^2\right) = -2x(X - x)$,

即 $Y = -2xX + x^2 + \frac{1}{4} \quad (0 < x \leq \frac{1}{2})$. 它与 x 轴及 y 轴的交点分别为

$\left[\frac{x^2 + \frac{1}{4}}{2x}, 0\right]$ 与 $\left(0, x^2 + \frac{1}{4}\right)$, 所求面积为 $S(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2}{2x} - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right) dx$.

对 x 求导, 得 $S'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2 \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{4x^2} \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \left(3x^2 - \frac{1}{4}\right)$.

令 $S'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x) < 0$; $x > \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x) > 0$, 因而 $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $S(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

内的唯一极小值点, 即最小值点, 于是所求切线为 $Y = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} X + \frac{3}{36} + \frac{1}{4}$, 即

$$Y = -\frac{\sqrt{3}}{3} X + \frac{1}{3}.$$

【例 11.16】设函数 $y(x) (x \geq 0)$ 二阶可导且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$. 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及到 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形

的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.

【分析与解答】 曲线 $y = y(x)$ 上点 $P(x, y)$ 处的切线方程为 $Y - y = y'(x)(X - x)$. 它与 x 轴的交点为 $N\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$. 由于 $y'(x) > 0, y(0) = 1$, 从而 $y(x) > 0$, 于是

$$S_1 = \frac{1}{2}y \left| x - \left(x - \frac{y}{y'} \right) \right| = \frac{y^2}{2y'}.$$

又 $S_2 = \int_0^x y(t) dt$, 由条件 $2S_1 - S_2 = 1$

$$\text{知 } \frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t) dt = 1. \quad (1)$$

两边对 x 求导得 $\frac{2yy' \cdot y' - y^2 y''}{(y')^2} - y = 0$, 即 $yy'' = (y')^2$. 令 $p = y'$, 则上述方程可化

为

$$yp \frac{dp}{dy} = p^2, \quad \text{从而} \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}.$$

解得 $p = C_1 y$, 即 $\frac{dy}{dx} = C_1 y$. 于是 $y = e^{C_1 x + C_2}$.

注意到 $y(0) = 1$, 并由(1)式得 $y'(0) = 1$. 由此可得 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 故所求曲线的方程是 $y = e^x$.

2. 物理应用(仅数学一、二)

【例 11.17】 某湖泊的水量为 V , 每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$, 流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$. 已知 2011 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$, 超过国家规定指标. 为了治理污染, 从 2012 年初起, 限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内? (湖水中 A 的浓度是均匀的.)

【分析与解答】 设从 2012 年初(令此时 $t = 0$)开始, 第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m , 浓度为 $\frac{m}{V}$, 则在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内, 排入湖泊中 A 的量为 $\frac{m_0}{V} \cdot \frac{V}{6} dt = \frac{m_0}{6} dt$, 流出湖泊的水中 A 的量为 $\frac{m}{V} \cdot \frac{V}{3} dt = \frac{m}{3} dt$, 因而在此时间间隔内湖泊中污染物 A 的改变量 $dm = \left(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3}\right) dt$.

由分离变量法解得 $m = \frac{m_0}{2} - Ce^{-\frac{1}{3}}$, 代入初始条件 $m|_{t=0} = 5m_0$, 得 $C = -\frac{9}{2}m_0$,

于是

$m = \frac{m_0}{2}(1 + 9e^{-\frac{t}{3}})$. 令 $m=m_0$, 得 $t=6\ln 3$, 即至多需经过 $6\ln 3$ 年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内.

【例 11.18】一个半球体状的雪堆, 其体积融化的速率与半球面 S 成正比, 比例常数 $K>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状, 已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内, 融化了其体积的 $\frac{7}{8}$, 问雪堆全部融化需要多少小时?

【分析与解答】 设雪堆在时刻 t 的体积 $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, $r=r(t)$, 侧面积 $S = 2\pi r^2$, 由题设知

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r^2, \frac{dr}{dt} = -KS = -2\pi Kr^2,$$

于是 $\frac{dr}{dt} = -K$. 积分得 $r = -Kt + C$. 由 $r|_{t=0} = r_0$, 有 $r = r_0 - Kt$.

又 $V|_{t=3} = \frac{1}{8}V|_{t=0}$, 即 $\frac{2}{3}\pi(r_0 - 3K)^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}\pi r_0^3$. 这样 $K = \frac{1}{6}r_0$, 从而 $r = r_0 - \frac{1}{6}r_0 t$.

因雪球全部融化时 $r = 0$, 故得 $t = 6$, 即雪球全部融化需 6 小时.

3. 经济应用(仅数学三)

【例 11.19】 已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性 $\eta = -3p^3$, 而市场对该商品的最大需求量为 1(万件), 求需求函数.

【分析与解答】 根据弹性的定义, 有 $\eta = \frac{dx}{x}/\frac{dp}{p} = -3p^3$, $\frac{dx}{x} = -3p^2 dp$. 由此得 $x = Ce^{-p^3}$, C 为待定常数. 由题设知 $P=0$ 时, $x=1$, 从而 $C=1$. 于是, 所求的需求函数为 $x = e^{-p^3}$.

【例 11.20】 已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数; $D = D(p) = \frac{a}{p}$,

$S = S(p) = bp$, 其中 $a>0$, 和 $b>0$ 为常数; 价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$$\frac{dp}{dt} = k[D(p) - S(p)] (k \text{ 为正的常数}). \text{ 假设当 } t=0 \text{ 时价格为 1, 试求}$$

(1) 需求量等于供给量时的均衡价格 P_e ; (2) 价格函数 $p(t)$; (3) $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$.

【分析与解答】 (1) 当需求量等于供给量时, 有 $\frac{a}{p^2} = bp$, $p^3 = \frac{a}{b}$, 因此均衡价格为 $p_e = (\frac{a}{b})^{1/3}$.

(2) 由条件知 $\frac{dp}{dt} = k[D(p) - S(p)] = k\left[\frac{a}{p^2} - bp\right] = \frac{kb}{p^2}(\frac{a}{b} - p^3)$.

因此有 $\frac{dp}{dt} = \frac{kb}{p^2}(p_e^2 - p^3)$, 即 $\frac{p^2 dp}{p^3 - p_e^3} = -kb dt$. 在该式两边同时积分, 得 $p^3 = p_e^3 + Ce^{-3kb t}$.

由条件 $p(0) = 1$, 可得 $C = 1 - p_e^3$. 于是价格函数为 $p(t) = [p_e^3 + (1 - p_e^3)e^{-3kbt}]^{1/3}$.

$$(3) \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [p_e^3 + (1 - p_e^3)e^{-3kbt}]^{1/3} = p_e.$$

4. 一阶差分方程的求解(仅数学三)

【例 11.21】求差分方程 $y_{t+1} + 3y_t = 3^{t+1}(2t + 1)$ 的通解.

【分析与解答】对应齐次方程的通解为 $Y = C(-3)^t$, 由于这里 $p(t) = 3^t(6t + 3)$, $\lambda = -3$, $b = 3 \neq \lambda$, 所以可设 $y^* = 3^t(ut + v)$. 代入原方程, 解得 $u = 1$, $v = 0$, 即 $y^* = t3^t$. 所以原方程通解为 $y_t = Y + y^* = C(-3)^t + t3^t$.

【例 11.22】求差分方程 $y_{t+1} - ay_t = 2t + 1$ 的通解.

【分析与解答】题设方程对应的齐次差分方程 $y_{t+1} - ay_t = 0$ 的特征根 $\lambda = a$, 故其通解为 $y_t = Ca^t$, 其中, C 为任意常数, 下面就 a 的不同取值求原非齐次方程的特解与通解.

(1) 当 $a \neq 1$, 即 1 不是特征根时, 令原非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t = At + B$, 其中, A, B 为待定常数, 把它代入原方程有 $A = \frac{2}{1-a}, B = -\frac{1+a}{(1-a)^2}$, 故此特解 $\bar{y}_t = \frac{2}{1-a}t - \frac{1+a}{(1-a)^2}$,

因此原非齐次方程的通解为 $y_t = Ca^t + \frac{2}{1-a}t - \frac{1+a}{(1-a)^2}$.

(2) 当 $a = 1$, 即 1 是特征根时, 令原非齐次方程的特解为 $\bar{y}_t = t(At + B)$, 并把它代入原方程有 $A = 1, B = 0$, 故此特解为 $\bar{y}_t = t^2$, 此时对应的齐次方程的通解为 $y_t = C$, 因此, 原非齐次方程的通解为 $y_t = t^2 + C$.

第 12 讲 无穷级数

» 导语

无穷级数是数学一、三的重要考试内容,理论较多,分析性强,计算量大,不易掌握,故历年考研题都属于较难的问题,需要同学们高度重视,科学总结,多做训练.

本部分主要内容分为三个:(1)数项级数的收敛问题(一般出 4 分的小题);(2)求幂级数的收敛域(一般出 4 分的小题);(3)幂级数求和函数与函数展开为幂级数(一般出 11 分的大题).近些年出现了一些综合性的问题,如与微分方程结合考“微分方程的幂级数解法”等.

大纲要求

数学一、三公共考试要求

1. 常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念,级数的基本性质及收敛的必要条件.

2. 几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件.

3. 正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法,会用根值判别法.

4. 交错级数的莱布尼茨判别法.

5. 任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系.

6. 函数项级数的收敛域及和函数的概念.

7. 幂级数收敛半径的概念、幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.

8. 幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分),会求一些幂级数在收敛区间内的和函数,并会由此求出某些数项级数的和.

9. 函数展开为泰勒级数的充分必要条件.

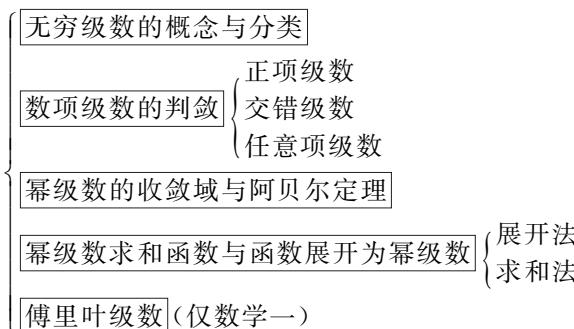
10. e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^a$ 的麦克劳林展开式,会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数.

数学一单独考试要求

傅里叶级数的概念和狄利克雷收敛定理,会将定义在 $[-l, l]$ 上的函数展开为傅里叶级数,会将定义在 $[0, l]$ 上的函数展开为正弦级数与余弦级数,会写出傅里叶级数的和函数的表达式.

» 知识体系

无穷级数



12.1 考试内容分析

12.1.1 无穷级数的概念、性质与分类

1. 概念

级数的定义 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, 则称 $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ 为(常数项)无穷级数, 简称(常数项)级数, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$.

级数的部分和 称 $S_n = \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和.

级数的敛散性 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (存在), 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 极限 S 叫做该级数的和, 并写成 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$; 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2. 基本性质

性质 1 设 k 为常数, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} ku_n = kS$.

性质 2 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = T$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm T$.

性质 3 去掉级数的前有限项, 不会改变级数的收敛性.

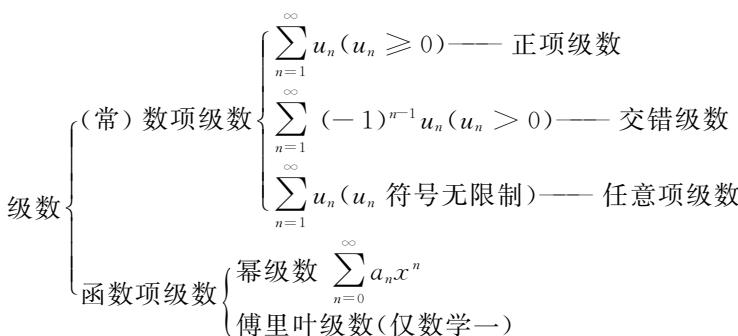
性质 4 收敛级数任意加括号后所成的新级数仍然收敛, 且其和不变.

【注】推论: 如果加括号后所得的级数发散, 则去掉括号后所得的级数也发散.

性质 5 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

【注】逆否命题: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.

3. 级数分类



12.1.2 数项级数及其判敛问题

1. 正项级数 ($\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0$) 的敛散性判别法

如无特殊说明,下面的一般项 u_n 均是非负的.

(1) 收敛原则 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是: 它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界. 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow S_n \text{ 有上界.}$$

(2) 比较判别法 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $0 \leq u_n \leq v_n$, 则

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \end{cases}$$

(3) 比较判别法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} 0 \Rightarrow u_n \text{ 是高阶无穷小} \Rightarrow \begin{cases} \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \\ \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \end{cases} \\ \infty \Rightarrow v_n \text{ 是高阶无穷小} \Rightarrow \begin{cases} \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \\ \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \end{cases} \\ A \neq 0 \Rightarrow u_n \text{ 与 } v_n \text{ 是同阶无穷小} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 同敛散} \end{cases}$$

(4) 比值判别法(达朗贝尔判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \text{级数收敛} \\ \rho > 1 (\text{或为 } +\infty) \Rightarrow \text{级数发散} \\ \rho = 1 \Rightarrow \text{该法失效, 另谋他法(一般转而用比较判别法)} \end{cases}$$

(5) 根值判别法(柯西判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \text{级数收敛} \\ \rho > 1 (\text{或为 } +\infty) \Rightarrow \text{级数发散} \\ \rho = 1 \Rightarrow \text{该法失效,另谋他法(一般转而用比较判别法)} \end{cases}$$

(6) 对数判别法

首先指出,对数判别法不是考研大纲要求的,但是它在事实上优于根值判别法,所以在
这里补充这一个好的判别工具,做选择题时供大家借鉴.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\ln n} = \rho \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \text{级数发散} \\ \rho > 1 \Rightarrow \text{级数收敛} \\ \rho = 1 \Rightarrow \text{该法失效,另谋他法} \end{cases}$$

关于此方法的证明,请参看例题 12.6.

2. 交错级数 ($\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0$) 的敛散性判别法

莱布尼茨判别法 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0; \quad (2) \quad u_n \geq u_{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots);$$

则级数收敛.

【注】给定一个级数,如果它满足上述的(1)、(2)两个条件,则一定是收敛的,但是,
如果级数不满足上述的(2),则级数并非一定发散,见下面的例子,这是考研中的一个难点,
提醒考生注意总结.当然,如果级数不满足上述的(1),则级数必发散.

比如,请判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$ 的敛散性. 这是交错级数,但不满足(2),因

此不能使用莱布尼茨判别法,本题可考虑泰勒公式. 由泰勒公式,

$$\ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right] = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2n} - o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}$, 表明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} - o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ 发散; 而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

是(条件)收敛的,故原级数发散.

3. 任意项级数 ($\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n$ 符号无限制) 的敛散性判别法

定义 (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数,若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,就称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数,若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散,就称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

定理 若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛.

【注】对于任意项级数, 思路上一般都是先把一般项 u_n 加上绝对值, 变成正项级数后再去讨论问题, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. 于是, 判别正项级数敛散性的种种方法均可能派上用场.

12.1.3 阿贝尔定理与幂级数的收敛域

1. 有关概念

函数项级数 设函数序列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上, 称 $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ 为定义在区间 I 上的函数项级数, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 当 x 取 x_0 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 成为常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

幂级数 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 是幂函数, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为幂级数, 它是一种特殊且常用的函数项级数, 其一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots;$$

其标准形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$; 其中 a_n 为幂级数的系数.

收敛点与发散点 若给定 $x_0 \in I$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称点 x_0 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点; 若给定 $x_0 \in I$, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散, 则称点 x_0 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点.

收敛域 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为它的收敛域.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的首要任务是判别敛散性, 因为只有收敛了才有继续讨论它的意义, 具体说来, 将某个 x_0 代入级数 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, 判别此数项级数是否收敛, 我们的目标当然是: 找到所有收敛点的集合, 即收敛域.

2. 阿贝尔定理

阿贝尔定理 当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1 (x_1 \neq 0)$ 处收敛时, 对于满足 $|x| < |x_1|$ 的

一切 x , 幂级数绝对收敛; 当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_2 (x_2 \neq 0)$ 处发散时, 对于满足 $|x| > |x_2|$ 的一切 x , 幂级数发散.

推论(收敛半径的存在性) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R (\geq 0)$ 必存在, 且

(1) 仅在点 $x = 0$ 处收敛, 此时收敛半径 $R = 0$;

(2) 在整个数轴上都收敛, 此时收敛半径 $R = +\infty$;

(3) 当 $|x| < R$ 时, 幂级数绝对收敛, 且当 $|x| > R$ 时, 幂级数发散, 则收敛半径就是 R .

当 $x = R$ 与 $x = -R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

收敛区间与收敛域 开区间 $(-R, R)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间; 单独考查幂级数在 $x = \pm R$ 处的敛散性就可以确定其收敛域, 为 $(-R, R), [-R, R), (-R, R], [-R, R]$ 之一.

【注】以上讨论的研究对象都是标准幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 对于一般幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, 有完全一致的说法, 不再赘述.

12.1.4 函数展开成幂级数

1. $f(x)$ 的泰勒级数

如果函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在任意阶导数, 则称

$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$ 为函数 $f(x)$

在 x_0 处的泰勒级数, 记作 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, 其中“ \sim ”叫做“可展开为”.

特别当 $x_0 = 0$, 则称 $f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$ 为函数 $f(x)$

的麦克劳林级数, 记作 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

2. $f(x)$ 的泰勒级数收敛于函数 $f(x)$ 本身的充要条件

为什么写 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, 而不是 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 呢?

事实上, 设 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内具有任意阶导数, 则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

$(x - x_0)^n$ 的充要条件是: 对一切满足不等式 $|x - x_0| < R$ 的 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0,$$

其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间, $R_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式余项.

3. 幂级数展开式的求法

解法一: 直接法: 验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, 并逐个计算 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, 并代入

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots.$$

直接法太麻烦了, 我们一般不用.

解法二: 间接法: 利用已知的幂级数展开式, 通过变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分、待定系数等方法得到函数的展开式, 这是常用方法, 也是考研重点.

12.1.5 幂级数求和函数

1. 和函数

在收敛域上, 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 并称 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数.

2. 幂级数的相等

给定两个级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots$

定义 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有相同的和函数, 则称这两个

幂级数在这邻域内相等.

定理 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $x = 0$ 的某邻域内相等, 则它们同次幂项的系数相等, 即 $a_n = b_n (n = 1, 2, \dots)$.

3. 幂级数的四则运算性质

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b , 则有

$$(1) k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n, |x| < R_a;$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R;$$

$$(3) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, |x| < R,$$

式中 k 为常数, $R = \min\{R_a, R_b\}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

4. 幂级数的分析性质

(1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续, 且如果幂级数在收敛区间端点

$x=R$ (或 $x=-R$) 收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R]$ (或 $[-R, R)$) 上连续.

(2) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 并且有逐项积分公式

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (x \in I)$$

逐项积分后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径, 收敛域可能扩大.

(3) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 并且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R)$$

逐项求导后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径, 收敛域可能缩小.

5. 需要熟稔于心的几个重要式子

第一组, 是几个重要函数的展开式

$$(1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$(2) \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1} x^n + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

$$(3) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (-1 < x < 1).$$

$$(4) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$(-1 < x \leqslant 1)$.

$$(5) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$(-\infty < x < +\infty)$.

$$(6) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$(-\infty < x < +\infty)$.

$$(7) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots.$$

这里, (1)至(6)右端 x 的取值范围是指收敛域, 而对于(7), 问题比较复杂, 其收敛区间的端点是否收敛与 α 的取值有关, 可以证明(这里不证):

当 $\alpha \leqslant -1$ 时, 收敛域为 $(-1, 1)$; 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, 收敛域为 $(-1, 1]$; 当 $\alpha > 0$ 时, 收敛域为 $[-1, 1]$.

第二组, 是几个重要级数的和函数

$$(1) \sum_{n=k}^{\infty} cx^n = \frac{cx^k}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x^2 \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

$$(5) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)'' = \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1).$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1).$$

12.1.6 傅里叶级数(仅数学一)

1. 狄利克雷(Dirichlet)收敛定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数, 如果在 $[-l, l]$ 上 $f(x)$ 满足:

(1) 连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 只有有限个极值点;

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛, 记其和函数为 $S(x)$, 则

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$\text{且 } S(x) = \begin{cases} f(x) & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} & x \text{ 为第一类间断点} \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2} & x \text{ 为端点} \end{cases}$$

2. 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足狄利克雷收敛定理的条件, 则它的傅里叶级数为

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中系数 a_n 和 b_n 分别为

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

考研的实际考题分为以下三种情况:

(1) 将普通周期函数 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上展开为傅里叶级数

$$\text{展开系数为 } \begin{cases} a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

(2) 将奇偶周期函数 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上展开为傅里叶级数

$$\text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时, 展开系数为 } \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含正弦函数表达式, 故也称为正弦级数.

$$\text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时, 展开系数为 } \begin{cases} a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx \\ a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n = 0 \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含余弦函数表达式, 故也称为余弦级数.

(3) 将非对称区间 $[0, l]$ 上的函数 $f(x)$ 展开为正弦级数或者余弦级数

$$[0, l] \text{ 上的 } f(x) \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{\text{若要求展开成正弦级数} \\ \text{需作奇延拓}}} \text{得到 } [-l, l] \text{ 上的奇函数 } f(x) \\ \xrightarrow{\substack{\text{若要求展开成余弦级数} \\ \text{需作偶延拓}}} \text{得到 } [-l, l] \text{ 上的偶函数 } f(x) \end{array} \right.$$

$$\text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时, 展开系数为 } \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含正弦函数表达式, 即展开为了正弦级数.

$$\text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时, 展开系数为 } \begin{cases} a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx \\ a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n = 0 \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含余弦函数表达式, 即展开为了余弦级数.

考研中, 以考查上述的第 3 种情况为主.

12.2 典型例题分析

本讲例题极其精彩丰富, 灵活性强, 计算量大, 考生应认真学习以下典型题目, 按照本书

所讲的思路去练习和总结,以达到提高自己解题能力的目的.

12.2.1 数项级数敛散性的判别

【例 12.1】判断下列正项级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx; (3) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}).$$

【分析与解答】(1)显然, $0 < \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 收敛, 按比较判

别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$ 收敛.

(2)因 $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{n^{3/2}}$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛, 则按比较判别法得

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ 收敛.

(3)因 $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{3 \sqrt[3]{(n+1)^2}}$,

又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{2/3}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ 发散, 则按比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$ 发散.

【例 12.2】设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 试证:

(1)若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛;

(2)若 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛, 且 u_n 单调减少, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(3)若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 都收敛;

(4)若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛.

【证明】(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且有 $\sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{2} (u_n + u_{n+1}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛.

(2) u_n 单调减少 $\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow u_{n+1}^2 \leq u_n u_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \leq \sqrt{u_n u_{n+1}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 收敛, 且 $u_n v_n \leq \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$

收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 且 $\frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{2} \left(u_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 收敛.

【例 12.3】证明: 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ 条件收敛.

【证明】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ 是交错级数, 但不满足莱布尼茨判别法的(2), 故莱布尼茨判别法失效, 因为 $|u| = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}$, 所以由正项级数

的比较判别法知, $\sum_{n=2}^{\infty} |u| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 发散,

$$\text{又因为 } S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+(-1)^k}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

由于上式每个括号都小于 0, 所以 $\{S_{2n}\}$ 单调递减, 再由

$$S_{2n} > \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} > -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

知 $\{S_{2n}\}$ 单调递减有下界, 故 $\{S_{2n}\}$ 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

所以, 原级数的部分和数列 $\{S_{2n}\}$ 收敛, 从而级数收敛, 所以, 原级数条件收敛.

【例 12.4】 设 $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n})$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1)$ 收敛.

【证明】 由算术平均值不小于其几何平均值得 $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}) \geq \sqrt{u_n \frac{1}{u_n}} = 1$, 即数列

$\{u_n\}$ 有下界 1, 由此又得 $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2u_n}(1 - u_n^2) \leq 0$, 即 $\{u_n\}$ 单调减少, 则根据单调有界

准则知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 必存在, 由 $\{u_n\}$ 单调减少知所考虑的级数为正项级数, 且有

$$0 \leq \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}} \leq u_n - u_{n+1},$$

因 $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k+1}) = u_n - u_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 存在, 故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 则按级数敛散性的

定义知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$ 收敛, 于是, 由比较判别法得原正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1)$ 收敛.

【例 12.5】 试判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \sin(n\pi + \frac{1}{\ln n})$ 的敛散性.

【分析与解答】 由于该级数的通项 $u_n = \sin(n\pi + \frac{1}{\ln n}) = (-1)^n \sin \frac{1}{\ln n}$, 且当 $n \geq 2$ 时有

$0 < \frac{1}{\ln n} < \frac{\pi}{2}$, 因此 $\sin \frac{1}{\ln n} > 0$, 则题给的级数是交错级数, 它可以改写为 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\ln n}$.

因 $|u_n| = \left| \sin(n\pi + \frac{1}{\ln n}) \right| = \sin \frac{1}{\ln n}$, 且当 $n \geq 2$ 时 $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, 则由 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 按比

较判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{\ln n} / \frac{1}{\ln n}) = 1$, 则按极限形式的比较判别法知

$\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{1}{\ln n}$ 发散, 即题给的级数不是绝对收敛.

显然,数列 $\{|u_n|\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\ln n} = 0$, 设函数 $f(x) = \sin \frac{1}{\ln x}$, 则在 $x \geq 2$ 时, $f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} \cos \frac{1}{\ln x} < 0$, 故 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 内单调减少, 从而数列 $\{|u_n|\}$ 单调减少, 于是, 题给的级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\ln n}$ 满足莱布尼茨定理的条件, 故它是收敛的, 且是条件收敛.

【例 12.6】设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, 并设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = b$.

(I) 求证: 若 $b > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 若 $b < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(II) 当 $b = 1$ 时, 试举出可能收敛也可能发散的例子.

【证明】(I) 设 $b > 1$, 任取 $\varepsilon > 0$, 使得 $b - \varepsilon > 1$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = b$, 故 $\exists N$, 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > b - \varepsilon,$$

即

$$\ln \frac{1}{a_n} > \ln n^{b-\varepsilon} \Rightarrow a_n < \frac{1}{n^{b-\varepsilon}}.$$

因 $b - \varepsilon > 1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{b-\varepsilon}}$ 收敛, 由正项级数的比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

又假设 $b < 1$, 任取 $\varepsilon > 0$, 使得 $b + \varepsilon < 1$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = b$, 故 $\exists N$, 使得当 $n \geq N$ 时,

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < b + \varepsilon,$$

即

$$\ln \frac{1}{a_n} < \ln n^{b+\varepsilon} \Rightarrow a_n > \frac{1}{n^{b+\varepsilon}}.$$

因 $b + \varepsilon < 1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{b+\varepsilon}}$ 发散, 由正项级数的比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(II) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 这时 $b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = 1$;

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ 根据积分判别法易知其收敛, 这时令 $x = \ln n$,

$n \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow +\infty$, 则有 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{\ln(n \ln^2 n)}{\ln n} = \frac{\ln(x^2 e^x)}{x} = \frac{x + 2 \ln x}{x}$,

所以有 $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\ln n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2\ln x}{x} = 1$.

12.2.2 幂级数的收敛域

【例 12.7】根据阿贝尔定理, 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 在某点 x_1 ($x_1 \neq x_0$) 的敛散性, 证明

该幂级数的收敛半径可分为以下三种情况:

- (1) 若在 x_1 处收敛, 则收敛半径 $R \geq |x_1 - x_0|$;
- (2) 若在 x_1 处发散, 则收敛半径 $R \leq |x_1 - x_0|$;
- (3) 若在 x_1 处条件收敛, 则收敛半径 $R = |x_1 - x_0|$.

【分析与解答】根据阿贝尔定理, (1)(2) 是显然的. 对于(3), 因幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

在点 x_1 处收敛, 则 $R \geq |x_1 - x_0|$; 另一方面, 因幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 在点 x_1 处条件收敛, 则 $R \leq |x_1 - x_0|$, 因若不然, 则该点是绝对收敛, 而不是条件收敛, 这与题设矛盾, 于是, 综合上述两方面得该幂级数的收敛半径 $R = |x_1 - x_0|$.

【例 12.8】设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n (x - 1)^n$ 的收敛域为()

- (A) $(-1, 1]$ (B) $[-1, 1)$ (C) $[0, 2)$ (D) $(0, 2]$

【分析与解答】本题主要考查交错级数的莱布尼茨判别法和幂级数的收敛区间、收敛域的概念, 是一道综合了多个知识点的考题.

因数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 故根据莱布尼茨判别法知, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - 1)^n$ 在 $x = 0$ 处条件收敛;

又 $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) 无界, 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - 1)^n$ 在 $x = 2$ 处发散;

综上, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - 1)^n$ 的收敛域为 $[0, 2)$, 故答案应选(C).

【例 12.9】设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - b)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛, 在 $x = 2b$ 处发散, 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R 与收敛域, 并分别求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ 的收敛半径.

【分析与解答】令 $t = x - b$, 收敛中心 $x_0 = b$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - b)^n$ 化为收敛中心 $x_0 = 0$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. 根据阿贝尔定理可以得到如下结论:

因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t = -b$ 处收敛, 从而当 $|t| < | -b | = |b|$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 绝对收敛.

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ 在 $x = 2b$ 处发散, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t = b$ 处发散, 进而当 $|t| > |b|$ 时,

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 发散.

由上述两方面根据幂级数收敛半径的定义即知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = |b|$, 其收敛域为 $-b \leq x < b$.

注意到幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ 是由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 分别经逐项求导和逐项积分所得, 根据幂级数逐项求导、逐项积分所得幂级数的收敛半径不变的性质, 即知它们的收敛半径都是 $R = |b|$.

【注】 对于形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha x - \beta)^n$ 的幂级数, 通常可先作 $y = \alpha x - \beta$ 的变换, 使之把

原级数转化为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, 这样, 在解题时比较方便且不易出错. 例如, 若幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 试讨论该级数在 $x = 2$ 处的敛散性. 令 $y = x-1$, 则

所给条件等价于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ 在 $y = -2$ 处收敛, 由例 12.7 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ 的收敛半径 $R \geqslant$

$2 = |-2|$, 再由阿贝尔定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ 在 $y = 1$ 处必绝对收敛. 于是, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在

$x = y + 1 = 2$ 处必绝对收敛.

12.2.3 函数展开成幂级数与幂级数求和

【例 12.10】 将 $y = \sin x$ 展开为 $(x - \frac{\pi}{4})$ 的幂级数.

$$\text{【分析与解答】} y = \sin x = \sin(x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin(x - \frac{\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{4} + \cos(x - \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4})]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} [(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{3!} (x - \frac{\pi}{4})^3 + \frac{1}{5!} (x - \frac{\pi}{4})^5 - \dots + 1 - \frac{1}{2!} (x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{4!} (x - \frac{\pi}{4})^4 - \dots]$$

($-\infty < x < +\infty$)

【例 12.11】 将 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 展开为 $x+1$ 的幂级数.

【分析与解答】 如果此题这样做: $f(x) = \frac{1}{(x+1-1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2 - 2(x+1)+1}$, 是

行不通的;

改用“先积后导”的方法:

$$\begin{aligned} f(x) &= (-\frac{1}{x})' = (-\frac{1}{x+1-1})' = (\frac{1}{1-(x+1)})' \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^{n-1}. \end{aligned}$$

【例 12.12】 设 $f(x) = \frac{1}{1-2x-x^2}$.

(1) 将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数;

(2) 分别判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 的敛散性.

【分析与解答】 (1) 把 $f(x)$ 作初等变换, 并利用几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$,

得 $f(x)$ 的 x 的幂级数为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-2x-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{(\sqrt{2}+1)+x} + \frac{1}{(\sqrt{2}-1)-x} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{2}+1}\right)^{-1} + \frac{1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(\sqrt{2}+1)^{n+1}} + \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^{n+1}} \right] x^n, |x| < \sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

(2) 根据幂级数展开式的唯一性得 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的高阶导数

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\sqrt{2}} \left[\frac{(-1)^n}{(\sqrt{2}+1)^{n+1}} + \frac{1}{(\sqrt{2}-1)^{n+1}} \right] = \frac{n!}{2\sqrt{2}} [(-1)^n (\sqrt{2}-1)^{n+1} + (\sqrt{2}+1)^{n+1}]$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{2}+1)^{n+1} \left[1 + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)^{n+1} \right] > 0.$$

则所考虑的 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u_n}$, $u_n = \frac{n!}{f^{(n)}(0)} = \frac{2\sqrt{2}}{(-1)^n (\sqrt{2}-1)^{n+1} + (\sqrt{2}+1)^{n+1}}$ 都为正项

级数.

取 $v_n = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{n+1}}$, 显然 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 收敛. 因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2} (\sqrt{2}+1)^{n+1}}{(-1)^n (\sqrt{2}-1)^{n+1} + (\sqrt{2}+1)^{n+1}} = 2\sqrt{2},$$

故由极限形式的比较判别法得 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛. 注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \neq 0$ 知

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 发散.

【例 12.13】设 $a_n = \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)x^n (1-x)^n dx, n=1,2,\dots$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并求其和.

$$\begin{aligned}\text{【证明】 } a_n &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)x^n (1-x)^n dx \xrightarrow{\text{令 } \frac{1}{2} - x = u} \int_0^{\frac{1}{2}} u (\frac{1}{2} - u)^n (\frac{1}{2} + u)^n du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{4} - u^2)^n d(u^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{4} - u^2)^n d(\frac{1}{4} - u^2) = \frac{1}{2(n+1)4^{n+1}} < \frac{1}{4^{n+1}}.\end{aligned}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

为求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)4^{n+1}}$ 的和, 作 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)} x^{n+1}, x \in [-1, 1],$

$$S'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{2(1-x)}, S(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = \frac{1}{2} (-x - \ln(1-x)), x \in [-1, 1].$$

$$\text{从而, } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4}.$$

【例 12.14】(I) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx ;$

(II) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2} .$

【证明】

$$\begin{aligned}\text{(I) } \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n x^{3n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2} .\end{aligned}$$

$$\text{(II) 由于 } \frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} ,$$

$$\text{由待定系数法得, } A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{2}{3} , \text{ 则}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi.$$

【例 12.15】求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{2n-1} (2n+1)!} .$

【分析与解答】本题考查无穷级数的求和,涉及逐项积分和求导的恒等变形,是常规考题.

$$\text{本题要求 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{2n-1} (2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1},$$

给出幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} nx^{2n-1}$, 其收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$,

并记其和函数 $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n nx^{2n-1}}{(2n+1)!}$, 逐项积分得

$$2 \int_0^x s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \neq 0,$$

$$\text{所以 } \int_0^x s(x) dx = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2x} (\sin x - x),$$

两边求导得 $s(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2}$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{2n-1} (2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = s\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} - \sin \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \cos \frac{1}{2} - 2 \sin \frac{1}{2}.$$

【例 12.16】(I) 求函数项级数 $e^{-x} + 2e^{-2x} + \dots + ne^{-nx} + \dots$ 收敛时 x 的取值范围;

(II) 当上述级数收敛时,求其和函数 $S(x)$, 并求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x) dx$.

【分析与解答】(I) 该函数项级数的通项 $u_n(x) = ne^{-nx}$, $u_{n+1}(x) = (n+1)e^{-(n+1)x}$, 故,

当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{1}{e^x} < 1$, 即 $x > 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛; $x < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 发散;

当 $x = 0$ 时,该级数成为 $1 + 2 + \dots + n + \dots$, 显然是发散的;

所以该级数当 $x > 0$ 时收敛于 $S(x)$.

$$\begin{aligned} (II) S(x) &= e^{-x} + 2e^{-2x} + \dots + ne^{-nx} + \dots \stackrel{t = e^{-x}}{=} t + 2t^2 + \dots + nt^n + \dots \\ &= t(1 + 2t + \dots + nt^{n-1} + \dots) = t(t + t^2 + \dots + t^n + \dots)' \\ &= t \left(\frac{t}{1-t} \right)' = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}, x > 0 \end{aligned}$$

$$\text{于是, } \int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x-1)^2} dx = -\frac{1}{e^x-1} \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{1}{2}.$$

【注】(1) 本题所给研究对象是非幂函数的函数项级数, 考生应对此题时应该想到用变量替换 $t = e^{-x}$ 将所给级数转化为幂级数, 这是解决本题的一个关键;

(2) 求和函数还有如下解法二, 供参考: $e^{-x}S(x) = e^{-2x} + 2e^{-3x} + \dots + ne^{-(n+1)x} + \dots$

$$S(x) - e^{-x}S(x) = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx} + \dots = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}},$$

$$\text{故 } S(x) = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}, x > 0.$$

【例 12.17】设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, 且 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, 证明在

$|x| < \frac{1}{2}$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 收敛, 并求其和函数与系数 a_n .

【证明】(1) 显然, $\{a_n\}$ 是正项严格单调增加数列, 且有 $a_3 = 2, a_4 = a_2 + a_3 < 2a_3 = 2^2$, 假设 $a_n < 2^{n-2}$, 则有 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < 2a_n < 2^{n-1}$, 故由归纳法得 $a_n < 2^{n-2}$, 于是, 所考虑的级数的通项有 $|a_n x^{n-1}| < \frac{1}{2} (2x)^{n-1}$.

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^{n-1}$ 在 $|2x| < 1$ 时收敛, 故由比较判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 在 $|2x| < 1$,

即 $|x| < \frac{1}{2}$ 时绝对收敛.

(2) 原幂级数化为

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} &= a_1 + a_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_1 + a_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^{n-1} \\ &= a_1 + a_2 x + (-a_1 x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}) + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \\ &= 1 + (x + x^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

移项后得原幂级数的和函数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \frac{1}{1 - x - x^2}$ $|x| < \frac{1}{2}$.

(3) 将 $\frac{1}{1 - x - x^2}$ 展开为 x 的幂级数, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - x - x^2} &= \frac{2}{\sqrt{5} \times (1 + \sqrt{5})} \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}x} + \frac{2}{\sqrt{5} \times (-1 + \sqrt{5})} \frac{1}{1 - \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5} \times (1 + \sqrt{5})} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}}\right)^n x^n + \frac{2}{\sqrt{5} \times (-1 + \sqrt{5})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{-1 + \sqrt{5}}\right)^n x^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}}\right)^n + \left(\frac{2}{-1 + \sqrt{5}}\right)^n\right] x^{n-1} \end{aligned}$$

而 $\frac{1}{1 - x - x^2}$ 又是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 的和函数, 则由幂级数展开式的唯一性, 经比较系

数得原幂级数的系数, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(-1)^n \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} + \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right]$.

【注】①原级数的收敛性也可以证明如下:

$$\text{因 } \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{a_{n+1}x^n}{a_n x^{n-1}} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} |x| = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} |x| < \frac{a_n + a_n}{a_n} |x| = 2|x|,$$

故有 $|a_{n+1}x^n| < 2|x| |a_n x^{n-1}| < \dots < (2|x|)^n a_1$, 因当 $2|x| < 1$ 时级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2|x|)^n \text{ 收敛}, \text{ 则由比较判别法即得 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \text{ 绝对收敛}.$$

②如果考虑的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数 a_n 是待确定的, 它仅仅只给出某种递推关系

等, 则可以通过恒等变形, 或建立微分方程等技术手段求得该幂级数的和函数.

再把这个求得的和函数展开为 x 幂级数, 则按幂级数展开式的唯一性, 经比较系数就得原幂级数的系数 a_n 的确定表示式.

上述分析就是本题这类问题的求解思想.

③对级数 $\sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k}$, 其 k 是确定的正整数, 令 $i = n - k$, 则有

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^{n-k} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ 这实际上是一种变量代换.}$$

【例 12.18】设 $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$ ($|x| < 1$).

(1) 求 $y(0), y'(0)$, 并证明 $(1-x^2)y'' - xy' = 4$;

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$ ($|x| < 1$) 的和函数及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}$ 的值.

【分析与解答】(1) 由 $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$, 得 $y(0) = 0$;

又, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} 2^{2n} \cdot x^{2n-1}$, 于是 $y'(0) = 0$,

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!} 2^{2n} \cdot x^{2n-2}.$$

以下证明微分方程成立:

$$(1-x^2)y'' - xy'(x)$$

$$= 4 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!} (2x)^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} (2x)^{2n}$$

$$= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4[(n-1)!]^2}{(2n)!} - \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!} - \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} \right] (2x)^{2n}$$

$$= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} [4n^2 - 2n(2n-1) - 2n] (2x)^{2n} = 4.$$

(2)下面求解微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' = 4$.

首先,应该可以想到本题用“二阶可降阶”的方法,令 $y' = p$,考生可以自练.但是本题更好的做法是如下的分析:

微分方程两边同时乘以 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (想想看这个 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 是怎么推导出来的呢?)则有

$$\sqrt{1-x^2}y'' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y' = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ 即}$$

$$(\sqrt{1-x^2}y')' = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}},$$

上式两边分别积分得:

$$\int (\sqrt{1-x^2}y')' dx = \sqrt{1-x^2}y'; \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx = 4\arcsin x + C,$$

于是有

$$\sqrt{1-x^2}y' = 4\arcsin x + C.$$

根据 $y'(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, 即 $\sqrt{1-x^2}y' = 4\arcsin x$,

也就是 $y'(x) = \frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, 两边再积分, 得

$$\int \frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \arcsin^2 x + C,$$

故 $y(x) = 2 \arcsin^2 x + C$.

又 $y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, 就有 $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} = 2 \arcsin^2 x$.

由 $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{18}$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} = \frac{\pi^2}{18}$.

12.2.4 傅里叶级数(仅数学一)

【例 12.19】(I) 证明等式 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4}|x| (-1 \leq x \leq 1)$;

(II) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

【分析与解答】 (I) 考虑待证明等式右边的函数 $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4}|x|$ 展开为余弦级数, 因

$y = |x|$ 是偶函数, 故只要将 $f(x) = |x|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上展开为傅里叶级数, 其中半周期 $l = 1$, 它的傅里叶系数

$$b_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

$$a_0 = \int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = 1,$$

$$a_n = \int_{-1}^1 |x| \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^2}, n = 1, 2, \dots$$

因 $f(x) = |x|$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 故它的傅里叶级数展开式

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^2} \cos n\pi x = |x|, -1 \leq x \leq 1,$$

故得等式 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4} |x|, -1 \leq x \leq 1.$

(II) 在上述等式中, 令 $x = 0$, 即得数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$

因收敛的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$

移项即得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$

【注】欲证明某个等式, 不要习惯地只从等式左边证到右边, 如果本题这样去做, 则将是一个求三角级数的和函数问题, 该证法的困难甚大, 事实上, 如果从等式右边出发去证明, 那么本题就是大家熟悉的函数的傅里叶级数展开问题, 且偶函数 $f(x) = |x|$ 的傅里叶级数展开式必是余弦级数.

【例 12.20】设函数 $f(x)$ 是以为 2π 周期的周期函数, 且 $f(x) = e^{\alpha x}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$), 其中 $\alpha \neq 0$, 试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ 的和.

【分析与解答】先求出系数:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha\pi} (e^{2\pi\alpha} - 1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\alpha x} \cos nx dx = \frac{e^{2\pi\alpha} - 1}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\alpha x} \sin nx dx = -\frac{e^{2\pi\alpha} - 1}{\pi} \cdot \frac{n}{\alpha^2 + n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

由狄利克雷收敛定理知

$$e^{\alpha x} = \frac{e^{2\pi\alpha} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cos nx - n \sin nx}{\alpha^2 + n^2} \right], 0 \leq x \leq 2\pi,$$

令 $\alpha = 1, x = 0$, 由狄利克雷收敛定理知

$$\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right] = \frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = \frac{e^{2\pi} + 1}{2},$$

故,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2}.$$

第 13 讲 多元函数微分学的应用二(仅数学一)

» 导语

本讲主要由四个内容组成,都是数学一的考试内容:一个是向量代数与空间解析几何,一个是多元微分学的几何应用,一个是方向导数与梯度知识(这是场论初步知识的一部分,还有一部分在第二型曲面积分那里去讲),一个是二元函数的二阶泰勒公式.

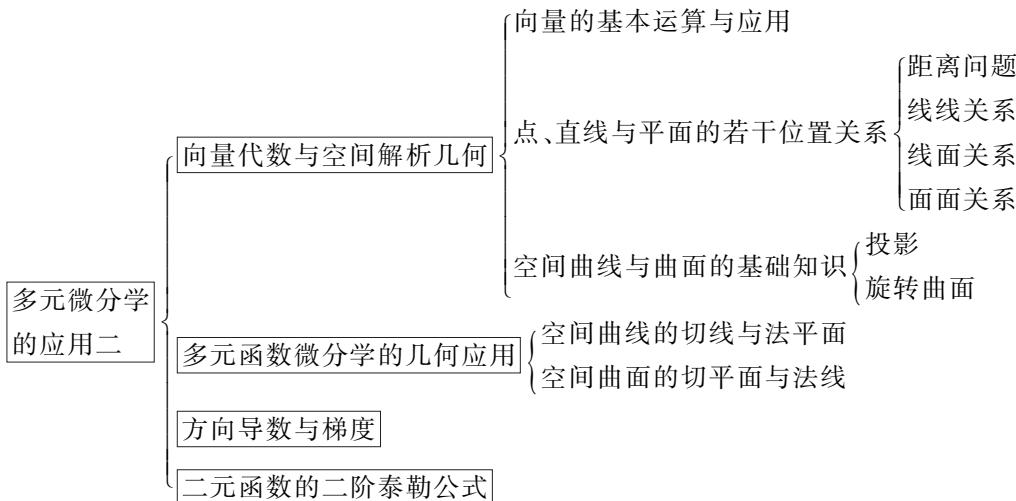
需要指出,向量代数与空间解析几何的知识,严格说来,并不属于微积分的范畴,事实上,它是研究微积分的一种工具,把握住了这个工具,我们就能够更方便地去研究,更深刻、更形象地去理解某些微积分的问题,在多元函数微积分学中较多地涉及了这些知识(比如多元微分学的几何应用中有空间曲线的切线和法平面,空间曲面的切平面和法线;多元积分学的计算中涉及空间曲面的投影,等等).

本讲一般不出大题,如果出小题,主要出在多元微分学的几何应用、方向导数、梯度,但是正如上面所述,把握住这些工具性的知识,我们能更好地为应对某些综合性的考试大题做好准备.

» 大纲要求

1. 空间直角坐标系,向量的概念及其表示.
2. 向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积),了解两个向量垂直、平行的条件.
3. 单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式,用坐标表达式进行向量运算的方法.
4. 平面方程和直线方程及其求法.
5. 求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角,利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.
6. 求点到直线以及点到平面的距离.
7. 曲面方程和空间曲线方程的概念.
8. 常用二次曲面的方程及其图形,求简单的柱面和旋转曲面的方程.
9. 空间曲线的参数方程和一般方程. 空间曲线在坐标平面上的投影,求该投影曲线的方程.
10. 空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,求它们的方程.
11. 方向导数与梯度的概念与计算方法.
12. 二元函数的二阶泰勒公式.

知识体系



13.1 考试内容分析

13.1.1 向量代数的基础知识

1. 向量代数的基本概念、性质与公式

既有大小又有方向的量，称为向量。

(1) 向量的相等 对于两个向量，只要它们的大小相等，方向相同，则它们就是相等的向量，而与它们在空间中的位置无关(这也称为向量的自由性)；

(2) 向量的表达形式

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

(3) 向量的运算及其应用

对于 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$.

① 数量积(内积, 点积)及其应用

$$(i) \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) \cdot (b_x, b_y, b_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

$$(ii) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

其中 θ 为 \vec{a}, \vec{b} 的夹角；

$$(iii) \mathbf{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \text{ 称为 } \vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 上的投影量；}$$

$$(iV) \boxed{\vec{a} \perp \vec{b}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta = 0 \Leftrightarrow [a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0].$$

② 向量积(外积, 叉积)及其应用

$$(i) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \text{其中, } |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta, \text{用右手螺旋定则确定方向}$$

(转向角不超过 π), θ 为 \vec{a}, \vec{b} 的夹角;

$$(ii) \boxed{\vec{a} \parallel \vec{b}} \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

③ 混合积及其应用

$$(i) [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix};$$

$$(ii) \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{三向量共面}.$$

(4) 向量的方向角和方向余弦

① \vec{a} 与 x 轴、 y 轴和 z 轴正向的夹角 α, β, γ 称为 \vec{a} 的方向角;

② $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 \vec{a} 的方向余弦, 且 $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$;

③ $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 称为向量 \vec{a} 的单位向量(就是表示方向的向量);

④ 任意向量 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (r\cos\alpha, r\cos\beta, r\cos\gamma) = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 \vec{r} 的方向余弦.

13.1.2 平面与直线的基础知识

1. 平面与直线的基本概念、性质与公式

(1) 平面方程(以下假设平面的法线向量 $\vec{n} = (A, B, C)$);

① 一般式 $Ax + By + Cz + D = 0$.

② 点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

③三点式 $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$ (平面过不共线的三点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$).

④截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (平面过 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ 三点).

⑤平面束方程 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$.

不包含 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 如果所求平面通过已知直线(一般式), 则用平面束方程会比较简便, 但必须验证 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 是否满足所求结论, 以免遗漏.

(2) 直线方程(以下假设直线的方向向量 $\vec{\tau} = (l, m, n)$).

①一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases}$, 其中 $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$.

【注】其几何背景很直观, 是两个平面的交线; 且该直线的方向向量 $\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

②点向式(标准式, 对称式) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$.

③参数式 $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ $M(x_0, y_0, z_0)$ 为直线上已知点, t 为参数.

④两点式 $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ (直线过不同的两点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$).

2. 点、直线与平面的若干位置关系

(1) 一组重要的距离公式

①点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

②设直线 $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ 过点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 方向向量 $\vec{\tau} = (l, m, n)$, 则点

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线的距离

$$d = \frac{|\vec{\tau} \times \overrightarrow{P_0 P_1}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{\left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ l & m & n \end{array} \right|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

【简单推导】以 $\vec{\tau}, \overrightarrow{P_0 P_1}$ 为边画平行四边形, 则 $|\vec{\tau} \times \overrightarrow{P_0 P_1}|$ 表示该平行四边形的面积,

而 $|\vec{\tau}|$ 表示该平行四边形的底边长.

③直线到直线的距离 d

$$(i) \text{ 两平行直线的距离 } d = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (P_1(x_1, y_1, z_1),$$

$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 分别为两直线 L_1, L_2 上的两点)

(ii) 两异面直线的距离 d

$$d = \frac{|(\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2) \cdot \vec{P_1 P_2}|}{|\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right|}{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right|} \quad (P_1(x_1, y_1, z_1),$$

$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 分别为两直线 L_1, L_2 上的两点)

【简单推导】以 $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{P_1 P_2}$ 为棱画平行六面体，则 $|(\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2) \cdot \vec{P_1 P_2}|$ 表示该平行六面体的体积，而 $|\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2|$ 表示该平行六面体的底面积.

【注】当 $|(\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2) \cdot \vec{P_1 P_2}| = 0$ 时， $d = 0$ ，则两直线共面.

$$④ \text{ 两平行平面之间的距离 } d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(2) 直线间关系

$$① L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{\tau}_1 \perp \vec{\tau}_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

$$② L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{\tau}_1 \parallel \vec{\tau}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

$$③ \text{ 直线 } L_1, L_2 \text{ 间的夹角 } \theta = \arccos \frac{\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2}{|\vec{\tau}_1| |\vec{\tau}_2|}, \text{ 其中 } \theta = \min\{(\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2), \pi - (\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)\} \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

(3) 平面间关系

$$① \Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

$$② \Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

$$③ \text{ 平面 } \Pi_1, \Pi_2 \text{ 间的夹角 } \theta = \arccos \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}, \text{ 其中}$$

$$\theta = \min\{\langle \overset{\wedge}{n_1}, \overset{\wedge}{n_2} \rangle, \pi - \langle \overset{\wedge}{n_1}, \overset{\wedge}{n_2} \rangle\} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(4) 平面与直线的关系

$$\textcircled{1} L \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{\tau} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

$$\textcircled{2} L \parallel \Pi \Leftrightarrow \vec{\tau} \perp \vec{n} \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0.$$

$$\textcircled{3} \text{ 直线 } L \text{ 与平面 } \Pi \text{ 间的夹角 } \theta \quad \theta = \arcsin \frac{|\vec{\tau} \cdot \vec{n}|}{|\vec{\tau}| |\vec{n}|}, \text{ 其中 } \theta = \left| \frac{\pi}{2} - \langle \vec{\tau}, \vec{n} \rangle \right| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

13.1.3 空间曲线与曲面的基础知识

1. 空间曲线

(1) 一般式 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 其几何背景为两个曲面的交线.

(2) 参数方程 $\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t) \end{cases}$.

(3) 空间曲线在坐标面上的投影(重点)

以求曲线 Γ 对 xOy 平面的投影曲线为例,

① 将 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 中的 z 消去, 得到 $\varphi(x, y) = 0$.

② 曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线包含于曲线 $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

曲线 Γ 对其他平面的投影曲线可类似求得.

2. 空间曲面

(1) 曲面方程 $F(x, y, z) = 0$

(2) 二次曲面

$$\text{椭球面} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

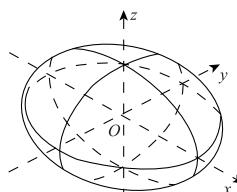
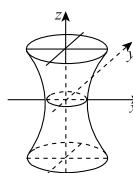


图 13.1



单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

图 13.2

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

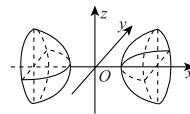


图 13.3

椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

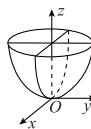


图 13.4

椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

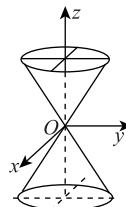


图 13.5

双曲抛物面(马鞍面) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ (了解即可, 不用掌握其图形)

(3) 柱面 动直线沿定曲线平行移动所形成的曲面

椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a = b$ 时为圆柱面)

双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

抛物柱面 $y = ax^2$

【注】在空间解析几何中,除非作特殊说明,一般认为缺少变量的方程为柱面.

(4) 旋转曲面(重点) 曲线 C 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面

曲线 $C: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 沿 x 轴旋转所得旋转曲面方程为 $f(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$;

曲线 $C: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 沿 y 轴旋转所得旋转曲面方程为 $f(\pm \sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$.

13.1.4 多元函数微分学的几何应用

1. 空间曲线的切线与法平面

①设空间曲线 Γ 由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$ 给出, 其中, 方程中的三个函数均可导,

曲线 Γ 上的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 Γ 上的点, 且当 $t = t_0$ 时, $\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$ 都不为 0, 则

曲线 Γ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切向量为 $\tau = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$,

曲线 Γ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$,

曲线 Γ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法平面(过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点且与切线垂直的平面)方程为 $\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$.

②设空间曲线 Γ 由交面式方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 给出, 则在以下表达式有意义的条件下,

曲线 Γ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切向量为 $\vec{\tau} = \left\{ \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0} \right\}$,

曲线 Γ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0}}$,

曲线 Γ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法平面(过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点且与切线垂直的平面)方程为

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0} (x - x_0) + \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0} (y - y_0) + \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{P_0} (z - z_0) = 0.$$

2. 空间曲面的切平面与法线

①设空间曲面 Σ 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 给出, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 Σ 上的点, 则曲面 Σ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量(垂直于该点切平面的向量)为

$$\vec{n} = \{F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)\},$$

且法线方程为 $\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$,

曲面 Σ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

②设空间曲面 Σ 由方程 $z = f(x, y)$ 给出, 令 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, 则曲面 Σ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量(垂直于该点切平面的向量)为

$$\vec{n} = \{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\},$$

且法线方程为 $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$,

曲面 Σ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

【注】(1) 全微分的几何意义

由上式可得: $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, 于是 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的全微分表示曲面 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面上点的竖坐标的增量.

(2) 若用 α, β, γ 表示曲面的法向量的方向角, 并假定法向量的方向是向上的, 即使得它与 z 轴的正向所成的角 γ 是锐角, 则法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

其中, $f_x = f'_x(x_0, y_0)$, $f_y = f'_y(x_0, y_0)$.

13.1.5 方向导数与梯度

1. 方向导数

在许多问题中, 不仅要知道函数在坐标轴方向上的变化率(即偏导数), 而且还要设法求得函数在某点沿着其他特定方向上的变化率. 这就是本节所要讨论的方向导数.

定义 设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某空间邻域 $U \subset R^3$ 内有定义, l 为从点 P_0 出发的射线, $P(x, y, z)$ 为 l 上且在 U 内的任一点, 且令

$$\begin{cases} x - x_0 = \Delta x = t \cos\alpha \\ y - y_0 = \Delta y = t \cos\beta \\ z - z_0 = \Delta z = t \cos\gamma \end{cases}$$

以 $t = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ 表示 P 与 P_0 之间的距离, 如图 13.6 所示, 若极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(P) - u(P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + t \cos\alpha, y_0 + t \cos\beta, z_0 + t \cos\gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

存在, 则称此极限为函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 P_0 沿方向 l 的方向导数, 记作 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0}$.

定理(方向导数的计算公式) 设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微, 则 $u = u(x, y, z)$ 在点 P_0 处沿任一方向 l 的方向导数都存在, 且

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} = u'_x(P_0) \cos\alpha + u'_y(P_0) \cos\beta + u'_z(P_0) \cos\gamma,$$

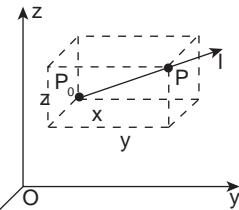


图 13.6

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦.

【注】请大家自己独立写出对于二元函数 $f(x, y)$ 情况.

2. 梯度

在一个数量场中, 在给定点沿不同的方向, 其方向导数一般是不相同的, 现在我们所关心的是: 沿哪一个方向其方向导数最大? 其最大值是多少? 为此引进一个很重要的概念——梯度.

定义 设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 具有一阶偏导数, 则定义

$$\mathbf{grad}u|_{P_0} = \{u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0)\}$$

为函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 P_0 处的梯度.

如果理解梯度的这个定义呢? 请继续看下面.

3. 方向导数与梯度的关系

由方向导数的计算公式 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0} = u'_x(P_0)\cos\alpha + u'_y(P_0)\cos\beta + u'_z(P_0)\cos\gamma$ 与梯度的定

义 $\mathbf{grad}u|_{P_0} = \{u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0)\}$, 可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0} &= \{u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0)\} \cdot \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \mathbf{grad}u|_{P_0} \cdot \vec{l} \\ &= |\mathbf{grad}u|_{P_0}| |\vec{l}| \cos\theta = |\mathbf{grad}u|_{P_0}| \cos\theta. \end{aligned}$$

其中 θ 为 $\mathbf{grad}u|_{P_0}$ 与 \vec{l} 的夹角, 当 $\cos\theta = 1$ 时, $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}$ 有最大值.

于是我们可以得出结论: 函数在某点的梯度是这样一个向量, 它的方向与取得方向导数最大值的方向一致, 而它的模为方向导数的最大值.

【注】上述推导过程请考生掌握.

13.1.6 二元函数的二阶泰勒公式

设 $f(x, y)$ 在包含点 $P_0(x_0, y_0)$ 的区域 D 内有 3 阶连续的偏导数, 点 $P(x_0 + h, y_0 + k)$ 及线段 $\overline{P_0 P}$ 均在 D 内, 则有二元函数的拉格朗日余项的二阶泰勒公式:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k + \\ &\quad \frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f''_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f''_{yy}(x_0, y_0)] + \\ &\quad \frac{1}{3!}[h^3 f'''_{xxx}(\xi, \eta) + 3h^2 kf'''_{xxy}(\xi, \eta) + 3hk^2 f'''_{xyy}(\xi, \eta) + \\ &\quad k^3 f'''_{yyy}(\xi, \eta)], ((\xi, \eta) \in \text{开线段 } \overline{P_0 P} \subset D). \end{aligned}$$

【注】考研大纲上一直有这个考点,但是至今尚未考过,请考生掌握到二阶即可.

13.2 典型例题分析

13.2.1 向量代数与空间解析几何

【例 13.1】设向量 $\alpha = (3, -4, 2)$, 轴 u 的正向与三个坐标轴的正向构成相等的锐角, 则

- (1) 向量 α 在轴 u 上的投影为 _____;
- (2) 向量 α 与轴 u 的夹角 $(\hat{\alpha}, \hat{u}) =$ _____.

【分析与解答】 设 u 轴上的单位向量为 u^0 , 则 $u^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. 由题设知 $\cos^2\alpha = \cos^2\beta = \cos^2\gamma$, 且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, 故 $3\cos^2\alpha = 1$, 又因 α 为锐角, 故 $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, 则

$$u^0 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

$$(1) P_{\text{r}_u} \alpha = \alpha \cdot u^0 = (3, -4, 2) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}.$$

$$(2) \cos(\hat{\alpha}, \hat{u}) = \frac{P_{\text{r}_u} \alpha}{|\alpha|} = \frac{1/\sqrt{3}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{87}}, \text{ 故 } (\hat{\alpha}, \hat{u}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{87}}.$$

【例 13.2】 设 a, b, c 为非零向量, 则与 a 不垂直的向量是()

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| (A) $(a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ | (B) $b - \frac{a \cdot b}{ a ^2}a$ |
| (C) $a \times b$ | (D) $a + (a \times b) \times a$ |

【分析与解答】 因 $\boxed{\vec{a} \perp \vec{b}} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 故, 对于(A), $a \cdot [(a \cdot c)b - (a \cdot b)c] = 0$; 对于

(B), $a \cdot [b - \frac{a \cdot b}{|a|^2}a] = 0$; 对于(C), $a \cdot (a \times b) = 0$; 对于(D), $a \cdot [a + (a \times b) \times c] = |a|^2 \neq 0$. 所以答案选择(D).

【例 13.3】 与直线 $L_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ 及直线 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行, 且过原点

的平面 π 的方程为().

- (A) $x + y + z = 0$
- (B) $x - y + z = 0$
- (C) $x + y - z = 0$
- (D) $x - y + z + 2 = 0$

【分析与解答】 设 L_1 的方向向量为 s_1 , L_2 的方向向量为 s_2 , 平面 π 的法向量为 n , 则

$$n \perp s_1, n \perp s_2, \text{ 故 } n = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(i - j + k).$$

又因平面过原点,故答案选择(B).

【例 13.4】求直线 $L: \begin{cases} 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - 2y - z + 7 = 0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x - y + 3z + 8 = 0$ 的投影方程.

【分析与解答】先求出一平面 π_1 , 使它过直线 L 垂直于平面 π . 设直线 L 的方向向量为 s ,

平面 π_1 的法向量为 n_1 , 平面 π 的法向量为 n , 则 $n_1 \perp s, n_1 \perp n$, 而 $s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4i + 3j - 2k$, 则

$$n_1 = s \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7(i - 2j - k).$$

下面再求出 L 上的某点坐标. 为此, 在方程 $\begin{cases} 2y + 3z - 5 = 0 \\ x - 2y - z + 7 = 0 \end{cases}$ 中令 $x = 0$, 得 $y = 4$, $z = -1$, 则平面 π_1 过点 $(0, 4, -1)$. 于是其方程 π_1 为 $x - 0 - 2(y - 4) - (z + 1) = 0$, 即 $\pi_1: x - 2y - z + 7 = 0$. 因直线 L 在平面 π 上的投影既在平面 π 上, 又在平面 π_1 上, 因而其方程为

$$\begin{cases} x - y + 3z + 8 = 0 \\ x - 2y - z + 7 = 0 \end{cases}.$$

【例 13.5】点 $(1, 2, 3)$ 到直线 $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$ 的距离为 _____.

【分析与解答】记点 $M_0(1, 2, 3), M(0, 4, 3), s = (1, -3, -2)$, 则所求的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{MM_0} \times s|}{|s|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \sqrt{3/2} = \sqrt{6}/2.$$

【例 13.6】直线 $L: \frac{x-2}{x} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$ 与平面 $\pi: x - y + 2z + 4 = 0$ 的夹角为().

- (A) π (B) $\pi/3$ (C) $\pi/6$ (D) $\pi/2$

【分析与解答】由题设知直线 L 的方向向量为 $s = (2, 1, 1)$, 平面 π 的法向量为 $n = (1, -1, 2)$. 设直线 L 与平面 π 的夹角为 φ , 则 $\sin\varphi = \frac{|s \cdot n|}{|s| |n|} = \frac{1}{2}$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, (C)入选.

【例 13.7】曲线 $L: \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{5} = 1 & (1) \\ x - 2z + 3 = 0 & (2) \end{cases}$ 在平面 xOy 上的投影柱面方程是().

- (A) $x^2 + 20y^2 - 24x - 116 = 0$ (B) $4y^2 + 4z^2 - 12z - 7 = 0$

$$(C) \begin{cases} x^2 + 20y^2 - 24x - 116 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 4y^2 + 4z^2 - 12z - 7 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

【分析与解答】解法一：投影柱面方程是一个关于 x, y 的二元方程, 仅(A)入选. 事实上, (B)中方程中含 z 不可能是 L 在平面 xOy 上的投影的柱面方程, 而(C), (D)中方程表示曲线.

解法二：由方程(2)得 $z = (x+3)/2$, 代入方程(1)得到 $x^2 + 20y^2 - 24x - 116 = 0$, 此即为 L 在平面 xOy 上的投影柱面方程.

【注】在空间解析几何中 $F(x, y) = 0$ (二元方程) 表示的是以 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 为准

线、母线平行于 z 轴的柱面方程. 而 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 表示的是柱面 $F(x, y) = 0$ 与平面 xOy 的交线, 要注意区分.

【例 13.8】求直线 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$ 绕直线 $L_1: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ 旋转一周所产生的曲面方程.

【分析与解答】设点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为直线 L 上一点, 当直线 L 绕 L_1 旋转时, 点 M_0 旋转到点 $M(x, y, z)$, 此时有

$$\begin{cases} z = z_0, \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2. \end{cases} \quad (1)$$

又因 $\frac{x_0-3}{2} = \frac{y_0-1}{3} = z_0+1$, 即 $\begin{cases} x_0 = 2z_0 + 5, \\ y_0 = 3z_0 + 4, \end{cases}$ 由此式得到

$$\begin{cases} (x_0-2)^2 = (2z_0+3)^2 \\ (y_0-3)^2 = (3z_0+1)^2 \end{cases} \quad (2)$$

将式(2)代入式(1), 得到

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (2z+3)^2 + (3z+1)^2, \text{ 即}$$

$$x^2 + y^2 - 13z^2 - 4x - 6y - 18z + 3 = 0.$$

【例 13.9】设曲线 L 是抛物柱面 $x = 2y^2$ 与平面 $x+z=1$ 的交线,

(1) 求曲线 L 在各个坐标平面上的投影曲线;

(2) 求曲线 L 分别绕各个坐标轴旋转一周的旋转曲面方程.

【分析与解答】(1) 因抛物柱面 $x = 2y^2$ 的母线平行于 Oz 轴, 故 $x = 2y^2$ 就是该交线 L 关于 Oxy 坐标平面的投影柱面, 因此, 交线 L 在 Oxy 平面上的投影是一条抛物线 $\begin{cases} x = 2y^2 \\ z = 0 \end{cases}$.

平面 $x+z=1$ 可以看成母线平行于 Oy 轴的柱面, 故 $x+z=1$ 就是该交线 L 关于 Oxz 坐标平面的投影柱面, 因此, 交线 L 在 Oxz 平面上的投影是一条射线 $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases} (x>0)$.

从方程 $x = 2y^2$ 与 $x + z = 1$ 中消去变量 x , 得 $2y^2 + z = 1$, 它就是该交线 L 关于 Oyz 平面的投影柱面, 因此, 交线 L 在 Oyz 平面上的投影是一条抛物线 $\begin{cases} 2y^2 + z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.

(2) 因曲线 $L: \begin{cases} x = 2y^2 \\ x + z = 1 \end{cases}$ 的以 x 为参数的参数方程为 $L: \begin{cases} x = x \\ y = \sqrt{\frac{x}{2}}, x \geq 0, \\ z = 1 - x \end{cases}$

则曲线 L 绕 Ox 轴旋转一周的旋转曲面方程为 $y^2 + z^2 = \frac{1}{2}x + (1-x)^2$.

因曲线 L 的以 y 为参数的参数方程为 $L: \begin{cases} x = 2y^2 \\ y = y, -\infty < y < +\infty, \\ z = 1 - 2y^2 \end{cases}$

则曲线 L 绕 Oy 轴旋转一周的旋转曲面方程为 $x^2 + z^2 = 4y^4 + (1-2y^2)^2$.

因曲线 L 的以 z 为参数的参数方程为 $L: \begin{cases} x = 1-z \\ y = \sqrt{\frac{1}{2}(1-z)}, z \leq 1, \\ z = z \end{cases}$

则曲线 L 绕 Oz 轴旋转一周的旋转曲面方程为 $x^2 + y^2 = (1-z)^2 + \frac{1}{2}(1-z)$.

13.2.2 多元函数微分学的几何应用

【例 13.10】曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) 上任意一点处的切平面在三个坐标轴上的截距之和为().

- (A) a (B) \sqrt{a} (C) 0 (D) $2\sqrt{a}$

【分析与解答】 仅(A)入选. 令 $F(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \sqrt{a}$, 则

$$F'_x = 1/(2\sqrt{x}), F'_y = 1/(2\sqrt{y}), F'_z = 1/(2\sqrt{z}).$$

曲面上任意一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0,$$

$$\text{即 } \frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0}} + \frac{y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{z_0}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = \sqrt{a},$$

$$\text{也即 } \frac{x}{\sqrt{ax_0}} + \frac{y}{\sqrt{ay_0}} + \frac{z}{\sqrt{az_0}} = 1,$$

故三个坐标轴的截距之和为

$$\sqrt{ax_0} + \sqrt{ay_0} + \sqrt{az_0} = \sqrt{a}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a.$$

【例 13.11】求空间曲线 $\Gamma: x = \int_0^t e^u \cos u du, y = 2 \sin t + \cos t, z = 1 + e^{3t}$ 在 $t = 0$ 处

的切线方程和法平面方程.

【分析与解答】当 $t=0$ 时, $x=0, y=1, z=2, x'=e^t \cos t, y'=2 \cos t - \sin t, z'=3e^{3t}$, 则, $x'(0)=1, y'(0)=2, z'(0)=3$, 于是,

$$\text{切线方程为: } \frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3},$$

法平面方程为: $x+2(y-1)+3(z-2)=0$, 即 $x+2y+3z-8=0$.

【例 13.12】设有曲面 $S: 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $\Pi: 2x + 2y + z + 5 = 0$, 试求

(1)曲面 S 上的点及其上的切平面与法线方程,使该切平面与平面 Π 平行;

(2)曲面 S 与平面 Π 的最短距离.

【分析与解答】(1)在曲面 S 上任取一点 $P(\xi, \eta, \zeta)$, 记 $F(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4$,

则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x, \frac{\partial F}{\partial y} = 8y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

于是,曲面 S 在点 P 处的切平面为

$$4\xi(x-\xi) + 8\eta(y-\eta) + 2\zeta(z-\zeta) = 0, \text{或 } 2\xi x + 4\eta y + \zeta z - 4 = 0.$$

因该切平面与平面 Π 平行,即其法向量 $n_1 = 2\xi i + 4\eta j + \zeta k$ 与 $n = 2i + 2j + k$,

$$\frac{2\xi}{2} = \frac{4\eta}{2} = \frac{\zeta}{1}, \text{或 } \xi = \xi, \eta = \frac{1}{2}\xi, \zeta = \xi$$

把它们代入曲面 S 的方程得 $\xi^2 = 1, \xi = \pm 1$, 于是,所求的点为 $P_1(1, \frac{1}{2}, 1)$ 与 $P_2(-1, -\frac{1}{2}, -1)$,

且它们所对应的切平面方程分别为 $2x + 2y + z - 4 = 0$ 与 $2x + 2y + z + 4 = 0$,

它们所对应的法线方程分别为 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z-1}{1}$ 与 $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+\frac{1}{2}}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

(2)曲面 S 上点 (x, y, z) 到平面 Π 的距离 $d = \frac{1}{3}|2x + 2y + z + 5|$, 现欲求曲面 S 与

平面 Π 的最短距离,它等价于求函数 $f(x, y, z) = (2x + 2y + z + 5)^2$ 在条件 $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ 约束下的最小值的条件极值问题.

构造辅助函数 $F(x, y, z, \lambda) = (2x + 2y + z + 5)^2 + \lambda(2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)$, 令

$$\begin{cases} F'_x = 4(2x + 2y + z + 5) + 4\lambda x = 0 \\ F'_y = 4(2x + 2y + z + 5) + 8\lambda y = 0 \\ F'_z = 2(2x + 2y + z + 5) + 2\lambda z = 0 \\ F'_{\lambda} = 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

解得其最小值点为 $P_2(-1, -\frac{1}{2}, -1)$, 最大值点为 $P_1(1, \frac{1}{2}, 1)$, 故所求的最短距离为 $\frac{1}{3}$.

13.2.3 方向导数与梯度

【例 13.13】函数 $u = e^z - z + xy$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处沿曲面 $e^z - z + xy = 3$ 的法线方向的方向导数为 _____.

【分析与解答】曲面 $e^z - z + xy = 3$ 的法线方向为

$$\mathbf{n} = \pm (y, x, e^z - 1) \Big|_{(2, 1, 0)} = \pm (1, 2, 0), \quad \mathbf{n}^0 = \pm (1, 2, 0) / \sqrt{5},$$

故 $\cos\alpha = \pm 1/\sqrt{5}$, $\cos\beta = \pm 2/\sqrt{5}$, $\cos\gamma = 0$. 又

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(2, 1, 0)} = y \Big|_{(2, 1, 0)} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(2, 1, 0)} = x \Big|_{(2, 1, 0)} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(2, 1, 0)} = (e^z - 1) \Big|_{(2, 1, 0)} = 0,$$

故方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\beta \frac{\partial u}{\partial y} + \cos\gamma \frac{\partial u}{\partial z} = \pm [(1/\sqrt{5}) \times 1 + 2 \times (2 \times \sqrt{5}) + 0] = \pm \sqrt{5}.$$

【例 13.14】设 \vec{n} 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数 $u = \frac{1}{z} (6x^2 + 8y^2)^{\frac{1}{2}}$ 在此处沿方向 \vec{n} 的方向导数.

【分析与解答】令 $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6$,

$$F'_x \Big|_P = 4x \Big|_P = 4, \quad F'_y \Big|_P = 6y \Big|_P = 6, \quad F'_z \Big|_P = 2z \Big|_P = 2,$$

$$\text{故 } \vec{n} = \{F'_x, F'_y, F'_z\} = \{4, 6, 2\}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{4^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{14},$$

$$\text{方向余弦为 } \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_P = \frac{6x}{z \sqrt{6x^2 + 8y^2}} \Big|_P = \frac{6}{\sqrt{14}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P = \frac{8y}{z \sqrt{6x^2 + 8y^2}} \Big|_P = \frac{8}{\sqrt{14}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_P = -\frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z^2} \Big|_P = -\sqrt{14}.$$

$$\text{故 } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_P = (\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma) \Big|_P = \frac{11}{7}.$$

【例 13.15】设函数 $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$, 则该函数在点 $A(2, 3)$ 处增长最快的方向 l 与 x 轴正向的夹角 $\alpha =$ _____.

【分析与解答】因所谓函数增长最快的方向就是梯度的方向, 故应先求出梯度的方向:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_A, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_A \right) = (4x \Big|_{(2, 3)}, (2y - 1) \Big|_{(2, 3)}) = (8, 5).$$

再求出其单位向量, 即方向余弦

$$\left(\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{8^2 + 5^2}} = \frac{8}{\sqrt{89}}, \sin\alpha = \cos\beta \frac{5}{\sqrt{89}} \right),$$

则 l 与 x 轴正向的夹角 α 满足 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{8}$, 即 $\alpha = \arctan\frac{5}{8}$.

【例 13.16】设在平面区域 D 上数量场 $u(x, y) = 50 - x^2 - 4y^2$, 试问在点 $P_0(1, -2)$ $\in D$ 处沿什么方向时 $u(x, y)$ 升高最快, 并求一条路径, 使从点 $P_0(1, -2)$ 处出发沿这条路径 $u(x, y)$ 升高最快.

【分析与解答】因为方向导数沿其梯度方向取得最大值, 则考虑

$$\mathbf{grad}u|_{(1,-2)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}\right)|_{(1,-2)} = (-2x\mathbf{i} - 8y\mathbf{j})|_{(1,-2)} = -2\mathbf{i} + 16\mathbf{j},$$

故 $u(x, y)$ 在点 $P_0(1, -2)$ 处沿 $\mathbf{grad}u|_{(1,-2)} = -2\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$ 方向升高最快.

设所求的路径为 $y = y(x)$, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的切向量 $\vec{\tau} = (\mathrm{d}x)\mathbf{i} + (\mathrm{d}y)\mathbf{j}$, 由题意知, 它应与它的梯度方向 $\mathbf{grad}u = -2x\mathbf{i} - 8y\mathbf{j}$ 一致, 则有 $\frac{\mathrm{d}x}{-2x} = \frac{\mathrm{d}y}{-8y}$, $y(1) = -2$,

求解此微分方程初值问题得, 沿着 $y = -2x^4$ 时 $u(x, y)$ 升高最快.

13.2.4 二元函数的二阶泰勒公式

【例 13.17】在点 $A(1, 1, 1)$ 的邻域内根据泰勒公式展开函数 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

【分析与解答】 $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3z, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -3x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3y,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 6, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = -3,$$

其余三阶混合偏导均为 0, 所有四阶偏导数均为 0.

因此, $R_3(x, y, z) = 0$, 在点 $A(1, 1, 1)$ 处,

$$f(1, 1, 1) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 6, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = -3,$$

于是

$$f(x, y, z) = 3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1).$$

【例 13.18】写出二元函数 $f(x, y) = e^x \sin y$ 在原点 $O(0, 0)$ 处的二阶泰勒公式.

【分析与解答】 $f(x, y) = e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{3!}e^{\xi}(x^2 \sin \eta + 3x^2 y \cos \eta - 3xy^2 \sin \eta - y^3 \cos \eta)$,

其中, $\zeta = \theta x$, $\eta = \theta y$, $0 < \theta < 1$.

$$f(0,0) = 0, f'_x(0,0) = e^x \sin y|_{(0,0)} = 0, f'_y(0,0) = e^x \cos y|_{(0,0)} = 1.$$

$$f''_{xx}(0,0) = e^x \sin y|_{(0,0)} = 0, f''_{xy}(0,0) = e^x \cos y|_{(0,0)} = 1,$$

$$f''_{yy}(0,0) = -e^x \sin y|_{(0,0)} = 0, f'''_{xxx}(x,y) = e^x \sin y,$$

$$f'''_{xxy}(x,y) = e^x \cos y, f'''_{xyy}(x,y) = -e^x \sin y, f'''_{yyy}(x,y) = e^x \cos y.$$

第 14 讲 三重积分(仅数学一)

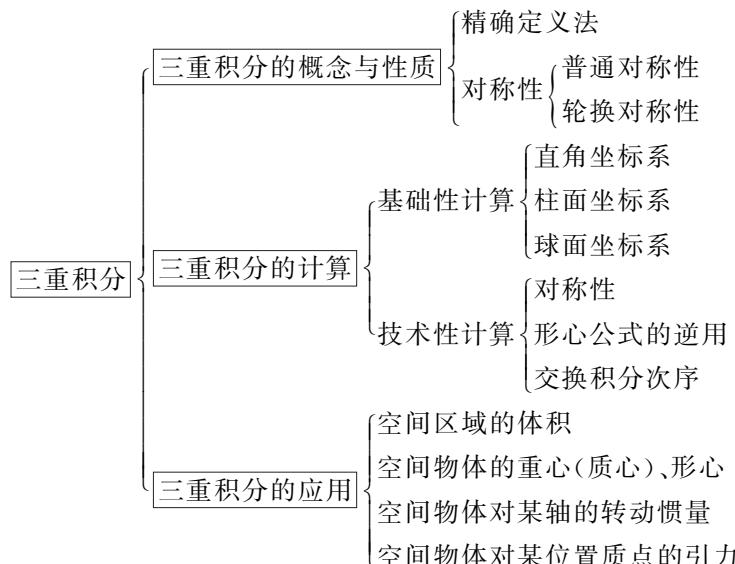
» 导语

本讲主要内容是三重积分的概念、计算与应用,仅是数学一的要求,其内容丰富,计算量大,是数学一的考试重点和难点。近些年主要以考查 4 分小题为主,但是区分度很高,难度不小,通过这一讲的扎实复习,可以显著提高我们的数学计算能力,希望数学一的考生重视这一讲内容的复习。

» 大纲要求

1. 三重积分的概念与性质.
2. 三重积分在直角坐标、柱面坐标、球面坐标系下的计算.
3. 用三重积分求一些几何量与物理量(空间区域的体积、空间物体的重心(质心)、形心、对某轴的转动惯量、对某位置质点的引力等).

» 知识体系



14.1 考试内容分析

14.1.1 三重积分的概念、性质与对称性

1. 三重积分的概念

设三元函数 $f(x, y, z)$ 定义在三维有界空间区域 Ω 上, 则三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

【注】 (1) 将 Ω 无限分割的 $\Delta v_i > 0$, λ 为所有 Δv_i 的直径的最大值, 强调该极限与对区域 Ω 的分割方式无关;

(2) 从几何上来说很抽象了, 是四维空间的图形体积, 无法画出图形; 但是其物理背景仍然可以被我们所理解, 就是以 $f(x, y, z)$ 为点密度的空间物体的质量:

$$M = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv.$$

(3) 要了解三重积分的存在性. 设空间有界闭区域 Ω 的边界是分片光滑曲面, 当 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 或者当 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上有界, 且在 Ω 上除了有限个点、有限条光滑曲线和有限块光滑曲面外都是连续的, 则它在 Ω 上可积, 也就是三重积分存在. 在考研数学中, 一般总假设 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 也就是三重积分总是存在的.

2. 三重积分的性质(以下总假设 Ω 为空间有界闭区域)

性质 1 求空间区域的体积 $\iiint_{\Omega} 1 dv = V$ 其中 V 为 Ω 的体积.

性质 2 可积函数必有界 当 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积时, 则其在 Ω 上必有界.

性质 3 积分的线性性质 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iiint_{\Omega} [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] dv = k_1 \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv + k_2 \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv.$$

性质 4 积分的可加性 当 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积时, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, 则

$$\iiint_{\Omega_1 + \Omega_2} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv.$$

性质 5 积分的保号性 当 $f(x, y, z), g(x, y, z)$ 在 Ω 上可积且在 Ω 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv,$$

特殊地有

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \right| \leq \iiint_{\Omega} |f(x, y, z)| dv.$$

性质 6 三重积分的估值定理 设 M, m 分别是 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的最大值和最小值, V 为 Ω 的体积, 则有

$$mV \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq MV.$$

性质 7 三重积分的中值定理 设 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, V 为 Ω 的体积, 则在 Ω 上至少存在一点 (ξ, η, ζ) , 使得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta)V.$$

3. 三重积分的普通对称性与轮换对称性

(1) 普通对称性

假设 Ω 关于 yOz 面对称, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv, & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0, & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases}$$

其中 Ω_1 是 Ω 在 yOz 面前面的部分.

关于其他坐标面对称的情况类似, 请大家自己独立作出.

(2) 轮换对称性

若把 x 与 y 对调后, Ω 不变, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(y, x, z) dv$$

这就是轮换对称性.

如, 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, 则 $\iiint_{\Omega} f(x) dv = \iiint_{\Omega} f(y) dv = \iiint_{\Omega} f(z) dv$, 可

以化简计算, 具体应用见后面的例子.

14.1.2 三重积分的计算

1. 基础性计算方法

(1) 直角坐标系下的计算法

在直角坐标系下, 按照积分次序的不同, 一般将三重积分的计算分为两种情况:

① 先一后二法(投影法)

先做关于某个变量(如 z)的定积分, 然后做关于另外两个变量(如 x, y)的二重积分, 具体说来, 如果先对 z 积分, 则要将 Ω 投影到 xOy 面上, 得到投影区域 D_{xy} , 过 D_{xy} 内任意一点 (x, y) 作平行于 z 轴的直线, 使之穿过 Ω , 先碰到 Ω 的记为 $z = z_1(x, y)$, 后离开 Ω 的记为 $z = z_2(x, y)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

②先二后一法(截面法)

先做关于某两个变量(如 x, y)的二重积分,然后做关于另一变量(如 z)的定积分,具体说来,如果先对 x, y 积分,则要将 Ω 投影到 z 轴得坐标 $z \in [e, f]$,然后对任给 $z \in [e, f]$,用 $z = h$ 的平面(平行于 xOy 平面)去截 Ω ,得到一个平面闭区域 D_z ,则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_e^f dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy.$$

【注】以下情况优先考虑先二后一法:(1)被积函数仅是 z 的函数,(2)用垂直于 z 的平面去截 Ω 所得 $D(z)$ 是圆域或其部分(比如旋转体).

(2)柱面坐标系下的计算法

事实上,柱面坐标系就是“直角坐标系+极坐标系”,是我们都学过且熟悉的知识.联系直角坐标系与柱坐标系的桥梁为:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

其中, $0 \leqslant r \leqslant +\infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, -\infty \leqslant z \leqslant +\infty$

于是,柱面坐标系中的体积元素: $dv = r dr d\theta dz$,且积分写为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

(3)球面坐标系下的计算法

球面坐标系采用 r, θ, φ 三个量来表示空间的一个点,对于点 $M(x, y, z)$,点 M 在坐标面 xOy 上的投影为 M' ,则,

定义: 1) $r = |OM|$;

2) θ 为 x 轴到射线 OM' 的转角;

3) φ 为向量 \overrightarrow{OM} 与 z 轴的夹角. 并规定三个变量的变化范围是 $0 \leqslant r \leqslant +\infty, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \text{且注意到,} \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

①当 $r =$ 常数时,表示以原点为球心,半径为 r 的球面;

②当 $\theta =$ 常数时,表示通过 z 轴的半平面;

③当 $\varphi =$ 常数时,表示以原点为顶点, z 轴为中心,半顶角为 φ 的锥面.

用这样的三组面去划分积分区域 Ω ,就得到 dv ,在极限状态下,它可以看作边长分别是 $dr, rd\varphi, r \sin \varphi d\theta$ 的小长方体,则 $dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

【注】(1) 何时用球面法?

① 被积函数中含 $\begin{cases} f(x^2 + y^2 + z^2) \\ f(x^2 + y^2) \end{cases}$, ② 积分区域为 $\begin{cases} \text{球或球的部分} \\ \text{锥或锥的部分} \end{cases}$.

(2) 怎样定限?

① 从原点出发一条半射线 ($0 \rightarrow +\infty$), $\begin{cases} \text{先碰到 } \Omega, \text{ 记 } r_1(\varphi, \theta) \\ \text{后离开 } \Omega, \text{ 记 } r_2(\varphi, \theta) \end{cases}$.

② 顶点在原点, 以 z 轴为对称轴的圆锥面半顶角 ($0 \rightarrow \pi$) $\begin{cases} \text{先碰到 } \Omega, \text{ 记 } \varphi_1(\theta) \\ \text{后离开 } \Omega, \text{ 记 } \varphi_2(\theta) \end{cases}$.

③ 过 z 轴的半平面 ($0 \rightarrow 2\pi$) $\begin{cases} \text{先碰到 } \Omega, \text{ 记 } \theta_1 \\ \text{后离开 } \Omega, \text{ 记 } \theta_2 \end{cases}$.

$$\text{则 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr.$$

2. 技术性计算方法

技术性计算方法主要是指用好以下两个技术性工具:

(1) 对称性(包括普通对称性和轮换对称性).

(2) 形心公式的逆用(由 $\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\iiint_{\Omega} dv} \Rightarrow \iiint_{\Omega} x dv = \bar{x} \cdot V$, 其中 V 为 Ω 的体积).

【注】 因为被积函数并不仅仅定义在边界上, 还有其内部, 所以边界方程不能带入被积函数.

14.1.3 三重积分的应用

1. 几何量

若 Ω 是所占的空间区域, 则其体积为 $V = \iiint_{\Omega} dv$.

2. 重心(质心)与形心

对于空间物体, 面密度为 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域, $\rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连

续,则计算重心 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 的公式为

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dv}, \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dv}, \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dv}$$

3. 转动惯量

对于空间物体,面密度为 $\rho(x,y,z)$, Ω 是物体所占的空间区域, $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,则该物体对于 x 轴, y 轴, z 轴和原点 O 的转动惯量 I_x, I_y, I_z 和 I_o 分别为

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dv \\ I_y &= \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2)\rho(x,y,z)dv \\ I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dv \\ I_o &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dv \end{aligned}$$

4. 引力

对于空间物体,面密度为 $\rho(x,y,z)$, Ω 是物体所占的空间区域, $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,则该物体对点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的质量为 m 的质点的引力 $\{F_x, F_y, F_z\}$ 为

$$\begin{aligned} F_x &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dv \\ F_y &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dv \\ F_z &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dv \end{aligned}$$

14.2 典型例题分析

本讲题目主要是四个大的方面:第一,三重积分的概念中主要考精确定义法和对称性问题. 第二,计算主要考三种坐标系(直角坐标、柱面坐标、球面坐标)下的计算,其中请同学们注意三重积分的交换积分次序,那比二重积分交换要复杂,是考试的难点. 第三,应用是指用三重积分计算一些几何量与物理量(包括空间区域的体积、空间物体的重心(质心)、形心、对某轴的转动惯量、对某位置质点的引力等),当然,还有三重积分的估值定理的使用也是一种出题角度. 第四,是一些涉及三重积分计算的综合题.

14.2.1 三重积分的精确定义法和对称性问题

【例 14.1】计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{8k}{(n+i)(n^2+j^2)n\pi}$.

【分析与解答】本题考查三重积分的精确定义,是 2010 年出现在考研试卷上的新题型,类比于定积分和二重积分,我们首先给出三重积分的精确定义:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i, c + \frac{d-c}{n} j, e + \frac{f-e}{n} k\right) \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n} \frac{f-e}{n}.$$

这里的 Ω 不是一般的空间有界闭区域,而是一个“长方体区域”.

于是,给出“凑三重积分定义”的步骤如下:

①先提出 $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$;

②再凑出 $\frac{i}{n}$, $\frac{j}{n}$ 与 $\frac{k}{n}$;

③由于 $\frac{i}{n} = 0 + \frac{1-0}{n} i$, 故 $\frac{i}{n}$ 可以读作“0 到 1 上的 x ”,

同理, $\frac{j}{n} = 0 + \frac{1-0}{n} j$, 故 $\frac{j}{n}$ 可以读作“0 到 1 上的 y ”,

$\frac{k}{n} = 0 + \frac{1-0}{n} k$, 故 $\frac{k}{n}$ 可以读作“0 到 1 上的 z ”,

且 $\frac{1}{n} = \frac{1-0}{n}$, 既可以读作“0 到 1 上的 dx ”, 也可以读作“0 到 1 上的 dy ”, “0 到 1 上的

dz ”, 于是,“凑定义”成功!

对于本题,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{8k}{(n+i)(n^2+j^2)n\pi} &= \frac{8}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)} \frac{k}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \\ &= \frac{8}{\pi} \iiint_{\Omega} \frac{z}{(1+x)(1+y^2)} dx dy dz = \frac{8}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)} dx \int_0^1 \frac{1}{(1+y^2)} dy \int_0^1 z dz = \ln 2. \end{aligned}$$

【例 14.2】设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$, 求 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$.

【分析与解答】由轮换对称性可知, $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\varphi dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4\pi}{15}. \end{aligned}$$

14.2.2 三重积分在三种坐标系(直角坐标、柱面坐标、球面坐标)下的计算

【例 14.3】将 $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$ 化为柱面坐标和球面坐标下的累次积分.

【分析与解答】 在三重积分的计算中, 其积分区域 Ω 并不会太复杂, 所以大家要能够画出积分区域 Ω , 这里给出一个详细的思路. 首先, Ω 向 xOy 面的投影区域是圆域 $D: -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, 或 $D: x^2 + y^2 \leq 1$; 而 z 由 $z = 0$ 到旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$, 因此, Ω 是由 $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ 和 $z = 0$ 所围成(请自己画出该图形). 于是可得,

$$\text{在柱面坐标系中, } I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{r^2} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz.$$

$$\text{在球面坐标系中, } I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_{\cot \varphi \csc \varphi}^{\csc \varphi} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 dr.$$

【例 14.4】记 $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,

$$\text{设 } f(x, y, z) = \begin{cases} 0, & z > \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2}, & 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & z < 0 \end{cases}, \text{求三重积分 } I = \iiint_V f(x, y, z) dv.$$

【分析与解答】 容易求得交线 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$ 在 Oxy 平面上的投影区域为

$D_{xy} = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, z = 0\}$, 由题设 $f(x, y, z)$ 的表达式知, 应将 I 的积分区域 V 分解为

$$V_1 = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} < z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\},$$

$$V_2 = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\} \cup \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$\frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$V_3 = \{(x, y, z) | -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq z < 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

在柱面坐标系中计算得

$$\begin{aligned} \iiint_{V_3} f(x, y, z) dv &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}} dx dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dz + \iint_{\frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dr \int_0^r r dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r dz \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^3 dr + 2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

其中,令 $r = \sin t$,得

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r^2 \sqrt{1-r^2} dr = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 dt = \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \left(\frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin 4t \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16}.$$

在球面坐标系中计算得

$$\begin{aligned} \iiint_{V_3} f(x, y, z) dv &= \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} dx dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^0 \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \rho^2 \sin \varphi d\rho = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

注意到 $f(x, y, z)$ 在立体 V_1 内为零,则由三重积分的分块可加性得

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dv + \iiint_{V_3} f(x, y, z) dv = \frac{\pi^2}{16} + \frac{5\pi}{8}.$$

【例 14.5】计算 $I = \iiint_{\Omega} z^2 dv$, Ω 为 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$ 的公共部分.

【分析与解答】由于被积函数不含 x, y , 使用截面法方便, $z = \frac{R}{2}$ 为相交平面,

分 Ω 为上下两部分 Ω_1, Ω_2 .

$$\Omega_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2 \\ \frac{R}{2} \leqslant z \leqslant R \end{cases}, \quad \Omega_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz \\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{R}{2} \end{cases},$$

截面 $D_1(z) : x^2 + y^2 \leqslant R^2 - z^2$, $r = \sqrt{R^2 - z^2}$,

截面 $D_2(z) : x^2 + y^2 \leqslant 2Rz - z^2$, $r = \sqrt{2Rz - z^2}$,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega_1} z^2 dv + \iiint_{\Omega_2} z^2 dv = \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 dz \iint_{D_1(z)} d\sigma + \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 dz \iint_{D_2(z)} d\sigma \\ &= \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 \pi(R^2 - z^2) dz + \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \pi(2Rz - z^2) dz = \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

【例 14.6】计算三重积分 $\iiint_{\Omega} |x^2 + y^2 + z^2 - 1| dv$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2\}$.

【分析与解答】将 Ω 分解成 $\Omega_1 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ 和 $\Omega_2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2$, 使绝对值中函数每个子区域内不变号,故

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} |x^2 + y^2 + z^2 - 1| dv \\ &= \iiint_{\Omega_1} (1 - x^2 - y^2 - z^2) dv + \iiint_{\Omega_2} (x^2 + y^2 + z^2 - 1) dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) r^2 \sin \varphi dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} (r^2 - 1) r^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{8}{15}\pi + \frac{8}{15}(\sqrt{2} - 1)\pi = \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi. \end{aligned}$$

【例 14.7】设常数 a, b, c, A, B, C 均为正, $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} \leqslant 1 \right\}$, 计算

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 dv.$$

【分析与解答】 $I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 dv = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \frac{xy}{ab} + 2 \frac{yz}{bc} + 2 \frac{zx}{ca} \right) dv$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dv.$$

以计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dv$ 为例, 将 Ω 投影到 z 轴得区间 $[-C, C]$, 并记

$$D_z = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \leqslant 1 - \frac{z^2}{C^2} \right\},$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dv &= \int_{-C}^C z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{-C}^C z^2 \pi A \sqrt{1 - \frac{z^2}{C^2}} B \sqrt{1 - \frac{z^2}{C^2}} dz \\ &= \pi AB \int_{-C}^C \left(1 - \frac{z^2}{C^2}\right) z^2 dz = \frac{4}{15} \pi ABC^3. \end{aligned}$$

所以, $\iiint_{\Omega} \frac{z^2}{c^2} dv = \frac{4}{15} \pi AB \frac{C^3}{c^2} = \frac{4}{15} \pi ABC \left(\frac{C^2}{c^2}\right)$.

类似地可得 $\iiint_{\Omega} \frac{y^2}{b^2} dv$ 与 $\iiint_{\Omega} \frac{x^2}{a^2} dv$, 所以 $I = \frac{4}{15} \pi ABC \left(\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} + \frac{C^2}{c^2}\right)$.

【例 14.8】计算 $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y \frac{\sin z}{(1-z)^2} dz$.

【分析与解答】 (1) 有些同学画立体图形有困难, 故还原成 $\iiint_{\Omega} \frac{\sin z}{(1-z)^2} dv$ 较麻烦;

(2) 按照题目所给顺序需要先积 z , 但我们知道 $\int \frac{\sin z}{(1-z)^2} dz$ 不可求积;

(3) 只好交换积分顺序.

先交换 y, z 的积分次序(里面两层的积分次序), 将 I 理解成由三重积分先对 y, z 作二重积分, 再对 x 作定积分得到, 二重积分的积分区域为 $D_{yz}: 0 \leqslant y \leqslant x$ (x 视为 $[0, 1]$ 上的某个常数), $0 \leqslant z \leqslant y$, 将 D_{yz} 表示为 $D_{yz}: 0 \leqslant z \leqslant x, z \leqslant y \leqslant x$, 于是

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x \frac{\sin z}{(1-z)^2} dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{\sin z}{(1-z)^2} (x-z) dz.$$

要计算这个二重积分, 仍需要交换积分次序, 换序后得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dz \int_z^1 \frac{\sin z}{(1-z)^2} (x-z) dx = \int_0^1 \frac{\sin z}{(1-z)^2} \left[\frac{1}{2} (x-z)^2 \right] \Big|_{x=z}^{x=1} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin z dz = \frac{1}{2} (1 - \cos 1). \end{aligned}$$

【注】同理,请计算 $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z} dz$.

提示:交换积分顺序

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_0^{z-x} \frac{\sin z}{z} dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_0^{z-x} \frac{\sin z}{z} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\sin z}{z} \cdot \left[-\frac{1}{2}(z-x)^2 \right] \Big|_{x=0}^z dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z \sin z dz = \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1). \end{aligned}$$

其中:①处是交换 y, z 的次序, x 当做常数;②处是交换 x, z 的次序.

14.2.3 三重积分的应用

首先先把三重积分的估值定理解决. 这种问题表面上是三重积分的计算题, 实质上是多元函数在闭区域上的最值问题, 其理论依据是三重积分的估值定理.

【例 14.9】设 Ω 为单位球域 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, 证明 $\frac{3}{2}\pi < \iiint_{\Omega} \sqrt[3]{x+2y-2z+5} dv < 3\pi$.

【分析与解答】本题等价于求 $\sqrt[3]{x+2y-2z+5}$ 在 Ω 上的最值, 也就是等价于求 $f(x, y, z) = x + 2y - 2z + 5$ 在 Ω 上的最值.

首先发现, $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \neq 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \neq 0, \frac{\partial f}{\partial z} = -2 \neq 0$, 故 $f(x, y, z)$ 在 Ω 内无驻点.

于是 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的最值一定在 Ω 的边界上取得.

问题转化为求 $f(x, y, z)$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ 下的最值.

令 $F(x, y, z, \lambda) = x + 2y - 2z + 5 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, 则

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = -2 + 2\lambda z = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

解该方程组, 由前三个式子, 得 $y = 2x, z = -2x$.

代入第四个式子 \Rightarrow 驻点为 $P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), P_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 则 $f(P_1) = 8$,

$f(P_2) = 2$.

$\Rightarrow f(x, y, z)$ 在 Ω 上的最大值为 $f(P_1) = 8$, 最小值为 $f(P_2) = 2$.

由于 $\sqrt[3]{f}$ 与 f 有相同的最值点 $\Rightarrow \sqrt[3]{f}$ 的最大值为 $\sqrt[3]{8} = 2$, 最小值为 $\sqrt[3]{2}$.

于是, $\frac{3\pi}{2} < \sqrt[3]{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \iiint_{\Omega} \sqrt[3]{2} dv < \iiint_{\Omega} \sqrt[3]{f} dv < \iiint_{\Omega} 2 dv = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} < 3\pi$.

下面看几个求解几何量和物理量的例子, 都很重要.

【例 14.10】设球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$ ($a > 0$) 中任一点的密度与该点到坐标原点的距离成正比,求此球体的重心.

【分析与解答】由于所给球体的质量分布关于 z 轴对称,故其重心位于 z 轴上,而密度是 $\rho = k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

其中 k 是比例常数,因此可得

$$x_G = y_G = 0,$$

$$z_G = \frac{\iiint_{\Omega} kz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz}{\iiint_{\Omega} k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz}.$$

采用球坐标计算这两个三重积分,将变换式

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta,$$

代入球体方程,得

$$0 \leqslant r \leqslant 2a \cos \theta,$$

并且 φ, θ 的变化范围是

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

于是可得

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} kr \cdot r^2 \sin \theta dr \\ &= 8k\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{8}{5}k\pi a^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} kz \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} kr^2 \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta dr \\ &= \frac{64}{5}k\pi a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{64}{35}k\pi a^5. \end{aligned}$$

故所给球体的重心坐标为

$$x_G = y_G = 0, z_G = \frac{\frac{64}{35}k\pi a^5}{\frac{8}{5}k\pi a^4} = \frac{8}{7}a.$$

【例 14.11】设半球体 $\Omega_1 : 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 密度为 1, 现在其底面接上一个同质柱体 $\Omega_2 : -h \leqslant z < 0, x^2 + y^2 \leqslant 1$ ($h > 0$), 试确定 h , 使整个物体 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ 的质心恰好在半球的球心处.

【分析与解答】设整个物体 Ω 的质心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性得 $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$, 而 $\bar{z} =$

$$\frac{\iiint_{\Omega} \rho z \, dv}{\iiint_{\Omega} \rho dv}, \text{根据题设要求, 要求 } \bar{z} = 0, \text{ 即 } \iiint_{\Omega} \rho z \, dv = \iiint_{\Omega} z \, dv = 0 \text{ 即可.}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z \, dv &= \int_{-h}^0 dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} z \, dx \, dy + \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1-z^2} z \, dx \, dy \\ &= \int_{-h}^0 zdz \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} 1 \, dx \, dy + \int_0^1 zdz \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1-z^2} 1 \cdot dx \, dy = \pi \int_{-h}^0 z \, dz + \pi \int_0^1 z(1-z^2) \, dz \\ &= -\frac{\pi}{2} h^2 + \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} h^2 + \frac{1}{4} \pi, \end{aligned}$$

由 $\iiint_{\Omega} z \, dv = 0$, 得 $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 于是, 当 $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 整个物体的质心恰好在半球的球心处.

【例 14.12】求底半径为 R , 高为 l , 密度为 ρ 的均匀圆柱体对其轴线的转动惯量.

【分析与解答】取底心为原点, 轴线为 z 轴, 于是所给柱体由圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及平面 $z = 0, z = l$ 围成, 故它对 z 轴的转动惯量为

$$I_z = \iiint_{\Omega} \rho(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 \, dr \int_0^l dz = \frac{\pi}{2} \rho R^4.$$

14.2.4 涉及三重积分的综合题

【例 14.13】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 试证:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x) f(y) f(z) \, dz = \frac{1}{3!} \left(\int_0^1 f(t) \, dt \right)^3.$$

【分析与解答】因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 所以在 $[0, 1]$ 上存在原函数.

设 $F'(t) = f(t)$ ($t \in [0, 1]$), 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x) f(y) f(z) \, dz &= \int_0^1 f(x) \, dx \int_0^x f(y) [F(y) - F(0)] \, dy \\ &= \int_0^1 f(x) \, dx \int_0^x (F(y) - F(0)) \, d(F(y) - F(0)) \\ &= \int_0^1 f(x) \frac{(F(y) - F(0))^2}{2} \Big|_{y=0}^x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) (F(x) - F(0))^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (F(x) - F(0))^2 \, d(F(x) - F(0)) \\ &= \frac{1}{3!} (F(x) - F(0))^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3!} (F(1) - F(0))^3 \\ &= \frac{1}{3!} \left(\int_0^1 f(t) \, dt \right)^3. \end{aligned}$$

第 15 讲 第一型曲线积分(仅数学一)

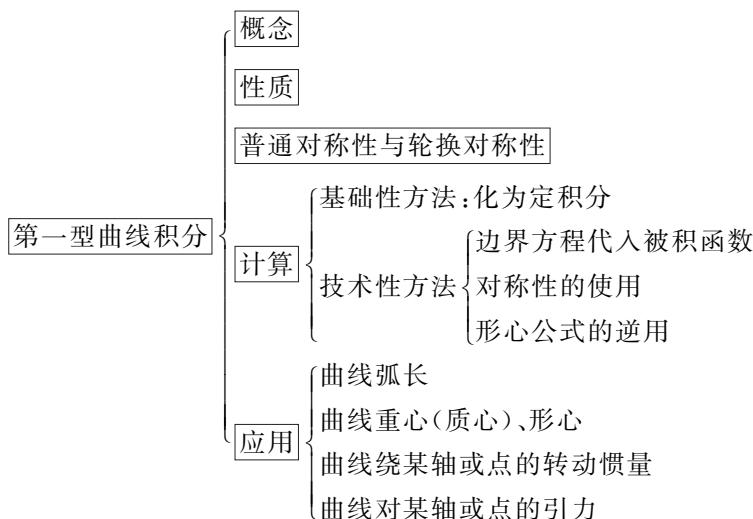
» 导语

本讲主要内容是第一型曲线积分的概念、性质、计算与应用，仅是数学一的要求，是数学一的考试难点。考题主要以小题(4分)为主，重点在于计算和应用。

» 大纲要求

1. 第一型曲线积分的概念与性质.
2. 第一型曲线积分的计算.
3. 用第一型曲线积分求一些几何量与物理量(求平面或者空间曲线的弧长、重心(质心)、形心、转动惯量和引力等).

» 知识体系



15.1 考试内容分析

15.1.1 第一型曲线积分的概念、性质与对称性

1. 第一型曲线积分的概念

设数量函数 $f(x, y, z)$ 定义在空间光滑曲线 Γ 上，则 $f(x, y, z)$ 沿曲线 Γ 的第一型曲线积分为

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i.$$

【注】(1) 将 Γ 无限分割的 $\Delta l_i > 0$, $\lambda = \max\{\Delta l_i\}$, 强调该极限与对曲线 Γ 的分割方式无关.

(2) 其物理背景是以 $f(x, y, z)$ 为线密度的空间物质曲线的质量:

$$M = \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds.$$

(3) 定积分定义在“直线段”上, 而第一型曲线积分是定义在“曲线段”上, 第一型曲线积分是定积分的推广, 这样就不难理解为什么后面要把第一型曲线积分化为定积分计算了.

(4) 了解两个可积条件即可: 设空间曲线 Γ 是分段光滑曲线, 当 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上连续, 或者当 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上有界, 且在 Γ 上除了有限个点外都是连续的, 则它在 Γ 上的第一型曲线积分存在. 在考研数学中, 一般总假设 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上连续, 也就是第一型曲线积分总是存在的.

2. 第一型曲线积分的性质(以下总假设 Γ 为空间有限长分段光滑曲线)

性质 1 求空间曲线的长度(弧长) $\int_{\Gamma} ds = l_{\Gamma}$ 其中 l_{Γ} 为 Γ 的长度.

性质 2 可积函数必有界 当 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上可积时, 则其在 Γ 上必有界.

性质 3 积分的线性性质 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\int_{\Gamma} [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] ds = k_1 \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds + k_2 \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds.$$

性质 4 积分的可加性 当 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上可积时, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, 则

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(x, y, z) ds = \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds + \int_{\Gamma_2} f(x, y, z) ds.$$

性质 5 积分的保号性 当 $f(x, y, z), g(x, y, z)$ 在 Γ 上可积且在 Γ 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, 则有

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \leq \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds.$$

特殊地有

$$\left| \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \right| \leq \int_{\Gamma} |f(x, y, z)| ds.$$

性质 6 估值定理 设 M, m 分别是 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上的最大值和最小值, l_{Γ} 为 Γ 的长度, 则有

$$ml_{\Gamma} \leq \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \leq Ml_{\Gamma}.$$

性质 7 中值定理 设 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上连续, l_{Γ} 为 Γ 的长度, 则在 Γ 上至少存在一点 (ξ, η, ζ) 使得

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = f(\xi, \eta, \zeta) l_{\Gamma} .$$

3. 普通对称性与轮换对称性

(1) 普通对称性

假设 Γ 关于 yOz 面对称, 则

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds, & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0, & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases} .$$

其中 Γ_1 是 Ω 在 yOz 面前面的部分.

关于其他坐标面对称的情况以及平面的情况都与此类似.

(2) 轮换对称性

若把 x 与 y 对调后, Γ 不变, 则

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\Gamma} f(y, x, z) ds ,$$

这就是轮换对称性.

15.1.2 第一型曲线积分的计算

1. 基础性计算方法——化为定积分

(1) 对于平面情况

① 若平面曲线 L 由参数式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 给出, 则

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt ,$$

$$\text{且 } \int_L f(x, y) ds = \int_a^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt .$$

② 若平面曲线 L 由 $\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases}$ ($a \leq x \leq b$) 给出, 则 $ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$,

$$\text{且 } \int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx .$$

③ 若平面曲线 L 由 $L : r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) 给出, 则 $ds = \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$,

$$\text{且 } \int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta .$$

(2) 对于空间情况,

若空间曲线 Γ 由参数式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, ($\alpha \leq t \leq \beta$) 给出, 则

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt ,$$

且

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

2. 技术性计算方法

(1) 边界方程带入被积函数(由于被积函数就定义在边界方程上,故应将边界方程的表达式带入到被积函数中,从而简化计算,这一点要切记).

(2) 对称性(包括普通对称性和轮换对称性).

(3) 形心公式的逆用(由 $\bar{x} = \frac{\int_{\Gamma} x ds}{\int_{\Gamma} ds} \Rightarrow \int_{\Gamma} x ds = \bar{x} \cdot l_{\Gamma}$, 其中 l_{Γ} 为 Γ 的长度).

15.1.3 第一型曲线积分的应用

1. 弧长

(1) 若平面光滑曲线 L 由参数式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ 给出, 则

$$L = \int_a^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

(2) 若平面光滑曲线 L 由 $\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases} (a \leq x \leq b)$ 给出, 则 $L = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$.

(3) 若平面光滑曲线 L 由 $L: r = r(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 给出, 则

$$L = \int_a^b \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

(4) 若空间光滑曲线 Γ 由参数式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ 给出, 则

$$L = \int_a^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

2. 重心(质心)与形心

对于光滑曲线 L , 线密度 $\rho(x, y, z)$ 连续, 则计算重心 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 的公式为

$$\bar{x} = \frac{\int_L x \rho(x, y, z) ds}{\int_L \rho(x, y, z) ds}, \bar{y} = \frac{\int_L y \rho(x, y, z) ds}{\int_L \rho(x, y, z) ds}, \bar{z} = \frac{\int_L z \rho(x, y, z) ds}{\int_L \rho(x, y, z) ds}.$$

3. 转动惯量

对于光滑曲线 L , 线密度 $\rho(x, y, z)$ 连续, 则该曲线对于 x 轴, y 轴, z 轴和原点 O 的转

转动惯量 I_x, I_y, I_z 和 I_o 分别为

$$I_x = \int_L (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

$$I_y = \int_L (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) ds$$

$$I_z = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$$

$$I_o = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$$

4. 引力

对于光滑曲线 L , 线密度 $\rho(x, y, z)$ 连续, 则该曲线对点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的质量为 m 的质点的引力 $\{F_x, F_y, F_z\}$ 为

$$F_x = Gm \int_L \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

$$F_y = Gm \int_L \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

$$F_z = Gm \int_L \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

其中, G 为引力常数.

15.2 典型例题分析

本讲的题目主要分为两个大类: 第一, 第一型曲线积分的计算, 这个内容主要涉及如下四个要点:(1) 边界方程 $\xrightarrow{\text{代入}}$ 被积函数; (2) 对称性; (3) 形心公式的逆用; (4) 用基本方法化成定积分然后计算. 以及以上四个要点的综合题. 第二, 第一型曲线积分的应用, 这个内容主要包括: 求平面或者空间曲线的弧长、重心(质心)、形心、转动惯量和引力等.

15.2.1 第一型曲线积分的计算

先看两个基本计算题.

【例 15.1】 已知曲线 $L: y = x^2$ ($0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$), 则 $\int_L x ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\begin{aligned} \text{【分析与解答】} \int_L x ds &= \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^2} d(1 + 4x^2) \\ &= \frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}. \end{aligned}$$

【例 15.2】 计算 $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 1 \end{cases}$ ($a > 0$).

【分析与解答】先写出参数式, $\Gamma: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi, \\ z = 1 \end{cases}$, 于是,

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = adt$$

$$\text{故 } \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 + 1) adt = 2\pi a(a^2 + 1).$$

下面是两道具有技术性的综合题.

【例 15.3】设圆周 $C: x^2 + y^2 = 1$, 计算 $I = \oint_C \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{2} + 1 \right)^2 \right] ds$.

$$\begin{aligned} \text{【分析与解答】 } I &= \oint_C \left[\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{5}{4} \right) + (x + y) \right] ds \\ &= \oint_C (x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{5}{4}) ds + \oint_C (x + y) ds. \end{aligned}$$

因 C 关于 x 轴与 y 轴均分别对称, 故 $\oint_C y ds = 0, \oint_C x ds = 0$, 于是 $\oint_C (x + y) ds = 0$.

又由轮换对称性, $\oint_C x^2 ds = \frac{1}{2} \oint_C (x^2 + y^2) ds = \frac{1}{2} \oint_C ds = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 = \pi$.

$$\begin{aligned} \text{故 } I &= \oint_C \left[\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} \right) + \frac{3x^2}{4} + \frac{5}{4} \right] ds = \frac{1}{4} \oint_C (x^2 + y^2) ds + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \oint_C (x^2 + y^2) ds + \frac{5}{4} \oint_C ds \\ &= \frac{1}{4} \oint_C 1 ds + \frac{3}{4} \pi + \frac{5}{4} \times 2\pi = \frac{1}{4} \times 2\pi + \frac{3}{4} \pi + \frac{5}{2} \pi = \frac{15}{4} \pi. \end{aligned}$$

【注】大家可以自己试做, 此题若采用参数法直接计算会比较麻烦, 在考研数学里, 第一型曲线积分的计算着重考查其技术性计算法.

【例 15.4】计算 $I = \oint_{\Gamma} [(x+2)^2 + (y-3)^2] ds$, 其中 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, (a > 0)$.

【分析与解答】将被积函数展开, 得

$$I = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13) ds.$$

下面分为三个部分来计算, $I = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds + \oint_{\Gamma} (4x - 6y) ds + \oint_{\Gamma} 13 ds$.

(1) 计算 $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds$.

曲线 Γ 为平面 $x + y + z = 0$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上所截的大圆, 半径为 a , 故其周长为 $2\pi a$; 由轮换对称性, 有 $\oint_{\Gamma} x^2 ds = \oint_{\Gamma} y^2 ds = \oint_{\Gamma} z^2 ds$, 则

$$\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds = \frac{2}{3} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{2}{3} a^2 \cdot 2\pi a = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

(2) 计算 $\oint_{\Gamma} (4x - 6y) ds$.

有两种路子可以解决这个积分.

① 由于 Γ 的圆心在原点, 所以 $\bar{x} = \bar{y} = 0$, 用形心公式得

$$\oint_{\Gamma} (4x - 6y) ds = 4 \cdot \bar{x} \cdot l - 6 \bar{y} \cdot l = 0.$$

② 用对称性也能解决问题: 由于 $\oint_{\Gamma} x ds = \oint_{\Gamma} y ds = \oint_{\Gamma} z ds$, 则

$$\oint_{\Gamma} x ds = \frac{1}{3} \oint_{\Gamma} (x + y + z) ds = 0, \text{ 故 } \oint_{\Gamma} (4x - 6y) ds = 0.$$

(3) 计算 $\oint_{\Gamma} 13 ds$.

这个积分很基本了, $\oint_{\Gamma} 13 ds = 13 \oint_{\Gamma} ds = 13 \cdot 2\pi a$,

$$\text{故 } I = \frac{4}{3}\pi a^3 + 0 + 13 \cdot 2\pi a = \frac{4}{3}\pi a^3 + 26\pi a.$$

【注】(1) 若将曲线改为 $\Gamma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases}, (a > 0)$, 则 Γ_1 为平面 $x + y + z = a$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上所截的小圆, 求小圆的半径成为关键.

① 球心 $(0, 0, 0)$ 到平面 $x + y + z = a$ 的距离

$$d = \frac{a}{\sqrt{3}}, (d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}})$$

则 Γ_1 的半径为 $r = \sqrt{a^2 - d^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, 故周长为 $2\pi \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a$, 于是

$$\oint_{\Gamma_1} (x^2 + y^2) ds = \frac{2}{3} \oint_{\Gamma_1} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a.$$

② 用对称性, 由于 $\oint_{\Gamma_1} x ds = \oint_{\Gamma_1} y ds = \oint_{\Gamma_1} z ds$, 且 $\oint_{\Gamma_1} (x + y + z) ds = a \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a$,

则

$$\oint_{\Gamma_1} (4x - 6y) ds = 4 \oint_{\Gamma_1} x ds - 6 \oint_{\Gamma_1} y ds = -2 \oint_{\Gamma_1} x ds = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a.$$

$$\text{③ } \oint_{\Gamma_1} 13 ds = 13 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a.$$

(2) 若将曲线改为 $\Gamma_2: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y = 0 \end{cases}, (a > 0)$, 则曲线 Γ_2 为平面 $x + y = 0$ 在

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上所截的大圆, 半径为 a , 故其周长为 $2\pi a$;

① 用形心公式可得出 $\oint_{\Gamma_2} (4x - 6y) ds = 4 \cdot \bar{x} \cdot l - 6 \bar{y} \cdot l = 0$.

② 由对称性可知 $\oint_{\Gamma_2} (x^2 + y^2) ds = 2 \oint_{\Gamma_2} x^2 ds$, 写出参数方程 $\begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ y = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ z = a \sin \theta \end{cases}$

则 $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} d\theta = ad\theta \Rightarrow \oint_{\Gamma_2} x^2 ds = \frac{1}{2} a^3 \pi, \oint_{\Gamma_2} (x^2 + y^2) ds = a^3 \pi.$

③ $\oint_{\Gamma_2} 13 ds = 13 \cdot 2\pi a = 26\pi a$.

15.2.2 第一型曲线积分的应用

第一型曲线积分的应用在考研中最重要的是考求曲线弧长,请加强训练,其他应用无非是套公式,并不困难.

【例 15.5】计算曲线段 $y = \ln(1 - x^2)$ ($0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$) 的长度.

【分析与解答】 $s = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx$
 $= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right) dx = -\frac{1}{2} + \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + \ln 3.$

【例 15.6】求曲线段 $\begin{cases} x = \arctant \\ y = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \end{cases}$ 的弧长.

【分析与解答】 $s = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{2(1+t^2)}\right)^2} dt$
 $= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \stackrel{t = \tan u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$
 $= \ln |\sqrt{2} + 1| - \ln |1 + 0| = \ln(1 + \sqrt{2}).$

【例 15.7】设常数 $a > 0$, 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 的全长以及它所围平面图形的面积.

【分析与解答】 当 $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时可得到整条心脏线, 故其全长

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\pi}^{\pi} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2} a \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta \end{aligned}$$

$$= 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 8a.$$

它所围平面图形的面积

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r^2(\theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos^2 \theta) d\theta = a^2 (\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

【例 15.8】设某曲线 L 的线密度 $\mu = x^2 + y^2 + z^2$, 其方程为

$$x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = \sqrt{2} e^t, -\infty < t \leq 0$$

(1) 求曲线 L 的弧长 l ;

(2) 求曲线 L 对 Oz 轴的转动惯量 J ;

(3) 求曲线 L 对位于原点处质量为 m 的质点的引力(k 为引力常数).

【分析与解答】 曲线的弧微分 $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = 2e^t dt$, 于是

$$(1) \text{ 曲线 } L \text{ 的弧长 } l = \int_L ds = \int_{-\infty}^0 2e^t dt = 2.$$

(2) 在曲线 L 上, 有 $x^2 + y^2 = e^{2t}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3e^{2t}$, 则曲线 L 对 Oz 轴的转动惯量

$$J = \int_L \mu(x^2 + y^2) ds = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) ds = \int_{-\infty}^0 3e^{2t} e^{2t} 2e^t dt = \frac{6}{5}.$$

(3) 设曲线 L 对位于原点处质量为 m 的质点的引力为 $F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$, 则有

$$F_x = \int_L \frac{k m \mu}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds = km \int_L \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds = \frac{2km}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^0 e^t \cos t dt = \frac{km}{\sqrt{3}},$$

$$F_y = \int_L \frac{k m \mu}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds = km \int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds = \frac{2km}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^0 e^t \sin t dt = -\frac{km}{\sqrt{3}},$$

$$F_z = \int_L \frac{k m \mu}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds = km \int_L \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ds = \frac{2\sqrt{2}km}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^0 e^t dt =$$

$$\frac{2\sqrt{2}km}{\sqrt{3}}.$$

故所求的引力为

$$F = \frac{km}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\sqrt{2}\mathbf{k}).$$

第 16 讲 第一型曲面积分(仅数学一)

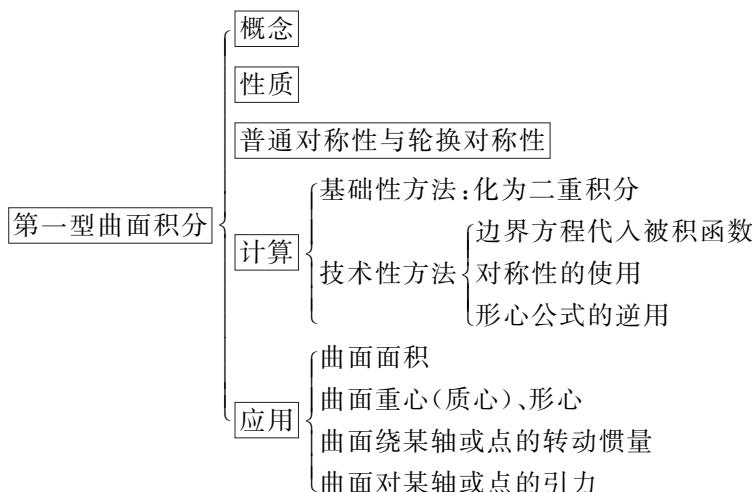
导语

本讲主要内容是第一型曲面积分的概念、计算与应用,仅是数学一的要求,也是数学一的考试绝对的重点和难点。考题有大题(10 分)也有小题(4 分),出大题的频率比较高,请各位数学一的考生重视。

大纲要求

1. 第一型曲面积分的概念与性质.
2. 第一型曲面积分的计算.
3. 用第一型曲面积分求一些几何量与物理量(求光滑曲面的面积、重心(质心)、形心、转动惯量和引力等).

知识体系



16.1 考试内容分析

16.1.1 第一型曲面积分的概念、性质与对称性

1. 第一型曲面积分的概念

设数量函数 $f(x, y, z)$ 定义在空间有界光滑曲面 Σ 上, 则 $f(x, y, z)$ 沿曲面 Σ 的第一型

曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

【注】(1) 将 Σ 无限分割的 $\Delta S_i > 0$, λ 为所有 ΔS_i 的直径的最大值, 强调该极限与对曲面 Σ 的分割方式无关.

(2) 其物理背景是以 $f(x, y, z)$ 为面密度的空间物质曲面的质量.

$$M = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS.$$

(3) 二重积分定义在“二维平面”上, 第一型曲面积分定义在“空间曲面”上, 第一型曲面积分是二重积分的推广, 这样就不难理解为什么后面要把第一型曲面积分化为二重积分计算了.

(4) 了解两个可积条件即可: 设空间曲面 Σ 是分段光滑曲面, 当 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 或者当 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界, 且在 Σ 上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的, 则它在 Σ 上的第一型曲面积分存在. 在考研数学中, 一般总假设 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 也就是第一型曲面积分总是存在的.

2. 第一型曲面积分的性质 (以下总假设 Σ 为空间有限分片光滑曲面)

性质 1 求空间曲面的面积 $\iint_{\Sigma} dS = S$ 其中 S 为 Σ 的面积.

性质 2 可积函数必有界 当 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上可积时, 则其在 Σ 上必有界.

性质 3 积分的线性性质 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma} [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] dS = k_1 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS + k_2 \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS.$$

性质 4 积分的可加性 当 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上可积时, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, 则

$$\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS.$$

性质 5 积分的保号性 当 $f(x, y, z), g(x, y, z)$ 在 Σ 上可积且在 Σ 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS.$$

特殊地有

$$\left| \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \right| \leq \iint_{\Sigma} |f(x, y, z)| dS.$$

性质 6 估值定理 设 M, m 分别是 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上的最大值和最小值, S 为 Σ 的面积, 则有

$$mS \leq \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq MS.$$

性质 7 中值定理 设 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, S 为 Σ 的面积, 则在 Σ 上至少存在一点 (ξ, η, ζ) , 使得

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = f(\xi, \eta, \zeta) S.$$

3. 普通对称性与轮换对称性

(1) 普通对称性

假设 Σ 关于 yOz 面对称, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS, & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0, & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases},$$

其中 Σ_1 是 Ω 在 yOz 面前面的部分.

关于其他坐标面对称的情况与此类似.

(2) 轮换对称性

若把 x 与 y 对调后, Σ 不变, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(y, x, z) dS,$$

这就是轮换对称性.

16.1.2 第一型曲面积分的计算

1. 基础性计算方法——化为二重积分

(1) 将 Σ 投影到某一平面(比如 xOy 面)上 \Rightarrow 投影区域 D (比如 D_{xy}).

(2) 将 $z = z(x, y)$ 或者 $F(x, y, z) = 0$ 代入 $f(x, y, z)$.

(3) 计算 $z'_x, z'_y \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$,

这就把第一型曲面积分化为了二重积分(如化成关于 x, y 的二重积分), 得到

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x^2 + z'_y^2} dx dy,$$

化成关于其他变量的二重积分与此类似.

【注】无论将 Σ 投影到哪个平面, Σ 上的任何两点的投影点不能重合, 换言之, 假如要将 Σ 投向 xOy 面, 则 $z = z(x, y)$ 必须是单值函数! 忘记了这一点, 就可能算错结果. 如果将 Σ 投向某一平面, 但是曲面投影后有重合点, 则

(1) 要么将 Σ 转投向另一个平面, 使得曲面投影后无重合点;

(2) 要么将 Σ 分成若干曲面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \dots$, 使得这些曲面投影后无重合点.

2. 技术性计算方法

主要考以下三种：

(1) 边界方程带入被积函数(由于被积函数定义在边界方程上,故应将边界方程的表达式带入被积函数,从而简化计算,这一点要切记).

(2) 对称性(包括普通对称性和轮换对称性,见 16.1.1 的 3).

(3) 形心公式的逆用(由 $\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x dS}{\iint_{\Sigma} dS} \Rightarrow \iint_{\Sigma} x dS = \bar{x} \cdot S$, 其中 S 为 Σ 的面积).

16.1.3 第一型曲面积分的应用

1. 曲面面积

对于光滑曲面薄片 Σ ,若其 Σ 由单值函数 $z = z(x, y)$ 给出, D 为曲面 Σ 在 xoy 面上的投影区域,则其面积

$$A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z'_x^2 + z'_y^2} dx dy.$$

【注】同理,在同样保证单值函数的情况下,可向另外两个坐标面投影,得,

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z} dy dz, \text{ 其中 } \Sigma: x = x(y, z),$$

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} dz dx, \text{ 其中 } \Sigma: y = y(x, z).$$

其中 D_{yz} 是曲面在 yOz 面上的投影区域, D_{zx} 是曲面在 zox 面上的投影区域.

事实上,曲面面积的计算,就是第一型曲面积分的被积函数是 1 时用投影法所得出的积分.

2. 重心(质心)与形心

对于光滑曲面薄片 Σ ,面密度 $\rho(x, y, z)$ 连续,则计算重心 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 的公式为

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x \rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}, \bar{y} = \frac{\iint_{\Sigma} y \rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}, \bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z \rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}.$$

3. 转动惯量

对于光滑曲面薄片 Σ ,面密度 $\rho(x, y, z)$ 连续,则该曲面对于 x 轴, y 轴, z 轴和原点 O 的转动惯量 I_x, I_y, I_z 和 I_O 分别为

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS, \\ I_y &= \iint_{\Sigma} (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) dS, \\ I_z &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS, \\ I_o &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS. \end{aligned}$$

4. 引力

对于光滑曲面薄片 Σ , 面密度 $\rho(x, y, z)$ 连续, 则该曲面对点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的质量为 m 的质点的引力 $\{F_x, F_y, F_z\}$ 为

$$\begin{aligned} F_x &= Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS, \\ F_y &= Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS, \\ F_z &= Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS, \end{aligned}$$

其中, G 为引力常数.

16.2 典型例题分析

本讲的题目主要分为两个大类: 第一, 第一型曲面积分的计算, 这个内容主要涉及如下四个要点:(1) 边界方程 $\xrightarrow{\text{代入}}$ 被积函数; (2) 对称性; (3) 形心公式的逆用; (4) 用基本方法化成二重积分然后计算, 以及以上四个要点的综合题. 第二, 第一型曲面积分的应用, 这个内容主要包括: 求光滑曲面的面积、重心(质心)、形心、转动惯量和引力等.

16.2.1 第一型曲面积分的计算

【例 16.1】 设积分曲面 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 计算 $\iint_{\Sigma} z^2 dS$.

【分析与解答】解法一: 考虑用普通对称性进行化简后再计算. Σ 关于坐标平面 xOy 对称, z^2 关于 z 为偶函数, 故 $\iint_{\Sigma} z^2 dS = 2 \iint_{\Sigma_1} z^2 dS$, 其中 Σ_1 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. 因而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$dS = \sqrt{1 + z'_x^2 + z'_y^2} dx dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

又 Σ_1 在坐标平面 xOy 上的投影域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, 故

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} z^2 dS &= 2 \iint_{\Sigma_1} z^2 dS = 2 \iint_{D_{xy}} (a^2 - x^2 - y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 2a \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{4}{3} \pi a^4.\end{aligned}$$

解法二: 考虑用轮换对称性进行化简后再计算. 由轮换对称性知 $\iint_{\Sigma} z^2 dS = \iint_{\Sigma} x^2 dS =$

$$\iint_{\Sigma} y^2 dS, \text{ 故}$$

$$\iint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{a^2}{3} \iint_{\Sigma} dS.$$

设 Σ_1 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 则 $\iint_{\Sigma_1} dS = 2 \iint_{\Sigma_1} dS$. 于是

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_1} dS &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr = -2\pi a \frac{1}{2} \int_0^a \frac{d(a^2 - r^2)}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\ &= -\pi a \int_0^a 2d\sqrt{a^2 - r^2} = -2\pi a \sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^a = 2\pi a^2,\end{aligned}$$

$$\text{故 } \iint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{2}{3} a^2 \iint_{\Sigma_1} dS = \frac{2a^2}{3} \cdot 2\pi a^2 = \frac{4}{3} \pi a^4.$$

【注】在多元积分学中考查对称性是重中之重. 作为总结与训练, 请考生做如下结论的复习:

(1) 设曲面 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$, 则有

$$\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS = \frac{1}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{1}{3} R^3 \iint_S dS = \frac{4}{3} \pi R^4$$

$$\iint_S x dS = \iint_S y dS = \iint_S z dS = 0; \iint_S xy dS = \iint_S yz dS = \iint_S zx dS = 0, \dots$$

这是因为曲面 S 关于三坐标平面都对称, 而被积函数 x^2, y^2, z^2 分别关于变量 x, y, z 是偶函数, 被积函数 x, y, z 分别关于变量 x, y, z 为奇函数, 由此也可得

$$\begin{aligned}\iint_S (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) dS &= (\alpha + \beta + \gamma) \iint_S x^2 dS = (\alpha + \beta + \gamma) \frac{1}{3} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \frac{R^2}{3} (\alpha + \beta + \gamma) \iint_S dS = \frac{4}{3} \pi R^4 (\alpha + \beta + \gamma).\end{aligned}$$

(2) 若记 $S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则有

$$\iint_{S_1} x dS = \iint_{S_1} y dS = \iint_{S_1} z dS = \iint_{D_1} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$= R \iint_{D_1} dx dy = \frac{1}{4} \pi R^3.$$

$$\iint_{S_1} (\alpha x + \beta y + \gamma z) dS = (\alpha + \beta + \gamma) \iint_{S_1} z dS = (\alpha + \beta + \gamma) \iint_{D_1} R dx dy$$

$$= \frac{1}{4} \pi R^3 (\alpha + \beta + \gamma),$$

其中, α, β, γ 为常数, D_1 为 S_1 在 Oxy 平面上投影, 即 $1/4$ 平面圆域.

(3) 设 $S_2 = \{(x, y, z) | z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$, 则有

$$\iint_{S_2} x dS = \iint_{S_2} y dS = 0; \quad \iint_{S_2} xyz dS = 0;$$

$$\iint_{S_2} z dS = 4 \iint_{S_1} x dS = 4 \iint_{S_1} y dS = 4 \iint_{S_1} z dS = \pi R^3.$$

【例 16.2】设 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分, 点 $P(x, y, z) \in \Sigma$, Π 为 Σ 在点

P 处的切平面, $\rho(x, y, z)$ 是点 $O(0, 0, 0)$ 到平面 Π 的距离. 求 $I = \iint_{\Sigma} \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$.

【分析与求解】本题是综合空间解析几何知识与第一型曲面积分计算的综合题.

记 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - 1$, 则

$$F'_x(x, y, z) = x, F'_y(x, y, z) = y, F'_z(x, y, z) = 2z$$

于是 P 点处 Σ 的法向量为 $(x, y, 2z)$, 故可得切平面 π 的方程为

$$x(X-x) + y(Y-y) + 2z(Z-z) = 0.$$

于是, 点 $O(0, 0, 0)$ 到切平面 π 的距离为

$$\rho(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}},$$

$$\text{故 } I = \iint_{\Sigma} \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS = \iint_{\Sigma} z \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}{x^2 + y^2 + 2z^2} dS = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} z \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} dS.$$

(这里的最后一个等号使用了“边界方程代入被积函数”的技巧, 你看出来了吗?)

由 S 的方程得 $x + 2zz'_x = y + 2zz'_y = 0$, 于是 $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}{2z}$.

S 在 xOy 平面的投影区域是 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leqslant 2$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } I &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} z \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy = \frac{1}{4} \iint_{D_{xy}} (4 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - r^2) r dr = \frac{\pi}{2} (2r^2 - \frac{1}{4} r^4) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

16.2.2 第一型曲面积分的应用

【例 16.3】设有一段均匀圆柱面 $\Sigma: x^2 + y^2 = 1 (0 \leq z \leq 2)$, 其面密度 $\rho = 1$, G 为引力常系数, 求该段圆柱面 Σ 对原点处单位质点的引力.

【分析与解答】 这是一道有相当计算量的大题, 是数学一考试的重点.

先由对称性, 立即得出该段圆柱面对质点的引力的 x, y 分量 $F_x = F_y = 0$.

对于 z 分量 F_z , 由于 $\rho = 1, m = 1$, 根据引力公式, 即得

$$F_z = Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS = G \iint_{\Sigma} \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dS.$$

将该曲面积分投影到 yOz 面, 得投影区域为

$$D_{yz} = \{(y, z) \mid -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}.$$

投影有重合, 故分为前后两个半曲面计算, 又由对称性, 计算前半曲面即可.

写出前半曲面 Σ_1 的方程 $x = \sqrt{1 - y^2}, (y, z) \in D_{yz}$, 则

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } F_z &= G \iint_{\Sigma} \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dS = 2G \iint_{\Sigma_1} \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dS \\ &= 2G \iint_{D_{yz}} \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2} dy dz \\ &= 2G \iint_{D_{yz}} \frac{z}{[1 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy dz = 2G \int_0^2 \frac{z}{[1 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dz \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= 2G \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}\Big|_0^2\right) \cdot 2 \arcsin y \Big|_0^1 = 2G\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)G\pi. \end{aligned}$$

于是引力 $\vec{F} = (0, 0, 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)G\pi)$.

【例 16.4】 设有球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, 其面密度为 $\mu(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 试求该球面的质量.

【分析与解答】 由于 Σ 关于 xOy 面, xOz 面均对称, 故

$$M = \iint_{\Sigma} \mu(x, y, z) dS = \iint_{x^2 + y^2 + z^2 = 2x} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} 2xdS = 4 \iint_{\Sigma_1} 2xdS = 8 \iint_{\Sigma_1} x dS,$$

其中 Σ_1 是 Σ 在第一卦限的部分.

故 $8 \iint_{\Sigma_1} x dS = 8 \iint_{D_{xy}} x \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy$, 其中 $D_{xy}: (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$.

现在计算 $dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy$.

由 $z = \sqrt{2x - x^2 - y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$, 得

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{(1-x)^2 + y^2}{z^2} = \frac{1}{2x - x^2 - y^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } M &= 8 \iint_{D_{xy}} x \frac{1}{\sqrt{2x - x^2 - y^2}} dx dy = 8 \iint_{D_{xy}} \frac{x}{\sqrt{1 - (x-1)^2 - y^2}} dx dy \\ &\stackrel{x-1=r\cos\theta}{=} 8 \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \frac{1+r\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} r dr = 8 \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} + 8 \int_0^\pi \cos\theta d\theta \int_0^1 \frac{r^2 dr}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= 8\pi \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} + 0 = 8\pi (-\sqrt{1-r^2}) \Big|_{r=0}^1 = 8\pi. \end{aligned}$$

【例 16.5】设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中, 其侧面满足方程 $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米, 时间单位为小时), 已知体积减少的速率与侧面积成正比 (比例系数 0.9), 问高度为 130(厘米) 的雪堆全部融化需多少小时?

【分析与解答】本题是应用性问题, 是考生比较棘手的考试题型, 事实上, 我们需要把题目用文字语言的描述转化为数学表达式即可, 并不难, 主要是大家练习得不够多, 不熟悉.

记 V 为雪堆体积, S 为雪堆的侧面积, 则

$$V = \int_0^{h(t)} dz \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]} dx dy = \int_0^{h(t)} \frac{1}{2}\pi [h^2(t) - h(t)z] dz = \frac{\pi}{4}h^3(t),$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}} dx dy \\ &= \frac{2\pi}{h(t)} \int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} [h^2(t) + 16r^2]^{1/2} r dr = \frac{13\pi h^2(t)}{12}. \end{aligned}$$

由题意知 $\frac{dV}{dt} = -0.9S$, 所以 $\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{13}{10}$, 因此 $h(t) = -\frac{13}{10}t + C$.

由 $h(0) = 130$ 得 $h(t) = -\frac{13}{10}t + 130$. 令 $h(t) \rightarrow 0$ 得 $t = 100$ (小时).

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需时间为 100 小时.

第 17 讲 第二型曲线积分(仅数学一)

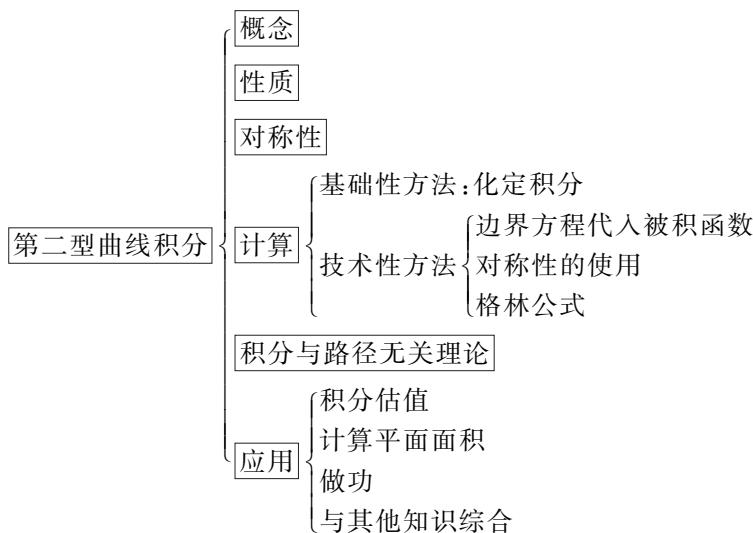
» 导语

本讲主要内容是第二型曲线积分的概念、性质、计算与应用,仅是数学一的要求,是数学一考试的重点,尤其以格林公式、平面曲线积分与路径无关理论为难点,考题有大题(10分)也有小题(4分).

» 大纲要求

1. 第二型曲线积分的概念与性质.
2. 第二型曲线积分的计算.
3. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件,会求二元函数全微分的原函数.

» 知识体系



17.1 考试内容分析

17.1.1 第二型曲线积分的概念、性质与对称性

1. 预备知识

(1) 场

从数学上说,场就是空间区域 Ω 上的一种对应法则.

①如果 Ω 上的每一点 $P(x, y, z)$ 都对应着一个数量 u , 则在 Ω 上就确定了一个数量函数

$$u = u(x, y, z),$$

它表示一个数量场, 比如温度场就是一个数量场.

②如果 Ω 上的每一点 $P(x, y, z)$ 都对应着一个向量 \vec{F} , 则在 Ω 上就确定了一个向量函数

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

它表示一个向量场, 比如引力场就是一个向量场.

(2) 变力做功

问题可以这样来描述: 在一个向量场——变力场中, 设某质点在变力 $\vec{F}(x, y, z)$ 作用下, 沿着有向曲线 Γ 从起点 A 移动到终点 B , 问总共做了多少功? 分析如下.

设沿着有向曲线 Γ 在 $P(x, y, z)$ 点移动了一个微位移 $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, 并在这种情形下将变力 $\vec{F}(x, y, z)$ 近似看做常力, 则该力在此微位移上的微功 $dW = \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r}$, 于是变力 $\vec{F}(x, y, z)$ 沿着有向曲线 Γ 从起点 A 移动到终点 B 所做的总功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} dW = \int_{\Gamma} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\} \cdot \{dx, dy, dz\} \\ &= \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \end{aligned}$$

于是就引出了第二型曲线积分的概念.

2. 第二型曲线积分的概念与存在性

第二型曲线积分的被积函数 $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ (或 $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$) 定义在平面曲线 L (或空间曲线 Γ) 上, 其物理背景是变力 $\vec{F}(x, y)$ (或 $\vec{F}(x, y, z)$) 在平面曲线 L (或空间曲线 Γ) 上从起点移动到终点所做的总功:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$\text{或 } \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

【注】(1) 定积分、二重积分、三重积分、第一型曲线积分、第一型曲面积分有着完全一致的背景描述, 都是一个数量函数在定义区域上计算几何量(面积, 体积等);

(2) 第二型曲线积分是一个向量函数沿有向曲线的积分, 无几何量可言, 于是, 有些性质和计算方法就不一样了, 一定要加以对比, 理解它们的区别和联系, 不要用错或者用混了.

(3) 设空间曲线 Γ 是分段光滑曲线, 在考研数学中, 一般总假设 $F(x, y, z)$ 在 Γ 上连续, 也就是第二型曲线积分总是存在的.

3. 第二型曲线积分的性质(以下总假设 Γ 为空间有限长分段光滑曲线)

性质 1 积分的线性性质 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\int_{\Gamma} (k_1 \vec{F}_1 + k_2 \vec{F}_2) \cdot d\vec{r} = k_1 \int_{\Gamma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + k_2 \int_{\Gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}.$$

性质 2 积分的有向性 $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{BA} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

性质 3 积分的可加性 当 $\widehat{AB} \cup \widehat{BC} = \widehat{AC}$ 时, $\int_{AC} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{BC} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

4. 普通对称性

观察 $\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$, 我们发现各个项的积分元素均

不同, 所以第二型曲线积分没有轮换对称性, 且由于其物理背景是做功, 做功有正负之别, 所以对称性的结论与前面接触的所有积分都不一样.

假设 Γ 关于 yOz 面对称, 则

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx &= \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} & P(x, y, z) = P(-x, y, z) \\ 0 & P(x, y, z) = -P(-x, y, z) \end{cases} \\ \int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy &= \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} & Q(x, y, z) = -Q(-x, y, z) \\ 0 & Q(x, y, z) = Q(-x, y, z) \end{cases} \end{aligned}$$

其中 Γ_1 是 Ω 在 yOz 面前部分.

关于其他坐标面对称的情况以及平面的情况都与此类似, 请大家自己独立作出.

17.1.2 平面第二型曲线积分的计算

由于空间第二型曲线积分的经典计算方法与第二型曲面积分有密切联系, 放在下一讲去讨论, 本讲只讨论平面第二型曲线积分的计算问题.

1. 直接计算法(参数法)

如果平面曲线 L 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (t: \alpha \rightarrow \beta)$ 给出, 其中 $t = \alpha$ 对应着起点 A , $t = \beta$

对应着终点 B , 则可以将平面第二型曲线积分化为定积分:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt.$$

这里的 α, β 谁大谁小无关紧要, 关键是分别和起点与终点对应.

2. 格林公式法

格林公式 设平面有界闭区域 D 由分段光滑闭曲线 L 围成, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上

连续且具有一阶连续偏导数, L 取正向, 则

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma.$$

其中, 所谓 L 取正向, 是指当一个人沿着 L 的正向前进时, 左手始终在 L 所围成的 D 内.

【注】 一般来说, 考试题目不可能直接满足能够使用格林公式的条件, 命题人可以破坏两种条件:

(1) L 不是封闭曲线, 也就是没有围成一个平面有界闭区域 D ;

(2) 即使 L 围成了一个平面有界闭区域 D , 但是 $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上不连续;

这两种情况下, 不可以直接使用格林公式.

针对(1), 我们可以采取“补线法”, 补上一条或者若干条线, 封闭出一个平面有界闭区域 D , 就可以用格林公式了(见例 17.1).

针对(2), 我们可以采取“挖去法”, 把不连续点(可称为“奇点”)挖去, 使得条件得以满足, 从而使用格林公式(见例 17.2).

17.1.3 平面第二型曲线积分与路径无关理论

1. 第一组

设 D 是平面有界闭区域, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上连续, 则以下五个条件等价:

(1) 沿任意一条全在 D 内的分段光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P dx + Q dy = 0$;

(2) $\int_l P dx + Q dy$ 在 D 内与路径无关, 只与 l 的起点 A 和终点 B 有关;

(3) 在 D 内存在可微的单值数量函数 $u(x, y)$, 使 $P dx + Q dy$ 是 $u(x, y)$ 的全微分, 即

$$du = P dx + Q dy;$$

(4) 矢量函数 $\vec{V} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 为某单值数量函数 $u(x, y)$ 的梯度, 即

$$\vec{\text{grad}} u = \vec{V} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j};$$

(5) $P dx + Q dy = 0$ 为全微分方程.

2. 第二组

设 D 是平面单连通区域, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上连续且具有一阶连续偏导数, 则以下六个条件等价:

(1) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立;

(2) 沿 D 中任意分段光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P dx + Q dy = 0$;

(3) $\int_l P dx + Q dy$ 在 D 内与路径无关, 只与 l 的起点 A 和终点 B 有关;

(4) 在 D 内存在可微的单值数量函数 $u(x, y)$, 使 $P dx + Q dy$ 是 $u(x, y)$ 的全微分, 即 $du = P dx + Q dy$;

(5) 矢量函数 $\vec{V} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 为某单值数量函数 $u(x, y)$ 的梯度, 即

$$\vec{\text{grad}} u = \vec{V} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j};$$

(6) $P dx + Q dy = 0$ 为全微分方程.

3. 第三组

设 D 是平面有界区域, 若 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上连续且具有一阶连续偏导数, 则给出两个条件:

(1) $\int_l P dx + Q dy$ 在 D 内与路径无关, 只与 l 的起点 A 和终点 B 有关;

(2) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立;

(1) 可以推出(2); 但是(2)推不出(1).

【注】(1) 对比第一组和第二组理论, 我们可以看出, 第一组比第二组缺少“ D 是单连通区域”和“ $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上连续”这两个条件;

(2) 对比第二组和第三组理论, 当 D 是平面单连通区域时, “ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立”与“ $\int_l P dx + Q dy$ 在 D 内与路径无关”互为充要条件; 当 D 是平面有界区域(也就是说, 没有指明是否为单连通区域)时, “ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立”仅仅是“ $\int_l P dx + Q dy$ 在 D 内与路径无关”的必要非充分条件.

例如, 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 0\}$, $P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$, 在 D 上有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 但沿圆周 $L: x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 正向一周的曲线积分

$$\oint_L \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^2} = -2\pi \neq 0$$

于是曲线积分 $\int_L \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^2}$ 不是与路径无关.

(3) 关于全微分方程的注释. 若存在二元函数 $u(x, y)$, 使 $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, 则称微分方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 为全微分方程, 它的通解为 $u(x, y) = C$. 例如, 可以验证, 在全平面上, $\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy - y^2) = 2x - 2y = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2xy + \sin y)$, 所以

$(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + \sin y)dy = 0$ 为全微分方程.

取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 于是有

$$u(x, y) = \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy + \sin y) dy = x^3 + x^2 y - xy^2 - \cos y + 1,$$

通解为 $x^3 + x^2 y - xy^2 - \cos y = C$.

17.2 典型例题分析

本讲的题目主要分为两个大类: 第一, 第二型曲线积分的常规计算, 这个内容主要涉及如下三个要点:(1) 边界方程 $\xrightarrow{\text{代入}}$ 被积函数; (2) 对称性; (3) 用基本方法化成定积分然后计算, 或者使用格林公式. 以及以上四个要点的综合题. 第二, 第二型曲线积分的应用题(基本都属于大的综合题), 这里涉及积分估值问题、计算平面面积、其物理背景——做功问题、与其他讲知识的结合等.

17.2.1 第二型曲线积分的常规计算

【例 17.1】 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|$ ($x \in [-1, 1]$), 起点是 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 计算曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy$.

【分析与解答】 本题是典型的第二型曲线积分计算题, 可以有两种办法, 一种是化为定积分的直接计算法; 一种是通过弥补条件, 从而使用格林公式的计算法.

解法一: 记 $L_1: y = 1 + x$ ($x \in [-1, 0]$), 起点是 $(-1, 0)$, 终点为 $(0, 1)$;

$L_2: y = 1 - x$ ($x \in [0, 1]$), 起点是 $(0, 1)$, 终点为 $(1, 0)$

$$\begin{aligned} \int_L xy dx + x^2 dy &= \int_{L_1} xy dx + x^2 dy + \int_{L_2} xy dx + x^2 dy \\ &= \int_{-1}^0 [x(1+x) + x^2] dx + \int_0^1 [x(1-x) - x^2] dx \\ &= (-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{2}{3}) = 0. \end{aligned}$$

解法二: 记 $\bar{L}: y = 0$ ($x \in [-1, 1]$), 起点是 $(1, 0)$, 终点为 $(-1, 0)$, D 是由 L 与 \bar{L} 围成的平面区域, 利用格林公式及区域 D 关于 y 轴的对称性, 得

$$\int_L xy \, dx + x^2 \, dy = \int_{L+L^-} xy \, dx + x^2 \, dy - \int_L^- xy \, dx + x^2 \, dy = - \iint_D (2x - x) \, dx \, dy = 0.$$

【例 17.2】计算曲线积分 $\oint_L \frac{x \, dy - y \, dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以 $(1, 0)$ 为圆心, $R(R > 1)$ 为半径的圆周, 取逆时针方向.

【分析与解答】首先, 令 $P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$, 计算可得, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 成立; 但是 D 中包含点 $(0, 0)$,

所以 $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 上统统不连续, 这种情况下不可以使用格林公式.

我们作足够小的椭圆(使其在 D 内部) C : $\begin{cases} x = \frac{\delta}{2} \cos \theta \\ y = \delta \sin \theta \end{cases}$, 其中 θ 从 2π 到 0 , 取顺时针方

向. 令 C 与 L 围成区域为 D , 此时可以使用格林公式了, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_L P \, dx + Q \, dy = \int_{L+C^-} P \, dx + Q \, dy - \int_{C^-} P \, dx + Q \, dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy - \int_{C^-} P \, dx + Q \, dy = 0 - \int_{C^-} P \, dx + Q \, dy \\ &= \int_C P \, dx + Q \, dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta^2} \, d\theta = \pi. \end{aligned}$$

【注】这里取 C 为上述椭圆周, 最后计算最简单, 如果取 C 为 $x = \delta \cos \theta$, $y = \delta \sin \theta$ 的圆周, 那么 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\delta^2}{\delta^2 [4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta]} \, d\theta$, 这样的积分就非常复杂了, 所以“盯着分母”取曲线 C 是很显然的.

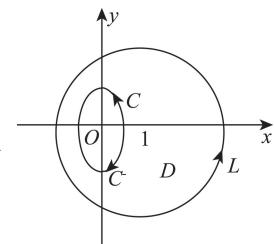


图 17.1

17.2.2 第二型曲线积分与路径无关的题目

【例 17.3】下列命题中不正确的是()

- (A) 设 $f(u)$ 有连续导数, 则 $\int_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$ 在全平面内与路径无关.
- (B) 设 $f(u)$ 连续, 则 $\int_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$ 在全平面内与路径无关.
- (C) 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在区域 D 内有连续的一阶偏导数, 又 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 则 $\int_L P \, dx + Q \, dy$ 在区域 D 内与路径无关.

(D) $\int_L \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ 在区域 $D = \{(x,y) | (x,y) \neq (0,0)\}$ 上与路径有关.

【分析与解答】对于(A),令 $P(x,y) = xf(x^2+y^2)$, $Q(x,y) = yf(x^2+y^2)$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} =$

$2xyf'(x^2+y^2)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xyf'(x^2+y^2)$, 其中 $f'(x^2+y^2) = f'(s)|_{s=x^2+y^2}$, 得到 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$,

全平面是单连通区域,故 $\int_L P dx + Q dy$ 在全平面内与路径无关.(A)正确.

对于(B),可求得被积函数的原函数为

$$f(x^2+y^2)(xdx+ydy) = \frac{1}{2}f(x^2+y^2)d(x^2+y^2) = \frac{1}{2}d\int_0^s f(t)dt|_{s=x^2+y^2},$$

因而, $\int_L f(x^2+y^2)(xdx+ydy)$ 与路径无关.(B)正确.

对于(C),因 D 区域不一定是单连通区域,故(C)中积分不一定与路径无关.(C)不正确.

对于(D),取 L 为单位圆 $x^2+y^2=1$, 并取逆时针方向,则

$$\int_L \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_L -ydx+x dy = \iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} (1+1) dxdy = 2\pi \neq 0.$$

因而,积分与路径有关.(D)正确.仅(C)入选.

【例 17.4】设函数 $P(x,y) = \frac{x}{y}r^\lambda$, $Q(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}r^\lambda$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, 要求曲线积分

$\int_L P dx + Q dy$ 在区域 $D = \{(x,y) | y > 0\}$ 上与路径无关,则参数 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析与解答】区域 D 为单连通区域, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 内有连续的偏导数,故

$\int_L P dx + Q dy$ 在 D 上与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\forall (x,y) \in D$.

而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2}r^\lambda - \frac{x^2}{y^2}\lambda r^{\lambda-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{2x}{y^2}r^\lambda - \frac{x^3}{y^2}\lambda r^{\lambda-2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}r^\lambda + \frac{x}{y}\lambda r^{\lambda-1} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{x}{y^2}r^\lambda + x\lambda r^{\lambda-2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \text{即 } -\frac{2x}{y^2}r^\lambda - \frac{x^3}{y^2}\lambda r^{\lambda-2} = -\frac{x}{y^2}r^\lambda + x\lambda r^{\lambda-2}.$$

简化得 $xr^\lambda + xy^2\lambda r^{\lambda-2} + x^3\lambda r^{\lambda-2} = 0$, $r^2 + y^2\lambda + x^2\lambda = 0$,

又 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, 得 $\lambda = -1$.

【例 17.5】(I)设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(1) = 1$, D 为不包含原点的单连

通区域,在 D 内曲线积分 $\int_L \frac{y dx - x dy}{2x^2+f(y)}$ 与路径无关,求 $f(y)$;

(II)求 $\oint_{L'} \frac{y dx - x dy}{2x^2+f(y)}$, 其中 L' 为曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$,且取逆时针方向.

【分析与解答】(I) 根据积分与路径无关定理, 在 D 内, 由

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x^2 - f(y)}{[2x^2 + f(y)]^2} = \frac{2x^2 + f(y) - yf'(y)}{[2x^2 + f(y)]^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

可得 $yf'(y) = 2f(y)$,

解得 $f(y) = Cy^2$, 由 $f(1) = 1$, 得 $f(y) = y^2$.

(II) 取 L_1 为 $2x^2 + y^2 = \epsilon^2$ 并取顺时针方向(ϵ 充分小), L' 与 L_1 所围成的区域记为 D' , 又

L_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ y = \epsilon \sin \theta \end{cases}$, 则

$$\oint_{L'} \frac{y dx - x dy}{2x^2 + f(y)} = \oint_{L'} \frac{y dx - x dy}{2x^2 + y^2} = \oint_{L'+L_1} - \oint_{L_1} = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy + \oint_{L_1} -$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\frac{\epsilon^2}{\sqrt{2}}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{\epsilon^2} \right] d\theta = -\sqrt{2}\pi.$$

【例 17.6】 设 $f(x, y)$ 在全平面有连续偏导数, 曲线积分 $\int_L f(x, y) dx + x \cos y dy$ 在全平

面与路径无关, 且 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x, y) dx + x \cos y dy = t^2$, 求 $f(x, y)$.

【分析与解答】(I) $\int_L f(x, y) dx + x \cos y dy$ 在全平面与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y) = \frac{\partial f}{\partial y}$,

即 $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y$, 积分得 $f(x, y) = \sin y + C(x)$.

(II) 求 $f(x, y)$ 转化为求 $C(x)$.

解法一:

$$f(x, y) dx + x \cos y dy = \sin y dx + x \cos y dy + C(x) dx$$

$$= \sin y dx + x ds \sin y + d\left(\int_0^x C(s) ds\right) = d\left(x \sin y + \int_0^x C(s) ds\right)$$

$$\Rightarrow \left. \left(x \sin y + \int_0^x C(s) ds \right) \right|_{(0,0)}^{(t,t^2)} = t^2,$$

$$\text{即 } ts \sin t^2 + \int_0^t C(s) ds = t^2 \Rightarrow \sin t^2 + 2t^2 \cos t^2 + C(t) = 2t,$$

$$\text{因此 } f(x, y) = \sin y + 2x - \sin x^2 - 2x^2 \cos x^2.$$

解法二: 取特殊路径, $\int_0^t f(x, 0) dx + \int_0^{t^2} t \cos y dy = t^2$,

$$\text{即 } \int_0^t C(x) dx + ts \sin t^2 = t^2 \Leftrightarrow C(t) = 2t - \sin t^2 - 2t^2 \cos t^2,$$

$$\text{因此 } f(x, y) = \sin y + 2x - \sin x^2 - 2x^2 \cos x^2.$$

17.2.3 第二型曲线积分的综合题

【例 17.7】 设曲线 $C: x^2 + y^2 + x + y = 0$, 取逆时针方向, 证明

$$\frac{\pi}{2} \leq \oint_C -y \sin x^2 dx + x \cos y^2 dy \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

【分析与解答】关于第二类曲线积分的估值问题,一般是先考虑用格林公式将其转化为二重积分,然后就二重积分进行估值.

由格林公式,有

$$\oint_C -y \sin x^2 dx + x \cos y^2 dy = \iint_D (\cos y^2 + \sin x^2) d\sigma \quad (*)$$

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 + x + y \leq 0\} = \{(x, y) | (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}\}$ 是由

C 围成的圆域,最小横坐标为 $x = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$.

且根据轮换对称性, $\iint_D \cos y^2 d\sigma = \iint_D \cos x^2 d\sigma$,

代入式(*),得

$$\oint_C -y \sin x^2 dx + x \cos y^2 dy = \iint_D (\cos x^2 + \sin x^2) d\sigma = \iint_D \sqrt{2} \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) d\sigma$$

由于在 D 上, $\frac{\pi}{4} \leq x^2 + \frac{\pi}{4} \leq [-\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)]^2 + \frac{\pi}{4}$, 即 $\frac{\pi}{4} \leq x^2 + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$,

故 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \leq 1$, 即 $1 \leq \sqrt{2} \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$,

由积分的保号性, $\frac{\pi}{2} \leq \iint_D \sqrt{2} \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) d\sigma \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$,

也即证得结论: $\frac{\pi}{2} \leq \oint_C -y \sin x^2 dx + x \cos y^2 dy \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

【例 17.8】设 L 是平面单连通有界区域 σ 的正向边界线, \vec{n}° 是 L 上任一点 (x, y) 处的单位外法线矢量. 设平面封闭曲线 L 上点 (x, y) 的矢径 $\vec{r} = \vec{x}i + \vec{y}j$, $r = |\vec{r}|$; θ 是 \vec{n}° 与 \vec{r} 的夹角,试求 $\oint_L \frac{\cos \theta}{r} ds$.

【分析与解答】本题考查第一型和第二型曲线积分之间的转化关系. 注意到第二型曲线积分是考虑曲线 L 在其上点 (x, y) 处的单位切线矢量,设其为 $\vec{\tau}^\circ = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j}$. 因为曲线 L 在其上点 (x, y) 处的法矢量 \vec{n}° 与切线矢量 $\vec{\tau}^\circ$ 互相垂直,并使闭曲线 L 沿正向,故取 $\vec{n}^\circ = \cos \beta \vec{i} - \cos \alpha \vec{j}$.

根据两矢量内积的定义及 $dx = \cos \alpha ds$, $dy = \cos \beta ds$, 得

$$\cos \theta ds = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ}{r} ds = \frac{1}{r} (x \cos \beta - y \cos \alpha) ds = \frac{1}{r} (-y dx + x dy).$$

于是,原曲线积分

$$\oint_L \frac{\cos \theta}{r} ds = \oint_L \frac{1}{r^2} (-y dx + x dy) = \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^{2\pi} [(-\epsilon \sin t) d(\epsilon \cos t) + \epsilon \cos t d(\epsilon \sin t)] = 2\pi.$$

【例 17.9】设曲线 L 是区域 D 的正向边界,那么 D 的面积为()

(A) $\frac{1}{2} \oint_L x \, dy - y \, dx$

(B) $\oint_L x \, dy + y \, dx$

(C) $\oint_L x \, dy - y \, dx$

(D) $\frac{1}{2} \oint_L x \, dy + y \, dx$

【分析与解答】本题考查用第二型曲线积分求平面面积, 是一种比较新颖的提法, 但是内容是经典的, 主要看考生能否抓住数学知识之间的联系.

(1) 令 $P = -y, Q = x$, 则由格林公式得

$$\frac{1}{2} \oint_L -y \, dx + x \, dy = \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right] dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_D 2 \, dx \, dy = \iint_D dx \, dy.$$

因而, D 的面积 $\iint_D dx \, dy$ 可表示为 $\frac{1}{2} \oint_L x \, dy - y \, dx$.

(2) 令 $P = -y, Q = 0$, 则由格林公式得

$$\oint_L (-y) \, dx = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx \, dy = \iint_D \left[\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right] dx \, dy = \iint_D dx \, dy.$$

因而, D 的面积 $\iint_D dx \, dy$ 可表示为 $\oint_L (-y) \, dx$.

(3) 令 $P = 0, Q = x$, 由格林公式得

$$\oint_L x \, dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx \, dy = \iint_D dx \, dy.$$

因而, D 的面积 $\iint_D dx \, dy$ 可表示为 $\oint_L x \, dy$ 表示.

由上述三个面积的表示式知, 答案选择(A).

【例 17.10】设 $f(r, t) = \oint_{x^2+xy+y^2=r^2} \frac{y \, dx - x \, dy}{(x^2 + y^2)^t}$,

(I) 通过 $\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{3}}(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) \\ y = \frac{r}{\sqrt{3}}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) \end{cases}$ 将 $f(r, t)$ 化为对 θ 的定积分, 其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$;

(II) 求极限 $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r, t)$.

【分析与解答】 (I) 由于题设给出参数式 $\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{3}}(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) \\ y = \frac{r}{\sqrt{3}}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$,

则 $f(r, t) = \oint_{x^2+xy+y^2=r^2} \frac{y \, dx - x \, dy}{(x^2 + y^2)^t} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{3} \left(\frac{2r^2}{3} \right)}{\left(\frac{2r^2}{3} \right)^t (\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)^t} d\theta$

$$= \sqrt{3} \left(\frac{2r^2}{3} \right)^{1-t} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)^t} d\theta.$$

(II) 对任意实数 t , $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)^t} d\theta$ 是定积分, 根据积分保号性, 其值大于零, 且

显然与 r 无关, 所以

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r, t) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{3} \left(\frac{2r^2}{3} \right)^{1-t} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta)^t} d\theta.$$

当 $t > 1$ 时, $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r, t) = 0$;

当 $t < 1$ 时, $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r, t) = \infty$.

$$\begin{aligned} \text{当 } t = 1 \text{ 时, } \lim_{r \rightarrow +\infty} f(r, t) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta} d\theta = 4\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 3 \tan^2 \theta} d\sqrt{3} \tan \theta = 4 \arctan(\sqrt{3} \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{r \rightarrow +\infty} f(r, t) = \begin{cases} 0, & t > 1 \\ 2\pi, & t = 1 \\ \infty, & t < 1 \end{cases}$$

【注】(1) 本题如果使用先计算积分再求极限的常规思路, 会遇到极大的困难, 理由如下:

如果我们记 C_ϵ 是正向圆周 $x^2 + y^2 = \epsilon^2$ (ϵ 是充分小的正数, 使得 C_ϵ 位于 C 的内部), 则

$$\oint_C \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^t} = \oint_{C+C_\epsilon^-} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^t} - \oint_{C_\epsilon^-} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + y^2)^t} \quad (\text{其中 } C_\epsilon^- \text{ 是 } C_\epsilon \text{ 的反向})$$

显然, 上式等号右边第二个积分容易计算, 但第一个积分即使使用格林公式转换成二重积分也很难算出来. 所以本题采用了如上的做法: 将积分曲线 $x^2 + xy + y^2 = r^2$ 用参数方程表示, 使曲线积分转换为定积分, 于是可以将 r 移到积分号之外, 再进行极限计算 $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r, t)$ 就容易多了.

(2) 怎么想到用 $\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{3}}(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) \\ y = \frac{r}{\sqrt{3}}(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta) \end{cases}$ 这样的参数式呢? 通常, 我们首先应该考

虑到的是: 由于 $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2$, 故令 $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = r \cos t \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = r \sin t \end{cases}$,

则会得到积分曲线的参数式为 $\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} \cos t - \sin t), \\ y = \frac{r}{\sqrt{3}} \cdot 2 \sin t. \end{cases}$ (0 $\leq t \leq 2\pi$), 如此一来, 会使

得 $x^2 + y^2$ 的参数表示十分复杂, 故此路不通; 再考虑令 $\begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \end{cases}$ 则

$x^2 + xy + y^2 = 3u^2 + v^2$ (消去交叉项了!), 于是令 $\begin{cases} u = \frac{r}{\sqrt{3}} \cos\theta \\ v = r \sin\theta \end{cases}$, 从而得到积分曲线的

参数式为

$$\begin{cases} x = \frac{r}{\sqrt{3}}(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta) \\ y = \frac{r}{\sqrt{3}}(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta) \end{cases}, (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

它使 $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}r^2(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)$, 表达式变简单了, 问题迎刃而解.

(3) 事实上, 上述(2)的过程确实是很难想得到. 如果此题是数学竞赛题, 命题人是不会给出这个提示的, 而我们考研时命题人为了防止题目门槛过高, 是会有这种提示的, 考生不必头疼.

第 18 讲 第二型曲面积分(仅数学一)

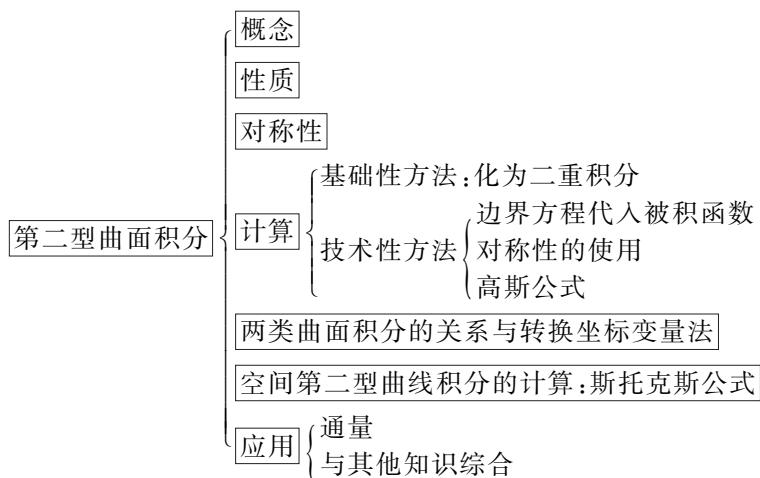
导语

本讲主要内容是第二型曲面积分的概念、计算与应用,仅是数学一的要求,也是数学一考试的重点和难点。考题有大题(10 分)也有小题(4 分),出大题的频率比较高。

大纲要求

1. 第二型曲面积分的概念与性质.
2. 第二型曲面积分的计算.
3. 用第二型曲面积分求一些几何量与物理量(光滑曲面的面积、重心(质心)、形心、转动惯量和引力等).

知识体系



18.1 考试内容分析

18.1.1 第二型曲面积分的概念、性质与对称性

1. 向量场的通量

在一个向量场(比如电场,磁场或者某种不可压缩流体的速度场)中, Σ 为该场中的某一有向分片光滑曲面,并指定了曲面的外侧,则向量函数 $\vec{F}(x, y, z)$ 通过曲面 Σ 的通量(比如电场中的电通量,磁场中的磁通量,或者某流体的流量)为

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS$$

其中 $\vec{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 是有向曲面 Σ 在指定侧的单位法向量.

且由 $d\vec{S} = \{dydz, dzdx, dx dy\}$, 得

$$\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

于是就引出了第二型曲面积分的概念.

2. 第二型曲面积分的概念与存在性

第二型曲面积分的被积函数 $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ 定义

在空间曲面 Σ 上, 其物理背景是向量函数 $\vec{F}(x, y, z)$ 通过曲面 Σ 的通量:

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

【注】(1) 第二型曲面积分是一个向量函数通过某有向曲面的通量(无几何量可言), 要加强和前面所学积分的横向对比, 理解它们的区别和联系, 不要用错或者用混了.

(2) 设空间曲面 Σ 是一有向分片光滑曲面, 在考研数学中, 一般总假设 $F(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 也就是第二型曲面积分总是存在的.

3. 第二型曲面积分的性质(以下总假设 Σ 是一有向分片光滑曲面)

性质 1 积分的线性性质 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma} (k_1 \vec{F}_1 + k_2 \vec{F}_2) \cdot d\vec{S} = k_1 \iint_{\Sigma} \vec{F}_1 \cdot d\vec{S} + k_2 \iint_{\Sigma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{S}.$$

性质 2 积分的方向性 $\iint_{\Sigma^-} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 dS$, 其中 Σ^- 为 Σ^+ 的另一侧.

性质 3 积分的可加性 当 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ 时, $\iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} +$

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

4. 对称性

观察 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) [dy dz] + Q(x, y, z) [dz dx] + R(x, y, z) [dx dy]$, 我们发现各个项的积分

元素均不同, 所以第二型曲面积分一般没有轮换对称性(特殊情况下, 比如单独计算 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) [dy dz]$ 时, 是可以讨论关于 y, z 的轮换对称性的), 且由于其物理背景是通量, 有正负之别, 所以对称性的结论与前面接触的积分也都有不同之处.

假设 Γ 关于 yOz 面对称, 则

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz & P(x, y, z) = -P(-x, y, z) \\ 0 & P(x, y, z) = P(-x, y, z) \end{cases}$$

其中 Γ_1 是 Ω 在 yOz 面前面上的部分.

关于其他坐标面对称的情况与此类似,请大家自己独立作出.

18.1.2 第二型曲面积分的计算

1. 基础性计算方法——化为二重积分

对于第二型曲面积分 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$, 可以将其拆

成三个积分: $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz$, $\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx$, $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$, 分别投影到相应的坐标面上, 化为二重积分计算, 然后再加回去. 直观上, 我们比较习惯投影到 xOy 面上去, 所以以 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$ 为例.

无论空间曲面 Σ 是由显式 $z = z(x, y)$ 还是隐式 $F(x, y, z) = 0$ 给出的, 我们都需要做三件事(无逻辑上的先后顺序, 哪件事情最利于解题就先做哪件):

- (1) 将 Σ 投影到某一平面(比如 xOy 面)上 \Rightarrow 投影区域 D (比如 D_{xy});
- (2) 将 $z = z(x, y)$ 或者 $F(x, y, z) = 0$ 代入 $R(x, y, z)$;
- (3) 将 $dx dy$ 写成“ $\pm dx dy$ ”

其中 Σ 为上侧、右侧、前侧时取“+”, 否则取“-”.

这就把第二型曲面积分化为了二重积分, 得到

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

同样需要指出的是, 投影时 Σ 上的任何两点的投影点不能重合, 请回看上一讲的相关内容.

2. 高斯公式法

高斯公式 设空间有界闭区域 Ω 由有向分片光滑闭曲面 Σ 围成, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有公式

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

此外, 根据两类曲面积分之间的关系(见下面的 3), 高斯公式也可表为

$$\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

其中, Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 Σ 上点 (x, y, z) 处的法向量的

方向余弦.

【注】一般来说,考试题目不可能直接满足能够使用高斯公式的条件,命题人可以破坏两种条件:

(1) Σ 不是封闭曲面,也就是没有围成一个空间有界闭区域 Ω ;

(2)即使 Σ 围成了一个空间有界闭区域 Ω ,但是 $P, Q, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ 在 Ω 上不连续;

这两种情况下,不可以直接使用高斯公式.

针对(1),我们可以采取“补面法”,补上一片或者若干片曲面,封闭出一个空间有界闭区域 Ω ,就可以用高斯公式了. 见例 18.5.

针对(2),我们可以采取“挖去法”,把不连续点(可称为“奇点”)挖去,使得条件得以满足,从而使用高斯公式,见例 18.4.

3. 两类曲面积分的关系与转换坐标变量法

(1) 两类曲面积分的关系

设 Σ 的法向量的单位向量 $\vec{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, Σ 的面微分向量 $d\vec{S} = \{dydz, dzdx, dxdy\}$, 由于 $\vec{n}^0 // d\vec{S}$, 故 $\frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dzdx}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = dS$. 于是得到了第一型曲面积分与第二型曲面积分的关系如下:

$$dydz = dS \cos\alpha, dzdx = dS \cos\beta, dxdy = dS \cos\gamma$$

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\Sigma} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS$$

【例 18.1】设 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 都是连续函数, Σ 是一光滑曲面, 面积为 S , M 是 $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$ 在 Σ 上的最大值, 证明

$$\left| \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy \right| \leq MS.$$

【分析与解答】由于要证的不等式中出现了曲面的面积, 所以应将左端的第二型曲面积分化成对面积的曲面积分, 设 $\vec{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 为曲面 Σ 上选定侧的单位向量, 则

$$\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\Sigma} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS = \iint_{\Sigma} \{P, Q, R\} \cdot \vec{n}^0 dS$$

因为 $|\{P, Q, R\} \cdot \vec{n}^0| = |\{P, Q, R\}| \cdot |\vec{n}^0| \cos\varphi \leq |\{P, Q, R\}| = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}$ (φ 是 $\{P, Q, R\}$ 与 \vec{n}^0 的夹角),

因此

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy \right| &= \left| \iint_{\Sigma} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS \right| \\ &\leq \iint_{\Sigma} |P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma| dS \leq \iint_{\Sigma} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} dS \leq MS. \end{aligned}$$

(2) 转换坐标变量法

转换坐标变量法,是将原本投影在一个坐标平面上的曲面积分,投影到另外一个坐标平面上去,这里需要建立一种转换的关系.

设 Σ (方向向上) 的方程由显式给出: $z = z(x, y)$, 则 Σ 的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \cos\beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},$$

将此情况带入 $\frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dzdx}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma} = dS$, 得到

$$\frac{dydz}{-z'_x} = \frac{dzdx}{-z'_y} = \frac{dxdy}{1},$$

于是, $dydz = -z'_x dxdy, dzdx = -z'_y dxdy$,

由此我们看到了, $dydz, dzdx, dxdy$ 这三个分量并不独立, 它们可以互相转化, 有些第二型曲面积分的计算可以使用这种转换关系. 即当 Σ 在 xOy 平面上的投影满足“投影点不重合”条件, 且投影域 D_{xy} 比较简单时, 有转换坐标变量公式:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz &= \pm \iint_{D_{xy}} P(x, y, z(x, y)) \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) dxdy, \\ \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx &= \pm \iint_{D_{xy}} Q(x, y, z(x, y)) \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy, \\ \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dydz &= \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy.\end{aligned}$$

以上“±”号选取的规则为: 当 Σ 的定向的法向量与 z 轴正向交角 γ 为 $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$, 则取“+”号; 若 $\frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi$, 则取“-”号, 将上面三个公式合并在一起为

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ = \pm \iint_{D_{xy}} \{P(x, y, z(x, y)), Q(x, y, z(x, y)), R(x, y, z(x, y))\} \cdot \left\{ \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right) \right\} dxdy.\end{aligned}$$

类似的有

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ = \pm \iint_{D_{xz}} \{P(x, y(z, x), z), Q(x, y(z, x), z), R(x, y(z, x), z)\} \cdot \left\{ \left(-\frac{\partial y}{\partial x}, 1, -\frac{\partial y}{\partial z} \right) \right\} dzdx \\ \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ = \pm \iint_{D_{yz}} \{P(x(y, z), y, z), Q(x(y, z), y, z), R(x(y, z), y, z)\} \cdot \left\{ 1, \left(-\frac{\partial x}{\partial y}, -\frac{\partial x}{\partial z} \right) \right\} dydz.\end{aligned}$$

当 Σ 在某一坐标面上的投影域 D 容易求得, 并且投影点不重合, 那么可试用化成第一型曲面积分或“转换坐标变量法”计算, 见例 18.7. 但要注意, 使用这些公式时, 要出现偏导数, 甚至可能出现根式, 有时会运算麻烦.

18.1.3 空间第二型曲线积分的计算

斯托克斯公式 设 Ω 为空间某区域, Σ 为 Ω 内的分片光滑有向曲面片, l 为逐段光滑的 Σ 的边界, 它的方向与 Σ 的外法向成右手系, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ 与 $R(x, y, z)$ 在 Ω 内具有连续的一阶偏导数, 则有斯托克斯公式:

$$\begin{aligned} \oint_l P dx + Q dy + R dz &= \iint_{\Sigma} \left| \begin{array}{ccc} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{array} \right| \quad (\text{此为第二型曲面积分形式}) \\ &= \iint_{\Sigma} \left| \begin{array}{ccc} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{array} \right| dS \quad (\text{此为第一型曲面积分形式}) \\ &= \iint_{\Sigma} \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) \cdot \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \} dS \right) \right\} \\ &= \iint_S (\vec{\text{rot}} A) \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

其中 $\vec{A} = \{P, Q, R\}$, $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 为 Σ 在相应方向的单位法向量.

【例 18.2】设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析与解答】本题主要考查第二型空间曲线积分的计算, 常见的解法有两种: 一是写出空间曲线的参数方程, 代入后化为定积分计算; 二是利用斯托克斯公式化为第一型曲面积分计算, 本题所考查的知识点虽比较单一, 但要得到正确结果, 考生仍需有一定的功力.

解法一: 将 L 的方程化为参数形式 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \cos t + \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

$$\text{则 } \oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz = \int_0^{2\pi} [\cos t \cdot (\cos t + \sin t) \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + \frac{1}{2} \sin^2 t \cdot (-\sin t + \cos t)] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi.$$

解法二:记 S 是平面 $z = x + y$ 上位于柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 内的部分, S 在 xOy 平面上的投影为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 平面 $z = x + y$ 向上的单位法向量为 $\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

根据斯托克斯公式,得

$$\begin{aligned} \oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz &= \iint_S \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}(1-x-y) dS = \iint_D \frac{1}{\sqrt{3}}(1-x-y) \sqrt{3} dx dy = \pi. \end{aligned}$$

18.1.4 散度与旋度的计算

散度与旋度在直角坐标中的计算公式

设向量 $\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, 则

$$\text{散度} \quad \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\text{旋度} \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

与梯度在一起,常称为三个度,有一些常用的公式,设 $u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数,则

$$(1) \operatorname{div} \mathbf{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$(2) \operatorname{rot} \mathbf{grad} u = 0,$$

$$(3) \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0.$$

【例 18.3】设 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 求 $\operatorname{div}(\mathbf{grad} u)$.

【分析与解答】由于 $\mathbf{grad} u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k})$, 于是

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{grad} u) &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

18.2 典型例题分析

18.2.1 第二型曲线积分的常规计算

【例 18.4】计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

【分析与解答】先计算 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$: (1) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$,

$$(2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{x^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$(3) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \text{故 } \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

被积函数及其偏导数在点 $(0, 0, 0)$ 处不连续, 取封闭曲面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2$ 的外侧, 其中 δ 足够小以保证其在曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 内部, 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1^-} - \iint_{\Sigma_1^-} = \iiint_{\Omega_0} 0 \, dv + \iint_{\Sigma_1} \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{\delta^3} \\ &= \frac{1}{\delta^3} \iiint_{\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq \delta^2} 3 \, dv = \frac{3}{\delta^3} \cdot \frac{4\pi\delta^3}{3} = 4\pi. \end{aligned}$$

【例 18.5】计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^3 + az^2) \, dy \, dz + (y^3 + ax^2) \, dz \, dx + (z^3 + ay^2) \, dx \, dy$,

其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

【分析与解答】记 S 为平面 $z = 0(x^2 + y^2 \leq a^2)$ 的下侧, Ω 为 Σ 与 S 所围成的区域空间, 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S+S} (x^3 + az^2) \, dy \, dz + (y^3 + ax^2) \, dz \, dx + (z^3 + ay^2) \, dx \, dy - \iint_S (x^3 + az^2) \, dy \, dz + \\ &\quad (y^3 + ax^2) \, dz \, dx + (z^3 + ay^2) \, dx \, dy \\ &= \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dv + \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} ay^2 \, dx \, dy \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^a r^4 dr + \int_0^{2\pi} a \sin^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 dr \\ &= \frac{6}{5}\pi a^5 + \frac{1}{4}\pi a^5 = \frac{29}{20}\pi a^5. \end{aligned}$$

【例 18.6】设 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 试依次对以下四个曲面计算 I 的值.

(1) Σ 是上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧;

(2) Σ 是 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧 ($a, b, c > 0$);

(3) Σ 是 $z = 2 - x^2 - y^2$ 在 $z \geq 0$ 部分的上侧;

(4) Σ 是 $z = 2 - x^2 - y^2$ 在 $z \geq -2$ 部分的上侧.

【分析与解答】 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $P = \frac{x}{r^3}$, $Q = \frac{y}{r^3}$, $R = \frac{z}{r^3}$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^3 - 3xr^2 \cdot \frac{x}{r}}{r^6} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}.$$

同理

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}.$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

(1) 将 Σ 方程代入被积函数中, 得 $I = \frac{1}{R^3} \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$,

补 $\Sigma_0: z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2$, 方向向下, 又 Ω 是由 Σ 和 Σ_0 围成的半球体, 则

$$I = \frac{1}{R^3} \left(\iint_{\Sigma + \Sigma_0} - \iint_{\Sigma_0} \right) = \frac{1}{R^3} \left(\iiint_{\Omega} 3 dv - 0 \right) = \frac{3}{R^3} \cdot \frac{2\pi}{3} R^3 = 2\pi.$$

【注】只有在使用代入技巧之后才能补 $\Sigma_0: z = 0$, 否则在 Ω 内出现被积函数的不连续点, 高斯公式失效.

(2) 作一球面 $\Sigma_\rho: x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, 方向向内, 且取 ρ 充分小使得 Σ_ρ 置于 Σ 的内部, 又设 Σ 和 Σ_ρ 所围区域记为 Ω , Σ_ρ 所围区域记为 Ω_ρ , 则

$$I = \iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma + \Sigma_\rho} - \iint_{\Sigma_\rho}.$$

根据高斯公式, $\iint_{\Sigma + \Sigma_\rho} = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iiint_{\Omega} 0 dv = 0$.

在 Σ_ρ 上 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, 并注意方向向内, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_\rho} &= \iint_{\Sigma_\rho} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\rho^3} \iint_{\Sigma_\rho} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= -\frac{1}{\rho^3} \iiint_{\Omega_\rho} 3 dv = -\frac{3}{\rho^3} \cdot \frac{4\pi}{3} \rho^3 = -4\pi, \end{aligned}$$

故

$$I = 0 - (-4\pi) = 4\pi.$$

【注】如果不使用小球将原点抠掉，而是直接使用高斯公式，那么是错误的，因为被积函数在原点处不连续。

(3) 作上半球面 $\Sigma_\rho: z = \sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}$ ，方向向下， ρ 充分小使得 Σ_ρ 在 Σ 的内部，再补一平面 $\Sigma_0: z = 0, \rho^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ ，方向向下，设由 Σ , Σ_ρ 和 Σ_0 共同围成的立体区域记为 Ω ，则

$$I = \iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma + \Sigma_\rho + \Sigma_0} - \iint_{\Sigma_\rho} - \iint_{\Sigma_0}.$$

由高斯公式，第一项 = 0，由第(1)题， $\iint_{\Sigma_\rho} = -2\pi$ （注意 Σ_ρ 方向向下），最后，

$$\iint_{\Sigma_0} = \iint_{\Sigma_0} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 0,$$

故

$$I = 0 - (-2\pi) - 0 = 2\pi.$$

【注】不能光用 $\Sigma_0: z = 0$ 封闭 Σ ，还必须用 Σ_ρ 把原点抠除。

(4) 补平面 $\Sigma_0: z = -2, x^2 + y^2 \leq 4$ ，方向向下；作球面 $\Sigma_\rho: x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ ，方向向内，且 ρ 充分小，使得 Σ_ρ 包含在 Σ 之内。又设 Σ_ρ 所用球体区域记为 Ω_ρ ， Σ 与 Σ_ρ 所围立体记为 Ω ，则

$$\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma + \Sigma_\rho + \Sigma_0} - \iint_{\Sigma_0} - \iint_{\Sigma_\rho}.$$

根据高斯公式，第一项 = 0，由第(2)题， $\iint_{\Sigma_\rho} = -4\pi$ ，最后，

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_0} &= \iint_{\Sigma_0} \frac{-2 dx dy}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} = - \iint_{D_{xy}} \frac{-2 dx dy}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{r dr}{(r^2 + 4)^{3/2}} = -4\pi \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + 4}} \right]_0^2 = (2 - \sqrt{2})\pi, \end{aligned}$$

故

$$I = 0 - (-4\pi) - (2 - \sqrt{2})\pi = (2 + \sqrt{2})\pi.$$

【注】作此题时容易用 $\Sigma_0: z = -2$ 把 Σ 封闭后就使用高斯公式，而没有把原点用小球抠掉。以上 4 个小题代表了用高斯公式计算第二类曲面积分时可能出现的各种题型，应该彻底弄懂、掌握。

【例 18.7】 求 $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$ ，

Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 第四卦限内的部分的前侧。

【分析与解答】

解法一：平面 $x - y + z = 1$ 其法向量 $\vec{n} = \{1, -1, 1\}$, 方向上向, 其方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

由两类曲面积分间的关系, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} (f + x) \cos\alpha dS + (2f + y) \cos\beta dS + (f + z) \cos\gamma dS \\ &= \iint_{\Sigma} (f + x) \frac{1}{\sqrt{3}} dS + (2f + y) (-\frac{1}{\sqrt{3}}) dS + (f + z) \frac{1}{\sqrt{3}} dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x - y + z) dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

解法二：将 Σ 投影到 xOy 面, $\frac{\partial z}{\partial x} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} = 1$. 于是

$$\begin{aligned} & \iint_{D_{xy}} \left\{ [f(x, y, z) + x] \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + [2f(x, y, z) + y] \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + [f(x, y, z) + z] \right\} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (x - y + z) dx dy = \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【注】我们看到, 此题使用转换坐标变量法会相对容易一些. 但需要指出, 转换坐标变量法并非常用的通法. 一般而言, 我们需要视 Σ 的方程是否复杂来确定是否可以用转换坐标变量法. 当 Σ 为平面、旋转抛物面等简单情况时, 使用转换坐标变量法才可能比较简单, 如本题.

18.2.2 第二型曲面积分的综合题

【例 18.8】设 S 为上半椭球面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1 (z \geq 0)$, 点 $P(x, y, z) \in S$, Π 是 S 在

点 P 处的切平面, $d(x, y, z)$ 为原点到 Π 的距离, 求

$$(1) I_1 = \iint_S \frac{z}{d(x, y, z)} dS.$$

$$(2) I_2 = \iint_{S(\text{上侧})} \frac{1}{d^2(x, y, z)} (dy dz + dz dx + dx dy).$$

【分析与解答】(I) 的解答已经在第 16 讲例 16.2 给出, 之所以在这里再次写出, 主要是为了给(II)做铺垫, $I_1 = \frac{3\pi}{2}$.

对于(II), 将第二型曲面积分转换成第一型曲面积分, 然后利用 I_1 的计算结果计算 I_2 .

由于 S 在点 $P(x, y, z)$ 处的法向量为 $\{x, y, 2z\}$, 所以它的上侧的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}, \cos\gamma = \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}.$$

因此

$$dydz = \cos\alpha dS = \frac{x}{2} d(x,y,z) dS, dx dz = \cos\beta dS = \frac{y}{2} d(x,y,z) dS,$$

$$dxdy = \cos\gamma dS = zd(x,y,z) dS,$$

将它们代入 I_2 得

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S(\text{上侧})} \frac{1}{d^2(x,y,z)} (dydz + zdzdx + dxdy) \\ &= \iint_S \frac{1}{d^2(x,y,z)} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z \right) d(x,y,z) dS \\ &= \frac{1}{2} \iint_S \frac{1}{d(x,y,z)} (x + y + 2z) dS. \end{aligned}$$

$$\iint_S \frac{z}{d(x,y,z)} dS = I_1 = \frac{3\pi}{2} \quad (\text{由于 } S \text{ 关于平面 } x=0 \text{ 对称, 在对称点处 } \frac{x}{d(x,y,z)} \text{ 的值互})$$

为相反数, 所以 $\iint_S \frac{x}{d(x,y,z)} dS = 0$, 同样, $\iint_S \frac{y}{d(x,y,z)} dS = 0$.

【例 18.9】求矢量 $\vec{A}(x,y,z) = \vec{i} + z\vec{j} + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k}$ 穿过曲面 Σ 的通量, 其中 Σ 为曲线

$$\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}, \text{ 绕 } z \text{ 轴旋转一周所形成旋转曲面的外侧在 } 1 \leq z \leq 2 \text{ 间部分.}$$

【分析与解答】 曲线 $\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$, 绕 z 轴旋转一周所形成旋转曲面

$$\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1 \leq z \leq 2),$$

$$\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

$$= \vec{i} + z\vec{j} + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k},$$

通过 Σ 的通量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} dy dz + zdzdx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

添加辅助曲面

$$\Sigma_1: z = 2 \quad (x^2 + y^2 \leq 4) \text{ 取上侧,}$$

$$\Sigma_2: z = 1 \quad (x^2 + y^2 \leq 1) \text{ 取下侧.}$$

$\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$ 形成封闭曲面, 所为区域记为 Ω , 则由高斯公式

$$\Omega = \iint_{\Sigma} dy dz + zdzdx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

$$= \iint_{\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2} dy dz + zdzdx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy - \iint_{\Sigma_1} dy dz + zdzdx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy -$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Sigma_2} dy dz + z dz dx + \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\
&= \iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dv - \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \frac{e^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy + \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\
&= \int_1^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{e^z}{r} r dr - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \frac{e^2}{r} r dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{e^1}{r} r dr \\
&= 2\pi \int_1^2 z e^z dz - 4\pi e^2 + 2\pi e \\
&= 2\pi e^2 - 4\pi e^2 + 2\pi e \\
&= 2\pi e(1 - e).
\end{aligned}$$

【例 18.10】设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 若对任意的 $t \in (0, +\infty)$ 恒有

$\iiint_{\Omega(t)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv + \oint_{L(t)} f(\sqrt{x^2 + y^2}) ds = \iint_{D(t)} \sqrt{x^2 + y^2} f(\sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma + \iint_{\Sigma(t)} (x^2 + y^2 + z^2) dS$, 其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2\}$, $D(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 xOy 平面上的投影区域, $\Sigma(t)$ 是平面 $\Omega(t)$ 的表面, $L(t)$ 是 $D(t)$ 的边界曲线. 证明 $f(x)$ 满足 $\int_0^t r^2 f(r) dr + tf(r) = 2t^4$, 且 $f(0) = 0$.

【分析与解答】 $D(t) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq t^2\}$, $\Sigma(t) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = t^2\}$,

$L(t) = \{(x, y) | x^2 + y^2 = t^2\}$,

$$\text{且 } \iiint_{\Omega(t)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^t r^2 f(r) dr = 4\pi \int_0^t r^2 f(r) dr,$$

$$\iint_{D(t)} \sqrt{x^2 + y^2} f(\sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r^2 f(r) dr = 2\pi \int_0^t r^2 f(r) dr,$$

$$\iint_{\Sigma(t)} (x^2 + y^2 + z^2) dS = t^2 \iint_{\Sigma(t)} dS = 4\pi t^4, \oint_{L(t)} f(\sqrt{x^2 + y^2}) ds = f(t) \oint_{L(t)} ds = 2\pi t f(t).$$

由题设条件, 有

$$4\pi \int_0^t r^2 f(r) dr + 2\pi t f(t) = 2\pi \int_0^t r^2 f(r) dr + 4\pi t^4,$$

即

$$\int_0^t r^2 f(r) dr + t f(t) = 2t^4.$$

于是, 当 $t \neq 0$ 时, $f(t) = \frac{2t^4 - \int_0^t r^2 f(r) dr}{t}$, 故

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t^4 - \int_0^t r^2 f(r) dr}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [8t^3 - t^2 f(t)] = 0.$$