



普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等数学

第五版 上册

同济大学应用数学系 主编

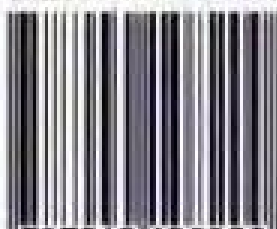


高等教育出版社

本书第三版获 1997 年普通高等学校 国家级教学成果一等奖

- | | |
|--|-----------|
|  高等数学 (第五版) 上册 | 同济大学应用数学系 |
|  高等数学 (第五版) 下册 | 同济大学应用数学系 |
|  高等数学附册 学习辅导与习题选解 (同济·四、五版) | 同济大学应用数学系 |
|  高等数学学习题全解指南 (同济·四、五版) 上册 | 同济大学应用数学系 |
|  高等数学学习题全解指南 (同济·四、五版) 下册 | 同济大学应用数学系 |
|  高等数学电子教案 (光盘 1 片) | 西安通信学院 |
|  高等数学 CAI 上册 (光盘 1 片) | 刘慧瑾等 研制 |
|  高等数学 CAI 下册 (光盘 1 片) | 刘慧瑾等 研制 |
|  高等数学多媒体教学软件 (光盘 2 片) | 郭 蔚等 研制 |
|  工程数学——线性代数 (第四版) | 同济大学应用数学系 |
|  线性代数附册 学习辅导与习题选解 (同济·三、四版) | 同济大学应用数学系 |
|  线性代数电子教案 (光盘 1 片) | 西安通信学院 |
|  工程数学——概率论 | 同济大学数学教研室 |
|  工程数学——概率统计简明教程 | 同济大学应用数学系 |
|  概率统计简明教程附册 学习辅导与习题选解 | 同济大学应用数学系 |

ISBN 7-04-010820-8



9 787040 108200 >

定价 26.10 元

普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等数学

第五版 上册

同济大学应用数学系 主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/同济大学应用数学系主编. —5版.
北京:高等教育出版社,2002(2003重印)
高等院校本科生教材
ISBN 7-04-010820-8

I. 高... II. 同... III. 高等数学-高等学校-
教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 007081 号

责任编辑 张忠月 封面设计 王凌波 责任绘图 郝 林
版式设计 马静如 责任校对 康晓燕 责任印制 韩 刚

高等数学 第五版 上册
同济大学应用数学系 主编

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-82028899

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 25
字 数 460 000

版 次 1978 年 3 月第 1 版
2002 年 7 月第 5 版
印 次 2003 年 8 月第 7 次印刷
定 价 26.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第一版前言

本书分上、下两册.上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数,下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论.各章配有习题,书末附有习题答案.

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书.

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驹,上海交通大学王嘉善,上海纺织工学院巫锡禾,上海科技大学蔡天亮,上海机械学院王敦珊、周继高,上海铁道学院李鸿祥等同志.

本书由上海海运学院陆子芬教授主审.参加审稿的还有大连工学院刘锡琛,合肥工业大学万迪生、何继文,成都电讯工程学院冯潮清,西北工业大学王德如,浙江大学盛骤、孙玉麟,太原工学院徐永源、张宝玉,上海海运学院朱幼文、卢启兴等同志.

审稿同志都认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢.

限于编者水平,同时编写时间也比较仓促,因而教材中一定存在不妥之处,希望广大读者提出批评和指正.

编者

一九七八年三月

第四版前言

关于本书的修订问题,全国高校工科数学课程教学指导委员会曾于1992年5月的工作会议上进行了讨论,与会代表们希望本书修改后能更加适应大多数院校的需要,这也正是我们的愿望.因此,我们在修订时,对不标*号的部分,注意控制其深广度,以期使它尽量符合高等工业院校的《高等数学课程教学基本要求》;同时仍保留标*号的内容,这些内容都是超出《基本要求》的,可供对数学要求稍高的专业采用.

兄弟院校的同行,对本书此次修订也提出了不少具体意见,修订时我们都作了认真考虑.在此,我们对课委会及同行们表示衷心的感谢.齐植兰、赵中时、谢树艺三位教授审阅了本书第四版稿,并提出不少宝贵意见,对此我们表示感谢.

本版在每章末增加了总习题,希望这些总习题在检查学习效果以及复习方面能发挥作用.

本书中用到二、三阶行列式的一些知识,部分读者由于阅读本书前尚未学过这方面的内容,因而产生学习上的困难.为此,本版上册增加了一个附录,用尽可能少的篇幅介绍有关二、三阶行列式的一些简单知识.

本书从第二版起的修订工作均由同济大学承担.第二版修订工作的正文部分由王福楹、邱伯驹完成,习题部分由宣耀焕、郭镜明、黄忠湛、王章炎完成.参加第三版修订工作的有王福楹、邱伯驹、骆承钦、王章炎.参加第四版修订工作的有王福楹、邱伯驹、骆承钦.

编者

一九九三年十二月

第五版前言

本书第五版是在第四版的基础上,根据我们多年的教学改革实践,按照新形势下教材改革的精神,进行全面修订而成的.在修订中,我们保留了原教材的系统和风格,及其结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点,同时注意吸收当前教材改革中一些成功的改革举措,使得新版能更适合当前教学的需要,成为适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材.

新版为更好地与中学数学教学相衔接,上册从一般的集合、映射引入函数概念,精简了基本初等函数的基础内容;为有利于培养学生的能力和数学素养,渗透了一些现代数学的思想、语言和方法,适当引用了一些数学记号和逻辑符号,文字作了适当简化;为适应高等数学课程教学时数减少的情况,在保证《高等数学课程教学基本要求》的前提下,对一些内容作了适当精简和合并;在应用方面,增加了一些微积分在科学技术、经济管理和日常生活等方面的应用性例题和习题.对第四版中存在的个别问题,这次也作了修订.修改较多的部分涉及函数、极限及向量代数等内容.

这次修订中,我系的广大教师提出了许多宝贵的意见和建议,特别是郭镜明教授提供了不少好的建议,我们在此表示诚挚的谢意.

本版修订工作由邱伯驹、骆承钦完成.新版中存在的问题,欢迎广大专家、同行和读者批评指正.

编者

二〇〇一年十月

内 容 提 要

本书是根据编者多年的教学实践,按照新形势下教材改革的精神,并结合《高等数学课程教学基本要求》在第四版的基础上修订而成的.这次修订更好地与中学数学教学相衔接,适当引用了一些数学记号和逻辑符号,增加了应用性例题和习题,对一些内容作了适当的精简和合并.修改较多的部分涉及函数、极限及向量代数等内容.

本书分上、下两册出版.上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数等七章,书末还附有二、三阶行列式简介、几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示.

本书仍保持了第四版结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点,又在保证教学基本要求的前提下,扩大了适应面,增强了伸缩性,供高等院校工科类专业的学生使用.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897 (010)82086060

传真：(010) 82086060

E-mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

目 录

| | |
|---|----|
| 第一章 函数与极限 | 1 |
| 第一节 映射与函数 | 1 |
| 一、集合(1) 二、映射(5) 三、函数(7) 习题 1-1(20) | |
| 第二节 数列的极限 | 23 |
| 一、数列极限的定义(23) 二、收敛数列的性质(27) | |
| 习题 1-2(30) | |
| 第三节 函数的极限 | 31 |
| 一、函数极限的定义(31) 二、函数极限的性质(36) | |
| 习题 1-3(37) | |
| 第四节 无穷小与无穷大 | 38 |
| 一、无穷小(38) 二、无穷大(39) 习题 1-4(41) | |
| 第五节 极限运算法则 | 42 |
| 习题 1-5(48) | |
| 第六节 极限存在准则 两个重要极限 | 49 |
| 习题 1-6(55) | |
| 第七节 无穷小的比较 | 56 |
| 习题 1-7(59) | |
| 第八节 函数的连续性与间断点 | 59 |
| 一、函数的连续性(59) 二、函数的间断点(62) 习题 1-8(64) | |
| 第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性 | 65 |
| 一、连续函数的和、差、积、商的连续性(65) 二、反函数与复合函数的连续性(65) 三、初等函数的连续性(67) 习题 1-9(68) | |
| 第十节 闭区间上连续函数的性质 | 69 |
| 一、有界性与最大值最小值定理(69) 二、零点定理与介值定理(70) | |
| 三、一致连续性(72) 习题 1-10(73) | |
| 总习题一 | 73 |
| 第二章 导数与微分 | 76 |
| 第一节 导数概念 | 76 |
| 一、引例(76) 二、导数的定义(78) 三、导数的几何意义(82) | |
| 四、函数可导性与连续性的关系(84) 习题 2-1(85) | |
| 第二节 函数的求导法则 | 86 |

| | | |
|------------------------------------|-----------------------|---------------------------|
| 一、函数的和、差、积、商的求导法则(86) | 二、反函数的求导法则(89) | |
| 三、复合函数的求导法则(91) | 四、基本求导法则与导数公式(93) | |
| 习题 2-2(96) | | |
| 第三节 高阶导数 | | 97 |
| 习题 2-3(101) | | |
| 第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率 | | 102 |
| 一、隐函数的导数(102) | 二、由参数方程所确定的函数的导数(106) | |
| 三、相关变化率(110) | 习题 2-4(110) | |
| 第五节 函数的微分 | | 112 |
| 一、微分的定义(112) | 二、微分的几何意义(114) | 三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则(115) |
| 四、微分在近似计算中的应用(118) | | |
| 习题 2-5(122) | | |
| 总习题二 | | 124 |
| 第三章 微分中值定理与导数的应用 | | 126 |
| 第一节 微分中值定理 | | 126 |
| 一、罗尔定理(126) | 二、拉格朗日中值定理(127) | 三、柯西中值定理(130) |
| 习题 3-1(132) | | |
| 第二节 洛必达法则 | | 133 |
| 习题 3-2(137) | | |
| 第三节 泰勒公式 | | 137 |
| 习题 3-3(143) | | |
| 第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性 | | 143 |
| 一、函数单调性的判定法(143) | 二、曲线的凹凸性与拐点(147) | |
| 习题 3-4(151) | | |
| 第五节 函数的极值与最大值最小值 | | 152 |
| 一、函数的极值及其求法(152) | 二、最大值最小值问题(156) | |
| 习题 3-5(160) | | |
| 第六节 函数图形的描绘 | | 162 |
| 习题 3-6(166) | | |
| 第七节 曲率 | | 167 |
| 一、弧微分(167) | 二、曲率及其计算公式(168) | 三、曲率圆与曲率半径(171) |
| 四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线(173) | | |
| 习题 3-7(175) | | |
| 第八节 方程的近似解 | | 176 |
| 一、二分法(176) | 二、切线法(178) | 习题 3-8(180) |
| 总习题三 | | 180 |

| | |
|--|-----|
| 第四章 不定积分 | 182 |
| 第一节 不定积分的概念与性质 | 182 |
| 一、原函数与不定积分的概念(182) 二、基本积分表(186) 三、不定积分的性质(187) 习题 4-1(190) | |
| 第二节 换元积分法 | 191 |
| 一、第一类换元法(191) 二、第二类换元法(198) 习题 4-2(204) | |
| 第三节 分部积分法 | 206 |
| 习题 4-3(210) | |
| 第四节 有理函数的积分 | 210 |
| 一、有理函数的积分(211) 二、可化为有理函数的积分举例(216) 习题 4-4(218) | |
| 第五节 积分表的使用 | 218 |
| 习题 4-5(221) | |
| 总习题四 | 221 |
| 第五章 定积分 | 223 |
| 第一节 定积分的概念与性质 | 223 |
| 一、定积分问题举例(223) 二、定积分定义(225) 三、定积分的性质(229) 习题 5-1(233) | |
| 第二节 微积分基本公式 | 234 |
| 一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系(234) 二、积分上限的函数及其导数(235) 三、牛顿-莱布尼茨公式(236) 习题 5-2(240) | |
| 第三节 定积分的换元法和分部积分法 | 242 |
| 一、定积分的换元法(242) 二、定积分的分部积分法(247) 习题 5-3(249) | |
| 第四节 反常积分 | 250 |
| 一、无穷限的反常积分(250) 二、无界函数的反常积分(253) 习题 5-4(256) | |
| * 第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数 | 256 |
| 一、无穷限反常积分的审敛法(256) 二、无界函数的反常积分的审敛法(260) 三、 Γ 函数(261) * 习题 5-5(263) | |
| 总习题五 | 264 |
| 第六章 定积分的应用 | 267 |
| 第一节 定积分的元素法 | 267 |
| 第二节 定积分在几何学上的应用 | 269 |
| 一、平面图形的面积(269) 二、体积(273) 三、平面曲线的弧长(276) 习题 6-2(279) | |

| | | |
|---------|----------------------|-----|
| 第三节 | 定积分在物理学上的应用 | 282 |
| 一、 | 变力沿直线所作的功(282) | |
| 二、 | 水压力(285) | |
| 三、 | 引力(286) | |
| 习题 6-3 | (287) | |
| 总习题六 | | 288 |
| 第七章 | 空间解析几何与向量代数 | 289 |
| 第一节 | 向量及其线性运算 | 289 |
| 一、 | 向量概念(289) | |
| 二、 | 向量的线性运算(290) | |
| 三、 | 空间直角坐标系(294) | |
| 四、 | 利用坐标作向量的线性运算(295) | |
| 五、 | 向量的模、方向角、投影(297) | |
| 习题 7-1 | (300) | |
| 第二节 | 数量积 向量积 * 混合积 | 301 |
| 一、 | 两向量的数量积(301) | |
| 二、 | 两向量的向量积(305) | |
| * 三、 | 向量的混合积(308) | |
| 习题 7-2 | (309) | |
| 第三节 | 曲面及其方程 | 310 |
| 一、 | 曲面方程的概念(310) | |
| 二、 | 旋转曲面(312) | |
| 三、 | 柱面(314) | |
| 四、 | 二次曲面(315) | |
| 习题 7-3 | (318) | |
| 第四节 | 空间曲线及其方程 | 319 |
| 一、 | 空间曲线的一般方程(319) | |
| 二、 | 空间曲线的参数方程(320) | |
| 三、 | 空间曲线在坐标面上的投影(323) | |
| 习题 7-4 | (324) | |
| 第五节 | 平面及其方程 | 325 |
| 一、 | 平面的点法式方程(325) | |
| 二、 | 平面的一般方程(326) | |
| 三、 | 两平面的夹角(328) | |
| 习题 7-5 | (329) | |
| 第六节 | 空间直线及其方程 | 330 |
| 一、 | 空间直线的一般方程(330) | |
| 二、 | 空间直线的对称式方程与参数方程(330) | |
| 三、 | 两直线的夹角(332) | |
| 四、 | 直线与平面的夹角(333) | |
| 五、 | 杂例(333) | |
| 习题 7-6 | (335) | |
| 总习题七 | | 337 |
| 附录 I | 二阶和三阶行列式简介 | 339 |
| 附录 II | 几种常用的曲线 | 344 |
| 附录 III | 积分表 | 347 |
| 习题答案与提示 | | 356 |

第一章 函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学的研究对象则是变动的量.所谓函数关系就是变量之间的依赖关系,极限方法是研究变量的一种基本方法.本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节 映射与函数

一、集合

1. 集合概念

集合是数学中的一个基本概念,我们先通过例子来说明这个概念.例如,一个书柜中的书构成一个集合,一间教室里的学生构成一个集合,全体实数构成一个集合等等.一般地,所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体,组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

通常用大写拉丁字母 A, B, C, \dots 表示集合,用小写拉丁字母 a, b, c, \dots 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$.一个集合,若它只含有限个元素,则称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有以下两种:一种是列举法,就是把集合的全体元素一一列举出来表示.例如,由元素 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的集合 A ,可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

另一种是描述法,若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,就可表示成

$$M = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}.$$

例如,集合 B 是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集,就可表示成

$$B = \{x | x^2 - 1 = 0\}.$$

对于数集,有时我们在表示数集的字母的右上角标上“*”来表示该数集内排除 0 的集,标上“+”来表示该数集内排除 0 与负数的集.

习惯上,全体非负整数即自然数的集合记作 N ,即

$$N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\};$$

全体整数的集合记作 \mathbf{Z} , 即

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\};$$

全体有理数的集合记作 \mathbf{Q} , 即

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\};$$

全体实数的集合记作 \mathbf{R} , \mathbf{R}^* 为排除数 0 的实数集, \mathbf{R}^+ 为全体正实数的集.

设 A, B 是两个集合, 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记作 $A = B$. 例如, 设

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\},$$

则 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$. 例如, $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 1 = 0\}$$

是空集, 因为适合条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的. 空集记作 \emptyset , 且规定空集 \emptyset 是任何集合 A 的子集, 即 $\emptyset \subset A$.

2. 集合的运算

集合的基本运算有以下几种: 并、交、差.

设 A, B 是两个集合, 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的并集 (简称并), 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的交集 (简称交), 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的差集 (简称差), 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

有时, 我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行, 所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时, 我们称集合 I 为全集或基本集, 称 $I \setminus A$ 为 A 的余集或补集, 记作 A^c . 例如, 在实数集 \mathbf{R} 中, 集合 $A = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$ 的余集就是

$$A^c = \{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x > 1\}.$$

集合的并、交、余运算满足下列法则.

设 A, B, C 为任意三个集合, 则有下列法则成立:

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
- (2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- (3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
- (4) 对偶律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

以上这些法则都可根据集合相等的定义验证. 现就对偶律的第一个等式: “两个集合的并集的余集等于它们的余集的交集”证明如下: 因为

$$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \Rightarrow x \in A^c \text{ 且 } x \in B^c \\ \Rightarrow x \in A^c \cap B^c,$$

$$\text{所以 } (A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c;$$

反之, 因为

$$x \in A^c \cap B^c \Rightarrow x \in A^c \text{ 且 } x \in B^c \Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \\ \Rightarrow x \in (A \cup B)^c,$$

$$\text{所以 } A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c.$$

$$\text{于是 } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

注 以上证明中, 符号“ \Rightarrow ”表示“推出”(或“蕴含”). 如果在证明的第一段中, 将符号“ \Rightarrow ”改用符号“ \Leftrightarrow ”(表示“等价”), 则证明的第二段可省略.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿(Descartes)乘积. 设 A, B 是任意两个集合, 在集合 A 中任意取一个元素 x , 在集合 B 中任意取一个元素 y , 组成一个有序对 (x, y) , 把这样的有序对作为新的元素, 它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积, 记为 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ 且 } y \in B\}.$$

例如, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记作 \mathbf{R}^2 .

3. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$. 数集

$$\{x | a < x < b\}$$

称为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点, 这里 $a \notin (a, b), b \notin (a, b)$. 数集

$$\{x | a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点, 这里 $a \in [a, b], b \in [a, b]$.

类似地可说明:

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间, 数 $b - a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看, 这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1-1(a) 与 (b) 所示. 此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间, 例如

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c), (d) 所示.

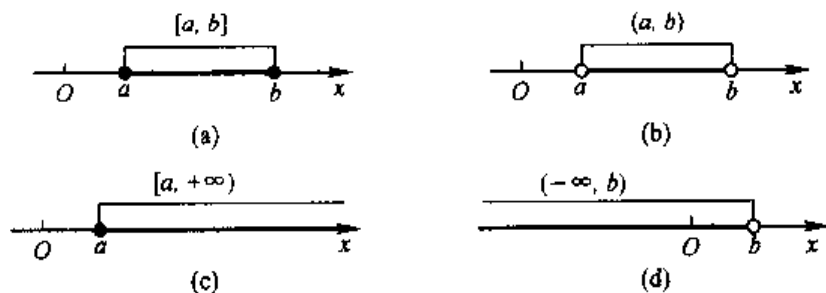


图 1-1

全体实数的集合 \mathbf{R} 也可记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间的场合, 我们就简单地称它为“区间”, 且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域, 记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 a 的一个邻域, 这个邻域称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心, δ 称为这邻域的半径 (图 1-2).

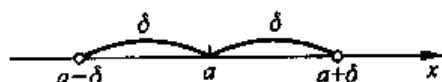


图 1-2

由于 $a - \delta < x < a + \delta$ 相当于 $|x - a| < \delta$, 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

因为 $|x - a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离, 所以 $U(a, \delta)$ 表示: 与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的 去心 δ 邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

这里 $0 < |x - a|$ 就表示 $x \neq a$.

为了方便, 有时把开区间 $(a - \delta, a)$ 称为 a 的 左 δ 邻域, 把开区间 $(a, a + \delta)$ 称为 a 的 右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域. 例如

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域, 这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a, b]$ 和闭区间 $[c, d]$.

二、映射

1. 映射概念

定义 设 X, Y 是两个非空集合, 如果存在一个法则 f , 使得对 X 中每个元素 x , 按法则 f , 在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 为从 X 到 Y 的 映射, 记作

$$f: X \rightarrow Y,$$

其中 y 称为元素 x (在映射 f 下) 的 像, 并记作 $f(x)$, 即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y (在映射 f 下) 的一个 原像; 集合 X 称为映射 f 的 定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = X$; X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的 值域, 记作 R_f 或 $f(X)$, 即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

从上述映射的定义中, 需要注意的是:

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素: 集合 X , 即定义域 $D_f = X$; 集合 Y , 即值域的范围: $R_f \subset Y$; 对应法则 f , 使对每个 $x \in X$, 有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

(2) 对每个 $x \in X$, 元素 x 的像 y 是唯一的; 而对每个 $y \in R_f$, 元素 y 的原像不一定是唯一的; 映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集, 即 $R_f \subset Y$, 不一定 $R_f = Y$.

例 1 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. 显然, f 是一个映射, f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = \{y \mid y \geq 0\}$, 它是 \mathbf{R} 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y , 除

$y=0$ 外,它的原像不是唯一的.如 $y=4$ 的原像就有 $x=2$ 和 $x=-2$ 两个.

例 2 设 $X = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $Y = \{(x, 0) | |x| \leq 1\}$, $f: X \rightarrow Y$, 对每个 $(x, y) \in X$, 有唯一确定的 $(x, 0) \in Y$ 与之对应. 显然 f 是一个映射, f 的定义域 $D_f = X$, 值域 $R_f = Y$. 在几何上, 这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间 $[-1, 1]$ 上.

例 3 设 $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, 对每个 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin x$. 这 f 是一个映射, 其定义域 $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 值域 $R_f = [-1, 1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射, 若 $R_f = Y$, 即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像, 则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射; 若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$, 它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为 X 到 Y 的单射; 若映射 f 既是单射, 又是满射, 则称 f 为一一映射(或双射).

上面例 1 中的映射, 既非单射, 又非满射; 例 2 中的映射不是单射, 是满射; 例 3 中的映射, 既是单射, 又是满射, 因此是一一映射.

映射又称为算子. 根据集合 X 、 Y 的不同情形, 在不同的数学分支中, 映射又有不同的惯用名称. 例如, 从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函, 从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换, 从实数集(或其子集) X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射, 则由定义, 对每个 $y \in R_f$, 有唯一的 $x \in X$, 适合 $f(x) = y$. 于是, 我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g , 即

$$g: R_f \rightarrow X,$$

对每个 $y \in R_f$, 规定 $g(y) = x$, 这 x 满足 $f(x) = y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1} , 其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域 $R_{f^{-1}} = X$.

按上述定义, 只有单射才存在逆映射. 所以, 在例 1, 2, 3 中, 只有例 3 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1} , 这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值:

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1],$$

其定义域 $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$, 值域 $R_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

设有两个映射

$$g: X \rightarrow Y_1, \quad f: Y_2 \rightarrow Z,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则, 它将每个 $x \in X$ 映成 $f[g(x)] \in Z$. 显然, 这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射, 这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射, 记作 $f \circ g$, 即

$$f \circ g: X \rightarrow Z, \\ (f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in X.$$

由复合映射的定义可知,映射 g 和 f 构成复合映射的条件是: g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内,即 $R_g \subset D_f$. 否则,不能构成复合映射. 由此可以知道,映射 g 和 f 的复合是有顺序的, $f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义,复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

例 4 设有映射 $g: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \sin x$, 映射 $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, 对每个 $u \in [-1, 1]$, $f(u) = \sqrt{1 - u^2}$. 则映射 g 和 f 构成的复合映射 $f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, 有

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|.$$

三、函数

1. 函数概念

定义 设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

函数定义中, 对每个 $x \in D$, 按对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系, 通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

需要指出, 按照上述定义, 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的: 前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则, 而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便, 习惯上常用记号“ $f(x), x \in D$ ”或“ $y = f(x), x \in D$ ”来表示定义在 D 上的函数, 这时应理解为由它所确定的函数 f .

表示函数的记号是可以任意选取的, 除了常用的 f 外, 还可使用其他的英文字母或希腊字母, 如“ g ”、“ F ”、“ φ ”等. 相应地, 函数可记作 $y = g(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数, 即把函数记作 $y = y(x)$. 但在同一个问题中, 讨论到几个不同的函数时, 为了表示区别, 需用不同的记号来表示它们.

函数是从实数集到实数集的映射, 其值域总在 \mathbf{R} 内, 因此构成函数的要素是: 定义域 D_f 及对应法则 f . 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 那么这两个函数就是相同的, 否则就是不同的.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,根据实际背景中变量的实际意义确定.例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t ,下落的距离为 s ,开始下落的时刻 $t=0$,落地的时刻 $t=T$,则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2, t \in [0, T].$$

这个函数的定义域就是区间 $[0, T]$;另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域.在这种约定之下,一般的用算式表达的函数可用“ $y = f(x)$ ”表达,而不必再表出 D_f .例如,函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$,函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$.

在函数的定义中,对每个 $x \in D$,对应的函数值 y 总是唯一的,这样定义的函数称为单值函数.如果给定一个对应法则,按这个法则,对每个 $x \in D$,总有确定的 y 值与之对应,但这个 y 不总是唯一的,我们称这种法则确定了一个多值函数.例如,设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 给出.显然,对每个 $x \in [-r, r]$,由方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 可确定出对应的 y 值,当 $x = r$ 或 $-r$ 时,对应 $y = 0$ 一个值;当 x 取 $(-r, r)$ 内任一个值时,对应的 y 有两个值.所以这方程确定了一个多值函数.对于多值函数,往往只要附加一些条件,就可以将它化为单值函数,这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支.例如,在由方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 给出的对应法则中,附加“ $y \geq 0$ ”的条件,即以“ $x^2 + y^2 = r^2$ 且 $y \geq 0$ ”作为对应法则,就可得到一个单值分支 $y = y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$;附加“ $y \leq 0$ ”的条件,即以“ $x^2 + y^2 = r^2$ 且 $y \leq 0$ ”作为对应法则,就可得到另一个单值分支 $y = y_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法),这在中学里大家已经熟悉.其中,用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x), x \in D$ 的图形(图 1-3).图中的 R_f 表示函数 $y = f(x)$ 的值域.

下面举几个函数的例子.

例 5 函数

$$y = 2$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $W = \{2\}$,它的图形是一条平行于 x 轴的直

线,如图 1-4 所示.

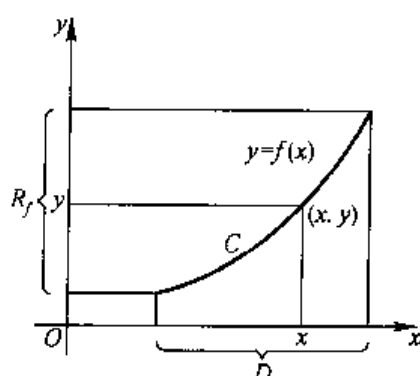


图 1-3

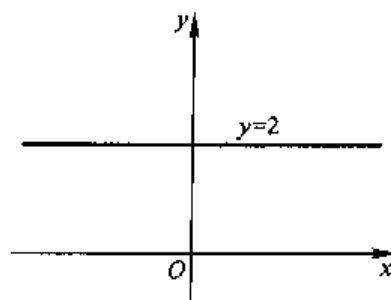


图 1-4

例 6 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 它的图形如图 1-5 所示. 这函数称为绝对值函数.

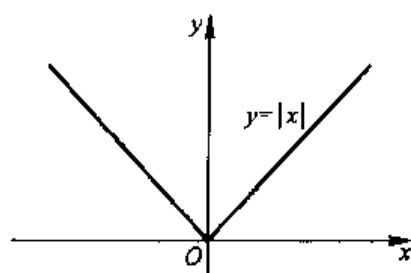


图 1-5

例 7 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 它的图形如图 1-6 所示. 对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

例 8 设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$. 例如, $\left[\frac{5}{7}\right] = 0, [\sqrt{2}] = 1, [\pi] = 3, [-1] = -1, [-3.5] = -4$. 把 x 看作变量, 则函数

$$y = [x]$$

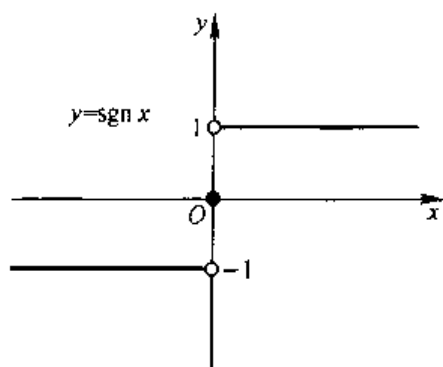


图 1-6

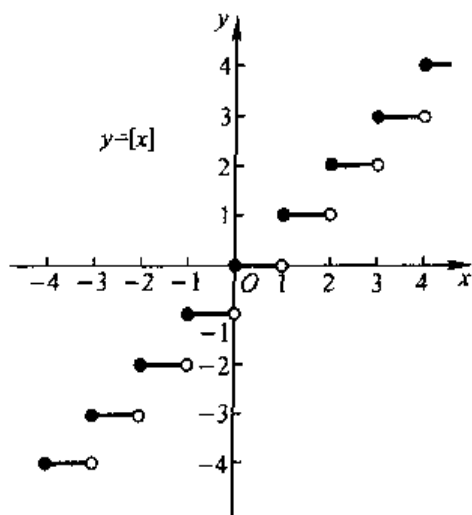


图 1-7

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-7 所示, 这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处, 图形发生跳跃, 跃度为 1. 这函数称为取整函数.

在例 6 和例 7 中看到, 有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数, 通常称为分段函数.

例 9 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D = [0, +\infty)$. 当 $x \in [0, 1]$ 时, 对应的函数值 $f(x) = 2\sqrt{x}$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 对应的函数值 $f(x) = 1+x$. 例如, $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $1 \in [0, 1]$, 所以 $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$; $3 \in (1, +\infty)$, 所以 $f(3) = 1+3 = 4$. 这函数的图形如图 1-8 所示.

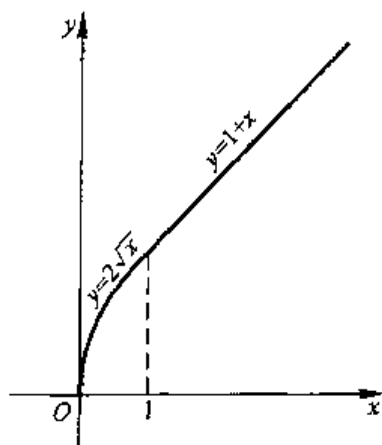


图 1-8

用几个式子来表示一个(不是几个!)函数, 不仅与函数定义并无矛盾, 而且有现实意义. 在自然科学和工程技术中, 经常会遇到分段函数的情形. 例如在等温过程中, 气体压强 p 与体积 V 的函数关系, 当 V 不太小时依从玻意耳定律; 当 V 相当小时, 函数关系就要用范德瓦耳斯方程来表示, 即

$$p = \begin{cases} \frac{k}{V}, & V \geq V_0, \\ \frac{\gamma}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}, & V < V_0 \end{cases}.$$

其中 k, α, β, γ 都是常量.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 如果存在数 K_1 , 使得

$$f(x) \leq K_1$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2 , 使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界, 而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在正数 M , 使得

$$|f(x)| \leq M$$

对任一 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界; 这就是说, 如果对于任何正数 M , 总存在 $x_1 \in X$, 使 $|f(x_1)| > M$, 那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如, 就函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内来说, 数 1 是它的一个上界, 数 -1 是它的一个下界 (当然, 大于 1 的任何数也是它的上界, 小于 -1 的任何数也是它的下界). 又

$$|\sin x| \leq 1$$

对任一实数 x 都成立, 故函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的. 这里 $M=1$ (当然也可取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|f(x)| \leq M$ 成立).

又如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内没有上界, 但有下界, 例如 1 就是它的一个下界. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为不存在这样的正数 M , 使 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$ 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 都成立 (x 接近于 0 时, 不存在确定的正数 K_1 , 使 $\frac{1}{x} \leq K_1$ 成立). 但是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内是有界的, 例如可取 $M=1$ 而使 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1$ 对于一切 $x \in (1, 2)$ 都成立.

容易证明, 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

(2) 函数的单调性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(图 1-9); 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(图 1-10). 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的, 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的; 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x) = x^2$ 不是单调的(图 1-11).

又例如, 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的(图 1-12).

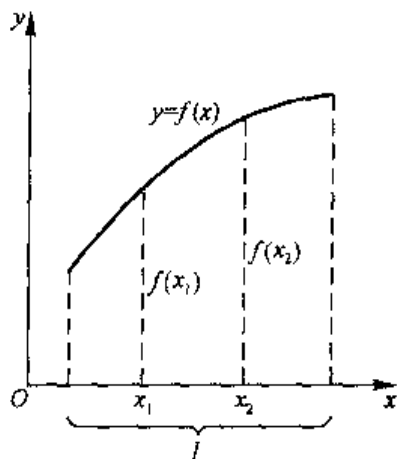


图 1-9

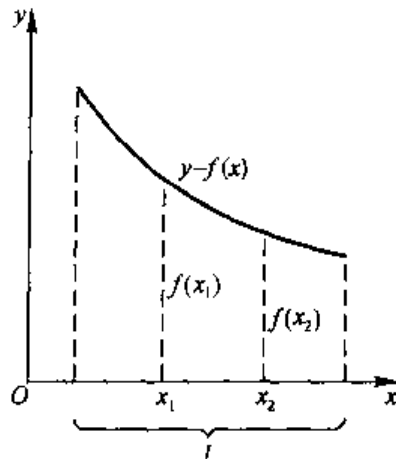


图 1-10

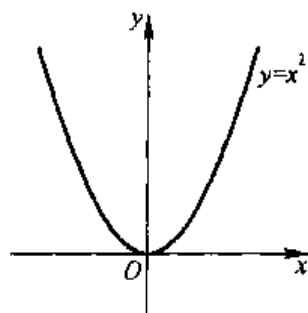


图 1-11

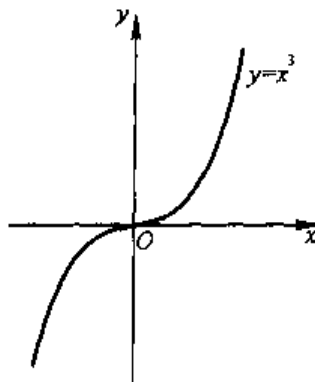


图 1-12

(3) 函数的奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$,

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$,

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如, $f(x) = x^2$ 是偶函数, 因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. 又例如, $f(x) = x^3$ 是奇函数, 因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的. 因为若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点, 则与它关于 y 轴对称的点 $A'(-x, f(x))$ 也在图形上(图 1-13).

奇函数的图形关于原点对称. 因为若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点, 则与它关于原点对称的点 $A''(-x, -f(x))$ 也在图形上(图 1-14).

函数 $y = \sin x$ 是奇函数. 函数 $y = \cos x$ 是偶函数. 函数 $y = \sin x + \cos x$ 既非奇函数, 也非偶函数.

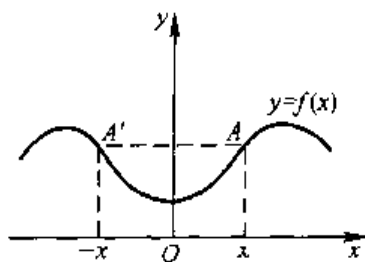


图 1-13

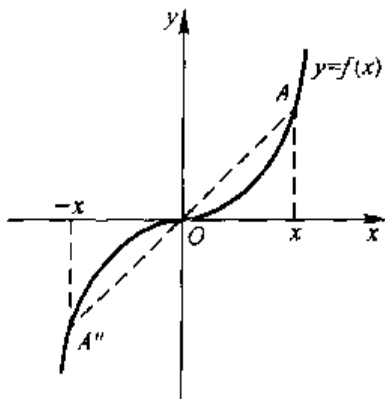


图 1-14

(4) **函数的周期性** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在一个正数 l , 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且

$$f(x+l) = f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数 $\sin x, \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

图 1-15 表示周期为 l 的一个周期函数. 在每个长度为 l 的区间上, 函数图形有相同的形状.

并非每个周期函数都有最小正周期. 下面的函数就属于这种情形.

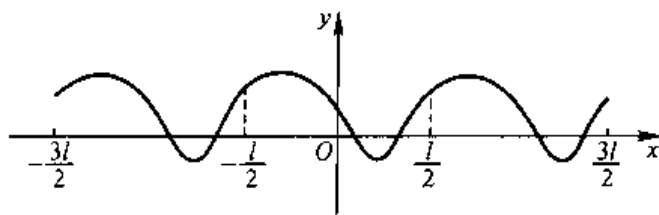


图 1-15

例 10 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{Q}^c. \end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数,任何正有理数 r 都是它的周期.因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小正周期.

3. 反函数与复合函数

作为逆映射的特例,我们有以下反函数的概念.

设函数 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$,称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

按此定义,对每个 $y \in f(D)$,有唯一的 $x \in D$,使得 $f(x) = y$,于是有

$$f^{-1}(y) = x.$$

这就是说,反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的.

例如,函数 $y = x^3, x \in \mathbf{R}$ 是单射,所以它的反函数存在,其反函数为 $x = y^{\frac{1}{3}}, y \in \mathbf{R}$.

由于习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,于是 $y = x^3, x \in \mathbf{R}$ 的反函数通常写作 $y = x^{\frac{1}{3}}, x \in \mathbf{R}$.

一般地, $y = f(x), x \in D$ 的反函数记成 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$.

若 f 是定义在 D 上的单调函数,则 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射,于是 f 的反函数 f^{-1} 必定存在,而且容易证明 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的单调函数.事实上,不妨设 f 在 D 上单调增加,现在来证明 f^{-1} 在 $f(D)$ 上也是单调增加的.

任取 $y_1, y_2 \in f(D)$,且 $y_1 < y_2$.按函数 f 的定义,对 y_1 ,在 D 内存在唯一的原像 x_1 ,使得 $f(x_1) = y_1$,于是 $f^{-1}(y_1) = x_1$;对 y_2 ,在 D 内存在唯一的原像 x_2 ,使得 $f(x_2) = y_2$,于是 $f^{-1}(y_2) = x_2$.

如果 $x_1 > x_2$,则由 $f(x)$ 单调增加,必有 $y_1 > y_2$;如果 $x_1 = x_2$,则显然有 $y_1 = y_2$.这两种情形都与假设 $y_1 < y_2$ 不符,故必有 $x_1 < x_2$,即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.这就证明了 f^{-1} 在 $f(D)$ 上是单调增加的.

相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$ 来说,原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数.把直

接函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上, 这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-16). 这是因为如果 $P(a, b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点, 则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义, 有 $a=f^{-1}(b)$, 故 $Q(b, a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点; 反之, 若 $Q(b, a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点, 则 $P(a, b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a, b)$ 与 $Q(b, a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的.

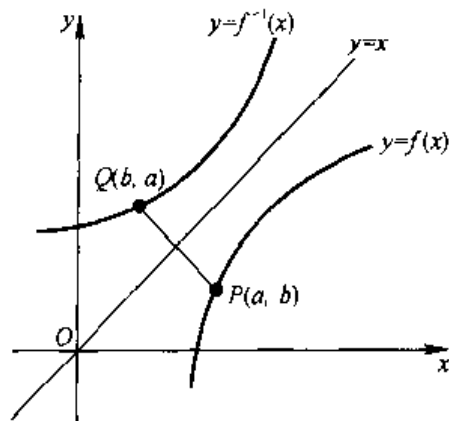


图 1-16

复合函数是复合映射的一种特例, 按照通常函数的记号, 复合函数的概念可如下表述.

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1 , 函数 $u=g(x)$ 在 $D^{\text{①}}$ 上有定义, 且 $g(D) \subset D_1$, 则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)], x \in D$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数, 它的定义域为 D , 变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f \circ g$, 即

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

与复合映射一样, g 与 f 能构成复合函数 $f \circ g$ 的条件是: 函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_f 内, 即 $g(D) \subset D_f$. 否则, 不能构成复合函数. 例如, $y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$, $u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在 $D=\left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ 上有定义, 且 $g(D) \subset [-1, 1]$, 则 g 与 f 可构成复合函数

$$y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2}, x \in D;$$

但函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数, 这是因为对任一 $x \in$

① 这里的 D 是构成的复合函数的定义域, 它可以是函数 $u=g(x)$ 的定义域的一个非空子集.

$\mathbf{R}, u = 2 + x^2$ 均不在 $y = \arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 内.

有时,也会遇到两个以上函数所构成的复合函数,只要它们顺次满足构成复合函数的条件.例如,函数 $y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \frac{x}{2}$ 可构成复合函数 $y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$, 这里 u 及 v 都是中间变量,复合函数的定义域是 $D = \{x \mid 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 而不是 $v = \frac{x}{2}$ 的自然定义域 \mathbf{R}, D 是 \mathbf{R} 的一个非空子集.

4. 函数的运算

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域依次为 $D_1, D_2, D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

和(差) $f \pm g$: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$;

积 $f \cdot g$: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$;

商 $\frac{f}{g}$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$.

例 11 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l, l)$, 证明必存在 $(-l, l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$, 使得

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

证 先分析如下: 假若这样的 $g(x), h(x)$ 存在, 使得

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad (1)$$

且 $g(-x) = g(x), h(-x) = -h(x)$.

于是有

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x). \quad (2)$$

利用(1)、(2)式, 就可作出 $g(x), h(x)$. 这就启发我们作如下证明:

$$\text{作} \quad g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

$$h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

则

$$g(x) + h(x) = f(x),$$

$$g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g(x),$$

$$h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -h(x).$$

证毕.

5. 初等函数

在初等数学中已经讲过下面几类函数:

幂函数: $y = x^\mu$ ($\mu \in \mathbf{R}$ 是常数),

指数函数: $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$),

对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, 特别当 $a = e^{\textcircled{1}}$ 时, 记为 $y = \ln x$),

三角函数: 如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等,

反三角函数: 如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 例如

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad y = \sin^2 x, \quad y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}$$

等都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

应用上常遇到以 e 为底的指数函数 $y = e^x$ 和 $y = e^{-x}$ 所产生的双曲函数以及它们的反函数——反双曲函数. 它们的定义如下:

$$\text{双曲正弦} \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\text{双曲余弦} \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\text{双曲正切} \quad \text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

这三个双曲函数的简单性态如下:

双曲正弦的定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 它是奇函数, 它的图形通过原点且关于原点对称. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内它是单调增加的. 当 x 的绝对值很大时, 它的图形在第一象限内接近于曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$; 在第三象限内接近于曲线 $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ (图 1-17).

双曲余弦的定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 它是偶函数, 它的图形通过点 $(0, 1)$ 且关于 y 轴对称. 在区间 $(-\infty, 0)$ 内它是单调减少的; 在区间 $(0, +\infty)$ 内它是单调增加的. $\text{ch } 0 = 1$ 是这函数的最小值. 当 x 的绝对值很大时, 它的图形在第一象限内接近于曲线 $y = \frac{1}{2}e^x$, 在第二象限内接近于曲线 $y = \frac{1}{2}e^{-x}$. (图 1-17).

双曲正切的定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 它是奇函数, 它的图形通过原点且关于原点对称. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内它是单调增加的. 它的图形夹在水平直线 $y = 1$ 及 $y = -1$ 之间; 且当 x 的绝对值很大时, 它的图形在第一象限内接近于直线 $y = 1$, 而在第三象限内接近于直线 $y = -1$ (图 1-18).

① e 是一个无理数, 这个数的意义见本章第六节.

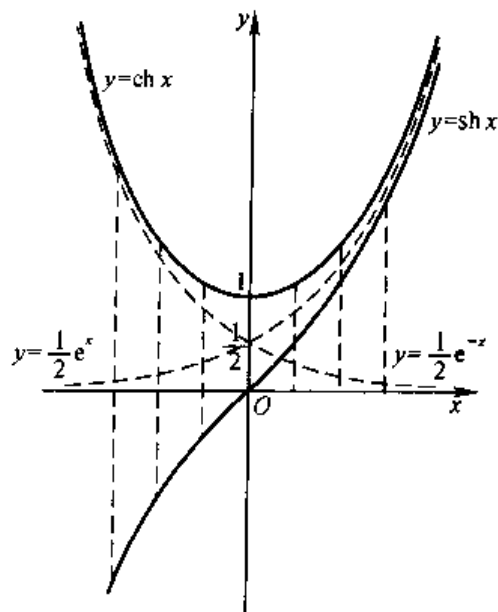


图 1-17

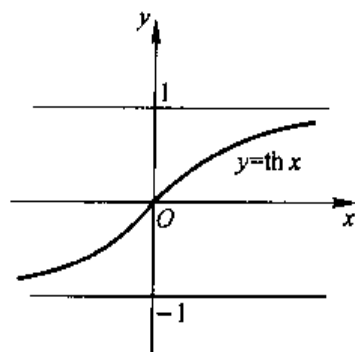


图 1-18

根据双曲函数的定义,可证下列四个公式:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \quad (1)$$

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y; \quad (2)$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y; \quad (3)$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \quad (4)$$

我们来证明公式(1),其他三个公式读者可自行证明.由定义,得

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\ &\quad + \frac{e^{x+y} + e^{y-x} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \text{sh}(x+y).$$

由以上几个公式可以导出其他一些公式,例如:

在公式(4)中令 $x = y$, 并注意到 $\text{ch } 0 = 1$, 得

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1; \quad (5)$$

在公式(1)中令 $x = y$, 得

$$\text{sh } 2x = 2\text{sh } x \text{ch } x; \quad (6)$$

在公式(3)中令 $x = y$, 得

$$\text{ch } 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x. \quad (7)$$

以上关于双曲函数的公式(1)至(7)与三角函数的有关公式相类似, 把它们对比一下可帮助记忆.

双曲函数 $y = \text{sh } x$, $y = \text{ch } x (x \geq 0)$, $y = \text{th } x$ 的反函数依次记为

$$\text{反双曲正弦} \quad y = \text{arsh } x,$$

$$\text{反双曲余弦} \quad y = \text{arch } x,$$

$$\text{反双曲正切} \quad y = \text{arth } x.$$

这些反双曲函数都可通过自然对数函数来表示, 分别讨论如下:

$y = \text{arsh } x$ 是 $x = \text{sh } y$ 的反函数, 因此, 从

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

中解出 y 来便是 $\text{arsh } x$. 令 $u = e^y$, 则由上式有

$$u^2 - 2xu - 1 = 0.$$

这是关于 u 的一个二次方程, 它的根为

$$u = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

因 $u = e^y > 0$, 故上式根号前应取正号, 于是

$$u = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

由于 $y = \ln u$, 故得

$$y = \text{arsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

函数 $y = \text{arsh } x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 它是奇函数, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内为单调增加. 由 $y = \text{sh } x$ 的图形, 根据反函数的作图法, 可得 $y = \text{arsh } x$ 的图形如图 1-19 所示.

下面讨论双曲余弦 $y = \text{ch } x (x \geq 0)$ 的反函数. 由 $x = \text{ch } y (y \geq 0)$, 有

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, y \geq 0.$$

由此得 $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$, 故

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}).$$

上式中 x 的值必须满足条件 $x \geq 1$, 而其中平方根前的符号由于 $y \geq 0$ 应取正. 故

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

上述双曲余弦 $y = \operatorname{ch} x (x \geq 0)$ 的反函数称为反双曲余弦的主值, 记作 $y = \operatorname{arch} x$, 即

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

这样规定的函数 $y = \operatorname{arch} x$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, 它在区间 $[1, +\infty)$ 上是单调增加的 (图 1-20).

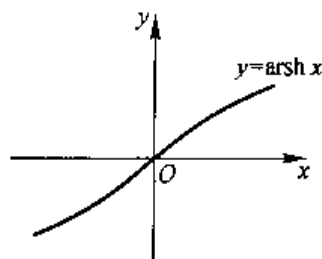


图 1-19

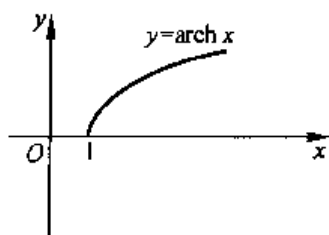


图 1-20

类似地可得

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

这函数的定义域为开区间 $(-1, 1)$, 它在开区间 $(-1, 1)$ 内是单调增加的奇函数. 它的图形关于原点对称 (图 1-21).

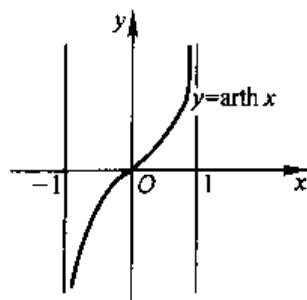


图 1-21

习 题 1-1

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B = [-10, 3]$, 写出 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式.

2. 设 A, B, C 是任意三个集合, 证明对偶律: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset X$. 证明

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

$$(2) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使 $g \circ f = I_X, f \circ g = I_Y$, 其中 I_X, I_Y 分别是 X, Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x \in X$, 有 $I_X x = x$; 对于每一个 $y \in Y$, 有 $I_Y y = y$. 证明: f 是双射, 且 g 是 f 的逆映射: $g = f^{-1}$.

5. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X$. 记 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$, 证明:

$$(1) f^{-1}(f(A)) \supset A;$$

$$(2) \text{当 } f \text{ 是单射时, 有 } f^{-1}(f(A)) = A.$$

6. 求下列函数的自然定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2};$$

$$(2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} \sqrt{1-x^2};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(5) y = \sin \sqrt{x};$$

$$(6) y = \tan(x+1);$$

$$(7) y = \arcsin(x-3);$$

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x+1);$$

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

7. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x;$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1};$$

$$(4) f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

8. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, \quad (-\infty, 1);$$

$$(2) y = x + \ln x, \quad (0, +\infty).$$

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的.

证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

- (1) $y = x^2(1 - x^2)$; (2) $y = 3x^2 - x^3$;
 (3) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$; (4) $y = x(x - 1)(x + 1)$;
 (5) $y = \sin x - \cos x + 1$; (6) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$.

13. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数,指出其周期:

- (1) $y = \cos(x - 2)$; (2) $y = \cos 4x$;
 (3) $y = 1 + \sin \pi x$; (4) $y = x \cos x$;
 (5) $y = \sin^2 x$.

14. 求下列函数的反函数:

- (1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; (2) $y = \frac{1-x}{1+x}$;
 (3) $y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad - bc \neq 0)$; (4) $y = 2\sin 3x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right)$;
 (5) $y = 1 + \ln(x+2)$; (6) $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$.

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

16. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

- (1) $y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}$;
 (2) $y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}$;
 (3) $y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2$;
 (4) $y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1$;
 (5) $y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1$.

17. 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$,求下列各函数的定义域:

- (1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;
 (3) $f(x+a) (a > 0)$; (4) $f(x+a) + f(x-a) (a > 0)$.

18. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi = 40^\circ$ (图 1-22).当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L (L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并指明其定义域.

20. 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元.厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台以上的,每多订购 1 台,售价就降低 1 分,但最低价为每台 75 元.

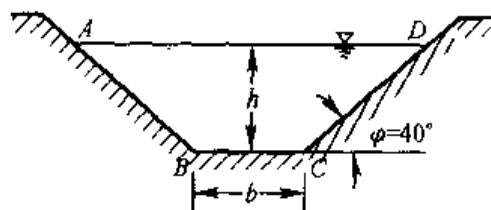


图 1-22

- (1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;
- (2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;
- (3) 某一商行订购了 1 000 台, 厂方可获利润多少?

第二节 数列的极限

一、数列极限的定义

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的. 例如, 我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术, 就是极限思想在几何学上的应用.

设有一圆, 首先作内接正六边形, 把它的面积记为 A_1 ; 再作内接正十二边形, 其面积记为 A_2 ; 再作内接正二十四边形, 其面积记为 A_3 ; 循此下去, 每次边数加倍, 一般地把内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n ($n \in \mathbf{N}^+$). 这样, 就得到一系列内接正多边形的面积:

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots,$$

它们构成一列有次序的数. 当 n 越大, 内接正多边形与圆的差别就越小, 从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确. 但是无论 n 取得如何大, 只要 n 取定了, A_n 终究只是多边形的面积, 还不是圆的面积. 因此, 设想 n 无限增大(记为 $n \rightarrow \infty$, 读作 n 趋于无穷大), 即内接正多边形的边数无限增加, 在这个过程中, 内接正多边形无限接近于圆, 同时 A_n 也无限接近于某一确定的数值, 这个确定的数值就理解为圆的面积. 这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数(所谓数列) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限. 在圆面积问题中我们看到, 正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积.

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法, 已成为高等数学中的一种基本方法, 因此有必要作进一步的阐明.

先说明数列的概念. 如果按照某一法则, 对每个 $n \in \mathbf{N}^+$, 对应着一个确定的实数 x_n , 这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

就叫做数列, 简记为数列 $\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫做数列的项, 第 n 项 x_n 叫做数列的一般项. 例如:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;$$

$$2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$$

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots;$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

都是数列的例子, 它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1}, 2^n, \frac{1}{2^n}, (-1)^{n+1}, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}.$$

在几何上, 数列 $\{x_n\}$ 可看作数轴上的一个动点, 它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ (图 1-23).

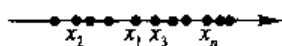


图 1-23

数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为正整数 n 的函数:

$$x_n = f(n), n \in \mathbf{N}^+.$$

当自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \dots$ 等一切正整数时, 对应的函数值就排列成数列 $\{x_n\}$.

对于我们要讨论的问题来说, 重要的是: 当 n 无限增大时 (即 $n \rightarrow \infty$ 时), 对应的 $x_n = f(n)$ 是否能无限接近于某个确定的数值? 如果能够的话, 这个数值等于多少?

我们对数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \dots \quad (1)$$

进行分析. 在这数列中,

$$x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

我们知道, 两个数 a 与 b 之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值 $|b - a|$ 来度量 (在数轴上 $|b - a|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离), $|b - a|$ 越小, a 与 b 就越接近.

就数列(1)来说,因为

$$|x_n - 1| = \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n},$$

由此可见,当 n 越来越大时, $\frac{1}{n}$ 越来越小,从而 x_n 就越来越接近于 1. 因为只要 n 足够大, $|x_n - 1|$ 即 $\frac{1}{n}$ 可以小于任意给定的正数,所以说,当 n 无限增大时, x_n 无限接近于 1. 例如,给定 $\frac{1}{100}$, 欲使 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$, 只要 $n > 100$, 即从第 101 项起, 都能使不等式

$$|x_n - 1| < \frac{1}{100}$$

成立. 同样地, 如果给定 $\frac{1}{10\,000}$, 则从第 10 001 项起, 都能使不等式

$$|x_n - 1| < \frac{1}{10\,000}$$

成立. 一般地, 不论给定的正数 ε 多么小, 总存在着一个正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

都成立. 这就是数列 $x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} (n = 1, 2, \dots)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时无限接近于 1

这件事的实质. 这样的个数 1, 叫做数列 $x_n = \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} (n = 1, 2, \dots)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限.

一般地, 有如下数列极限的定义.

定义 设 $\{x_n\}$ 为一数列, 如果存在常数 a , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立, 那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

或

$$x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

如果不存在这样的常数 a , 就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限, 或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的, 习惯上也说 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

上面定义中正数 ε 可以任意给定是很重要的, 因为只有这样, 不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近 的意思. 此外还应注意: 定义中的正整数

N 是与任意给定的正数 ϵ 有关的,它随着 ϵ 的给定而选定.

我们给“数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a ”一个几何解释:

将常数 a 及数列 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来,再在数轴上作点 a 的 ϵ 邻域即开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ (图 1-24).

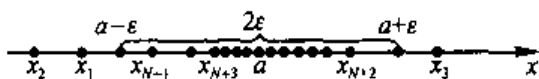


图 1-24

因不等式 $|x_n - a| < \epsilon$

与不等式 $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$

等价,所以当 $n > N$ 时,所有的点 x_n 都落在开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内,而只有有限个(至多只有 N 个)在这区间以外.

为了表达方便,引入记号“ \forall ”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”,记号“ \exists ”表示“存在”.于是,“对于任意给定的 $\epsilon > 0$ ”写成“ $\forall \epsilon > 0$ ”,“存在正整数 N ”写成“ \exists 正整数 N ”,数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义可表达为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \text{ 正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \epsilon.$$

数列极限的定义并未直接提供如何去求数列的极限,以后要讲极限的求法,而现在只先举几个说明极限概念的例子.

例 1 证明数列

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n + (-1)^{n-1}}{n}, \dots$$

的极限是 1.

$$\text{证 } |x_n - a| = \left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n},$$

为了使 $|x_n - a|$ 小于任意给定的正数 ϵ , 只要

$$\frac{1}{n} < \epsilon \quad \text{或} \quad n > \frac{1}{\epsilon}.$$

所以, $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left| \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} - 1 \right| < \epsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^{n-1}}{n} = 1.$$

例 2 已知 $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限是 0.

$$\text{证 } |x_n - a| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1}.$$

$\forall \varepsilon > 0$ (设 $\varepsilon < 1$), 只要

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{或} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 必定成立. 所以, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$, 则当 $n > N$ 时就有

$$\left| \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0 \right| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0.$$

注意 在利用数列极限的定义来论证某个数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限时, 重要的是对于任意给定的正数 ε , 要能够指出定义中所说的这种正整数 N 确实存在, 但没有必要去求最小的 N . 如果知道 $|x_n - a|$ 小于某个量 (这个量是 n 的一个函数), 那么当这个量小于 ε 时, $|x_n - a| < \varepsilon$ 当然也成立. 若令这个量小于 ε 来定出 N 比较方便的话, 就可采用这种方法. 例 2 便是这样做的.

例 3 设 $|q| < 1$, 证明等比数列

$$1, q, q^2, \dots, q^{n-1}, \dots$$

的极限是 0.

证 $\forall \varepsilon > 0$ (设 $\varepsilon < 1$),

$$\text{因为 } |x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1},$$

要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要

$$|q|^{n-1} < \varepsilon.$$

取自然对数, 得 $(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon$. 因 $|q| < 1$, $\ln|q| < 0$,

$$\text{故 } n > 1 + \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

取 $N = \left[1 + \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^{n-1} - 0| < \varepsilon, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0.$$

二、收敛数列的性质

下面四个定理都是有关收敛数列的性质.

定理 1 (极限的唯一性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么它的极限唯一.

证 用反证法. 假设同时有 $x_n \rightarrow a$ 及 $x_n \rightarrow b$, 且 $a < b$. 取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. 因为

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故 \exists 正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2} \quad (2)$$

都成立. 同理, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, 故 \exists 正整数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 不等式

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2} \quad (3)$$

都成立. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ (这式子表示 N 是 N_1 和 N_2 中较大的那个数), 则当 $n > N$ 时, (2) 式及 (3) 式会同时成立. 但由 (2) 式有 $x_n < \frac{a+b}{2}$, 由 (3) 式有 $x_n > \frac{a+b}{2}$, 这是不可能的. 这矛盾证明了本定理的断言.

例 4 证明数列 $x_n = (-1)^{n+1} (n=1, 2, \cdots)$ 是发散的.

证 如果这数列收敛, 根据定理 1 它有唯一的极限, 设极限为 a , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 按数列极限的定义, 对于 $\epsilon = \frac{1}{2}$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \frac{1}{2}$ 成立; 即当 $n > N$ 时, x_n 都在开区间 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 内. 但这是不可能的, 因为 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 无休止地一再重复取得 1 和 -1 这两个数, 而这两个数不可能同时属于长度为 1 的开区间 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 内. 因此这数列发散.

下面先介绍数列的有界性概念, 然后证明收敛数列的有界性.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在着正数 M , 使得对于一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n| \leq M,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的; 如果这样的正数 M 不存在, 就说数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

例如, 数列 $x_n = \frac{n}{n+1} (n=1, 2, \cdots)$ 是有界的, 因为可取 $M=1$, 而使

$$\left| \frac{n}{n+1} \right| \leq 1$$

对于一切正整数 n 都成立.

数列 $x_n = 2^n (n=1, 2, \cdots)$ 是无界的, 因为当 n 无限增加时, 2^n 可超过任何正数.

数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M, M]$ 上.

定理 2 (收敛数列的有界性) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

证 因为数列 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 根据数列极限的定义, 对于 $\epsilon = 1$, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < 1$$

都成立. 于是, 当 $n > N$ 时,

$$|x_{n+1}| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}$, 那么数列 $\{x_n\}$ 中的一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n| \leq M.$$

这就证明了数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

根据上述定理, 如果数列 $\{x_n\}$ 无界, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定发散. 但是, 如果数列 $\{x_n\}$ 有界, 却不能断定数列 $\{x_n\}$ 一定收敛, 例如数列

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

有界, 但例 4 证明了这数列是发散的. 所以数列有界是数列收敛的必要条件, 但不是充分条件.

定理 3 (收敛数列的保号性) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 那么存在正整数 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

证 就 $a > 0$ 的情形证明. 由数列极限的定义, 对 $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, \exists 正整数 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

从而

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

推论 如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那么 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$).

证 设数列 $\{x_n\}$ 从第 N_1 项起, 即当 $n > N_1$ 时有 $x_n \geq 0$. 现在用反证法证明. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a < 0$, 则由定理 3 知, \exists 正整数 $N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $x_n < 0$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时, 按假定有 $x_n \geq 0$, 按定理 3 有 $x_n < 0$, 这引起矛盾. 所以必有 $a \geq 0$.

数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \leq 0$ 的情形, 可以类似地证明.

最后, 介绍子数列的概念以及关于收敛的数列与其子数列间关系的一个定理.

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序, 这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列 (或子列).

设在数列 $\{x_n\}$ 中, 第一次抽取 x_{n_1} , 第二次在 x_{n_1} 后抽取 x_{n_2} , 第三次在 x_{n_2} 后抽取 x_{n_3} …… , 这样无休止地抽取下去, 得到一个数列

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots,$$

这个数列 $\{x_{n_k}\}$ 就是数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列.

注意 在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中, 一般项 x_{n_k} 是第 k 项, 而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项. 显然, $n_k \geq k$.

定理 4 (收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是 a .

证 设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立.

取 $K = N$, 则当 $k > K$ 时, $n_k > n_K = n_N \geq N$. 于是 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

证毕.

由定理 4 可知, 如果数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限, 那么数列 $\{x_n\}$ 是发散的. 例如, 例 4 中的数列

$$1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

的子数列 $\{x_{2k-1}\}$ 收敛于 1, 而子数列 $\{x_{2k}\}$ 收敛于 -1, 因此数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) 是发散的. 同时这个例子也说明, 一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

习 题 1-2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 写出它们的极限:

$$(1) x_n = \frac{1}{2^n}; \quad (2) x_n = (-1)^n \frac{1}{n};$$

$$(3) x_n = 2 + \frac{1}{n^2}; \quad (4) x_n = \frac{n-1}{n+1};$$

$$(5) x_n = n(-1)^n.$$

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$. 问 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$ 求出 N , 使当 $n > N$ 时, x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε . 当 $\varepsilon = 0.001$ 时, 求出数 N .

3. 根据数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0.999 \cdots 9}_{n \uparrow} = 1.$$

4. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明: 如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限, 但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

6. 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $x_{2k-1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明: $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

第三节 函数的极限

一、函数极限的定义

因为数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为 n 的函数: $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}^+$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a , 就是: 当自变量 n 取正整数而无限增大 (即 $n \rightarrow \infty$) 时, 对应的函数值 $f(n)$ 无限接近于确定的数 a . 把数列极限概念中的函数为 $f(n)$ 而自变量的变化过程为 $n \rightarrow \infty$ 等特殊性质撇开, 这样可以引出函数极限的一般概念; 在自变量的某个变化过程中, 如果对应的函数值无限接近于某个确定的数, 那么这个确定的数就叫做在这一变化过程中函数的极限. 这个极限是与自变量的变化过程密切相关的, 由于自变量的变化过程不同, 函数的极限就表现为不同的形式. 数列极限看作函数 $f(n)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 这里自变量的变化过程是 $n \rightarrow \infty$. 下面讲述自变量的变化过程为其他情形时函数 $f(x)$ 的极限, 主要研究两种情形:

(1) 自变量 x 任意地接近于有限值 x_0 或者说趋于有限值 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0$) 时, 对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形;

(2) 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大即趋于无穷大 (记作 $x \rightarrow \infty$) 时, 对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形.

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

现在考虑自变量 x 的变化过程为 $x \rightarrow x_0$. 如果在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A , 那么就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限. 当然, 这里我们首先假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内是有定义的.

在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A , 就是 $|f(x) - A|$ 能任意小. 如数列极限概念所述, $|f(x) - A|$ 能任意小这件事可以用 $|f(x) - A| < \epsilon$ 来表达, 其中 ϵ 是任意给定的正数. 因为函数值 $f(x)$ 无限接近于 A 是在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中实现的, 所以对于任意给定的正数 ϵ , 只要求充分接近于 x_0 的 x 所对应的函数值 $f(x)$ 满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$; 而充分接近于 x_0 的 x 可表达为 $0 < |x - x_0| < \delta$, 其中 δ 是某个正数. 从几何上看, 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的 x 的全体, 就是点 x_0 的去心 δ 邻域, 而邻域半径 δ 则体现了 x 接近 x_0 的程度.

通过以上分析,我们给出 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限的定义如下.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{)}.$$

我们指出, 定义中 $0 < |x - x_0|$ 表示 $x \neq x_0$, 所以 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 有没有极限, 与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义并无关系.

定义 1 可以简单地表述为:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限为 A 的几何解释如下: 任意给定一正数 ε , 作平行于 x 轴的两条直线 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$, 介于这两条直线之间是一横条区域. 根据定义, 对于给定的 ε , 存在着点 x_0 的一个 δ 邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 当 $y = f(x)$ 的图形上的点的横坐标 x 在邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内, 但 $x \neq x_0$ 时, 这些点的纵坐标 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

或 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

亦即这些点落在上面所作的横条区域内 (图 1-25).

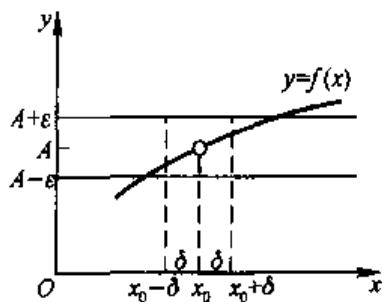


图 1-25

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, 此处 c 为一常数.

证 这里 $|f(x) - A| = |c - c| = 0$, 因此 $\forall \varepsilon > 0$, 可任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 能使不等式

$$|f(x) - A| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

成立. 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

证 这里 $|f(x) - A| = |x - x_0|$, 因此 $\forall \epsilon > 0$, 总可取 $\delta = \epsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta = \epsilon$ 时, 能使不等式 $|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$ 成立. 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例 3 证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1.$$

证 由于

$$|f(x) - A| = |(2x - 1) - 1| = 2|x - 1|,$$

为了使 $|f(x) - A| < \epsilon$, 只要

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}.$$

所以, $\forall \epsilon > 0$, 可取 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, 则当 x 适合不等式

$$0 < |x - 1| < \delta$$

时, 对应的函数值 $f(x)$ 就满足不等式

$$|f(x) - 1| = |(2x - 1) - 1| < \epsilon.$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = 1.$$

例 4 证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

证 这里, 函数在点 $x = 1$ 是没有定义的, 但是函数当 $x \rightarrow 1$ 时的极限存在或不存在与它并无关系. 事实上, $\forall \epsilon > 0$, 不等式

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon$$

约去非零因子 $x - 1$ 后, 就化为

$$|x + 1 - 2| = |x - 1| < \epsilon,$$

因此, 只要取 $\delta = \epsilon$, 那么当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 就有

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

例 5 证明: 当 $x_0 > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

证 $\forall \epsilon > 0$, 因为

$$|f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}} |x - x_0|,$$

要使 $|f(x) - A| < \epsilon$, 只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0} \epsilon$ 且 $x \geq 0$, 而 $x \geq 0$ 可用 $|x - x_0| \leq x_0$ 保证, 因此取 $\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0} \epsilon\}$ (这式子表示, δ 是 x_0 和 $\sqrt{x_0} \epsilon$ 两个数中较小的那个数), 则当 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 \sqrt{x} 就满足不等式

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

上述 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限概念中, x 是既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0 的. 但有时只能或只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^-$) 的情形, 或 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0 (记作 $x \rightarrow x_0^+$) 的情形. 在 $x \rightarrow x_0^-$ 的情形, x 在 x_0 的左侧, $x < x_0$. 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, 把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$, 那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

类似地, 在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, 把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 < x < x_0 + \delta$, 那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

根据 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义, 以及左极限和右极限的定义, 容易证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在并且相等, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+).$$

因此, 即使 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 都存在, 但若不相等, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

例 6 函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1 & x > 0. \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

仿例 3 可证当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的左极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1,$$

而右极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1,$$

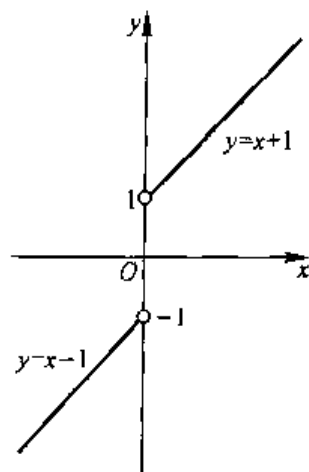


图 1-26

因为左极限和右极限存在但不相等,所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

不存在(图 1-26).

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

如果在 $x \rightarrow \infty$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A ,那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限.精确地说,就是

定义 2 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义.如果存在常数 A ,对于任意给定的正数 ϵ (不论它多么小),总存在着正数 X ,使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (\text{当 } x \rightarrow \infty).$$

定义 2 可简单地表达为:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时,有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

如果 $x > 0$ 且无限增大(记作 $x \rightarrow +\infty$),那么只要把上面定义中的 $|x| > X$ 改为 $x > X$,就可得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义.同样,如果 $x < 0$ 而 $|x|$ 无限增大(记作 $x \rightarrow -\infty$),那么只要把 $|x| > X$ 改为 $x < -X$,便得 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义.

从几何上来说, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的意义是:作直线 $y = A - \epsilon$ 和 $y = A + \epsilon$,则总有一个正数 X 存在,使得当 $x < -X$ 或 $x > X$ 时,函数 $y = f(x)$ 的图形位于这两直线之间(图 1-27).

例 7 证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

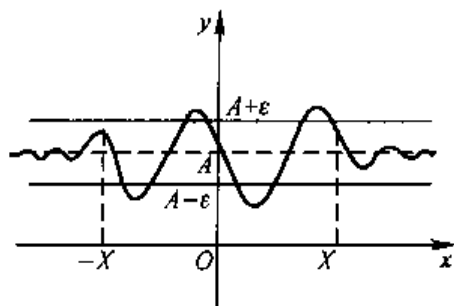


图 1-27

证 $\forall \varepsilon > 0$, 要证 $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 不等式

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

成立. 因这个不等式相当于

$$\frac{1}{|x|} < \varepsilon$$

或

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

由此可知, 如果取 $X = \frac{1}{\varepsilon}$, 那么当 $|x| > X = \frac{1}{\varepsilon}$ 时, 不等式 $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ 成立, 这就证明了

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

直线 $y=0$ 是函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图形的水平渐近线.

一般地说, 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$, 则直线 $y = c$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线.

二、函数极限的性质

与收敛数列的性质相比较, 可得函数极限的一些相应的性质. 它们都可以根据函数极限的定义, 运用类似于证明收敛数列性质的方法加以证明. 由于函数极限的定义按自变量的变化过程不同有各种形式, 下面仅以“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ”这种形式为代表给出关于函数极限性质的一些定理, 并就其中的几个给出证明. 至于其他形式的极限的性质及其证明, 只要相应地作一些修改即可得出.

定理 1 (函数极限的唯一性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么这极限唯一.

定理 2 (函数极限的局部有界性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

证 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 所以取 $\epsilon = 1$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| < |A| + 1,$$

记 $M = |A| + 1$, 则定理 2 就获得证明.

定理 3 (函数极限的局部保号性) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

证 就 $A > 0$ 的情形证明.

因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 所以, 取 $\epsilon = \frac{A}{2} > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2} \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

类似地可以证明 $A < 0$ 的情形.

从定理 3 的证明中可知, 在定理 3 的条件下, 可得下面更强的结论:

定理 3' 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A (A \neq 0)$, 那么就存在着 x_0 的某一去心邻域

$\dot{U}(x_0)$, 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时, 就有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$.

由定理 3, 易得以下推论.

推论 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

定理 4 (函数极限与数列极限的关系) 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列, 且满足: $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{N}^+)$, 那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

证 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 故对 $\delta > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - x_0| < \delta$.

由假设, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{N}^+)$. 故当 $n > N$ 时, $0 < |x_n - x_0| < \delta$, 从而 $|f(x_n) - A| < \epsilon$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

习 题 1-3

1. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 1) = 8; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} (5x + 2) = 12;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4; \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} = 2.$$

2. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

3. 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = x^2 \rightarrow 4$. 问 δ 等于多少, 使当 $|x - 2| < \delta$ 时, $|y - 4| < 0.001$?

4. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \rightarrow 1$. 问 X 等于多少, 使当 $|x| > X$ 时, $|y - 1| < 0.01$?

5. 证明函数 $f(x) = |x|$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限为零.

6. 求 $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

7. 证明: 若 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A , 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

8. 根据极限定义证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

9. 试给出 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的局部有界性的定理, 并加以证明.

第四节 无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 1 如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小.

特别地, 以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

例 1 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$, 所以函数 $x - 1$ 为当 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小.

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以函数 $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

注意 不要把无穷小与很小的数 (例如百万分之一) 混为一谈, 因为无穷小是这样的函数, 在 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 的过程中, 这函数的绝对值能小于任意给定的正数 ϵ , 而很小的数如百万分之一, 就不能小于任意给定的正数 ϵ , 例如取 ϵ 等于千万分之一, 则百万分之一就不能小于这个给定的 ϵ . 但零是可以作为无穷小的唯一的常数, 因为如果 $f(x) \equiv 0$, 那么对于任意给定的 $\epsilon > 0$ 总有 $|f(x)| < \epsilon$.

下面的定理说明无穷小与函数极限的关系.

定理 1 在自变量的同一变化过程 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 是无穷小.

证 先证必要性. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$

δ 时,有

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

令 $\alpha = f(x) - A$, 则 α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 且

$$f(x) = A + \alpha.$$

这就证明了 $f(x)$ 等于它的极限 A 与一个无穷小 α 之和.

再证充分性. 设 $f(x) = A + \alpha$, 其中 A 是常数, α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 于是

$$|f(x) - A| = |\alpha|.$$

因 α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 所以 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|\alpha| < \epsilon,$$

即

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

这就证明了 A 是 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限.

类似地可证明 $x \rightarrow \infty$ 时的情形.

二、无穷大

如果当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 就称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大. 精确地说, 就是

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义 (或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数 M (不论它多么大), 总存在正数 δ (或正数 X), 只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$), 对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)| > M,$$

则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大.

当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大的函数 $f(x)$, 按函数极限定义来说, 极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态, 我们也说“函数的极限是无穷大”, 并记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$
$$(\text{或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty).$$

如果在无穷大的定义中, 把 $|f(x)| > M$ 换成 $f(x) > M$ (或 $f(x) < -M$), 就记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = +\infty \quad (\text{或 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = -\infty).$$

必须注意, 无穷大 (∞) 不是数, 不可与很大的数 (如一千万、一亿等) 混为一谈.

例2 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$ (图 1-28).

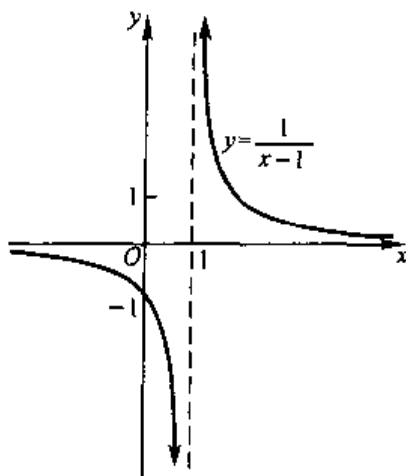


图 1-28

证 设 $\forall M > 0$.

要使

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M,$$

只要

$$|x-1| < \frac{1}{M}.$$

所以,取 $\delta = \frac{1}{M}$,则只要 x 适合不等式 $0 < |x-1| < \delta = \frac{1}{M}$,就有

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M.$$

这就证明了 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

直线 $x=1$ 是函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图形的铅直渐近线.

一般地说,如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$,则直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.

无穷大与无穷小之间有一种简单的关系,即:

定理2 在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

证 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

$\forall \varepsilon > 0$. 根据无穷大的定义,对于 $M = \frac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

有

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\epsilon},$$

即

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \epsilon,$$

所以 $\frac{1}{f(x)}$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

反之, 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$.

$\forall M > 0$. 根据无穷小的定义, 对于 $\epsilon = \frac{1}{M}$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

有

$$|f(x)| < \epsilon = \frac{1}{M},$$

由于当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) \neq 0$, 从而

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M,$$

所以 $\frac{1}{f(x)}$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大.

类似地可证 $x \rightarrow \infty$ 时的情形.

习 题 1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小? 举例说明之.

2. 根据定义证明:

(1) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ 为当 $x \rightarrow 3$ 时的无穷小;

(2) $y = x \sin \frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

3. 根据定义证明: 函数 $y = \frac{1+2x}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件, 能使 $|y| > 10^4$?

4. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x}$.

5. 根据函数极限或无穷大定义, 填写下表:

| | $f(x) \rightarrow A$ | $f(x) \rightarrow \infty$ | $f(x) \rightarrow +\infty$ | $f(x) \rightarrow -\infty$ |
|-------------------------|---|---|----------------------------|----------------------------|
| $x \rightarrow x_0$ | $\forall \varepsilon > 0,$ $\exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$ | | | |
| $x \rightarrow x_0^+$ | | | | |
| $x \rightarrow x_0^-$ | | | | |
| $x \rightarrow \infty$ | | $\forall M > 0,$ $\exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M.$ | | |
| $x \rightarrow +\infty$ | | | | |
| $x \rightarrow -\infty$ | | | | |

6. 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 这个函数是否为 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大? 为什么?

7. 证明: 函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界, 但这函数不是 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷大.

第五节 极限运算法则

本节讨论极限的求法, 主要是建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则, 利用这些法则, 可以求某些函数的极限. 以后我们还将介绍求极限的其他方法.

在下面的讨论中, 记号“ \lim ”下面没有标明自变量的变化过程, 实际上, 下面的定理对 $x \rightarrow x_0$ 及 $x \rightarrow \infty$ 都是成立的. 在论证时, 我们只证明了 $x \rightarrow x_0$ 的情形, 只要把 δ 改成 X , 把 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改成 $|x| > X$, 就可得 $x \rightarrow \infty$ 情形的证明.

定理 1 有限个无穷小的和也是无穷小.

证 考虑两个无穷小的和.

设 α 及 β 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的两个无穷小, 而

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

$\forall \varepsilon > 0$. 因为 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 对于 $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 不等式

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 又因 β 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 对于 $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 不等式

$$|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{及} \quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立, 从而 $|\gamma| = |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 这就证明了 γ 也是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

有限个无穷小之和的情形可以同样证明.

定理 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证 设函数 u 在 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta_1)$ 内是有界的, 即 $\exists M > 0$ 使 $|u| \leq M$ 对一切 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_1)$ 成立. 又设 α 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时,

$$|u| \leq M \quad \text{及} \quad |\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$$

同时成立. 从而

$$|u\alpha| = |u| |\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

这就证明了 $u\alpha$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

定理 3 如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 那么

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

(3) 若又有 $B \neq 0$, 则

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}.$$

证 先证(1).

因 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 由第四节定理 1 有

$$f(x) = A + \alpha, \quad g(x) = B + \beta,$$

其中 α 及 β 为无穷小. 于是

$$f(x) \pm g(x) = (A + \alpha) \pm (B + \beta) = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta).$$

由本节定理 1, $\alpha \pm \beta$ 是无穷小 ($\alpha - \beta$ 可看作 $\alpha + (-1)\beta$, 由本节定理 2 的推论 1, $(-1)\beta$ 是无穷小, 因此 $\alpha - \beta$ 也可看作两个无穷小的和). 再由第四节定理 1, 得

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

关于(2)的证明, 建议读者作为练习.

再证(3).

由 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 有

$$f(x) = A + \alpha, g(x) = B + \beta,$$

其中 α 及 β 为无穷小. 设

$$\gamma = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B},$$

则
$$\gamma = \frac{A + \alpha}{B + \beta} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B(B + \beta)}(B\alpha - A\beta).$$

上式表示, γ 可看作两个函数的乘积, 其中函数 $B\alpha - A\beta$ 是无穷小. 下面我们证明另一个函数 $\frac{1}{B(B + \beta)}$ 在点 x_0 的某一邻域内有界.

根据第三节定理 3', 由于 $\lim g(x) = B \neq 0$, 存在着点 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时, $|g(x)| > \frac{|B|}{2}$, 从而 $\left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{2}{|B|}$. 于是

$$\left| \frac{1}{B(B + \beta)} \right| = \frac{1}{|B|} \cdot \left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{1}{|B|} \cdot \frac{2}{|B|} = \frac{2}{|B|^2}.$$

这就证明了 $\frac{1}{B(B + \beta)}$ 在点 x_0 的去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内有界.

因此, 根据本节定理 2, γ 是无穷小. 而

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} + \gamma,$$

所以由上节定理 1, 得

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

证毕.

定理 3 中的(1)、(2)可推广到有限个函数的情形. 例如, 如果 $\lim f(x), \lim g(x), \lim h(x)$ 都存在, 则有

$$\lim[f(x) + g(x) - h(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) - \lim h(x),$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) \cdot \lim h(x).$$

关于定理 3 中的(2), 有如下推论:

推论 1 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim [cf(x)] = c \lim f(x).$$

就是说, 求极限时, 常数因子可以提到极限记号外面. 这是因为 $\lim c = c$.

推论 2 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

这是因为

$$\begin{aligned} \lim [f(x)]^n &= \lim [f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)] \\ &= \lim f(x) \cdot \lim f(x) \cdots \lim f(x) = [\lim f(x)]^n. \end{aligned}$$

关于数列, 也有类似的极限四则运算法则, 这就是下面的定理.

定理 4 设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B,$$

那么

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B,$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B,$
- (3) 当 $y_n \neq 0 (n = 1, 2, \cdots)$ 且 $B \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}.$

证明从略.

定理 5 如果 $\varphi(x) \geq \psi(x)$, 而 $\lim \varphi(x) = a, \lim \psi(x) = b$, 那么 $a \geq b$.

证 令 $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, 则 $f(x) \geq 0$. 由本节定理 3 有

$$\begin{aligned} \lim f(x) &= \lim [\varphi(x) - \psi(x)] \\ &= \lim \varphi(x) - \lim \psi(x) = a - b. \end{aligned}$$

由第三节定理 3 推论, 有 $\lim f(x) \geq 0$, 即 $a - b \geq 0$, 故 $a \geq b$.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)$.

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3}$.

解 这里分母的极限不为零, 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 3} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5x + 3)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 - 1}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 - 5 \cdot 2 + 3} \\ &= \frac{2^3 - 1}{2^2 - 10 + 3} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

从上面两个例子可以看出,求有理整函数(多项式)或有理分式函数当 $x \rightarrow x_0$ 的极限时,只要把 x_0 代替函数中的 x 就行了;但是对于有理分式函数,这样代入后如果分母等于零,则没有意义.

事实上,设多项式

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) \\ &= a_0 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n + a_1 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{n-1} + \cdots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_n \\ &= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_n = f(x_0); \end{aligned}$$

又设有理分式函数

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中 $P(x), Q(x)$ 都是多项式,于是

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0);$$

如果 $Q(x_0) \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = F(x_0).$$

但必须注意:若 $Q(x_0) = 0$, 则关于商的极限的运算法则不能应用,那就需要特别考虑.下面我们举两个属于这种情形的例题.

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$.

解 当 $x \rightarrow 3$ 时,分子及分母的极限都是零,于是分子、分母不能分别取极限.因分子及分母有公因子 $x-3$,而 $x \rightarrow 3$ 时, $x \neq 3$, $x-3 \neq 0$,可约去这个不为零的公因子.所以

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+3)} = \frac{1}{6}.$$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解 因为分母的极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-5x+4) = 1^2-5 \cdot 1+4=0$,不能应用商的极限的运算法则.但因

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{2x-3} = \frac{1^2-5 \cdot 1+4}{2 \cdot 1-3} = 0,$$

故由第四节定理 2 得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{x^2-5x+4} = \infty.$$

例5 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3}$.

解 先用 x^3 去除分母及分子, 然后取极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{7},$$

这是因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = a \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = a \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right)^n = 0$,

其中 a 为常数, n 为正整数, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ (见第三节例7).

例6 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 5}$.

解 先用 x^3 除分母和分子, 然后求极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0.$$

例7 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{3x^2 - 2x - 1}$.

解 应用例6的结果并根据上节定理2, 即得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{3x^2 - 2x - 1} = \infty.$$

例5、6、7 是下列一般情形的特例, 即当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$ 和 n 为非负整数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n = m, \\ 0, & \text{当 } n > m, \\ \infty, & \text{当 } n < m. \end{cases}$$

例8 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子及分母的极限都不存在, 故关于商的极限的运算法则不能应用. 如果把 $\frac{\sin x}{x}$ 看作 $\sin x$ 与 $\frac{1}{x}$ 的乘积, 由于 $\frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷小, 而 $\sin x$ 是有界函数, 则根据本节定理2, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

定理6(复合函数的极限运算法则) 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $y =$

$f(u)$ 与函数 $u = g(x)$ 复合而成, $f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 若

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

证 按函数极限的定义, 要证: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f[g(x)] - A| < \varepsilon$$

成立.

由于 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$, 当 $0 < |u - u_0| < \eta$ 时, $|f(u) - A| < \varepsilon$

成立.

又由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 对于上面得到的 $\eta > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, $|g(x) - u_0| < \eta$ 成立.

由假设, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0)$ 时, $g(x) \neq u_0$. 取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x) - u_0| < \eta$ 及 $|g(x) - u_0| \neq 0$ 同时成立, 即 $0 < |g(x) - u_0| < \eta$ 成立, 从而

$$|f[g(x)] - A| = |f(u) - A| < \varepsilon$$

成立. 证毕.

在定理 6 中, 把 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$ 换成 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, 而把 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ 换成 $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = A$, 可得类似的定理.

定理 6 表示, 如果函数 $f(u)$ 和 $g(x)$ 满足该定理的条件, 那么作代换 $u = g(x)$ 可把求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)]$ 化为求 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$, 这里 $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

习 题 1-5

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x};$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1};$$

$$\begin{aligned}
 (9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}; & \quad (10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{1}{x^2}\right); \\
 (11) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right); & \quad (12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}{n^2}; \\
 (13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}; & \quad (14) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right).
 \end{aligned}$$

2. 计算下列极限:

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2}{(x-2)^2}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1}; \\
 (3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1).
 \end{aligned}$$

3. 计算下列极限:

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}; & \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.
 \end{aligned}$$

4. 证明本节定理 3 中的(2).

第六节 极限存在准则 两个重要极限

下面讲判定极限存在的两个准则,以及作为应用准则的例子,讨论两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 及 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

准则 I 如果数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件:

$$\begin{aligned}
 (1) & y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots), \\
 (2) & \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,
 \end{aligned}$$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证 因 $y_n \rightarrow a$, $z_n \rightarrow a$, 所以根据数列极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, \exists 正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, 有 $|y_n - a| < \varepsilon$; 又 \exists 正整数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 有 $|z_n - a| < \varepsilon$. 现在取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad |z_n - a| < \varepsilon$$

同时成立, 即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

同时成立. 又因 x_n 介于 y_n 和 z_n 之间, 所以当 $n > N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < a + \varepsilon,$$

即

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立. 这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

上述数列极限存在准则可以推广到函数的极限:

准则 I' 如果

(1) 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, r)$ (或 $|x| > M$) 时,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

(2) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A,$

那么 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 存在, 且等于 A .

准则 I 及准则 I' 称为夹逼准则.

作为准则 I' 的应用, 下面证明一个重要的极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

首先注意到, 函数 $\frac{\sin x}{x}$ 对于一切 $x \neq 0$ 都有定义.

在图 1-29 所示的单位圆中, 设圆心角 $\angle AOB = x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$), 点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D, 又 $BC \perp OA$, 则

$$\sin x = CB, x = \widehat{AB}, \tan x = AD.$$

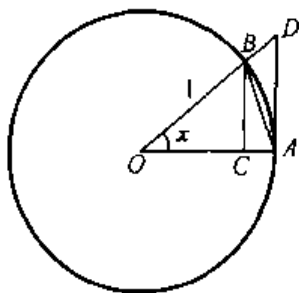


图 1-29

因为

$\triangle AOB$ 的面积 $<$ 圆扇形 AOB 的面积 $<$ $\triangle AOD$ 的面积,

所以

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

即

$$\sin x < x < \tan x.$$

不等号各边都除以 $\sin x$, 就有

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

或

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (1)$$

因为当 x 用 $-x$ 代替时, $\cos x$ 与 $\frac{\sin x}{x}$ 都不变, 所以上面的不等式对于开区间

$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 内的一切 x 也是成立的.

为了对(1)式应用准则 I', 下面来证 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

事实上, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

即
$$0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{x^2}{2} \rightarrow 0$, 由准则 I' 有 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, 由不等式(1)及准则 I', 即得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1. \end{aligned}$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

这里倒数第二个等号用到了复合函数的极限运算法则. 实际上, $\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ 可看

作由 $\frac{\sin u}{u}$ 及 $u = \frac{x}{2}$ 复合而成. 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$, 而 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

解 令 $t = \arcsin x$, 则 $x = \sin t$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $t \rightarrow 0$. 于是由复合函数的极限运算法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

准则 II 单调有界数列必有极限.

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的; 如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的. 单调增加和单调减少的数列统称为单调数列^①.

在第二节中曾证明: 收敛的数列一定有界. 但那时也曾指出: 有界的数列不一定收敛. 现在准则 II 表明: 如果数列不仅有界, 并且是单调的, 那么这数列的极限必定存在, 也就是这数列一定收敛.

对准则 II 我们不作证明, 而给出如下的几何解释.

从数轴上看, 对应于单调数列的点 x_n 只可能向一个方向移动, 所以只有两种可能情形: 或者点 x_n 沿数轴移向无穷远 ($x_n \rightarrow +\infty$ 或 $x_n \rightarrow -\infty$); 或者点 x_n 无限趋近于某一个定点 A (图 1-30), 也就是数列 $\{x_n\}$ 趋于一个极限. 但现在假定数列是有界的, 而有界数列的点 x_n 都落在数轴上某一个区间 $[-M, M]$ 内, 那么上述第一种情形就不可能发生了. 这就表示这个数列趋于一个极限, 并且这个极限的绝对值不超过 M .

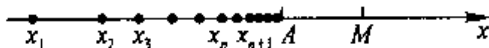


图 1-30

作为准则 II 的应用, 我们讨论另一个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

下面考虑 x 取正整数 n 而趋于 $+\infty$ 的情形.

设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 我们来证数列 $\{x_n\}$ 单调增加并且有界. 按牛顿二项公式, 有

^① 这里的单调数列是广义的, 就是说, 在条件中也包括相等的情形. 以后称单调数列都是指这种广义的单调数列.

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

比较 x_n 、 x_{n+1} 的展开式, 可以看到除前两项外, x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项, 并且 x_{n+1} 还多了最后的一项, 其值大于 0, 因此

$$x_n < x_{n+1},$$

这就说明数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的. 这个数列同时还是有界的. 因为, 如果 x_n 的展开式中各项括号内的数用较大的数 1 代替, 得

$$\begin{aligned}
x_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,
\end{aligned}$$

这就说明数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 根据极限存在准则 II, 这个数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 通常用字母 e 来表示它, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

可以证明, 当 x 取实数而趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时, 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的极限都存在

且都等于 e ^①. 因此^②,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2)$$

这个数 e 是无理数, 它的值是

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045 \cdots.$$

在第一节中提到的指数函数 $y = e^x$ 以及自然对数 $y = \ln x$ 中的底 e 就是这个常数.

利用复合函数的极限运算法则, 可把(2)式写成另一形式. 在 $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ 中作代换 $x = \frac{1}{z}$, 得 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. 又 $z \rightarrow 0$ 时 $x \rightarrow \infty$. 因此由复合函数的极限运算法则得

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

下面的例4也是用代换方法来的, 实质上还是用到了复合函数的极限运算法则.

例4 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

解 令 $t = -x$, 则 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow \infty$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e}.$$

相应于单调有界数列必有极限的准则II, 函数极限也有类似的准则. 对于自

① 设 $n \leq x < n+1$, 则

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

且 n 与 x 同时趋于 $+\infty$, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = e,$$

应用夹逼准则, 即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

令 $x = -(t+1)$, 则 $x \rightarrow -\infty$ 时, $t \rightarrow +\infty$. 从而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right) \right] = e. \end{aligned}$$

② 参阅习题1-3第7题.

变量的不同变化过程($x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$), 准则有不同的形式. 现以 $x \rightarrow x_0^-$ 为例, 将相应的准则叙述如下:

准则 II' 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在.

* 柯西(Cauchy)极限存在准则

在第二节例 1 及例 2 中, 我们看到收敛数列不一定是单调的. 因此, 准则 II 所给出的单调有界这条件, 是数列收敛的充分条件, 而不是必要的. 当然, 其中有界这一条件对数列的收敛性来说是必要的. 下面叙述的柯西极限存在准则, 它给出了数列收敛的充分必要条件.

柯西极限存在准则 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的正数 ε , 存在着这样的正整数 N , 使得当 $m > N, n > N$ 时, 就有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

必要性的证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. $\forall \varepsilon > 0$, 由数列极限的定义, \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

同样, 当 $m > N$ 时, 也有

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 当 $m > N, n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - a) - (x_m - a)| \\ &\leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

所以条件是必要的.

充分性的证明从略.

这准则的几何意义表示, 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的正数 ε , 在数轴上一切具有足够大号码的点 x_n 中, 任意两点间的距离小于 ε .

柯西极限存在准则有时也叫做柯西审敛原理.

习 题 1-6

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} (x \text{ 为不等于零的常数}).$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{2x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{kx} (k \text{ 为正整数}).$$

3. 根据函数极限的定义, 证明极限存在的准则 I'.

4. 利用极限存在准则证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = 1;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1;$$

$$(3) \text{ 数列 } \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots \text{ 的极限存在};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

第七节 无穷小的比较

在第五节中我们已经知道, 两个无穷小的和、差及乘积仍旧是无穷小. 但是, 关于两个无穷小的商, 却会出现不同的情况, 例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x$ 、 x^2 、 $\sin x$ 都是无穷小, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

两个无穷小之比的极限的各种不同情况, 反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度. 就上面几个例子来说, 在 $x \rightarrow 0$ 的过程中, $x^2 \rightarrow 0$ 比 $3x \rightarrow 0$ “快些”, 反过来 $3x \rightarrow 0$ 比 $x^2 \rightarrow 0$ “慢些”, 而 $\sin x \rightarrow 0$ 与 $x \rightarrow 0$ “快慢相仿”.

下面, 我们就无穷小之比的极限存在或为无穷大时, 来说明两个无穷小之间的比较. 应当注意, 下面的 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小, 且 $\alpha \neq 0$, $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限.

定义:

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 就说 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就说 β 是比 α 低阶的无穷小.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$, 就说 β 与 α 是同阶无穷小;

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$, 就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 就说 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$.

显然, 等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形, 即 $c = 1$ 的情形.

下面举一些例子:

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小, 即 $3x^2 = o(x) (x \rightarrow 0)$.

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \infty$, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n}$ 是比 $\frac{1}{n^2}$ 低阶的无穷小.

因为 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$, 所以当 $x \rightarrow 3$ 时, $x^2 - 9$ 与 $x - 3$ 是同阶无穷小.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$ 与 x 是等价无穷小, 即 $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$.

下面再举一个常用的等价无穷小的例子.

例 1 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$.

证 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{1}{n}x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x})^n - 1}{\frac{1}{n}x [\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \cdots + 1} = 1, \textcircled{1} \end{aligned}$$

所以 $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x (x \rightarrow 0)$.

关于等价无穷小, 有下面两个定理.

定理 1 β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为

$\textcircled{1}$ 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{(1+x)^m} = 1 (m = n-1, n-2, \cdots, 1)$ 用到了习题 1-6 中题 4(4) 的结果及第五节中

定理 3 的推论 2

$$\beta = \alpha + o(\alpha).$$

证 必要性 设 $\alpha \sim \beta$, 则

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0,$$

因此 $\beta - \alpha = o(\alpha)$, 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

充分性 设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) = 1,$$

因此 $\alpha \sim \beta$.

例 2 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$,

所以当 $x \rightarrow 0$ 时有

$$\begin{aligned} \sin x &= x + o(x), \quad \tan x = x + o(x), \quad \arcsin x = x + o(x), \\ 1 - \cos x &= \frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

定理 2 设 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \lim \frac{\beta}{\alpha} &= \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \\ &= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}. \end{aligned}$$

定理 2 表明, 求两个无穷小之比的极限时, 分子及分母都可用等价无穷小来代替. 因此, 如果用来代替的无穷小选得适当的话, 可以使计算简化.

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan 2x \sim 2x$, $\sin 5x \sim 5x$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, 无穷小 $x^3 + 3x$ 与它本身显然是等价的, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x^2 + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 3} = \frac{1}{3}.$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2$, $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}.$$

习 题 1-7

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$ 相比, 哪一个高阶无穷小?
2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小 $1-x$ 和 (1) $1-x^3$, (2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等价?
3. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:
 - (1) $\arctan x \sim x$;
 - (2) $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.
4. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:
 - (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}$;
 - (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n, m 为正整数);
 - (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$;
 - (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.
5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:
 - (1) $\alpha \sim \alpha$ (自反性);
 - (2) 若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\beta \sim \alpha$ (对称性);
 - (3) 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 则 $\alpha \sim \gamma$ (传递性).

第八节 函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

自然界中有许多现象, 如气温的变化、河水的流动、植物的生长等等, 都是连续地变化着的. 这种现象在函数关系上的反映, 就是函数的连续性. 例如就气温的变化来看, 当时间变动很微小时, 气温的变化也很微小, 这种特点就是所谓连续性. 下面我们先引入增量的概念, 然后来描述连续性, 并引出函数的连续性的定义.

设变量 u 从它的一个初值 u_1 变到终值 u_2 , 终值与初值的差 $u_2 - u_1$ 就叫做变量 u 的增量, 记作 Δu , 即

$$\Delta u = u_2 - u_1.$$

增量 Δu 可以是正的, 也可以是负的. 在 Δu 为正的情形, 变量 u 从 u_1 变到

$u_2 = u_1 + \Delta u$ 时是增大的;当 Δu 为负时,变量 u 是减小的.

应该注意到:记号 Δu 并不表示某个量 Δ 与变量 u 的乘积,而是一个整体不可分割的记号.

现在假定函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内是有定义的.当自变量 x 在这邻域内从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时,函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$,因此函数 y 的对应增量为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

这个关系式的几何解释如图 1-31 所示.

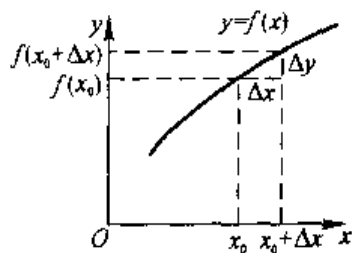


图 1-31

假如保持 x_0 不变而让自变量的增量 Δx 变动,一般说来,函数 y 的增量 Δy 也要随着变动.现在我们对连续性的概念可以这样描述:如果当 Δx 趋于零时,函数 y 的对应增量 Δy 也趋于零,即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (1)$$

或
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

那么就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处是连续的,即有下述定义:

定义 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

那么就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

为了应用方便起见,下面把函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续的定义用不同的方式来叙述.

设 $x = x_0 + \Delta x$, 则 $\Delta x \rightarrow 0$ 就是 $x \rightarrow x_0$. 又由于

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

即
$$f(x) = f(x_0) + \Delta y,$$

可见 $\Delta y \rightarrow 0$ 就是 $f(x) \rightarrow f(x_0)$, 因此(1)式与

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

相当. 所以,函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续的定义又可叙述如下:

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (2)$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

由函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限的定义可知, 上述定义也可用“ $\epsilon - \delta$ ”语言表达如下:

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

下面说明左连续及右连续的概念.

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ 存在且等于 $f(x_0)$, 即

$$f(x_0^-) = f(x_0),$$

就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ 存在且等于 $f(x_0)$, 即

$$f(x_0^+) = f(x_0),$$

就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

在区间上每一点都连续的函数, 叫做在该区间上的连续函数, 或者说函数在该区间上连续. 如果区间包括端点, 那么函数在右端点连续是指左连续, 在左端点连续是指右连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

在第五节中, 我们曾经证明: 如果 $f(x)$ 是有理整函数(多项式), 则对于任意的实数 x_0 , 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 因此有理整函数在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是

连续的. 对于有理分式函数 $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 只要 $Q(x_0) \neq 0$, 就有 $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) =$

$F(x_0)$, 因此有理分式函数在其定义域内的每一点都是连续的.

由第三节例 5 可知, 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是连续的.

作为例子, 我们来证明, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

设 x 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任意取定的一点. 当 x 有增量 Δx 时, 对应的函数的增量为

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

由三角公式有

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

注意到

$$\left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 1,$$

就推得

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| \leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

因为对于任意的角度 α , 当 $\alpha \neq 0$ 时有 $|\sin \alpha| < |\alpha|$, 所以

$$0 \leq |\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| < |\Delta x|.$$

因此, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 由夹逼准则得 $|\Delta y| \rightarrow 0$, 这就证明了 $y = \sin x$ 对于任一 $x \in (-\infty, +\infty)$ 是连续的.

类似地可以证明, 函数 $y = \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

二、函数的间断点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 在此前提下, 如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一:

- (1) 在 $x = x_0$ 没有定义;
- (2) 虽在 $x = x_0$ 有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;
- (3) 虽在 $x = x_0$ 有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续, 而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

下面举例来说明函数间断点的几种常见类型.

例 1 正切函数 $y = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处没有定义, 所以点 $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $\tan x$ 的间断点. 因

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty,$$

我们称 $x = \frac{\pi}{2}$ 为函数 $\tan x$ 的无穷间断点(图 1-32).

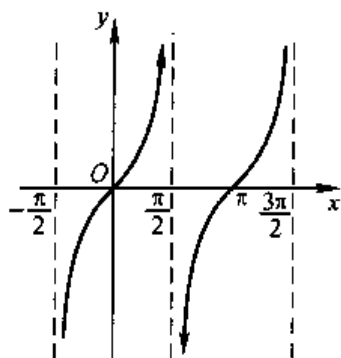


图 1-32

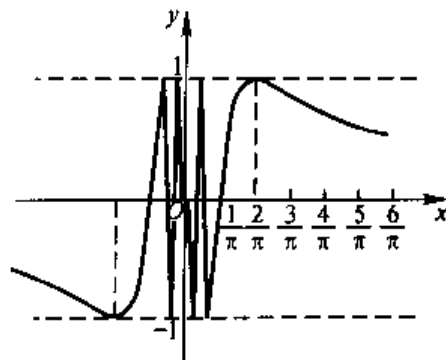


图 1-33

例 2 函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在点 $x = 0$ 没有定义; 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数值在 -1 与 $+1$

之间变动无限多次(图 1-33), 所以点 $x = 0$ 称为函数 $\sin \frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

例3 函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在点 $x = 1$ 没有定义, 所以函数在点 $x = 1$ 为不连续 (图 1-34). 但这里

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

如果补充定义: 令 $x = 1$ 时 $y = 2$, 则所给函数在 $x = 1$ 成为连续. 所以 $x = 1$ 称为该函数的可去间断点.

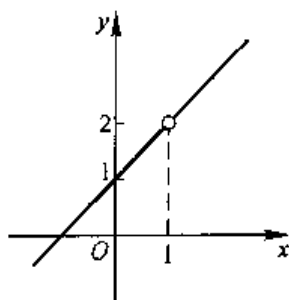


图 1-34

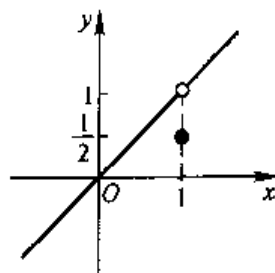


图 1-35

例4 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

这里 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$, 但 $f(1) = \frac{1}{2}$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1).$$

因此, 点 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点 (图 1-35). 但如果改变函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的定义: 令 $f(1) = 1$, 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 成为连续. 所以 $x = 1$ 也称为该函数的可去间断点.

例5 函数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

这里, 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1.$$

左极限与右极限虽都存在, 但不相等, 故极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 所以点 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点 (图 1-36). 因 $y = f(x)$ 的图形在 $x = 0$ 处产生跳跃现象, 我

们称 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

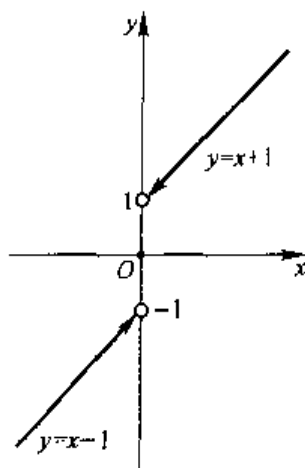


图 1-36

上面举了一些间断点的例子. 通常把间断点分成两类: 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点, 但左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在, 那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 不是第一类间断点的任何间断点, 称为第二类间断点. 在第一类间断点中, 左、右极限相等者称为可去间断点, 不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

习 题 1-8

1. 研究下列函数的连续性, 并画出函数的图形:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x < -1 \text{ 或 } x > 1. \end{cases}$$

2. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使它连续:

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, x = 1, x = 2;$$

$$(2) y = \frac{x}{\tan x}, x = k\pi, x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(3) y = \cos^2 \frac{1}{x}, x = 0;$$

$$(4) y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1, \end{cases} x = 1.$$

3. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$ 的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

4. 证明:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0) \neq 0$, 则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \neq 0$.

5. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

- (1) $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm n, \pm \frac{1}{n}, \dots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点, 且它们都是无穷间断点;
- (2) $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处不连续, 但 $|f(x)|$ 在 \mathbf{R} 上处处连续;
- (3) $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处有定义, 但仅在一处连续.

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的和、差、积、商的连续性

由函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则, 立即可得出下面的定理.

定理 1 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 则它们的和(差) $f \pm g$ 、积 $f \cdot g$ 及商 $\frac{f}{g}$ (当 $g(x_0) \neq 0$ 时) 都在点 x_0 连续.

例 1 因 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, 而 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续(第八节), 故由定理 1 知 $\tan x$ 和 $\cot x$ 在它们的定义域内是连续的.

二、反函数与复合函数的连续性

反函数和复合函数的概念已经在第一节中讲过, 这里来讨论它们的连续性.

定理 2 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续, 那么它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y = \{y | y = f(x), x \in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续.

证明从略.

例 2 由于 $y = \sin x$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续, 所以它的反函数 $y = \arcsin x$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上也是单调增加且连续的.

同样, 应用定理 2 可证: $y = \arccos x$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上单调减少且连续; $y = \arctan x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加且连续; $y = \operatorname{arccot} x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少且连续.

总之, 反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ 在它们的定义域内都是连续的.

定理 3 设函数 $y = f[g(x)]$ 由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = g(x)$ 复合而成, $\overset{\circ}{U}(x_0) \subset D_{f, g}$. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0). \quad (1)$$

证 在第五节定理 6 中, 令 $A = f(u_0)$ (这时 $f(u)$ 在点 u_0 连续), 并取消“存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$ ”这条件, 便得上面的定理. 这里 $g(x) \neq u_0$ 这条件可以取消的理由是: $\forall \varepsilon > 0$, 使 $g(x) = u_0$ 成立的那些点 x , 显然也使 $|f[g(x)] - f(u_0)| < \varepsilon$ 成立. 因此附加 $g(x) \neq u_0$ 这条件就没有必要了.

因为在定理 3 中有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, \quad \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0),$$

故(1)式又可写成

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)]. \quad (2)$$

(1)式表示, 在定理 3 的条件下, 如果作代换 $u = g(x)$, 那么求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)]$ 就化为求 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$, 这里 $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(2)式表示, 在定理 3 的条件下, 求复合函数 $f[g(x)]$ 的极限时, 函数符号 f 与极限号 \lim 可以交换次序.

把定理 3 中的 $x \rightarrow x_0$ 换成 $x \rightarrow \infty$, 可得类似的定理.

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$

解 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$ 可看作由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = \frac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成. 因为 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$,

而函数 $y = \sqrt{u}$ 在点 $u = \frac{1}{6}$ 连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

定理 4 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = g(x)$ 复合而成, $U(x_0) \subset D_{f, g}$. 若函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 且 $g(x_0) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 连续, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 也连续.

证 只要在定理 3 中令 $u_0 = g(x_0)$, 这就表示 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 于是由(1)式得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f(u_0) = f[g(x_0)],$$

这就证明了复合函数 $f[g(x)]$ 在点 x_0 连续.

例 4 讨论函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 的连续性.

解 函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 可看作是由 $y = \sin u$ 及 $u = \frac{1}{x}$ 复合而成的. $\sin u$ 当 $-\infty < u < +\infty$ 时是连续的, $\frac{1}{x}$ 当 $-\infty < x < 0$ 和 $0 < x < +\infty$ 时是连续的. 根据定理 4, 函数 $\sin \frac{1}{x}$ 在无限区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内是连续的.

三、初等函数的连续性

前面证明了三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

我们指出(但不详细讨论), 指数函数 a^x ($a > 0, a \neq 1$) 对于一切实数 x 都有定义, 且在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调的和连续的, 它的值域为 $(0, +\infty)$.

由指数函数的单调性和连续性, 引用定理 2 可得: 对数函数 $\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调且连续.

幂函数 $y = x^\mu$ 的定义域随 μ 的值而异, 但无论 μ 为何值, 在区间 $(0, +\infty)$ 内幂函数总是有定义的. 下面我们来证明, 在 $(0, +\infty)$ 内幂函数是连续的. 事实上, 设 $x > 0$, 则

$$y = x^\mu = a^{\mu \log_a x},$$

因此, 幂函数 x^μ 可看作是由 $y = a^u$, $u = \mu \log_a x$ 复合而成的, 由此, 根据定理 4, 它在 $(0, +\infty)$ 内连续. 如果对于 μ 取各种不同值加以分别讨论, 可以证明(证明从略)幂函数在它的定义域内是连续的.

综合起来得到: **基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.**

最后, 根据第一节中关于初等函数的定义, 由基本初等函数的连续性以及本节定理 1、4 可得下列重要结论: **一切初等函数在其定义区间内都是连续的.** 所谓定义区间, 就是包含在定义域内的区间.

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义, 如果已知 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 那么求 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 的极限时, 只要求 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值就行了. 因此, 上述关于初等函数连续性的结论提供了求极限的一个方法, 这就是: 如果 $f(x)$ 是初等函数, 且 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间内的点, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

例如, 点 $x_0 = 0$ 是初等函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 的定义区间 $[-1, 1]$ 上的点, 所以

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1} = 1$; 又如点 $x_0 = \frac{\pi}{2}$ 是初等函数 $f(x) = \ln \sin x$ 的一个定义区

间 $(0, \pi)$ 内的点, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x = \ln \sin \frac{\pi}{2} = 0.$$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

解 令 $a^x - 1 = t$, 则 $x = \log_a(1+t)$, $x \rightarrow 0$ 时 $t \rightarrow 0$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \ln a.$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解 因为

$$(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} = (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot 6} = e^{6 \cdot \frac{x}{\sin x} \ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}},$$

利用定理 3 及极限的运算法则, 便有

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[6 \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right]} = e^6.$$

一般地, 对于形如 $u(x)^{v(x)}$ ($u(x) > 0$, $u(x) \neq 1$) 的函数 (通常称为幂指函数), 如果

$$\lim u(x) = a > 0, \quad \lim v(x) = b,$$

那么

$$\lim u(x)^{v(x)} = a^b.$$

注意: 这里三个 \lim 都表示在同一自变量变化过程中的极限.

习 题 1-9

1. 求函数 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ 及

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 证明函数

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 2x + 5};$$

$$(2) \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2\alpha)^3;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2\cos 2x);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$$

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3\tan^2 x)^{\cot^2 x}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{1}{x-1}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \sqrt{1+\sin^2 x} - x}.$$

5. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

应当怎样选择数 a , 使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数.

第十节 闭区间上连续函数的性质

第八节中已说明了函数在区间上连续的概念, 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 在右端点 b 左连续, 在左端点 a 右连续, 那么函数 $f(x)$ 就是在闭区间 $[a, b]$ 上连续的. 在闭区间上连续的函数有几个重要的性质, 今以定理的形式叙述它们.

一、有界性与最大值最小值定理

先说明最大值和最小值的概念. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(最小值).

例如, 函数 $f(x) = 1 + \sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上有最大值 2 和最小值 0. 又例

如,函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内有最大值 1 和最小值 -1. 在开区间 $(0, +\infty)$ 内, $\operatorname{sgn} x$ 的最大值和最小值都等于 1 (注意: 最大值和最小值可以相等!). 但函数 $f(x) = x$ 在开区间 (a, b) 内既无最大值又无最小值. 下面的定理给出函数有界且最大值和最小值存在的充分条件.

定理 1 (有界性与最大值最小值定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

这就是说, 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 那么存在常数 $M > 0$, 使得对任一 $x \in [a, b]$, 满足 $|f(x)| \leq M$; 且至少有一点 ξ_1 , 使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值; 又至少有一点 ξ_2 , 使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值 (图 1-37).

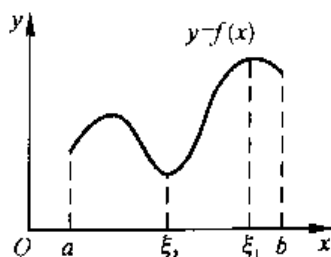


图 1-37

证明从略.

注意 如果函数在开区间内连续, 或函数在闭区间上有间断点, 那么函数在该区间上不一定有界, 也不一定有最大值或最小值. 例如, 函数 $y = \tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是连续的, 但它在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的, 且既无最大值又无最小值; 又如, 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上有间断点 $x = 1$, 这函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上虽然有界, 但是既无最大值又无最小值 (图 1-38).

二、零点定理与介值定理

如果 x_0 使 $f(x_0) = 0$, 则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 2 (零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号 (即 $f(a) \cdot f(b) < 0$), 那么在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ 使

$$f(\xi) = 0.$$

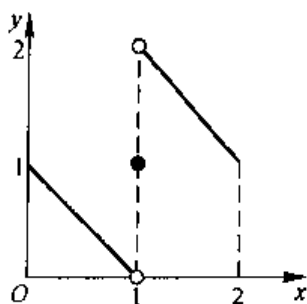


图 1-38

证明从略.

从几何上看,定理 2 表示:如果连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧,那么这段曲线弧与 x 轴至少有一个交点(图 1-39).

由定理 2 立即可推得下列较一般性的定理.

定理 3(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \quad \text{及} \quad f(b)=B,$$

那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C ,在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ ,使得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

证 设 $\varphi(x)=f(x)-C$, 则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,且 $\varphi(a)=A-C$ 与 $\varphi(b)=B-C$ 异号. 根据零点定理,开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ 使得

$$\varphi(\xi)=0 \quad (a<\xi<b).$$

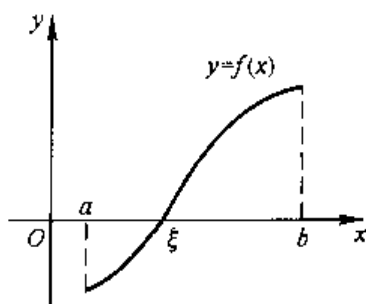


图 1-39

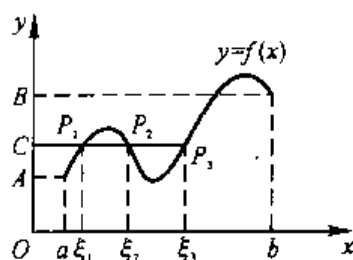


图 1-40

又 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C$, 因此由上式即得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

这定理的几何意义是:连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少相交于一点(图 1-40).

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

设 $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$, 而 $m \neq M$, 在闭区间 $[x_1, x_2]$ (或 $[x_2, x_1]$) 上应用介值定理, 即得上述推论.

例 1 证明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根.

证 函数 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 又

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(1) = -2 < 0.$$

根据零点定理, 在 $(0, 1)$ 内至少有一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = 0,$$

即 $\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0 \quad (0 < \xi < 1).$

这等式说明方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根是 ξ .

* 三、一致连续性

我们先介绍函数的一致连续性概念.

设函数在区间 I 上连续, x_0 是在 I 上任意取定的一个点. 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 因此 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. 通常这个 δ 不仅与 ϵ 有关, 而且与所取定的 x_0 有关, 即使 ϵ 不变, 但选取区间 I 上的其他点作为 x_0 时, 这个 δ 就不一定适用了. 可是对于某些函数, 却有这样一种重要情形: 存在着只与 ϵ 有关, 而对区间 I 上任何点 x_0 都能适用的正数 δ , 即对任何 $x_0 \in I$, 只要 $|x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上能使这种情形发生, 就说函数 $f(x)$ 在区间 I 上是一致连续的.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 如果对于任意给定的正数 ϵ , 总存在着正数 δ , 使得对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2 , 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon,$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是一致连续的.

一致连续性表示, 不论在区间 I 的任何部分, 只要自变量的两个数值接近到一定程度, 就可使对应的函数值达到所指定的接近程度.

由上述定义可知, 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上也是连续的. 但反过来不一定成立, 举例说明如下:

例 2 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上是连续的, 但不是一致连续的.

因为函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是初等函数, 它在区间 $(0, 1]$ 上有定义, 所以在 $(0, 1]$ 上是连续的.

$\forall \epsilon > 0 (0 < \epsilon < 1)$, 假定 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上一致连续, 应该 $\exists \delta > 0$, 使得对于 $(0, 1]$ 上的任意两个值 x_1, x_2 , 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)|$

$< \varepsilon$.

现在取原点附近的两点

$$x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{1}{n+1},$$

其中 n 为正整数, 这样的 x_1, x_2 显然在 $(0, 1]$ 上. 因

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n(n+1)},$$

故只要 n 取得足够大, 总能使 $|x_1 - x_2| < \delta$. 但这时有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \right| = |n - (n+1)| = 1 > \varepsilon,$$

不符合一致连续的定义, 所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上不是一致连续的.

上例说明, 在半开区间上连续的函数不一定在该区间上一致连续. 但是, 有下面的定理:

定理 4 (一致连续性定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 那么它在该区间上一致连续.

证明从略.

习 题 1-10

1. 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.
2. 证明方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.
3. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a, b]$ 上的任意两点 x, y , 恒有 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, 其中 L 为正常数, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$. 证明: 至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.
4. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 (x_1, x_n) 内至少有一点 ξ , 使
$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$
5. 证明: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.
- * 6. 在什么条件下, (a, b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续?

总 习 题 一

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:
(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的 _____ 条件. 数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的

_____条件.

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的_____条件. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的_____条件.

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 的_____条件. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的_____条件.

(4) $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的_____条件.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有().

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小. (B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小.

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小. (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小.

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$; (2) $f(\ln x)$;

(3) $f(\arctan x)$; (4) $f(\cos x)$.

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0, \end{cases}$$

求 $f[f(x)], g[g(x)], f[g(x)], g[f(x)]$.

5. 利用 $y = \sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

(1) $y = |\sin x|$;

(2) $y = \sin |x|$;

(3) $y = 2 \sin \frac{x}{2}$.

6. 把半径为 R 的一圆形铁皮, 自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.

7. 根据函数极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$.

8. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$;

(6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

9. 设

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ a + x^2 & x \leq 0, \end{cases}$$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 应当怎样选择数 a ?

10. 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x \leq 0, \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的间断点, 并说明间断点所属类型.

11. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

12. 证明方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

13. 如果存在直线 $L: y = kx + b$, 使得当 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$) 时, 曲线 $y = f(x)$ 上的动点 $M(x, y)$ 到直线 L 的距离 $d(M, L) \rightarrow 0$, 则称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k \neq 0$ 时, 称 L 为斜渐近线.

(1) 证明: 直线 $L: y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线的充分必要条件是

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty) \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty) \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx].$$

(2) 求曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

第二章 导数与微分

微分学是微积分的重要组成部分,它的基本概念是导数与微分.

本章中,我们主要讨论导数和微分的概念以及它们的计算方法.至于导数的应用,将在第三章讨论.

第一节 导数概念

一、引例

为了说明微分学的基本概念——导数,我们先讨论两个问题:速度问题和切线问题.这两个问题在历史上都与导数概念的形成有密切的关系.

1. 直线运动的速度

设某点沿直线运动.在直线上引入原点和单位点(即表示实数1的点),使直线成为数轴.此外,再取定一个时刻作为测量时间的零点.设动点于时刻 t 在直线上的位置的坐标为 s (简称位置 s).这样,运动完全由某个函数

$$s = f(t)$$

所确定.这函数对运动过程中所出现的 t 值有定义,称为位置函数.在最简单的情形,该动点所经过的路程与所花的时间成正比.就是说,无论取哪一段时间间隔,比值

$$\frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}} \quad (1)$$

总是相同的.这个比值就称为该动点的速度,并说该点作匀速运动.如果运动不是匀速的,那么在运动的不同时间间隔内,比值(1)会有不同的值.这样,把比值(1)笼统地称为该动点的速度就不合适了,而需要按不同时刻来考虑.那么,这种非匀速运动的动点在某一时刻(设为 t_0)的速度应如何理解而又如何求得呢?

首先取从时刻 t_0 到 t 这样一个时间间隔,在这段时间内,动点从位置 $s_0 = f(t_0)$ 移动到 $s = f(t)$.这时由(1)式算得的比值

$$\frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (2)$$

可认为是动点在上述时间间隔内的平均速度.如果时间间隔选得较短,这个比值(2)在实践中也可用来说明动点在时刻 t_0 的速度.但对于动点在时刻 t_0 的速度

的精确概念来说,这样做是不够的,而更确切地应当这样:令 $t \rightarrow t_0$, 取(2)式的极限,如果这个极限存在,设为 v ,即

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

这时就把这个极限值 v 称为动点在时刻 t_0 的(瞬时)速度.

2. 切线问题

圆的切线可定义为“与曲线只有一个交点的直线”.但是对于其他曲线,用“与曲线只有一个交点的直线”作为切线的定义就不一定合适.例如,对于抛物线 $y = x^2$, 在原点 O 处两个坐标轴都符合上述定义,但实际上只有 x 轴是该抛物线在点 O 处的切线.下面给出切线的定义.

设有曲线 C 及 C 上的一点 M (图 2-1), 在点 M 外另取 C 上一点 N , 作割线 MN . 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时, 如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT , 直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线. 这里极限位置的含义是: 只要弦长 $|MN|$ 趋于零, $\angle NMT$ 也趋于零.

现在就曲线 C 为函数 $y = f(x)$ 的图形的情形来讨论切线问题. 设 $M(x_0, y_0)$ 是曲线 C 上的一个点(图 2-2), 则 $y_0 = f(x_0)$. 根据上述定义要定出曲线 C 在点 M 处的切线, 只要定出切线的斜率就行了. 为此, 在点 M 外另取 C 上的一点 $N(x, y)$, 于是割线 MN 的斜率为

$$\tan \varphi = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

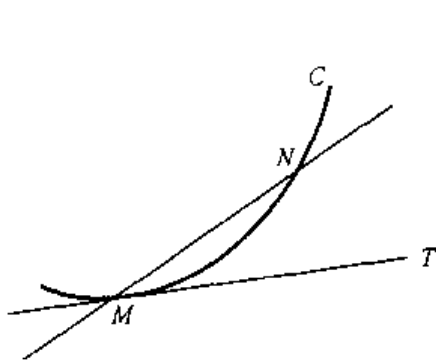


图 2-1

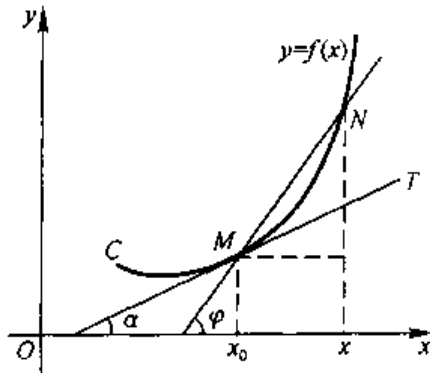


图 2-2

其中 φ 为割线 MN 的倾角. 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时, $x \rightarrow x_0$. 如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, 上式的极限存在, 设为 k , 即

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 则此极限 k 是割线斜率的极限, 也就是切线的斜率. 这里 $k = \tan \alpha$, 其中 α

是切线 MT 的倾角. 于是, 通过点 $M(x_0, f(x_0))$ 且以 k 为斜率的直线 MT 便是曲线 C 在点 M 处的切线. 事实上, 由 $\angle NMT = \varphi - \alpha$ 以及 $x \rightarrow x_0$ 时 $\varphi \rightarrow \alpha$, 可见 $x \rightarrow x_0$ 时 (这时 $|MN| \rightarrow 0$), $\angle NMT \rightarrow 0$. 因此直线 MT 确为曲线 C 在点 M 处的切线.

二、导数的定义

1. 函数在一点处的导数与导函数

从上面所讨论的两个问题看出, 非匀速直线运动的速度和切线的斜率都归结为如下的极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (3)$$

这里 $x - x_0$ 和 $f(x) - f(x_0)$ 分别是函数 $y = f(x)$ 的自变量的增量 Δx 和函数的增量 Δy :

$$\Delta x = x - x_0,$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

因 $x \rightarrow x_0$ 相当于 $\Delta x \rightarrow 0$, 故(3)式也可写成

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

在自然科学和工程技术领域内, 还有许多概念, 例如电流强度、角速度、线密度等等, 都可归结为形如(3)式的数学形式. 我们撇开这些量的具体意义, 抓住它们在数量关系上的共性, 就得出函数的导数概念.

定义 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内) 时, 相应地函数取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; 如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (4)$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或导数存在.

导数的定义式(4)也可取不同的形式, 常见的有

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (5)$$

和

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (6)$$

(5)式中的 h 即自变量的增量 Δx .

在实际中,需要讨论各种具有不同意义的变量的变化“快慢”问题,在数学上就是所谓函数的变化率问题.导数概念就是函数变化率这一概念的精确描述.它撇开了自变量和因变量所代表的几何或物理等方面的特殊意义,纯粹从数量方面来刻画变化率的本质:因变量增量与自变量增量之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是因变量 y 在以 x_0 和 $x_0 + \Delta x$ 为端点的区间上的平均变化率,而导数 $f'(x_0)$ 则是因变量在点 x_0 处的变化率,它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

如果极限(4)不存在,就说函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导.如果不可导的原因是由于 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,比式 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty$,为了方便起见,也往往说函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大.

上面讲的是函数在一点处可导.如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导,就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导.这时,对于任一 $x \in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值.这样就构成了一个新的函数,这个函数叫做原来函数 $y = f(x)$ 的导函数,记作 $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$.

在(4)式或(5)式中把 x_0 换成 x ,即得导函数的定义式

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

或

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

注意 在以上两式中,虽然 x 可以取区间 I 内的任何数值,但在极限过程中, x 是常量, Δx 或 h 是变量.

显然,函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的函数值,即

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

导函数 $f'(x)$ 简称导数,而 $f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的导数或导数 $f'(x)$ 在 x_0 处的值.

2. 求导数举例

下面根据导数定义求一些简单函数的导数.

例1 求函数 $f(x) = C$ (C 为常数)的导数.

$$\text{解 } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C - C}{h} = 0,$$

即 $(C)' = 0$.

这就是说,常数的导数等于零.

例 2 求函数 $f(x) = x^n (n \in \mathbf{N}^+)$ 在 $x = a$ 处的导数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-1}) = na^{n-1}. \end{aligned}$$

把以上结果中的 a 换成 x 得 $f'(x) = nx^{n-1}$, 即

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

更一般地,对于幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为常数),有

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}.$$

这就是幂函数的导数公式.这公式的证明将在以后讨论.利用这公式,可以很方便地求出幂函数的导数,例如:

当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} (x > 0)$ 的导数为

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},$$

即 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

当 $\mu = -1$ 时, $y = x^{-1} = \frac{1}{x} (x \neq 0)$ 的导数为

$$(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2},$$

即 $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

例 3 求函数 $f(x) = \sin x$ 的导数.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x, \end{aligned}$$

即 $(\sin x)' = \cos x.$

这就是说,正弦函数的导数是余弦函数.

用类似的方法,可求得

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

就是说,余弦函数的导数是负的正弦函数.

例 4 求函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.

$$\begin{aligned}\text{解 } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.\end{aligned}$$

利用第一章第九节例 7 的结果得

$$f'(x) = a^x \ln a,$$

即

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

这就是指数函数的导数公式. 特殊地, 当 $a = e$ 时, 因 $\ln e = 1$, 故有

$$(e^x)' = e^x.$$

上式表明, 以 e 为底的指数函数的导数就是它自己, 这是以 e 为底的指数函数的一个重要特性.

例 5 求函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.

$$\begin{aligned}\text{解 } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}.\end{aligned}$$

作代换 $u = \frac{h}{x}$ 并利用第一章第九节例 6 的结果得

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a},$$

即

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

这就是对数函数的导数公式. 特殊地, 当 $a = e$ 时, 由上式得自然对数函数的导数公式:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

例 6 求函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处的导数.

$$\text{解 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

当 $h < 0$ 时, $\frac{|h|}{h} = -1$, 故 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$;

当 $h > 0$ 时, $\frac{|h|}{h} = 1$, 故 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$.

所以, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ 不存在, 即函数 $f(x) = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

3. 单侧导数

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的定义, 导数

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

是一个极限, 而极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在且相等, 因此 $f'(x_0)$ 存在即 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左、右极限

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{及} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

都存在且相等. 这两个极限分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数, 记作 $f'_-(x_0)$ 及 $f'_+(x_0)$, 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

现在可以说, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

函数 $f(x) = |x|$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0) = -1$ 及右导数 $f'_+(0) = 1$ 虽然都存在, 但不相等, 故 $f(x) = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

左导数和右导数统称为单侧导数.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在, 就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

三、导数的几何意义

由第一目中切线问题的讨论以及第二目中导数的定义可知: 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率, 即

$$f'(x_0) = \tan \alpha,$$

其中 α 是切线的倾角(图 2-3).

如果 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大, 这时曲线 $y = f(x)$ 的割线以垂直于 x 轴的直线 $x = x_0$ 为极限位置, 即曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x = x_0$ (参看后面例 9).

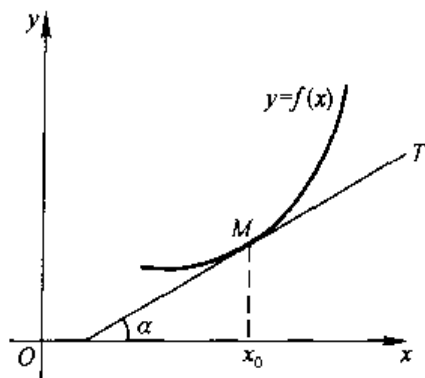


图 2-3

根据导数的几何意义并应用直线的点斜式方程,可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

过切点 $M(x_0, y_0)$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线. 如果 $f'(x_0) \neq 0$, 法线的斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$, 从而法线方程为

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

例 7 求等边双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 处的切线的斜率, 并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 根据导数的几何意义知道, 所求切线的斜率为

$$k_1 = y' \Big|_{x=\frac{1}{2}}.$$

由于 $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, 于是

$$k_1 = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -4.$$

从而所求切线方程为

$$y - 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

即

$$4x + y - 4 = 0.$$

所求法线的斜率为

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{4},$$

于是所求法线方程为

$$y - 2 = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

即

$$2x - 8y + 15 = 0.$$

例 8 求曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 的通过点 $(0, -4)$ 的切线方程.

解 设切点为 (x_0, y_0) , 则切线的斜率为

$$f'(x_0) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Big|_{x=x_0} = \frac{3}{2}\sqrt{x_0}.$$

于是所求切线方程可设为

$$y - y_0 = \frac{3}{2}\sqrt{x_0}(x - x_0). \quad (7)$$

切点 (x_0, y_0) 在曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 上, 故有

$$y_0 = x_0^{\frac{3}{2}} \quad (8)$$

切线(7)通过点 $(0, -4)$, 故有

$$-4 - y_0 = \frac{3}{2}\sqrt{x_0}(0 - x_0). \quad (9)$$

求得方程(8)及(9)组成的方程组的解为 $x_0 = 4, y_0 = 8$, 代入(7)式并化简, 即得所求切线方程为

$$3x - y - 4 = 0.$$

四、函数可导性与连续性的关系

设函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

存在. 由具有极限的函数与无穷小的关系知道,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

其中 α 为当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的无穷小. 上式两边同乘以 Δx , 得

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

由此可见, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$. 这就是说, 函数 $y = f(x)$ 在点 x 处是连续的. 所以, 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x 处可导, 则函数在该点必连续.

另一方面, 一个函数在某点连续却不一定在该点处可导. 举例说明如下:

例 9 函数 $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但在点 $x = 0$ 处不可导. 这是因为在点 $x = 0$ 处有

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \frac{1}{h^{2/3}},$$

因而, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$, 即导数为无穷大(注意, 导数不存

在). 这事实图形中表现为曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 在原点 O 具有垂直于 x 轴的切线 $x = 0$ (图 2-4).

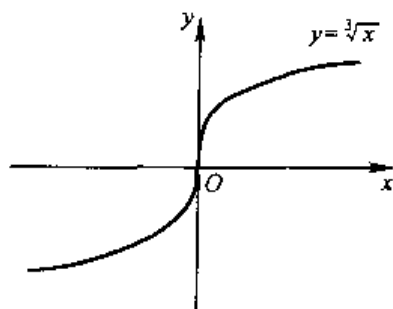


图 2-4

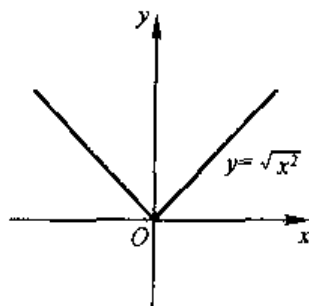


图 2-5

例 10 函数 $y = \sqrt{x^2}$ (即 $y = |x|$) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但在例 6 中已经看到, 这函数在 $x=0$ 处不可导. 曲线 $y = \sqrt{x^2}$ 在原点 O 没有切线 (图 2-5).

由以上讨论可知, 函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件, 但不是充分条件.

习 题 2-1

1. 设物体绕定轴旋转, 在时间间隔 $[0, t]$ 内转过角度 θ , 从而转角 θ 是 t 的函数: $\theta = \theta(t)$. 如果旋转是匀速的, 那么称 $\omega = \frac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的, 应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度?

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时, 物体就不断冷却. 若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T = T(t)$, 应怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度?

3. 设某工厂生产 x 单位产品所花费的成本是 $f(x)$ 元, 这函数 $f(x)$ 称为成本函数, 成本函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在经济学中称为边际成本. 试说明边际成本 $f'(x)$ 的实际意义.

4. 设 $f(x) = 10x^2$, 试按定义求 $f'(-1)$.

5. 证明 $(\cos x)' = -\sin x$.

6. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在, 按照导数定义观察下列极限, 指出 A 表示什么:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A, \text{ 其中 } f(0) = 0, \text{ 且 } f'(0) \text{ 存在};$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = A.$$

7. 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^4; \quad (2) y = \sqrt[3]{x^2}; \quad (3) y = x^{1/6};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad (5) y = \frac{1}{x^2}; \quad (6) y = x^3 \sqrt[5]{x};$$

$$(7) y = \frac{x^2 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}.$$

8. 已知物体的运动规律为 $s = t^3$ (m), 求这物体在 $t = 2$ 秒(s)时的速度.

9. 如果 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 证明 $f'(0) = 0$.

10. 求曲线 $y = \sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率:

$$x = \frac{2}{3}\pi; \quad x = \pi.$$

11. 求曲线 $y = \cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

12. 求曲线 $y = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

13. 在抛物线 $y = x^2$ 上取横坐标为 $x_1 = 1$ 及 $x_2 = 3$ 的两点, 作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

14. 讨论下列函数在 $x = 0$ 处的连续性与可导性:

$$(1) y = |\sin x|;$$

$$(2) y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

15. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续且可导, a, b 应取什么值?

$$16. \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \text{ 求 } f'_+(0) \text{ 及 } f'_-(0), \text{ 又 } f'(0) \text{ 是否存在?}$$

$$17. \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases} \text{ 求 } f'(x).$$

18. 证明: 双曲线 $xy = a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

第二节 函数的求导法则

在本节中, 将介绍求导数的几个基本法则以及前一节中未讨论过的几个基本初等函数的导数公式. 借助于这些法则和基本初等函数的导数公式, 就能比较方便地求出常见的初等函数的导数.

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 1 如果函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 都在点 x 具有导数, 那么它们的

和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x 具有导数,且

$$\begin{aligned}(1) & [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x); \\(2) & [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x); \\(3) & \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).\end{aligned}$$

证

$$\begin{aligned}(1) & [u(x) \pm v(x)]' \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)]}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\&= u'(x) \pm v'(x).\end{aligned}$$

于是法则(1)获得证明. 法则(1)可简单地表示为

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$\begin{aligned}(2) & [u(x)v(x)]' \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right] \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \\&\quad + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\&= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).\end{aligned}$$

其中 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$ 是由于 $v'(x)$ 存在, 故 $v(x)$ 在点 x 连续. 于是法则

(2)获得证明. 法则(2)可简单地表示为

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

$$\begin{aligned}(3) & \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x)v(x)\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}v(x) - u(x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x + \Delta x)v(x)} \\&= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.\end{aligned}$$

于是法则(3)获得证明, 法则(3)可简单地表示为

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

定理 1 中的法则(1)、(2)可推广到任意有限个可导函数的情形. 例如, 设 $u = u(x)$ 、 $v = v(x)$ 、 $w = w(x)$ 均可导, 则有

$$\begin{aligned}(u + v - w)' &= u' + v' - w' \\(uvw)' &= [(uv)w]' = (uv)'w + (uv)w' \\&= (u'v + uv')w + uvw',\end{aligned}$$

即

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

在法则(2)中, 当 $v(x) = C$ (C 为常数)时, 有

$$(Cu)' = Cu'.$$

例 1 $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$, 求 y' .

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= (2x^3 - 5x^2 + 3x - 7)' \\&= (2x^3)' - (5x^2)' + (3x)' - (7)' \\&= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 3 - 0 = 6x^2 - 10x + 3.\end{aligned}$$

例 2 $f(x) = x^3 + 4\cos x - \sin \frac{\pi}{2}$, 求 $f'(x)$ 及 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{解 } f'(x) = 3x^2 - 4\sin x,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi^2 - 4.$$

例 3 $y = e^x(\sin x + \cos x)$, 求 y' .

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)' \\&= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\&= 2e^x \cos x.\end{aligned}$$

例 4 $y = \tan x$, 求 y' .

$$\begin{aligned}\text{解 } y' &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\&= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,\end{aligned}$$

即

$$(\tan x)' = \sec^2 x.$$

这就是正切函数的导数公式.

例 5 $y = \sec x$, 求 y' .

$$\text{解 } y' = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$= \frac{(1)' \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x,$$

即 $(\sec x)' = \sec x \tan x$.

这就是正割函数的导数公式.

用类似方法,还可求得余切函数及余割函数的导数公式:

$$(\cot x)' = -\csc^2 x,$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

二、反函数的求导法则

定理 2 如果函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{x \mid x = f(y), y \in I_y\}$ 内也可导, 且

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \quad (1)$$

证 由于 $x = f(y)$ 在 I_y 内单调、可导(从而连续), 由第一章第九节定理 2 知道, $x = f(y)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 存在, 且 $f^{-1}(x)$ 在 I_x 内也单调、连续.

任取 $x \in I_x$, 给 x 以增量 Δx ($\Delta x \neq 0, x + \Delta x \in I_x$), 由 $y = f^{-1}(x)$ 的单调性可知

$$\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x) \neq 0,$$

于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

因 $y = f^{-1}(x)$ 连续, 故

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

从而

$$[f^{-1}(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)}.$$

上述结论可简单地说成: 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

下面用上述结论来求反三角函数及对数函数的导数.

例 6 设 $x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 为直接函数, 则 $y = \arcsin x$ 是它的反函数.

函数 $x = \sin y$ 在开区间 $I_y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导, 且

$$(\sin y)' = \cos y > 0.$$

因此,由公式(1),在对应区间 $I_r = (-1, 1)$ 内有

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

但 $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ (因为当 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos y > 0$, 所以根号前只取正号), 从而得反正弦函数的导数公式:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2)$$

用类似的方法可得反余弦函数的导数公式:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3)$$

例 7 设 $x = \tan y$ 是直接函数, $y \in I_v = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $y = \arctan x$ 是它的

反函数. 函数 $x = \tan y$ 在 $I_v = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导, 且

$$(\tan y)' = \sec^2 y \neq 0.$$

因此,由公式(1),在对应区间 $I_t = (-\infty, +\infty)$ 内有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

但 $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, 从而得反正切函数的导数公式:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}. \quad (4)$$

用类似的方法可得反余切函数的导数公式:

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (5)$$

如果利用三角学中的公式

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \text{ 和 } \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \text{ 那么从本节公式(2)和}$$

(4), 也立刻可得公式(3)和(5).

例 8 设 $x = a^y$ ($a > 0, a \neq 1$) 为直接函数, 则 $y = \log_a x$ 是它的反函数. 函数 $x = a^y$ 在区间 $I_y = (-\infty, +\infty)$ 内单调、可导, 且

$$(a^y)' = a^y \ln a \neq 0.$$

因此,由公式(1),在对应区间 $I_x = (0, +\infty)$ 内有

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a}.$$

但 $a^y = x$, 从而得到第一节例 5 中已求得的对数函数的导数公式:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

三、复合函数的求导法则

到目前为止,对于

$$\ln \tan x, \quad e^{x^3}, \quad \sin \frac{2x}{1+x^2}$$

那样的函数,我们还不知道它们是否可导,可导的话如何求它们的导数.这些问题借助于下面的重要法则可以得到解决,从而使可以求得导数的函数的范围得到很大扩充.

定理 3 如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导,而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导,则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 x 可导,且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (6)$$

证 由于 $y = f(u)$ 在点 u 可导,因此

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

存在,于是根据极限与无穷小的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha,$$

其中 α 是 $\Delta u \rightarrow 0$ 时的无穷小.上式中 $\Delta u \neq 0$,用 Δu 乘上式两边,得

$$\Delta y = f'(u) \Delta u + \alpha \cdot \Delta u. \quad (7)$$

当 $\Delta u = 0$ 时,规定 $\alpha = 0$ ^①,这时因 $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = 0$,而(7)式右端亦为零,故(7)式对 $\Delta u = 0$ 也成立.用 $\Delta x \neq 0$ 除(7)式两边,得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

于是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \right].$$

根据函数在某点可导必在该点连续的性质知道,当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta u \rightarrow 0$,从而可以推知

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

又因 $u = g(x)$ 在点 x 可导,有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x),$$

① $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta u} - f'(u)$ 是 Δu 的函数: $\alpha = \alpha(\Delta u)$. 这函数当 $\Delta u = 0$ 时无定义,当 $\Delta u \rightarrow 0$ 时, $\alpha \rightarrow 0$. 今规定 $\Delta u = 0$ 时 $\alpha = 0$, 则该函数在 $\Delta u = 0$ 处连续.

故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$

即 $\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x).$

这就是公式(6).

例 9 $y = e^{x^3}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $y = e^{x^3}$ 可看作由 $y = e^u, u = x^3$ 复合而成, 因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

例 10 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $y = \sin \frac{2x}{1+x^2}$ 可看作由 $y = \sin u, u = \frac{2x}{1+x^2}$ 复合而成. 因

$$\frac{dy}{du} = \cos u,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2(1+x^2) - (2x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \cos \frac{2x}{1+x^2}.$$

从以上例子看出, 应用复合函数求导法则时, 首先要分析所给函数可看作由哪些函数复合而成, 或者说, 所给函数能分解成哪些函数. 如果所给函数能分解成比较简单的函数, 而这些简单函数的导数我们已经会求, 那么应用复合函数求导法则就可以求所给函数的导数了.

对复合函数的分解比较熟练后, 就不必再写出中间变量, 而可以采用下列例题的方式来计算.

例 11 $y = \ln \sin x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx} = (\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} (\sin x)'$
 $= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$

例 12 $y = \sqrt[3]{1-2x^2}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx} = [(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]' = \frac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1-2x^2)'$

$$= \frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 我们以两个中间变量为例, 设 $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}, \quad \text{而} \quad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx},$$

故复合函数 $y = f[\varphi[\psi(x)]]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

当然, 这里假定上式右端所出现的导数在相应处都存在.

例 13 $y = \ln \cos(e^x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 所给函数可分解为 $y = \ln u$, $u = \cos v$, $v = e^x$. 因 $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$, $\frac{du}{dv} = -\sin v$, $\frac{dv}{dx} = e^x$, 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-\sin v) \cdot e^x = -\frac{\sin(e^x)}{\cos(e^x)} \cdot e^x = -e^x \tan(e^x).$$

不写出中间变量, 此例可这样写:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= [\ln \cos(e^x)]' = \frac{1}{\cos(e^x)} [\cos(e^x)]' \\ &= \frac{-\sin(e^x)}{\cos(e^x)} (e^x)' = -e^x \tan(e^x). \end{aligned}$$

例 14 $y = e^{\sin \frac{1}{x}}$, 求 y' .

解 $y' = (e^{\sin \frac{1}{x}})' = e^{\sin \frac{1}{x}} \left(\sin \frac{1}{x} \right)'$
 $= e^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \cos \frac{1}{x}.$

例 15 设 $x > 0$, 证明幂函数的导数公式

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}.$$

证 因为 $x^\mu = (e^{\ln x})^\mu = e^{\mu \ln x}$, 所以

$$\begin{aligned} (x^\mu)' &= (e^{\mu \ln x})' = e^{\mu \ln x} \cdot (\mu \ln x)' \\ &= x^\mu \cdot \mu \cdot \frac{1}{x} = \mu x^{\mu-1}. \end{aligned}$$

四、基本求导法则与导数公式

基本初等函数的导数公式与本节中所讨论的求导法则, 在初等函数的求导

运算中起着重要的作用,我们必须熟练地掌握它们.为了便于查阅,现在把这些导数公式和求导法则归纳如下:

1. 常数和基本初等函数的导数公式

- $$\begin{aligned}
 (1) (C)' &= 0, & (2) (x^\mu)' &= \mu x^{\mu-1}, \\
 (3) (\sin x)' &= \cos x, & (4) (\cos x)' &= -\sin x, \\
 (5) (\tan x)' &= \sec^2 x, & (6) (\cot x)' &= -\csc^2 x, \\
 (7) (\sec x)' &= \sec x \tan x, & (8) (\csc x)' &= -\csc x \cot x, \\
 (9) (a^x)' &= a^x \ln a, & (10) (e^x)' &= e^x, \\
 (11) (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, & (12) (\ln x)' &= \frac{1}{x}, \\
 (13) (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
 (14) (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
 (15) (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \\
 (16) (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 都可导, 则

- $$\begin{aligned}
 (1) (u \pm v)' &= u' \pm v', & (2) (Cu)' &= Cu' \quad (C \text{ 是常数}), \\
 (3) (uv)' &= u'v + uv', & (4) \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).
 \end{aligned}$$

3. 反函数的求导法则

设 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$, 则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在 $I_x = f(I_y)$ 内也可导, 且

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

4. 复合函数的求导法则

设 $y = f(u)$, 而 $u = g(x)$ 且 $f(u)$ 及 $g(x)$ 都可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad y'(x) = f'(u) \cdot g'(x).$$

下面再举两个综合运用这些法则和导数公式的例子.

例 16 证明下列双曲函数及反双曲函数的导数公式:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

证 由定理 1(1)、(2), 有

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2},$$

再利用 $(e^x)' = e^x$ 及定理 3, 得 $(e^{-x})' = -e^{-x}$. 于是

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

同理可得

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

由定理 1(3) 及上述结果, 有

$$\begin{aligned} (\operatorname{th} x)' &= \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. \end{aligned}$$

由 $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 应用复合函数求导法则及定理 1(1), 有

$$\begin{aligned} (\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

由 $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, 同理可得

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x \in (1, +\infty).$$

由 $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, 可得

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, x \in (-1, 1).$$

例 17 $y = \sin nx \cdot \sin^n x$ (n 为常数), 求 y' .

解 首先应用积的求导法则得

$$y' = (\sin nx)' \sin^n x + \sin nx \cdot (\sin^n x)'. \quad (1)$$

在计算 $(\sin nx)'$ 与 $(\sin^n x)'$ 时, 都要应用复合函数求导法则, 由此得

$$\begin{aligned} y' &= n \cos nx \cdot \sin^n x + \sin nx \cdot n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \\ &= n \sin^{n-1} x (\cos nx \cdot \sin x + \sin nx \cdot \cos x) \end{aligned}$$

$$= n \sin^{n-1} x \cdot \sin(n+1)x.$$

习 题 2-2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:

$$(\cot x)' = -\csc^2 x; \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^3 + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12; \quad (2) y = 5x^3 - 2^x + 3e^x;$$

$$(3) y = 2\tan x + \sec x - 1; \quad (4) y = \sin x \cdot \cos x;$$

$$(5) y = x^2 \ln x; \quad (6) y = 3e^x \cos x;$$

$$(7) y = \frac{\ln x}{x}; \quad (8) y = \frac{e^x}{x} + \ln 3;$$

$$(9) y = x^2 \ln x \cos x; \quad (10) s = \frac{1 + \sin t}{1 + \cos t}.$$

3. 求下列函数在给定点处的导数:

$$(1) y = \sin x - \cos x, \text{ 求 } y' \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} \text{ 和 } y' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}};$$

$$(2) \rho = \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta, \text{ 求 } \frac{d\rho}{d\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}};$$

$$(3) f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}, \text{ 求 } f'(0) \text{ 和 } f'(2).$$

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. 求:

(1) 该物体的速度 $v(t)$;

(2) 该物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线 $y = 2\sin x + x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

6. 求下列函数的导数:

$$(1) y = (2x+5)^4; \quad (2) y = \cos(4-3x);$$

$$(3) y = e^{-3x^2}; \quad (4) y = \ln(1+x^2);$$

$$(5) y = \sin^2 x; \quad (6) y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$(7) y = \tan(x^2); \quad (8) y = \arctan(e^x);$$

$$(9) y = (\arcsin x)^2; \quad (10) y = \ln \cos x.$$

7. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \arcsin(1-2x); \quad (2) y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(3) y = e^{-\frac{x}{2}} \cos 3x; \quad (4) y = \arccos \frac{1}{x};$$

$$(5) y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}; \quad (6) y = \frac{\sin 2x}{x};$$

$$(7) y = \arcsin \sqrt{x}; \quad (8) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2});$$

$$(9) y = \ln(\sec x + \tan x); \quad (10) y = \ln(\csc x - \cot x).$$

8. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \left(\arcsin \frac{x}{2} \right)^2; \quad (2) y = \ln \tan \frac{x}{2};$$

$$(3) y = \sqrt{1 + \ln^2 x}; \quad (4) y = e^{\arctan \sqrt{x}};$$

$$(5) y = \sin^n x \cos nx; \quad (6) y = \arctan \frac{x+1}{x-1};$$

$$(7) y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}; \quad (8) y = \ln \ln \ln x;$$

$$(9) y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}; \quad (10) y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导, 且 $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$, 试求函数 $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ 的导数.

10. 设 $f(x)$ 可导, 求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) y = f(x^2); \quad (2) y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x).$$

11. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x); \quad (2) y = \operatorname{sh} x \cdot e^{\operatorname{ch} x};$$

$$(3) y = \operatorname{th}(\ln x); \quad (4) y = \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{ch}^2 x;$$

$$(5) y = \operatorname{th}(1 - x^2); \quad (6) y = \operatorname{arsh}(x^2 + 1);$$

$$(7) y = \operatorname{arch}(e^{2x}); \quad (8) y = \arctan(\operatorname{th} x);$$

$$(9) y = \ln \operatorname{ch} x + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}; \quad (10) y = \operatorname{ch}^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right).$$

12. 求下列函数的导数:

$$(1) y = e^{-t}(x^2 - 2x + 3); \quad (2) y = \sin^2 t \cdot \sin(x^2);$$

$$(3) y = \left(\arctan \frac{x}{2} \right)^2; \quad (4) y = \frac{\ln x}{x^x};$$

$$(5) y = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}; \quad (6) y = \ln \cos \frac{1}{x};$$

$$(7) y = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}}; \quad (8) y = \sqrt{x + \sqrt{x}};$$

$$(9) y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}; \quad (10) y = \arcsin \frac{2t}{1+t^2}.$$

第三节 高阶导数

我们知道, 变速直线运动的速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数, 即

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{或} \quad v = s',$$

而加速度 a 又是速度 v 对时间 t 的变化率, 即速度 v 对时间 t 的导数:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) \quad \text{或} \quad a = (s')'.$$

这种导数的导数 $\frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)$ 或 $(s')'$ 叫做 s 对 t 的二阶导数, 记作

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{或} \quad s''(t).$$

所以, 直线运动的加速度就是位置函数 s 对时间 t 的二阶导数.

一般地, 函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 我们把 $y' = f'(x)$ 的导数叫做函数 $y = f(x)$ 的二阶导数, 记作 y'' 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$, 即

$$y'' = (y')' \quad \text{或} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

相应地, 把 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的一阶导数.

类似地, 二阶导数的导数, 叫做三阶导数, 三阶导数的导数叫做四阶导数, \dots , 一般地, $(n-1)$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数, 分别记作

$$y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$$

或

$$\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}.$$

函数 $y = f(x)$ 具有 n 阶导数, 也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导. 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数, 那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

由此可见, 求高阶导数就是多次接连地求导数. 所以, 仍可应用前面学过的求导方法来计算高阶导数.

例 1 $y = ax + b$, 求 y'' .

解 $y' = a, y'' = 0$.

例 2 $s = \sin \omega t$, 求 s'' .

解 $s' = \omega \cos \omega t, s'' = -\omega^2 \sin \omega t$.

例 3 证明: 函数 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 满足关系式

$$y^3 y'' + 1 = 0.$$

证 将 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 求导, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \\ y'' &= \frac{-\sqrt{2x-x^2} - (1-x) \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{-2x + x^2 - (1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \\
 &= -\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{y^3}.
 \end{aligned}$$

于是 $y^3 y'' + 1 = 0$.

下面介绍几个初等函数的 n 阶导数.

例 4 求指数函数 $y = e^x$ 的 n 阶导数.

解 $y' = e^x$, $y'' = e^x$, $y''' = e^x$, $y^{(4)} = e^x$.

一般地, 可得

$$y^{(n)} = e^x,$$

即 $(e^x)^{(n)} = e^x$.

例 5 求正弦与余弦函数的 n 阶导数.

解 $y = \sin x$,

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)} = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

一般地, 可得

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

即 $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

用类似方法, 可得

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

例 6 求对数函数 $\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解 $y = \ln(1+x)$, $y' = \frac{1}{1+x}$,

$$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad y''' = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4},$$

一般地, 可得

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

即
$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

通常规定 $0! = 1$, 所以这个公式当 $n=1$ 时也成立.

例 7 求幂函数的 n 阶导数公式.

解 设 $y = x^\mu$ (μ 是任意常数), 那么

$$y' = \mu x^{\mu-1},$$

$$y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$y''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$

$$y^{(4)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)x^{\mu-4},$$

一般地, 可得

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

即
$$(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}.$$

当 $\mu = n$ 时, 得到

$$(x^n)^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

而
$$(x^n)^{(n+1)} = 0.$$

如果函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数, 那么显然 $u(x) + v(x)$ 及 $u(x) - v(x)$ 也在点 x 处具有 n 阶导数, 且

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

但乘积 $u(x) \cdot v(x)$ 的 n 阶导数并不如此简单. 由

$$(uv)' = u'v + uv'$$

首先得出

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

用数学归纳法可以证明

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} = & u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots \\ & + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}. \end{aligned}$$

上式称为莱布尼茨 (Leibniz) 公式. 这公式可以这样记忆: 把 $(u+v)^n$ 按二项式定理展开写成

$$(u+v)^n = u^n v^0 + nu^{n-1}v^1 + \frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2 + \cdots + u^0 v^n,$$

即

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{n-k} v^k \text{①},$$

然后把 k 次幂换成 k 阶导数(零阶导数理解为函数本身),再把左端的 $u+v$ 换成 uv ,这样就得到莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

例 8 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

解 设 $u = e^{2x}$, $v = x^2$, 则

$$u^{(k)} = 2^k e^{2x} \quad (k=1, 2, \cdots, 20),$$

$$v' = 2x, \quad v'' = 2, \quad v^{(k)} = 0 \quad (k=3, 4, \cdots, 20),$$

代入莱布尼茨公式,得

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= (x^2 e^{2x})^{(20)} \\ &= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2 \\ &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \end{aligned}$$

习 题 2-3

1. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y = 2x^2 + \ln x$;

(2) $y = e^{2x-1}$;

(3) $y = x \cos x$;

(4) $y = e^{-t} \sin t$;

(5) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$;

(6) $y = \ln(1 - x^2)$;

(7) $y = \tan x$;

(8) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$;

(9) $y = (1 + x^2) \arctan x$;

(10) $y = \frac{e^x}{x}$;

(11) $y = xe^{x^2}$;

(12) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

2. 设 $f(x) = (x+10)^6$, $f'''(2) = ?$

3. 设 $f''(x)$ 存在, 求下列函数的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

(1) $y = f(x^2)$;

(2) $y = \ln[f(x)]$.

4. 试从 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 导出:

① 记号 Σ 表示对同一类型诸项求和. 例如, $\sum_{k=0}^n C_n^k u^{n-k} v^k$ 表示在 $C_n^k u^{n-k} v^k$ 中依次令 $k = 0, 1, \cdots, n$,

然后对这样得到的 $n+1$ 项求和.

$$(1) \frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}; \quad (2) \frac{d^3 x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y' y'''}{(y')^5}.$$

5. 已知物体的运动规律为 $s = A \sin \omega t$ (A, ω 是常数), 求物体运动的加速度, 并验证:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

6. 验证函数 $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ (λ, C_1, C_2 是常数) 满足关系式:

$$y'' - \lambda^2 y = 0.$$

7. 验证函数 $y = e^x \sin x$ 满足关系式

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ (a_1, a_2, \cdots, a_n 都是常数);

(2) $y = \sin^2 x$;

(3) $y = x \ln x$;

(4) $y = x e^x$.

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$;

(2) $y = x \operatorname{sh} x$, 求 $y^{(100)}$;

(3) $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(60)}$.

第四节 隐函数及由参数方程所确定的 函数的导数 相关变化率

一、隐函数的导数

函数 $y = f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系, 这种对应关系可以用各种不同方式表达. 前面我们遇到的函数, 例如 $y = \sin x$, $y = \ln x + \sqrt{1-x^2}$ 等, 这种函数表达方式的特点是: 等号左端是因变量的符号, 而右端是含有自变量的式子, 当自变量取定义域内任一值时, 由这式子能确定对应的函数值. 用这种方式表达的函数叫做显函数. 有些函数的表达方式却不是这样, 例如, 方程

$$x + y^3 - 1 = 0$$

表示一个函数, 因为当变量 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内取值时, 变量 y 有确定的值与之对应. 例如, 当 $x = 0$ 时, $y = 1$; 当 $x = -1$ 时, $y = \sqrt[3]{2}$, 等等. 这样的函数称为隐函数.

一般地, 如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x, y) = 0$, 在一定条件下, 当 x 取某区间内的任一值时, 相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在, 那么就说方程 $F(x, y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

把一个隐函数化成显函数,叫做隐函数的显化.例如从方程 $x + y^3 - 1 = 0$ 解出 $y = \sqrt[3]{1-x}$,就把隐函数化成了显函数.隐函数的显化有时是有困难的,甚至是不可能的.但在实际问题中,有时需要计算隐函数的导数,因此,我们希望有一种方法,不管隐函数能否显化,都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数来.下面通过具体例子来说明这种方法.

例 1 求由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 我们把方程两边分别对 x 求导数^①,注意 $y = y(x)$.方程左边对 x 求导得

$$\frac{d}{dx}(e^y + xy - e) = e^y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx},$$

方程右边对 x 求导得

$$(0)' = 0.$$

由于等式两边对 x 的导数相等,所以

$$e^y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0,$$

从而

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + e^y} \quad (x + e^y \neq 0).$$

在这个结果中,分式中的 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + xy - e = 0$ 所确定的隐函数.

例 2 求由方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$ 所确定的隐函数在 $x = 0$ 处的导数 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

解 把方程两边分别对 x 求导,由于方程两边的导数相等,所以

$$5y^4 \frac{dy}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} - 1 - 21x^6 = 0.$$

由此得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 21x^6}{5y^4 + 2}.$$

因为当 $x = 0$ 时,从原方程得 $y = 0$,所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

例 3 求椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在点 $\left(2, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处的切线方程(图2-6).

解 由导数的几何意义知道,所求切线的斜率为

① 假设方程 $F(x, y) = 0$ 确定一个函数 $y = y(x)$,把 $y = y(x)$ 代入方程便得恒等式 $F[x, y(x)] = 0$.因此,这里说的方程两边对 x 求导,是指恒等式两边对 x 求导.

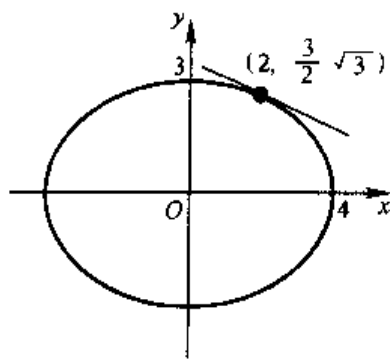


图 2-6

$$k = y' \Big|_{x=2}.$$

椭圆方程的两边分别对 x 求导, 有

$$\frac{x}{8} + \frac{2}{9}y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

从而

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{16y}.$$

当 $x=2$ 时, $y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, 代入上式得

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

于是所求的切线方程为

$$y - \frac{3}{2}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 2),$$

即

$$\sqrt{3}x + 4y - 8\sqrt{3} = 0.$$

例 4 求由方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 应用隐函数的求导方法, 得

$$1 - \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2 - \cos y}.$$

上式两边再对 x 求导, 得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2\sin y \frac{dy}{dx}}{(2 - \cos y)^2} = \frac{-4\sin y}{(2 - \cos y)^3}.$$

上式右端分式中的 $y = y(x)$ 是由方程 $x - y + \frac{1}{2}\sin y = 0$ 所确定的隐函数.

在某些场合,利用所谓对数求导法求导数比用通常的方法简便些. 这种方法是先在 $y = f(x)$ 的两边取对数,然后再求出 y 的导数. 我们通过下面的例子来说明这种方法.

例 5 求 $y = x^{\sin x} (x > 0)$ 的导数.

解 这函数是幂指函数. 为了求这函数的导数,可以先在两边取对数,得

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x;$$

上式两边对 x 求导,注意到 $y = y(x)$,得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\text{于是 } y' = y \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

对于一般形式的幂指函数

$$y = u^v (u > 0), \quad (1)$$

如果 $u = u(x)$ 、 $v = v(x)$ 都可导,则可像例 5 那样利用对数求导法求出幂指函数(1)的导数如下:

先在两边取对数,得

$$\ln y = v \cdot \ln u,$$

上式两边对 x 求导,注意到 $y = y(x)$ 、 $u = u(x)$ 、 $v = v(x)$,得

$$\frac{1}{y}y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$\text{于是 } y' = y \left(v' \cdot \ln u + \frac{vu'}{u} \right) = u^v \left(v' \cdot \ln u + \frac{vu'}{u} \right).$$

幂指函数(1)也可表示为

$$y = e^{v \ln u}.$$

这样,便可直接求得

$$\begin{aligned} y' &= e^{v \ln u} \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) \\ &= u^v \left(v' \cdot \ln u + \frac{vu'}{u} \right). \end{aligned}$$

例 6 求 $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 先在两边取对数(假定 $x > 4$),得

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)],$$

上式两边对 x 求导,注意到 $y = y(x)$,得

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right),$$

于是
$$y' = \frac{y}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right).$$

当 $x < 1$ 时, $y = \sqrt{\frac{(1-x)(2-x)}{(3-x)(4-x)}}$;

当 $2 < x < 3$ 时, $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(3-x)(4-x)}}$;

用同样的方法可得与上面相同的结果.

二、由参数方程所确定的函数的导数

研究物体运动的轨迹时,常遇到参数方程.例如,研究抛射体的运动问题时,如果空气阻力忽略不计,则抛射体的运动轨迹可表示为

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases} \quad (2)$$

其中 v_1 、 v_2 分别是抛射体初速度的水平、铅直分量, g 是重力加速度, t 是飞行时间, x 和 y 分别是飞行中抛射体在铅直平面上的位置的横坐标和纵坐标(图 2-7).

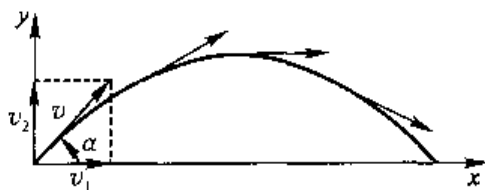


图 2-7

在(2)式中, x 、 y 都与 t 存在函数关系.如果把对应于同一个 t 值的 y 与 x 的值看作是对应的,这样就得到 y 与 x 之间的函数关系.消去(2)中的参数 t ,有

$$y = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2.$$

这是因变量 y 与自变量 x 直接联系的式子,也是参数方程(2)所确定的函数的显式表示.

一般地,若参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (3)$$

确定 y 与 x 间的函数关系,则称此函数关系所表达的函数为由参数方程(3)所确定的函数.

在实际问题中,需要计算由参数方程(3)所确定的函数的导数.但从(3)中消

去参数 t 有时会有困难. 因此, 我们希望有一种方法能直接由参数方程(3)算出它所确定的函数的导数来. 下面就来讨论由参数方程(3)所确定的函数的求导方法.

在(3)式中, 如果函数 $x = \varphi(t)$ 具有单调连续反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 且此反函数能与函数 $y = \psi(t)$ 构成复合函数, 那么由参数方程(3)所确定的函数可以看成是由函数 $y = \psi(t)$ 、 $t = \varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数 $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$. 现在, 要计算这个复合函数的导数. 为此再假定函数 $x = \varphi(t)$ 、 $y = \psi(t)$ 都可导, 而且 $\varphi'(t) \neq 0$. 于是根据复合函数的求导法则与反函数的求导法则, 就有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\text{即} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (4)$$

上式也可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

(4)式就是由参数方程(3)所确定的 x 的函数的导数公式^①.

如果 $x = \varphi(t)$ 、 $y = \psi(t)$ 还是二阶可导的, 那么从(4)式又可得到函数的二阶导数公式:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}, \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}. \quad (5)$$

例 7 已知椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

求椭圆在 $t = \frac{\pi}{4}$ 相应的点处的切线方程(图 2-8).

^① 因为 $\frac{dy}{dx}$ 是 x 的函数, 所以应表示为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \end{cases}$$

但为了方便起见, 通常把 $x = \varphi(t)$ 省去. 后面的公式(5)也作类似的理解.

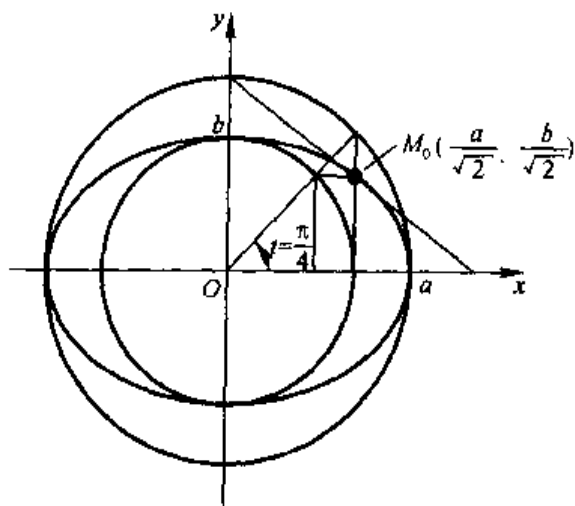


图 2-8

解 当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, 椭圆上的相应点 M_0 的坐标是:

$$x_0 = a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$y_0 = b \sin \frac{\pi}{4} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

曲线在点 M_0 的切线斜率为:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left. \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left. \frac{b \cos t}{-a \sin t} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

代入点斜式方程, 即得椭圆在点 M_0 处的切线方程

$$y - \frac{b\sqrt{2}}{2} = -\frac{b}{a} \left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right).$$

化简后得

$$bx + ay - \sqrt{2}ab = 0.$$

例 8 已知抛射体的运动轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases}$$

求抛射体在时刻 t 的运动速度的大小和方向.

解 先求速度的大小.

由于速度的水平分量为

$$\frac{dx}{dt} = v_1,$$

铅直分量为

$$\frac{dy}{dt} = v_2 - gt,$$

所以抛射体运动速度的大小为

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_1^2 + (v_2 - gt)^2}.$$

再求速度的方向,也就是轨迹的切线方向.

设 α 是切线的倾角,则根据导数的几何意义,得

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_2 - gt}{v_1}.$$

所以,在抛射体刚射出(即 $t=0$)时,

$$\tan \alpha \Big|_{t=0} = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \frac{v_2}{v_1};$$

当 $t = \frac{v_2}{g}$ 时,

$$\tan \alpha \Big|_{t=\frac{v_2}{g}} = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{v_2}{g}} = 0,$$

这时,运动方向是水平的,即抛物体达到最高点(图 2-7).

例 9 计算由摆线(图 2-9)的参数方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数.

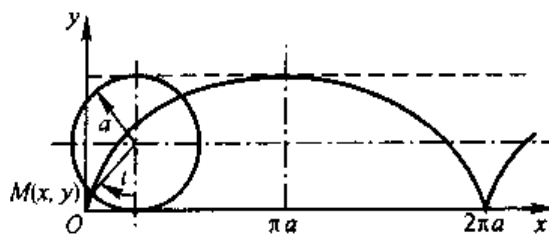


图 2-9

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot \frac{t}{2}$$

$$(t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\cot \frac{t}{2} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

$$(t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}).$$

三、相关变化率

设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数, 而变量 x 与 y 间存在某种关系, 从而变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 间也存在一定关系. 这两个相互依赖的变化率称为相关变化率. 相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系, 以便从其中一个变化率求出另一个变化率.

例 10 一气球从离开观察员 500 m 处离地面铅直上升, 其速率为 140 m/min(分). 当气球高度为 500 m 时, 观察员视线的仰角增加率是多少?

解 设气球上升 t s(秒)后, 其高度为 h , 观察员视线的仰角为 α , 则

$$\tan \alpha = \frac{h}{500},$$

其中 α 及 h 都与 t 存在函数关系. 上式两边对 t 求导, 得

$$\sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

已知 $\frac{dh}{dt} = 140$ m/min. 又当 $h = 500$ m 时, $\tan \alpha = 1$, $\sec^2 \alpha = 2$. 代入上式得

$$2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \cdot 140,$$

所以 $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{70}{500} = 0.14$ (rad(弧度)/min).

即观察员视线的仰角增加率是 0.14 rad/min.

习 题 2-4

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2 - 2xy + 9 = 0$; (2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

(3) $xy = e^{x+y}$; (4) $y = 1 - xe^y$.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程.

3. 求出下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2 - y^2 = 1$; (2) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;

$$(3) y = \tan(x+y); \quad (4) y = 1 + xe^y.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

$$(1) y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x; \quad (2) y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+2}}};$$

$$(3) y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}; \quad (4) y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x}.$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \theta(1 - \sin \theta), \\ y = \theta \cos \theta. \end{cases}$$

6. 已知 $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$ 求当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

$$(1) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} \text{ 在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处};$$

$$(2) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases} \text{ 在 } t = 2 \text{ 处}.$$

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$(1) \begin{cases} x = \frac{t^2}{2}, \\ y = 1 - t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = 3e^{-t}, \\ y = 2e^t; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t); \end{cases} \text{ 设 } f''(t) \text{ 存在且不为零.}$$

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\frac{d^3y}{dx^3}$:

$$(1) \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t + \arctan t. \end{cases}$$

10. 落在平静水面上的石头,产生同心波纹.若最外一圈波半径的增大率总是 6 m/s,问在 2 s 末扰动水面面积的增大率为多少?

11. 注水入深 8 m 上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中,其速率为 4 m³/min.当水深为 5 m 时,其表面上升的速率为多少?

12. 溶液自深 18 cm 顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中.开始时漏斗中盛满了溶液.已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时,其表面下降的速率为

1 cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

第五节 函数的微分

一、微分的定义

先分析一个具体问题. 一块正方形金属薄片受温度变化的影响, 其边长由 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ (图 2-10), 问此薄片的面积改变了多少?

设此薄片的边长为 x , 面积为 A , 则 A 与 x 存在函数关系: $A = x^2$. 薄片受温度变化的影响时面积的改变量, 可以看成是当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时, 函数 $A = x^2$ 相应的增量 ΔA , 即

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

从上式可以看出, ΔA 分成两部分, 第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数, 即图中带有斜线的两个矩形面积之和, 而第二部分 $(\Delta x)^2$ 在图中是带有交叉斜线的小正方形的面积, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小, 即

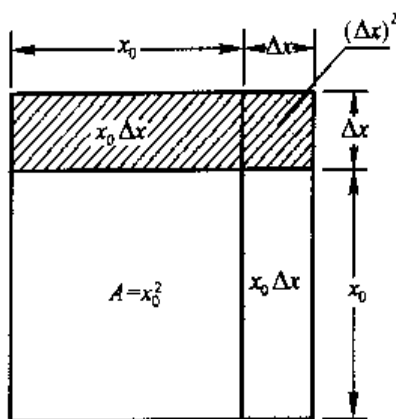


图 2-10

$(\Delta x)^2 = o(\Delta x)$. 由此可见, 如果边长改变很微小, 即 $|\Delta x|$ 很小时, 面积的改变量 ΔA 可近似地用第一部分来代替.

一般地, 如果函数 $y = f(x)$ 满足一定条件, 则函数的增量 Δy 可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 因此 $A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数, 且它与 Δy 之差

$$\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$$

是比 Δx 高阶的无穷小. 所以, 当 $A \neq 0$, 且 $|\Delta x|$ 很小时, 我们就可以近似地用 $A\Delta x$ 来代替 Δy .

定义 设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义, x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 在这区间内, 如

果函数的增量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad (1)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数, 那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 是可微的, 而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作 dy , 即

$$dy = A\Delta x.$$

下面讨论函数可微的条件. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微, 则按定义有(1)式成立. (1)式两边除以 Δx , 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

于是, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 由上式就得到

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

因此, 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微, 则 $f(x)$ 在点 x_0 也一定可导 (即 $f'(x_0)$ 存在), 且 $A = f'(x_0)$.

反之, 如果 $y = f(x)$ 在点 x_0 可导, 即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

存在, 根据极限与无穷小的关系 (第一章第四节定理 1), 上式可写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

其中 $\alpha \rightarrow 0$ (当 $\Delta x \rightarrow 0$). 由此又有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x.$$

因 $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, 且 $f'(x_0)$ 不依赖于 Δx , 故上式相当于(1)式, 所以 $f(x)$ 在点 x_0 也是可微的.

由此可见, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 且当 $f(x)$ 在点 x_0 可微时, 其微分一定是

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \quad (2)$$

当 $f'(x_0) \neq 0$ 时, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

从而, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, Δy 与 dy 是等价无穷小, 于是由第一章第七节定理 1 可知, 这时有

$$\Delta y = dy + o(dy), \quad (3)$$

即 dy 是 Δy 的主部^①. 又由于 $dy = f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数, 所以在 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件下, 我们说 dy 是 Δy 的线性主部(当 $\Delta x \rightarrow 0$). 于是我们得到结论: 在 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件下, 以微分 $dy = f'(x_0)\Delta x$ 近似代替增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 时, 其误差为 $o(dy)$. 因此, 在 $|\Delta x|$ 很小时, 有近似等式

$$\Delta y \approx dy.$$

例 1 求函数 $y = x^2$ 在 $x = 1$ 和 $x = 3$ 处的微分.

解 函数 $y = x^2$ 在 $x = 1$ 处的微分为

$$dy = (x^2)'|_{x=1} \Delta x = 2\Delta x;$$

在 $x = 3$ 处的微分为

$$dy = (x^2)'|_{x=3} \Delta x = 6\Delta x.$$

函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 的微分, 称为函数的微分, 记作 dy 或 $df(x)$, 即

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

例如, 函数 $y = \cos x$ 的微分为

$$dy = (\cos x)' \Delta x = -\sin x \Delta x;$$

函数 $y = e^x$ 的微分为

$$dy = (e^x)' \Delta x = e^x \Delta x.$$

显然, 函数的微分 $dy = f'(x)\Delta x$ 与 x 和 Δx 有关.

例 2 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2, \Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 先求函数在任意点 x 的微分

$$dy = (x^3)' \Delta x = 3x^2 \Delta x.$$

再求函数当 $x = 2, \Delta x = 0.02$ 时的微分

$$dy \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.02}} = 3x^2 \Delta x \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.02}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.02 = 0.24.$$

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分, 记作 dx , 即 $dx = \Delta x$. 于是函数 $y = f(x)$ 的微分又可记作

$$dy = f'(x)dx.$$

从而有

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

这就是说, 函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商等于该函数的导数. 因此, 导数也叫做“微商”.

二、微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解, 我们来说明微分的几何意义.

^① 设 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小, 如果 $\beta = \alpha + o(\alpha)$, 则称 α 是 β 的主部.

在直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 的图形是一条曲线.对于某一固定的 x_0 值,曲线上有一个确定点 $M(x_0, y_0)$,当自变量 x 有微小增量 Δx 时,就得到曲线上另一点 $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.从图 2-11 可知:

$$MQ = \Delta x,$$

$$QN = \Delta y.$$

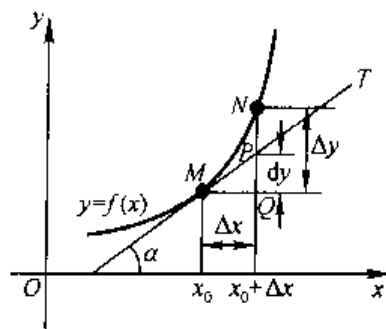


图 2-11

过点 M 作曲线的切线 MT , 它的倾角为 α , 则

$$QP = MQ \cdot \tan \alpha = \Delta x \cdot f'(x_0),$$

即

$$dy = QP.$$

由此可见,对于可微函数 $y=f(x)$ 而言,当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上的点的纵坐标的增量时, dy 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量.当 $|\Delta x|$ 很小时, $|\Delta y - dy|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多.因此在点 M 的邻近,我们可以用切线段来近似代替曲线段.

三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

从函数的微分的表达式

$$dy = f'(x)dx$$

可以看出,要计算函数的微分,只要计算函数的导数,再乘以自变量的微分.因此,可得如下的微分公式和微分运算法则.

1. 基本初等函数的微分公式

由基本初等函数的导数公式,可以直接写出基本初等函数的微分公式.为了便于对照,列表于下:

| 导 数 公 式 | 微 分 公 式 |
|----------------------------|-------------------------------|
| $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ | $d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx$ |
| $(\sin x)' = \cos x$ | $d(\sin x) = \cos x dx$ |
| $(\cos x)' = -\sin x$ | $d(\cos x) = -\sin x dx$ |

续表

| 导 数 公 式 | 微 分 公 式 |
|---|--|
| $(\tan x)' = \sec^2 x$ | $d(\tan x) = \sec^2 x dx$ |
| $(\cot x)' = -\csc^2 x$ | $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$ |
| $(\sec x)' = \sec x \tan x$ | $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$ |
| $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ | $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$ |
| $(a^x)' = a^x \ln a$ | $d(a^x) = a^x \ln a dx$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $d(e^x) = e^x dx$ |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | $d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$ |
| $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ | $d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$ |
| $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ | $d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$ |

2. 函数和、差、积、商的微分法则

由函数和、差、积、商的求导法则,可推得相应的微分法则.为了便于对照,列成下表(表中 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 都可导).

| 函数和、差、积、商的求导法则 | 函数和、差、积、商的微分法则 |
|--|---|
| $(u \pm v)' = u' \pm v'$ | $d(u \pm v) = du \pm dv$ |
| $(Cu)' = Cu'$ | $d(Cu) = Cdu$ |
| $(uv)' = u'v + uv'$ | $d(uv) = vdu + u dv$ |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$ | $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0)$ |

现在我们以乘积的微分法则为例加以证明.

根据函数微分的表达式,有

$$d(uv) = (uv)' dx.$$

再根据乘积的求导法则,有

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

于是

$$d(uv) = (u'v + uv') dx = u'v dx + uv' dx.$$

由于 $u' dx = du, v' dx = dv$,
所以 $d(uv) = vdu + u dv$.

其他法则都可以用类似方法证明.

3. 复合函数的微分法则

与复合函数的求导法则相应的复合函数的微分法则可推导如下:

设 $y = f(u)$ 及 $u = g(x)$ 都可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分为

$$dy = y'_x dx = f'(u) g'(x) dx.$$

由于 $g'(x) dx = du$, 所以, 复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$dy = f'(u) du \quad \text{或} \quad dy = y'_u du.$$

由此可见, 无论 u 是自变量还是中间变量, 微分形式 $dy = f'(u) du$ 保持不变. 这一性质称为微分形式不变性. 这性质表示, 当变换自变量时, 微分形式 $dy = f'(u) du$ 并不改变.

例 3 $y = \sin(2x+1)$, 求 dy .

解 把 $2x+1$ 看成中间变量 u , 则

$$\begin{aligned} dy &= d(\sin u) = \cos u du = \cos(2x+1) d(2x+1) \\ &= \cos(2x+1) \cdot 2dx = 2\cos(2x+1) dx. \end{aligned}$$

在求复合函数的导数时, 可以不写出中间变量. 在求复合函数的微分时, 类似地也可以不写出中间变量. 下面我们用这种方法来求函数的微分.

例 4 $y = \ln(1+e^{x^2})$, 求 dy .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad dy &= d\ln(1+e^{x^2}) = \frac{1}{1+e^{x^2}} d(1+e^{x^2}) = \frac{1}{1+e^{x^2}} \cdot e^{x^2} d(x^2) \\ &= \frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}} \cdot 2x dx = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}} dx. \end{aligned}$$

例 5 $y = e^{1-3x} \cos x$, 求 dy .

解 应用积的微分法则, 得

$$\begin{aligned} dy &= d(e^{1-3x} \cos x) = \cos x d(e^{1-3x}) + e^{1-3x} d(\cos x) \\ &= (\cos x) e^{1-3x} (-3dx) + e^{1-3x} (-\sin x dx) \\ &= -e^{1-3x} (3\cos x + \sin x) dx. \end{aligned}$$

例 6 在下列等式左端的括号中填入适当的函数, 使等式成立.

(1) $d(\quad) = x dx$;

(2) $d(\quad) = \cos \omega t dt$.

解 (1) 我们知道,

$$d(x^2) = 2x dx.$$

可见

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = d\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

即

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) = x dx.$$

一般地,有

$$d\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x dx \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

(2) 因为

$$d(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t dt,$$

可见

$$\cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} d(\sin \omega t) = d\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right),$$

即

$$d\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t\right) = \cos \omega t dt.$$

一般地,有

$$d\left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t + C\right) = \cos \omega t dt \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

四、微分在近似计算中的应用

1. 函数的近似计算

在工程问题中,经常会遇到一些复杂的计算公式.如果直接用这些公式进行计算,那是很费力的.利用微分往往可以把一些复杂的计算公式用简单的近似公式来代替.

前面说过,如果 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0) \neq 0$, 且 $|\Delta x|$ 很小时,我们有

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0) \Delta x.$$

这个式子也可以写为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x, \quad (4)$$

或

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (5)$$

在(5)式中令 $x = x_0 + \Delta x$, 即 $\Delta x = x - x_0$, 那么(5)式可改写为

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (6)$$

如果 $f(x_0)$ 与 $f'(x_0)$ 都容易计算,那么可利用(4)式来近似计算 Δy , 利用(5)式来近似计算 $f(x_0 + \Delta x)$, 或利用(6)式来近似计算 $f(x)$. 这种近似计算的实质就是用 x 的线性函数 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来近似表达函数 $f(x)$. 从导数的几何意义可知,这也就是用曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线来近似代替该曲线(就切点邻近部分来说).

例 7 有一批半径为 1 cm 的球,为了提高球面的光洁度,要镀上一层铜,厚度定为 0.01 cm. 估计一下每只球需用铜多少 g(铜的密度是 8.9 g/cm^3)?

解 先求出镀层的体积,再乘上密度就得到每只球需用铜的质量.

因为镀层的体积等于两个球体体积之差,所以它就是球体体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

当 R 自 R_0 取得增量 ΔR 时的增量 ΔV . 我们求 V 对 R 的导数:

$$V' \Big|_{R=R_0} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)' \Big|_{R=R_0} = 4\pi R_0^2,$$

由(4)式得 $\Delta V \approx 4\pi R_0^2 \Delta R$.

将 $R_0 = 1, \Delta R = 0.01$ 代入上式,得

$$\Delta V \approx 4 \times 3.14 \times 1^2 \times 0.01 \approx 0.13 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

于是镀每只球需用的铜约为

$$0.13 \times 8.9 \approx 1.16 \text{ (g)}.$$

例8 利用微分计算 $\sin 30^\circ 30'$ 的近似值.

解 把 $30^\circ 30'$ 化为弧度,得

$$30^\circ 30' = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}.$$

由于所求的是正弦函数的值,故设 $f(x) = \sin x$. 此时 $f'(x) = \cos x$. 如果

取 $x_0 = \frac{\pi}{6}$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 与 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 都容易计算,并且

$\Delta x = \frac{\pi}{360}$ 比较小. 应用(5)式便得

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ 30' &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{360} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} \approx 0.5000 + 0.0076 \\ &= 0.5076. \end{aligned}$$

下面我们来推导一些常用的近似公式. 为此,在(6)式中取 $x_0 = 0$, 于是得

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x. \quad (7)$$

应用(7)式可以推得以下几个在工程上常用的近似公式(下面都假定 $|x|$ 是较小的数值):

(i) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$;

(ii) $\sin x \approx x$ (x 用弧度作单位来表达);

(iii) $\tan x \approx x$ (x 用弧度作单位来表达);

(iv) $e^x \approx 1 + x$;

(v) $\ln(1+x) \approx x$.

证 (i) 在第一章第七节例1中我们已经证明过这个近似公式. 在这里,我

们利用微分证明. 取 $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, 那么 $f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{n}$, 代入(7)式便得

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x.$$

证 (ii) 取 $f(x) = \sin x$, 那么 $f(0) = 0, f'(0) = \cos x \Big|_{x=0} = 1$, 代入(7)式便得

$$\sin x \approx x.$$

其他几个近似公式可用类似方法证明, 这里从略了.

例 9 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 $\sqrt{1.05} = \sqrt{1+0.05},$

这里 $x = 0.05$, 其值较小, 利用近似公式(i) ($n=2$ 的情形), 便得

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{1}{2}(0.05) = 1.025.$$

如果直接开方, 可得

$$\sqrt{1.05} = 1.02470.$$

将两个结果比较一下, 可以看出, 用 1.025 作为 $\sqrt{1.05}$ 的近似值, 其误差不超过 0.001, 这样的近似值在一般应用上已够精确了. 如果开方次数较高, 就更能体现出用微分进行近似计算的优越性.

2. 误差估计

在生产实践中, 经常要测量各种数据. 但是有的数据不易直接测量, 这时我们就通过测量其他有关数据后, 根据某种公式算出所要的数据. 例如, 要计算圆钢的截面积 A , 可先用卡尺测量圆钢截面的直径 D , 然后根据公式 $A = \frac{\pi}{4}D^2$ 算出 A .

由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响, 测得的数据往往带有误差, 而根据带有误差的数据计算所得的结果也会有误差, 我们把它叫做间接测量误差.

下面就讨论怎样利用微分来估计间接测量误差.

先说明什么叫绝对误差、什么叫相对误差.

如果某个量的精确值为 A , 它的近似值为 a , 那么 $|A - a|$ 叫做 a 的绝对误差, 而绝对误差与 $|a|$ 的比值 $\frac{|A - a|}{|a|}$ 叫做 a 的相对误差.

在实际工作中, 某个量的精确值往往是无法知道的, 于是绝对误差和相对误

差也就无法求得.但是根据测量仪器的精度等因素,有时能够确定误差在某一个范围内.如果某个量的精确值是 A ,测得它的近似值是 a ,又知道它的误差不超过 δ_A ,即

$$|A - a| \leq \delta_A,$$

那么 δ_A 叫做测量 A 的绝对误差限,而 $\frac{\delta_A}{|a|}$ 叫做测量 A 的相对误差限.

例 10 设测得圆钢截面的直径 $D = 60.03 \text{ mm}$,测量 D 的绝对误差限 $\delta_D = 0.05 \text{ mm}$.利用公式

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

计算圆钢的截面积时,试估计而积的误差.

解 我们把测量 D 时所产生的误差当作自变量 D 的增量 ΔD ,那么,利用公式 $A = \frac{\pi}{4} D^2$ 来计算 A 时所产生的误差就是函数 A 的对应增量 ΔA .当 $|\Delta D|$ 很小时,可以利用微分 dA 近似地代替增量 ΔA ,即

$$\Delta A \approx dA = A' \cdot \Delta D = \frac{\pi}{2} D \cdot \Delta D.$$

由于 D 的绝对误差限为 $\delta_D = 0.05 \text{ mm}$,所以

$$|\Delta D| \leq \delta_D = 0.05,$$

$$\text{而} \quad |\Delta A| \approx |dA| = \frac{\pi}{2} D \cdot |\Delta D| \leq \frac{\pi}{2} D \cdot \delta_D,$$

因此得出 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A = \frac{\pi}{2} D \cdot \delta_D = \frac{\pi}{2} \times 60.03 \times 0.05 \approx 4.715 \text{ (mm}^2\text{)};$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{A} = \frac{\frac{\pi}{2} D \cdot \delta_D}{\frac{\pi}{4} D^2} = 2 \frac{\delta_D}{D} = 2 \times \frac{0.05}{60.03} \approx 0.17\%.$$

一般地,根据直接测量的 x 值按公式 $y = f(x)$ 计算 y 值时,如果已知测量 x 的绝对误差限是 δ_x ,即

$$|\Delta x| \leq \delta_x,$$

那么,当 $y' \neq 0$ 时, y 的绝对误差

$$|\Delta y| \approx |dy| = |y'| \cdot |\Delta x| \leq |y'| \cdot \delta_x,$$

即 y 的绝对误差限约为

$$\delta_y = |y'| \cdot \delta_x; \quad (8)$$

y 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_y}{|y|} = \left| \frac{y'}{y} \right| \cdot \delta_x. \quad (9)$$

以后常把绝对误差限与相对误差限简称为绝对误差与相对误差.

习 题 2-5

1. 已知 $y = x^3 - x$, 计算在 $x = 2$ 处当 Δx 分别等于 1, 0.1, 0.01 时的 Δy 及 dy .

2. 设函数 $y = f(x)$ 的图形如图 2-12, 试在图 2-12(a)、(b)、(c)、(d) 中分别标出在点 x_0 的 dy 、 Δy 及 $\Delta y - dy$, 并说明其正负.

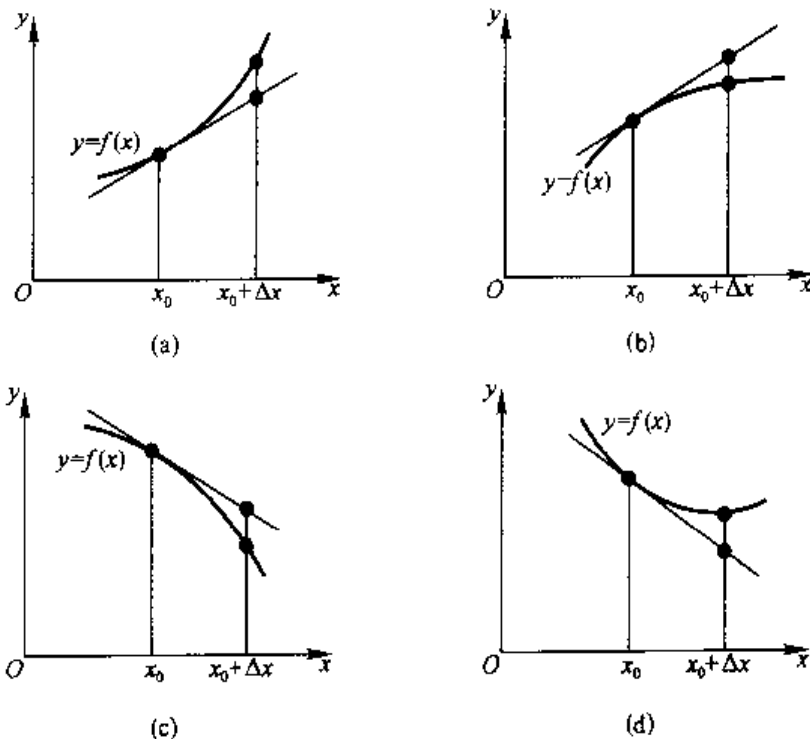


图 2-12

3. 求下列函数的微分:

(1) $y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$;

(2) $y = x \sin 2x$;

(3) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

(4) $y = \ln^2(1 - x)$;

(5) $y = x^2 e^{2x}$;

(6) $y = e^{-x} \cos(3 - x)$;

(7) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$;

(8) $y = \tan^2(1 + 2x^2)$;

(9) $y = \arctan \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$;

(10) $s = A \sin(\omega t + \varphi)$ (A, ω, φ 是常数).

4. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

- (1) $d(\quad) = 2dx$; (2) $d(\quad) = 3x dx$;
 (3) $d(\quad) = \cos t dt$; (4) $d(\quad) = \sin \omega x dx$;
 (5) $d(\quad) = \frac{1}{1+x} dx$; (6) $d(\quad) = e^{2x} dx$;
 (7) $d(\quad) = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; (8) $d(\quad) = \sec^2 3x dx$.

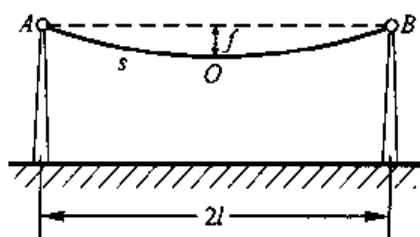


图 2-13

5. 如图 2-13 所示的电缆 AOB 的长为 s , 跨度为 $2l$, 电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f , 则电缆长可按下面公式计算:

$$s = 2l \left(1 + \frac{2f^2}{3l^2} \right),$$

当 f 变化了 Δf 时, 电缆长的变化约为多少?

6. 设扇形的圆心角 $\alpha = 60^\circ$, 半径 $R = 100$ cm (图 2-14). 如果 R 不变, α 减少 $30'$, 问扇形面积大约改变了多少? 又如果 α 不变, R 增加 1 cm, 问扇形面积大约改变了多少?

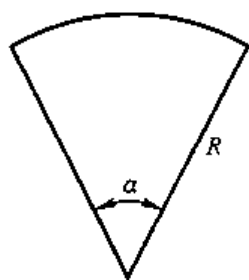


图 2-14

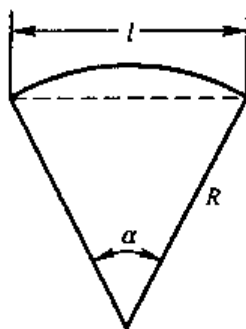


图 2-15

7. 计算下列三角函数值的近似值:

- (1) $\cos 29^\circ$; (2) $\tan 136^\circ$.

8. 计算下列反三角函数值的近似值:

- (1) $\arcsin 0.5002$; (2) $\arccos 0.4995$.

9. 当 $|x|$ 较小时, 证明下列近似公式:

- (1) $\tan x \approx x$ (x 是角的弧度值); (2) $\ln(1+x) \approx x$;

- (3) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$,

并计算 $\tan 45'$ 和 $\ln 1.002$ 的近似值.

10. 计算下列各根式的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$; (2) $\sqrt[6]{65}$.

11. 计算球体体积时,要求精确度在 2% 以内.问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

12. 某厂生产如图 2-15 所示的扇形板,半径 $R=200$ mm,要求中心角 α 为 55° . 产品检验时,一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α . 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l=0.1$ mm,问由此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少?

总习题二

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的_____条件. $f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件.

(2) $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件.

(3) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的_____条件.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 ().

(A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$ 存在.

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在.

3. 设有一根细棒,取棒的一端作为原点,棒上任意点的坐标为 x ,于是分布在区间 $[0, x]$ 上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m=m(x)$. 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说,单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

4. 根据导数的定义,求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数.

5. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$,又 $f'(0)$ 是否存在:

(1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0; \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

6. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

7. 求下列函数的导数:

(1) $y = \arcsin(\sin x)$;

(2) $y = \arctan \frac{1+x}{1-x}$;

(3) $y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \tan x$;

(4) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y = x^{\frac{1}{x}} (x > 0)$.

8. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y = \cos^2 x \cdot \ln x$;

(2) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y = \sqrt[n]{1+x}$;

(2) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定, 求 $y''(0)$.

11. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t. \end{cases}$

12. 求曲线 $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

13. 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶, 乙船以 8 km/h 的速率向南行驶. 在中午十二点正, 乙船位于甲船之北 16 km 处. 问下午一点正两船相离的速率为多少?

14. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

15. 已知单摆的振动周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 $g = 980 \text{ cm/s}^2$, l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20 cm, 为使周期 T 增大 0.05 s, 摆长约需加长多少?

第三章 微分中值定理与导数的应用

上一章里,从分析实际问题中因变量相对于自变量的变化快慢出发,引进了导数概念,并讨论了导数的计算方法.本章中,我们将应用导数来研究函数以及曲线的某些性态,并利用这些知识解决一些实际问题.为此,先要介绍微分学的几个中值定理,它们是导数应用的理论基础.

第一节 微分中值定理

我们先讲罗尔(Rolle)定理,然后根据它推出拉格朗日(Lagrange)中值定理和柯西中值定理.

一、罗尔定理

首先,我们观察图 3-1. 设曲线弧 \widehat{AB} 是函数 $y=f(x)$ ($x \in [a, b]$) 的图形. 这是一条连续的曲线弧,除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线,且两个端点的纵坐标相等,即 $f(a)=f(b)$. 可以发现在曲线弧的最高点或最低点 C 处,曲线有水平的切线. 如果记 C 点的横坐标为 ξ , 那么就有 $f'(\xi)=0$. 现在用分析语言把这个几何现象描述出来,就可得下面的罗尔定理. 为了应用方便,先介绍费马(Fermat)引理.

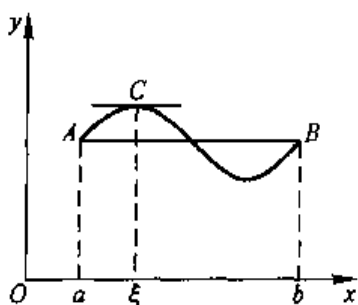


图 3-1

费马引理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义,并且在 x_0 处可导,如果对任意的 $x \in U(x_0)$,有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \geq f(x_0)),$$

那么 $f'(x_0)=0$.

证 不妨设 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \leq f(x_0)$ (如果 $f(x) \geq f(x_0)$, 可以类似地证明). 于是,对于 $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 有

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0),$$

从而当 $\Delta x > 0$ 时,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0;$$

当 $\Delta x < 0$ 时,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的条件及极限的保号性, 便得到

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

所以, $f'(x_0) = 0$. 证毕.

通常称导数等于零的点为函数的驻点(或稳定点, 临界点).

罗尔定理 如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导;

(3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$, 那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

证 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 根据闭区间上连续函数的最大值最小值定理, $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上必定取得它的最大值 M 和最小值 m . 这样, 只有两种可能情形:

(1) $M = m$. 这时 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必然取相同的数值 M : $f(x) = M$. 由此, $\forall x \in (a, b)$, 有 $f'(x) = 0$. 因此, 任取 $\xi \in (a, b)$, 有 $f'(\xi) = 0$.

(2) $M > m$. 因为 $f(a) = f(b)$, 所以 M 和 m 这两个数中至少有一个不等于 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的端点处的函数值. 为确定起见, 不妨设 $M \neq f(a)$ (如果设 $m \neq f(a)$, 证法完全类似), 那么必定在开区间 (a, b) 内有一点 ξ 使 $f(\xi) = M$. 因此, $\forall x \in [a, b]$, 有 $f(x) \leq f(\xi)$, 从而由费马引理可知 $f'(\xi) = 0$. 定理证毕.

二、拉格朗日中值定理

罗尔定理中 $f(a) = f(b)$ 这个条件是相当特殊的, 它使罗尔定理的应用受到限制. 如果把 $f(a) = f(b)$ 这个条件取消, 但仍保留其余两个条件, 并相应地改变结论, 那么就得到微分学中十分重要的拉格朗日中值定理.

拉格朗日中值定理 如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (1)$$

成立.

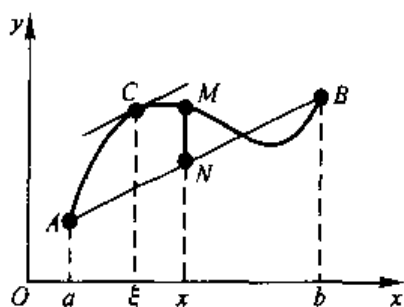


图 3-2

在证明之前,先看一下定理的几何意义.如果把(1)式改写成

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

由图 3-2 可看出, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 为弦 AB 的斜率,而 $f'(\xi)$ 为曲线在点 C 处的切线的斜率.因此拉格朗日中值定理的几何意义是:如果连续曲线 $y=f(x)$ 的弧 \widehat{AB} 上除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线,那么这弧上至少有一点 C,使曲线在 C 点处的切线平行于弦 AB.

从图 3-1 看出,在罗尔定理中,由于 $f(a)=f(b)$,弦 AB 是平行于 x 轴的,因此点 C 处的切线实际上也平行于弦 AB.由此可见,罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形.

从上述拉格朗日中值定理与罗尔定理的关系,自然想到利用罗尔定理来证明拉格朗日中值定理.但在拉格朗日中值定理中,函数 $f(x)$ 不一定具备 $f(a)=f(b)$ 这个条件,为此我们设想构造一个与 $f(x)$ 有密切联系的函数 $\varphi(x)$ (称为辅助函数),使 $\varphi(x)$ 满足条件 $\varphi(a)=\varphi(b)$. 然后对 $\varphi(x)$ 应用罗尔定理,再把对 $\varphi(x)$ 所得的结论转化到 $f(x)$ 上,证得所要的结果.我们从拉格朗日中值定理的几何解释中来寻找辅助函数,从图 3-2 中看到,有向线段 NM 的值是 x 的函数,把它表示为 $\varphi(x)$,它与 $f(x)$ 有密切的联系,且当 $x=a$ 及 $x=b$ 时,点 M 与点 N 重合,即有 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 为求得函数 $\varphi(x)$ 的表达式,设直线 AB 的方程为 $y=L(x)$,则

$$L(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

由于点 M、N 的纵坐标依次为 $f(x)$ 及 $L(x)$,故表示有向线段 NM 的值的函数

$$\varphi(x)=f(x)-L(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

下面就利用这个辅助函数来证明拉格朗日中值定理.

定理的证明 引进辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

容易验证函数 $\varphi(x)$ 适合罗尔定理的条件: $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$; $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

根据罗尔定理, 可知在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

由此得

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

定理证毕.

显然, 公式(1)对于 $b < a$ 也成立. (1)式叫做拉格朗日中值公式.

设 x 为区间 $[a, b]$ 内一点, $x + \Delta x$ 为这区间内的另一点 ($\Delta x > 0$ 或 $\Delta x < 0$), 则公式(1)在区间 $[x, x + \Delta x]$ (当 $\Delta x > 0$ 时)或在区间 $[x + \Delta x, x]$ (当 $\Delta x < 0$ 时)上就成为

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x) \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1). \quad (2)$$

这里数值 θ 在 0 与 1 之间, 所以 $x + \theta\Delta x$ 是在 x 与 $x + \Delta x$ 之间.

如果记 $f(x)$ 为 y , 则(2)式又可写成

$$\Delta y = f'(x + \theta\Delta x) \cdot \Delta x \quad (0 < \theta < 1). \quad (3)$$

我们知道, 函数的微分 $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ 是函数的增量 Δy 的近似表达式, 一般说来, 以 dy 近似代替 Δy 时所产生的误差只有当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时才趋于零; 而(3)式却给出了自变量取得有限增量 Δx ($|\Delta x|$ 不一定很小)时, 函数增量 Δy 的准确表达式. 因此, 这个定理也叫做有限增量定理, (3)式称为有限增量公式. 拉格朗日中值定理在微分学中占有重要地位, 有时也称这定理为微分中值定理. 在某些问题中当自变量 x 取得有限增量 Δx 而需要函数增量的准确表达式时, 拉格朗日中值定理就显出它的价值.

作为拉格朗日中值定理的一个应用, 我们来导出以后讲积分学时很有用的一个定理. 我们知道, 如果函数 $f(x)$ 在某一区间上是一个常数, 那么 $f(x)$ 在该区间上的导数恒为零. 它的逆命题也是成立的, 这就是:

定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

证 在区间 I 上任取两点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 应用(1)式就得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2).$$

由假定, $f'(\xi)=0$, 所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$, 即

$$f(x_2)=f(x_1).$$

因为 x_1, x_2 是 I 上任意两点, 所以上面的等式表明: $f(x)$ 在 I 上的函数值总是相等的, 这就是说, $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

从上述论证中可以看出, 虽然拉格朗日中值定理中的 ξ 的准确数值不知道, 但在这里并不妨碍它的应用.

例 1 证明当 $x>0$ 时,

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

证 设 $f(x)=\ln(1+x)$, 显然 $f(x)$ 在区间 $[0, x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 根据定理, 应有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0), 0<\xi<x.$$

由于 $f(0)=0, f'(x)=\frac{1}{1+x}$, 因此上式即为

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}.$$

又由 $0<\xi<x$, 有

$$\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x,$$

即

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x. (x>0)$$

三、柯西中值定理

上面已经指出, 如果连续曲线弧 \widehat{AB} 上除端点外处处具有不垂直于横轴的切线, 那么这段弧上至少有一点 C , 使曲线在点 C 处的切线平行于弦 AB . 设 \widehat{AB} 由参数方程

$$\begin{cases} X=F(x), \\ Y=f(x) \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$$

表示(图 3-3), 其中 x 为参数. 那么曲线上点 (X, Y) 处的切线的斜率为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

弦 AB 的斜率为

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}.$$

假定点 C 对应于参数 $x=\xi$, 那么曲线上点 C 处的切线平行于弦 AB , 可表示为

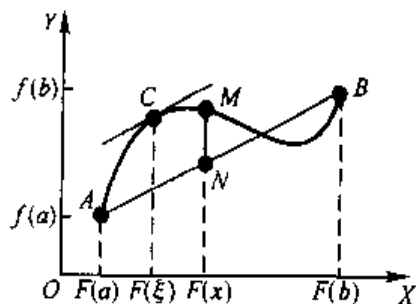


图 3-3

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

与这一事实相应的是

柯西中值定理 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导;
- (3) 对任一 $x \in (a, b)$, $F'(x) \neq 0$,

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使等式

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (4)$$

成立.

证 首先注意到 $F(b) - F(a) \neq 0$. 这是由于

$$F(b) - F(a) = F'(\eta)(b - a),$$

其中 $a < \eta < b$, 根据假定 $F'(\eta) \neq 0$, 又 $b - a \neq 0$, 所以

$$F(b) - F(a) \neq 0.$$

类似拉格朗日中值定理的证明, 我们仍然以表示有向线段 NM 的值的函数 $\varphi(x)$ (见图 3-3) 作为辅助函数. 这里, 点 M 的纵坐标为 $Y = f(x)$, 点 N 的纵坐标为

$$Y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} [F(x) - F(a)],$$

于是

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} [F(x) - F(a)].$$

容易验证, 这个辅助函数 $\varphi(x)$ 适合罗尔定理的条件: $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$; $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导且

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \cdot F'(x).$$

根据罗尔定理, 可知在 (a, b) 内必定有一点 ξ 使得 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} \cdot F'(\xi) = 0,$$

由此得

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},$$

定理证毕.

很明显,如果取 $F(x) = x$, 那么 $F(b) - F(a) = b - a$, $F'(x) = 1$, 因而公式(4)就可以写成:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (a < \xi < b),$$

这样就变成拉格朗日中值公式了.

习 题 3-1

1. 验证罗尔定理对函数 $y = \ln \sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.
2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ 在区间 $[0, 1]$ 上的正确性.
3. 对函数 $f(x) = \sin x$ 及 $F(x) = x + \cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.
4. 试证明对函数 $y = px^2 + qx + r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.
5. 不用求出函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x) = 0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.
6. 证明恒等式: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$.
7. 若方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$ 有一个正根 $x = x_0$, 证明方程 $a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 必有一个小于 x_0 的正根.
8. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 证明: 在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$.
9. 设 $a > b > 0, n > 1$, 证明:

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$
10. 设 $a > b > 0$, 证明:

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$
11. 证明下列不等式:
 - (1) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$;
 - (2) 当 $x > 1$ 时, $e^x > e \cdot x$.
12. 证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个正根.
13. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明在 (a, b) 内有一点 ξ , 使

$$\left| \begin{array}{cc} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{array} \right| = (b-a) \left| \begin{array}{cc} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{array} \right|.$$

14. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足关系式 $f'(x) = f(x)$, 且 $f(0) = 1$, 则 $f(x) = e^x$.

15. 设函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内具有 n 阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 试用柯西中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}, \quad (0 < \theta < 1).$$

第二节 洛必达法则

如果当 $x \rightarrow a$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 两个函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大, 那么极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在, 也可能不存在. 通常把这种极限叫做未定式, 并分别简记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$. 在第一章第六节中讨论过的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 就是未定式 $\frac{0}{0}$ 的一个例子. 对于这类极限, 即使它存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一法则. 下面我们将根据柯西中值定理来推出求这类极限的一种简便且重要的方法.

我们着重讨论 $x \rightarrow a$ 时的未定式 $\frac{0}{0}$ 的情形, 关于这情形有以下定理:

定理 1 设

- (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;
- (2) 在点 a 的某去心邻域内, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

这就是说, 当 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$ 也存在且等于 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$; 当 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 为无穷大时, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$ 也是无穷大. 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达(L'Hospital)法则.

证 因为求 $\frac{f(x)}{F(x)}$ 当 $x \rightarrow a$ 时的极限与 $f(a)$ 及 $F(a)$ 无关, 所以可以假定 $f(a) = F(a) = 0$, 于是由条件(1)、(2)知道, $f(x)$ 及 $F(x)$ 在点 a 的某一邻域内是连续的. 设 x 是这邻域内的一点, 那么在以 x 及 a 为端点的区间上, 柯西中值

定理的条件均满足,因此有

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } a \text{ 之间}).$$

令 $x \rightarrow a$, 并对上式两端求极限, 注意到 $x \rightarrow a$ 时 $\xi \rightarrow a$, 再根据条件(3)便得要证明的结论.

如果 $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 当 $x \rightarrow a$ 时仍属 $\frac{0}{0}$ 型, 且这时 $f'(x), F'(x)$ 能满足定理中 $f(x), F(x)$ 所要满足的条件, 那么可以继续施用洛必达法则先确定 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$,

从而确定 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)}$, 即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

且可以依次类推.

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (b \neq 0)$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b}.$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}.$

注意, 上式中的 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{6x - 2}$ 已不是未定式, 不能对它应用洛必达法则, 否则要导致错误结果. 以后使用洛必达法则时应当经常注意这一点, 如果不是未定式, 就不能应用洛必达法则.

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$

我们指出, 对于 $x \rightarrow \infty$ 时的未定式 $\frac{0}{0}$, 以及对于 $x \rightarrow a$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时的未定式 $\frac{\infty}{\infty}$, 也有相应的洛必达法则. 例如, 对于 $x \rightarrow \infty$ 时的未定式 $\frac{0}{0}$ 有以下定理.

定理 2 设

(1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;

(2) 当 $|x| > N$ 时 $f'(x)$ 与 $F'(x)$ 都存在, 且 $F'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大),

那么

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} (n \text{ 为正整数}, \lambda > 0).$

解 相继应用洛必达法则 n 次, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}} = \cdots \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}} = 0. \end{aligned}$$

事实上, 如果例 6 中的 n 不是正整数而是任何正数, 那么极限仍为零.

对数函数 $\ln x$ 、幂函数 $x^n (n > 0)$ 、指数函数 $e^{\lambda x} (\lambda > 0)$ 均为当 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大, 但从例 5、6 可以看出, 这三个函数增大的“速度”是很不一样的, 幂函数增大的“速度”比对数函数快得多, 而指数函数增大的“速度”又比幂函数快得多.

其他尚有一些 $0 \cdot \infty$ 、 $\infty - \infty$ 、 0^0 、 1^∞ 、 ∞^0 型的未定式, 也可通过 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式来计算, 下面用例子说明.

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x (n > 0).$

解 这是未定式 $0 \cdot \infty$. 因为

$$x^n \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}},$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 上式右端是未定式 $\frac{\infty}{\infty}$, 应用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-x^n}{n} \right) = 0.$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$.

解 这是未定式 $\infty - \infty$, 因为

$$\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, 上式右端是未定式 $\frac{0}{0}$, 应用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

解 这是未定式 0^0 . 设 $y = x^x$, 取对数得

$$\ln y = x \ln x,$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 上式右端是未定式 $0 \cdot \infty$. 应用例 7 的结果, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0.$$

因为 $y = e^{\ln y}$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y}$ (当 $x \rightarrow 0^+$),

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$.

洛必达法则是求未定式的一种有效方法, 但最好能与其他求极限的方法结合使用. 例如能化简时应尽可能先化简, 可以应用等价无穷小替代或重要极限时, 应尽可能应用, 这样可以使运算简捷.

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

解 如果直接用洛必达法则, 那么分母的导数(尤其是高阶导数)较繁. 如果作一个等价无穷小替代, 那么运算就方便得多. 其运算如下:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

最后, 我们指出, 本节定理给出的是求未定式的一种方法. 当定理条件满足时, 所求的极限当然存在(或为 ∞), 但当定理条件不满足时, 所求极限却不一定不存在, 这就是说, 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在时(等于无穷大的情况除外), $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{F(x)}$ 仍可能存在(见本节习题第 2 题).

习 题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限:

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; | (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$; |
| (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$; | (4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$; |
| (5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$; | (6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} (a \neq 0)$; |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x}$; | (8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$; |
| (9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$; | (10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x}$; |
| (11) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x$; | (12) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}$; |
| (13) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$; | (14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$; |
| (15) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$; | (16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}$; |

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

3. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

4. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.

第三节 泰勒公式

对于一些较复杂的函数, 为了便于研究, 往往希望用一些简单的函数来近似表达. 由于用多项式表示的函数, 只要对自变量进行有限次加、减、乘三种算术运算, 便能求出它的函数值来, 因此我们经常用多项式来近似表达函数.

在微分的应用中已经知道, 当 $|x|$ 很小时, 有如下的近似等式:

$$e^x \approx 1 + x, \ln(1+x) \approx x.$$

这些都是用一次多项式来近似表达函数的例子. 显然, 在 $x=0$ 处这些一次多项

式及其一阶导数的值,分别等于被近似表达的函数及其导数的相应值.

但是这种近似表达式还存在着不足之处:首先是精确度不高,它所产生的误差仅是关于 x 的高阶无穷小;其次是用它来作近似计算时,不能具体估算出误差大小.因此,对于精确度要求较高且需要估计误差的时候,就必须用高次多项式来近似表达函数,同时给出误差公式.

于是提出如下的问题:设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间内具有直到 $(n+1)$ 阶导数,试找出一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n \quad (1)$$

来近似表达 $f(x)$,要求 $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 之差是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小,并给出误差 $|f(x) - p_n(x)|$ 的具体表达式.

下面我们来讨论这个问题.假设 $p_n(x)$ 在 x_0 处的函数值及它的直到 n 阶导数在 x_0 处的值依次与 $f(x_0), f'(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0)$ 相等,即满足

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= f(x_0), p'_n(x_0) = f'(x_0), \\ p''_n(x_0) &= f''(x_0), \cdots, p^{(n)}_n(x_0) = f^{(n)}(x_0), \end{aligned}$$

按这些等式来确定多项式(1)的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$.为此,对(1)式求各阶导数,然后分别代入以上等式,得

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_0), \quad 1 \cdot a_1 = f'(x_0), \\ 2! a_2 &= f''(x_0), \quad \cdots, \quad n! a_n = f^{(n)}(x_0), \end{aligned}$$

即得

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0), \cdots, a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

将求得的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 代入(1)式,有

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned} \quad (2)$$

下面的定理表明,多项式(2)的确是所要找的 n 次多项式.

泰勒(Taylor)中值定理 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数,则对任一 $x \in (a, b)$, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad (4)$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$. 只需证明

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

由假设可知, $R_n(x)$ 在 (a, b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数, 且

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

对两个函数 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 x 为端点的区间上应用柯西中值定理(显然, 这两个函数满足柯西中值定理的条件), 得

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \\ &\quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}), \end{aligned}$$

再对两个函数 $R'_n(x)$ 与 $(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上应用柯西中值定理, 得

$$\begin{aligned} \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} &= \frac{R'_n(\xi_1) - R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n - 0} \\ &= \frac{R''_n(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}} \\ &\quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}). \end{aligned}$$

照此方法继续做下去, 经过 $(n+1)$ 次后, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(ξ 在 x_0 与 ξ_n 之间, 因而也在 x_0 与 x 之间).

注意到 $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ (因 $p_n^{(n+1)}(x) = 0$), 则由上式得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

定理证毕.

多项式(2)称为函数 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的 n 次近似多项式, 公式(3)称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式, 而 $R_n(x)$ 的表达式(4)称为拉格朗日型余项.

当 $n=0$ 时, 泰勒公式变成拉格朗日中值公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

因此, 泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

由泰勒中值定理可知, 以多项式 $p_n(x)$ 近似表达函数 $f(x)$ 时, 其误差为

$|R_n(x)|$. 如果对于某个固定的 n , 当 $x \in (a, b)$ 时, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, 则有估计式:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \quad (5)$$

及

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

由此可见, 当 $x \rightarrow x_0$ 时误差 $|R_n(x)|$ 是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小, 即

$$R_n(x) = o[(x-x_0)^n]. \quad (6)$$

这样, 我们提出的问题完满地得到解决.

在不需要余项的精确表达式时, n 阶泰勒公式也可写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]. \quad (7)$$

$R_n(x)$ 的表达式(6)称为佩亚诺(Peano)型余项, 公式(7)称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式^①.

在泰勒公式(3)中, 如果取 $x_0 = 0$, 则 ξ 在 0 与 x 之间, 因此可令 $\xi = \theta x$ ($0 < \theta < 1$), 从而泰勒公式变成较简单的形式, 即所谓带有拉格朗日型余项的麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \quad (8)$$

在泰勒公式(7)中, 如果取 $x_0 = 0$, 则有带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (9)$$

由(8)或(9)可得近似公式:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

误差估计式(5)相应地变成

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}. \quad (10)$$

例 1 写出函数 $f(x) = e^x$ 的带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

^① 这里公式(7)是 $f^{(n+1)}(x)$ 在区间 (a, b) 内有界的条件下推得的. 事实上公式(7)只要在“ $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a, b) 内具有直到 n 阶的导数, 且 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内连续”的条件下就成立.

所以 $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$,
 $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$.

把这些值代入公式(8),并注意到 $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$ 使得

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

由这个公式可知,若把 e^x 用它的 n 次近似多项式表达为

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

这时所产生的误差为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果取 $x=1$,则得无理数 e 的近似式为

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

其误差 $|R_n| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$.

当 $n=10$ 时,可算出 $e \approx 2.718\,282$,其误差不超过 10^{-6} .

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 的带有拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \cdots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

所以

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0$$

等等.它们顺序循环地取四个数 $0, 1, 0, -1$,于是按公式(8)得(令 $n=2m$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m},$$

其中

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin\left[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!} x^{2m+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果取 $m=1$,则得近似公式

$$\sin x \approx x,$$

这时误差为

$$|R_2| = \left| \frac{\sin\left(\theta x + \frac{3}{2}\pi\right)}{3!} x^3 \right| \leq \frac{|x|^3}{6} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果 m 分别取 2 和 3,则可得 $\sin x$ 的 3 次和 5 次近似多项式

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 \text{ 和 } \sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5,$$

其误差的绝对值依次不超过 $\frac{1}{5!}|x|^5$ 和 $\frac{1}{7!}|x|^7$. 以上三个近似多项式及正弦函数的图形都画在图 3-4 中, 以便于比较.

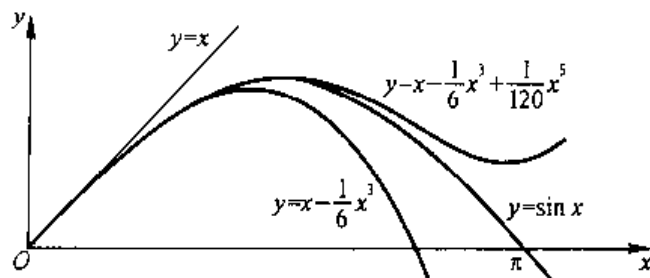


图 3-4

类似地, 还可以得到

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + R_{2m+1}(x),$$

$$\text{其中 } R_{2m+1}(x) = \frac{\cos[\theta x + (m+1)\pi]}{(2m+2)!}x^{2m+2} \quad (0 < \theta < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + R_n(x),$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

由以上带有拉格朗日型余项的麦克劳林公式, 易得相应的带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式, 读者可自行写出.

例 3 利用带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$.

解 由于分式的分母 $\sin^3 x \sim x^3$ ($x \rightarrow 0$), 我们只需将分子中的 $\sin x$ 和 $x \cos x$ 分别用带有佩亚诺型余项的三阶麦克劳林公式表示, 即

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$x \cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^3).$$

于是

$$\begin{aligned}\sin x - x \cos x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{2!} - o(x^3) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),\end{aligned}$$

对上式作运算时,把两个比 x^3 高阶的无穷小的代数和仍记作 $o(x^3)$,故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

习 题 3-3

1. 按 $(x-4)$ 的幂展开多项式 $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$.
2. 应用麦克劳林公式,按 x 的幂展开函数 $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$.
3. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.
4. 求函数 $f(x) = \ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.
5. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.
6. 求函数 $f(x) = \tan x$ 的带有拉格朗日型余项的 3 阶麦克劳林公式.
7. 求函数 $f(x) = xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式.
8. 验证当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时,按公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时,所产生的误差

小于 0.01,并求 \sqrt{e} 的近似值,使误差小于 0.01.

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值,并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$; (2) $\sin 18^\circ$.

10. 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3})$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$.

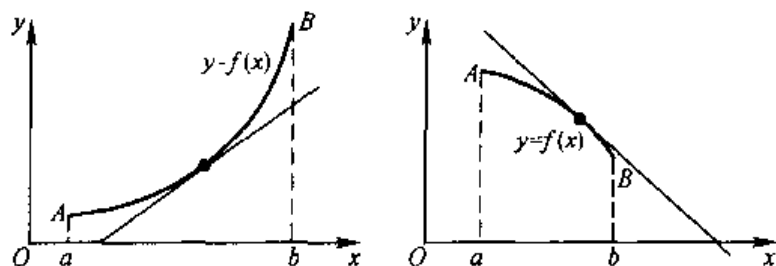
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

一、函数单调性的判定法

第一章第一节中已经介绍了函数在区间上单调的概念.下面利用导数来对

函数的单调性进行研究.

如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加(单调减少), 那么它的图形是一条沿 x 轴正向上升(下降)的曲线. 这时, 如图 3-5, 曲线上各点处的切线斜率是非负的(是非正的), 即 $y'=f'(x) \geq 0$ ($y'=f'(x) \leq 0$). 由此可见, 函数的单调性与导数的符号有着密切的联系.



(a) 函数图形上升时切线斜率非负 (b) 函数图形下降时切线斜率非正

图 3-5

反过来, 能否用导数的符号来判定函数的单调性呢?

下面我们利用拉格朗日中值定理来进行讨论.

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 在 $[a, b]$ 上任取两点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 应用拉格朗日中值定理, 得到

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2). \quad (1)$$

由于在(1)式中, $x_2 - x_1 > 0$, 因此, 如果在 (a, b) 内导数 $f'(x)$ 保持正号, 即 $f'(x) > 0$, 那么也有 $f'(\xi) > 0$. 于是

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$,

表明函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加. 同理, 如果在 (a, b) 内导数 $f'(x)$ 保持负号, 即 $f'(x) < 0$, 那么 $f'(\xi) < 0$, 于是 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 表明函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

归纳以上讨论, 即得

定理 1 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

- (1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;
- (2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间), 那么结论也成立.

例 1 判定函数 $y=x-\sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的单调性.

解 因为在 $(0, 2\pi)$ 内

$$y' = 1 - \cos x > 0,$$

所以由定理 1 可知,函数 $y = x - \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调增加.

例 2 讨论函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调性.

解 $y' = e^x - 1$.

函数 $y = e^x - x - 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 因为在 $(-\infty, 0)$ 内 $y' < 0$, 所以函数 $y = e^x - x - 1$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少; 因为在 $(0, +\infty)$ 内 $y' > 0$, 所以函数 $y = e^x - x - 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

例 3 讨论函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解 这函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $x \neq 0$ 时, 这函数的导数为

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

当 $x = 0$ 时, 函数的导数不存在. 在 $(-\infty, 0)$ 内, $y' < 0$, 因此函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少. 在 $(0, +\infty)$ 内, $y' > 0$, 因此函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加. 函数的图形如图 3-6 所示.

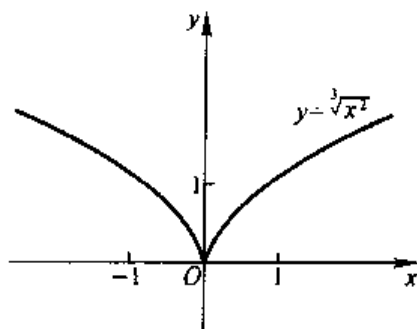


图 3-6

我们注意到, 在例 2 中, $x = 0$ 是函数 $y = e^x - x - 1$ 的单调减少区间 $(-\infty, 0]$ 与单调增加区间 $[0, +\infty)$ 的分界点, 而在该点处 $y' = 0$. 在例 3 中, $x = 0$ 是函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调减少区间 $(-\infty, 0]$ 与单调增加区间 $[0, +\infty)$ 的分界点, 而在该点处导数不存在.

从例 2 中看出, 有些函数在它的定义区间上不是单调的, 但是当我们用导数等于零的点来划分函数的定义区间以后, 就可以使函数在各个部分区间上单调. 这个结论对于在定义区间上具有连续导数的函数都是成立的. 从例 3 中可看出, 如果函数在某些点处不可导, 则划分函数的定义区间的分点, 还应包括这些导数不存在的点. 综合上述两种情形, 我们有如下结论:

如果函数在定义区间上连续, 除去有限个导数不存在的点外导数存在且连续, 那么只要用方程 $f'(x) = 0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间, 就能保证 $f'(x)$ 在各个部分区间内保持固定符号, 因而函数 $f(x)$ 在每

个部分区间上单调.

例 4 确定函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的单调区间.

解 这函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 求这函数的导数:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2).$$

解方程 $f'(x) = 0$, 即解

$$6(x-1)(x-2) = 0,$$

得出它在函数定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的两个根 $x_1 = 1, x_2 = 2$. 这两个根把 $(-\infty, +\infty)$ 分成三个部分区间 $(-\infty, 1], [1, 2]$ 及 $[2, +\infty)$.

在区间 $(-\infty, 1)$ 内, $x-1 < 0, x-2 < 0$, 所以 $f'(x) > 0$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 内单调增加. 在区间 $(1, 2)$ 内, $x-1 > 0, x-2 < 0$, 所以 $f'(x) < 0$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调减少. 在区间 $(2, +\infty)$ 内, $x-1 > 0, x-2 > 0$, 所以 $f'(x) > 0$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调增加.

函数 $y = f(x)$ 的图形如图 3-7 所示.

例 5 讨论函数 $y = x^3$ 的单调性.

解 这函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

函数的导数 $y' = 3x^2$. 显然, 除了点 $x = 0$ 使 $y' = 0$ 外, 在其余各点处均有 $y' > 0$. 因此函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 及 $[0, +\infty)$ 上都是单调增加的, 从而在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的. 在 $x = 0$ 处曲线有一水平切线. 函数的图形如图 3-8 所示.

一般地, 如果 $f'(x)$ 在某区间内的有限个点处为零, 在其余各点处均为正 (或负) 时, 那么 $f(x)$ 在该区间上仍旧是单调增加 (或单调减少) 的.

下面我们举一个利用函数的单调性证明不等式的例子.

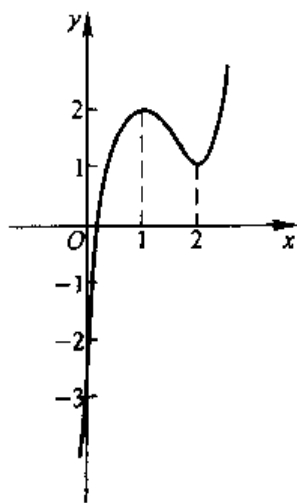


图 3-7

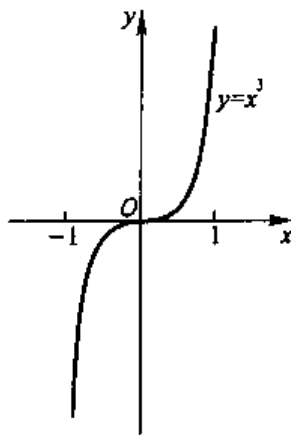


图 3-8

例 6 证明:当 $x > 1$ 时, $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$.

证 令 $f(x) = 2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right)$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x\sqrt{x} - 1).$$

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 在 $(1, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$, 因此在 $[1, +\infty)$ 上 $f(x)$ 单调增加, 从而当 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1)$.

由于 $f(1) = 0$, 故 $f(x) > f(1) = 0$, 即

$$2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right) > 0,$$

亦即 $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \quad (x > 1).$

二、曲线的凹凸性与拐点

在第一目中, 我们研究了函数单调性的判定法. 函数的单调性反映在图形上, 就是曲线的上升或下降. 但是, 曲线在上升或下降的过程中, 还有一个弯曲方向的问题. 例如, 图 3-9 中有两条曲线弧, 虽然它们都是上升的, 但图形却有显著的不同, \widehat{ACB} 是向上凸的曲线弧, 而 \widehat{ADB} 是向上凹的曲线弧, 它们的凹凸性不同, 下面我们就来研究曲线的凹凸性及其判定法.

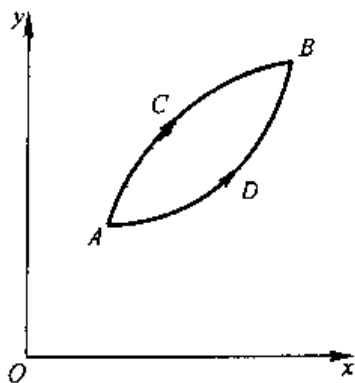


图 3-9

我们从几何上看到, 在有的曲线弧上, 如果任取两点, 则联结这两点间的弦总位于这两点间的弧段的上方 (图 3-10(a)), 而有的曲线弧, 则正好相反 (图 3-10(b)). 曲线的这种性质就是曲线的凹凸性. 因此曲线的凹凸性可以用联结曲线弧上任意两点的弦的中点与曲线弧上相应点 (即具有相同横坐标的点) 的位置关系来描述, 下面给出曲线凹凸性的定义.

定义 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有

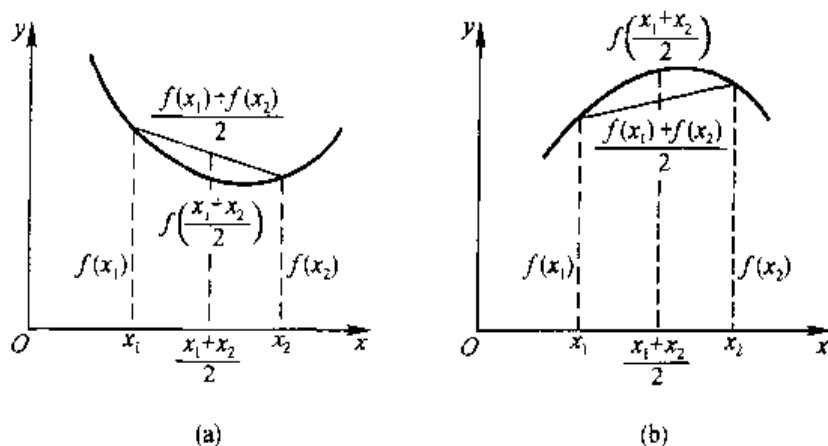


图 3-10

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凹的(或凹弧);如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凸的(或凸弧).

如果函数 $f(x)$ 在 I 内具有二阶导数,那么可以利用二阶导数的符号来判断曲线的凹凸性,这就是下面的曲线凹凸性的判定定理.我们仅就 I 为闭区间的情形来叙述定理,当 I 不是闭区间时,定理类同.

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数,那么

- (1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;
- (2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的.

证明 在情形(1), 设 x_1 和 x_2 为 $[a, b]$ 内任意两点, 且 $x_1 < x_2$, 记 $\frac{x_1+x_2}{2} = x_0$, 并记 $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$, 则 $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$, 由拉格朗日中值公式, 得

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0+\theta_1 h)h,$$

$$f(x_0) - f(x_0-h) = f'(x_0-\theta_2 h)h,$$

其中 $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$. 两式相减, 即得

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0) = [f'(x_0+\theta_1 h) - f'(x_0-\theta_2 h)]h.$$

对 $f'(x)$ 在区间 $[x_0-\theta_2 h, x_0+\theta_1 h]$ 上再利用拉格朗日中值公式, 得

$$[f'(x_0+\theta_1 h) - f'(x_0-\theta_2 h)]h = f''(\xi)(\theta_1+\theta_2)h^2,$$

其中 $x_0 - \theta_2 h < \xi < x_0 + \theta_1 h$. 按情形(1)的假设, $f''(\xi) > 0$, 故有

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) > 0,$$

即

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2} > f(x_0),$$

亦即

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的.

类似地可证明情形(2).

例 7 判定曲线 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 因为 $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, 所以在函数 $y = \ln x$ 的定义域 $(0, +\infty)$ 内, $y'' < 0$, 由定理 2 可知, 曲线 $y = \ln x$ 是凸的.

例 8 判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 因为 $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$. 当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 所以曲线在 $(-\infty, 0]$ 内为凸弧; 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 所以曲线在 $[0, +\infty)$ 内为凹弧(参看图 3-8).

一般地, 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是 I 的内点.^① 如果曲线 $y = f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 曲线的凹凸性改变了, 那么就称点 $(x_0, f(x_0))$ 为这曲线的拐点.

如何来寻找曲线 $y = f(x)$ 的拐点呢?

从上面的定理知道, 由 $f''(x)$ 的符号可以判定曲线的凹凸性, 因此, 如果 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近异号, 那么点 $(x_0, f(x_0))$ 就是曲线的一个拐点, 所以, 要寻找拐点, 只要找出 $f''(x)$ 符号发生变化的分界点即可. 如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有二阶连续导数, 那么在这样的分界点处必然有 $f''(x) = 0$; 除此以外, $f(x)$ 的二阶导数不存在的点, 也有可能是 $f''(x)$ 的符号发生变化的分界点. 综合以上分析, 我们可以按下列步骤来判定区间 I 上的连续曲线 $y = f(x)$ 的拐点:

(1) 求 $f''(x)$;

(2) 令 $f''(x) = 0$, 解出这方程在区间 I 内的实根, 并求出在区间 I 内 $f''(x)$ 不存在的点;

(3) 对于(2)中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点 x_0 , 检查 $f''(x)$ 在 x_0 左、右两侧邻近的符号, 那么当两侧的符号相反时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点, 当两侧的符号相同时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

例 9 求曲线 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的拐点.

^① 区间 I 的内点是指除端点外的 I 内的点.

解 $y' = 6x^2 + 6x - 12, y'' = 12x + 6 = 12\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

解方程 $y'' = 0$, 得 $x = -\frac{1}{2}$. 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $y'' > 0$. 因此, 点 $\left(-\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}\right)$ 是这曲线的拐点.

例 10 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹、凸的区间.

解 函数 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = 12x^3 - 12x^2,$$

$$y'' = 36x^2 - 24x = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

解方程 $y'' = 0$, 得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$.

$x_1 = 0$ 及 $x_2 = \frac{2}{3}$ 把函数的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 分成三个部分区间:

$$(-\infty, 0], \left[0, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

在 $(-\infty, 0)$ 内, $y'' > 0$, 因此在区间 $(-\infty, 0]$ 上这曲线是凹的. 在 $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ 内, $y'' < 0$, 因此在区间 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ 上这曲线是凸的. 在 $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 内, $y'' > 0$, 因此在区间 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 上这曲线是凹的.

$x = 0$ 时, $y = 1$, 点 $(0, 1)$ 是这曲线的一个拐点. $x = \frac{2}{3}$ 时 $y = \frac{11}{27}$, 点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ 也是这曲线的拐点.

例 11 问曲线 $y = x^4$ 是否有拐点?

解 $y' = 4x^3, y'' = 12x^2$.

显然, 只有 $x = 0$ 是方程 $y'' = 0$ 的根. 但当 $x \neq 0$ 时, 无论 $x < 0$ 或 $x > 0$ 都有 $y'' > 0$, 因此点 $(0, 0)$ 不是这曲线的拐点. 曲线 $y = x^4$ 没有拐点, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的.

例 12 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解 这函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 当 $x \neq 0$ 时,

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}},$$

当 $x = 0$ 时, y', y'' 都不存在. 故二阶导数在 $(-\infty, +\infty)$ 内不连续且不具有零点. 但 $x = 0$ 是 y'' 不存在的点, 它把 $(-\infty, +\infty)$ 分成两个部分区间: $(-\infty, 0]$ 、

$[0, +\infty)$.

在 $(-\infty, 0)$ 内, $y'' > 0$, 这曲线在 $(-\infty, 0]$ 上是凹的. 在 $(0, +\infty)$ 内, $y'' < 0$, 这曲线在 $[0, +\infty)$ 上是凸的.

$x = 0$ 时, $y = 0$, 点 $(0, 0)$ 是这曲线的一个拐点.

习 题 3-4

1. 判定函数 $f(x) = \arctan x - x$ 的单调性.

2. 判定函数 $f(x) = x + \cos x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 的单调性.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$; (2) $y = 2x + \frac{8}{x} \quad (x > 0)$;

(3) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$; (4) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

(5) $y = (x-1)(x+1)^2$; (6) $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} \quad (a > 0)$;

(7) $y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x \geq 0)$; (8) $y = x + |\sin 2x|$.

4. 证明下列不等式:

(1) 当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$;

(2) 当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$;

(3) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$;

(4) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$;

(5) 当 $x > 4$ 时, $2^x > x^2$.

5. 讨论方程 $\ln x = ax$ (其中 $a > 0$) 有几个实根?

6. 单调函数的导函数是否必为单调函数? 研究下面这个例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

7. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y = 4x - x^2$; (2) $y = \operatorname{sh} x$;

(3) $y = x + \frac{1}{x} \quad (x > 0)$; (4) $y = x \arctan x$.

8. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$; (2) $y = xe^{-x}$;

(3) $y = (x+1)^4 + e^x$; (4) $y = \ln(x^2 + 1)$;

(5) $y = e^{\arctan x}$; (6) $y = x^4(12 \ln x - 7)$.

9. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1)$;

$$(2) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$(3) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0, x \neq y).$$

10. 试证明曲线 $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

11. 问 a, b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点?

12. 试决定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a, b, c, d , 使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$ 为拐点, 且点 $(-2, 44)$ 在曲线上.

13. 试决定 $y = k(x^2 - 3)^2$ 中 k 的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.

14. 设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f''(x_0) = 0$, 而 $f'''(x_0) \neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么?

第五节 函数的极值与最大值最小值

一、函数的极值及其求法

在上节例 4 中我们看到, 点 $x=1$ 及 $x=2$ 是函数

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

的单调区间的分界点. 例如, 在点 $x=1$ 的左侧邻近, 函数 $f(x)$ 是单调增加的, 在点 $x=1$ 的右侧邻近, 函数 $f(x)$ 是单调减少的. 因此, 存在着点 $x=1$ 的一个去心邻域, 对于这去心邻域内的任何点 x , $f(x) < f(1)$ 均成立. 类似地, 关于点 $x=2$, 也存在着一个去心邻域, 对于这去心邻域内的任何点 x , $f(x) > f(2)$ 均成立 (参看图 3-7). 具有这种性质的点如 $x=1$ 及 $x=2$, 在应用上有着重要的意义, 值得我们对此作一般性的讨论.

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对于去心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内的任一 x , 有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0)),$$

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个 极大值 (或 极小值).

函数的极大值与极小值统称为函数的 极值, 使函数取得极值的点称为 极值点. 例如, 上节例 4 中的函数

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

有极大值 $f(1) = 2$ 和极小值 $f(2) = 1$, 点 $x=1$ 和 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点.

函数的极大值和极小值概念是局部性的. 如果 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值, 那只是就 x_0 附近的一个局部范围来说, $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个最大值; 如果就 $f(x)$ 的整个定义域来说, $f(x_0)$ 不见得是最大值. 关于极小值也类似.

在图 3-11 中, 函数 $f(x)$ 有两个极大值: $f(x_2)$ 、 $f(x_5)$, 三个极小值: $f(x_1)$ 、 $f(x_4)$ 、 $f(x_6)$, 其中极大值 $f(x_2)$ 比极小值 $f(x_6)$ 还小. 就整个区间 $[a, b]$ 来说, 只有一个极小值 $f(x_1)$ 同时也是最小值, 而没有一个极大值是最大值.

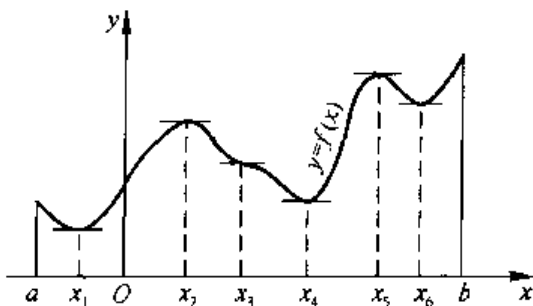


图 3-11

从图中还可看到, 在函数取得极值处, 曲线的切线是水平的. 但曲线上有水平切线的地方, 函数不一定取得极值. 例如图中 $x = x_3$ 处, 曲线上有水平切线, 但 $f(x_3)$ 不是极值.

由本章第一节中费马引理可知, 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 那么 $f'(x_0) = 0$. 这就是可导函数取得极值的必要条件. 现将此结论叙述成如下定理.

定理 1(必要条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 那么 $f'(x_0) = 0$.

定理 1 就是说: 可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点. 但反过来, 函数的驻点却不一定是极值点. 例如, $f(x) = x^3$ 的导数 $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, 因此 $x = 0$ 是这可导函数的驻点, 但 $x = 0$ 却不是这函数的极值点. 所以, 函数的驻点只是可能的极值点. 此外, 函数在它的导数不存在的点处也可能取得极值. 例如, 函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 处不可导, 但函数在该点取得极小值.

怎样判定函数在驻点或不可导的点处究竟是否取得极值? 如果是的话, 究竟取得极大值还是极小值? 下面给出两个判定极值的充分条件.

定理 2(第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内可导.

(1) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

(3) 若 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 的符号保持不变, 则 $f(x)$ 在 x_0 处没有

极值.

证 事实上,就情形(1)来说,根据函数单调性的判定法,函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内单调增加,而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内单调减少,又由于函数 $f(x)$ 在 x_0 处是连续的,故当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时,总有 $f(x) < f(x_0)$. 所以, $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值(图 3-12(a)).

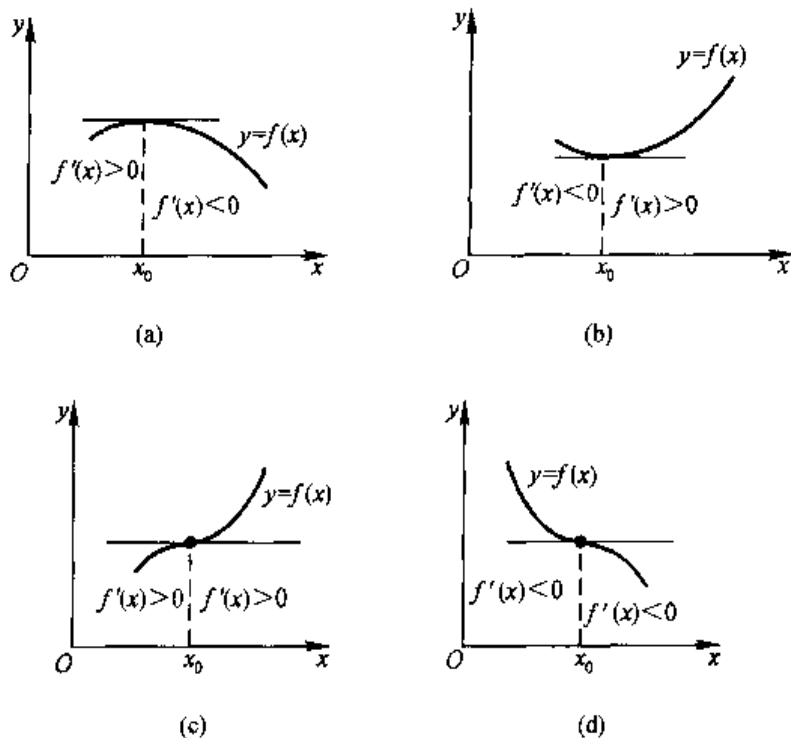


图 3-12

类似地可论证情形(2)(图 3-12(b))及情形(3)(图 3-12(c)、(d)).

定理 2 也可简单地这样说:当 x 在 x_0 的邻近渐增地经过 x_0 时,如果 $f'(x)$ 的符号由正变负,那么 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;如果 $f'(x)$ 的符号由负变正,那么 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;如果 $f'(x)$ 的符号并不改变,那么 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

根据上面的两个定理,如果函数 $f(x)$ 在所讨论的区间内连续,除个别点外处处可导,那么就可以按下列步骤来求 $f(x)$ 在该区间内的极值点和相应的极值:

- (1) 求出导数 $f'(x)$;
- (2) 求出 $f(x)$ 的全部驻点与不可导点;
- (3) 考察 $f'(x)$ 的符号在每个驻点或不可导点的左、右邻近的情形,以确定该点是否为极值点;如果是极值点,进一步确定是极大值点还是极小值点;

(4) 求出各极值点的函数值, 就得函数 $f(x)$ 的全部极值.

例 1 求函数 $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值.

解 (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 除 $x = -1$ 外处处可导, 且

$$f'(x) = \frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}};$$

(2) 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = 1$; $x = -1$ 为 $f(x)$ 的不可导点;

(3) 在 $(-\infty, -1)$ 内, $f'(x) > 0$; 在 $(-1, 1)$ 内, $f'(x) < 0$. 故不可导点 $x = -1$ 是一个极大值点; 又在 $(1, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0$, 故驻点 $x = 1$ 是一个极小值点;

(4) 极大值为 $f(-1) = 0$, 极小值为 $f(1) = -3\sqrt[3]{4}$.

当函数 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在且不为零时, 也可以利用下述定理来判定 $f(x)$ 在驻点处取得极大值还是极小值.

定理 3(第二充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 那么

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

证 在情形(1), 由于 $f'(x_0) < 0$, 按二阶导数的定义有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

根据函数极限的局部保号性, 当 x 在 x_0 的足够小的去心邻域内时,

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

但 $f'(x_0) = 0$, 所以上式即

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

从而知道, 对于这去心邻域内的 x 来说, $f'(x)$ 与 $x - x_0$ 符号相反. 因此, 当 $x - x_0 < 0$ 即 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x - x_0 > 0$ 即 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$. 于是根据定理 2 知道, $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

类似地可以证明情形(2).

定理 3 表明, 如果函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0) \neq 0$, 那么该驻点 x_0 一定是极值点, 并且可以按二阶导数 $f''(x_0)$ 的符号来判定 $f(x_0)$ 是极大值还是极小值. 但如果 $f''(x_0) = 0$, 定理 3 就不能应用. 事实上, 当 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处可能有极大值, 也可能有极小值, 也可能没有极值. 例如, $f_1(x) = -x^4$, $f_2(x) = x^4$, $f_3(x) = x^3$ 这三个函数在 $x = 0$ 处就分别属于

这三种情况.因此,如果函数在驻点处的二阶导数为零,那么还得用一阶导数在驻点左右邻近的符号来判定.

例 2 求函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值.

解 $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$.

令 $f'(x) = 0$, 求得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

$f''(x) = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1)$.

因 $f''(0) = 6 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 极小值为 $f(0) = 0$.

因 $f''(-1) = f''(1) = 0$, 故用定理 3 无法判别. 考察一阶导数 $f'(x)$ 在驻点 $x_1 = -1$ 及 $x_3 = 1$ 左右邻近的符号:

当 x 取 -1 左侧邻近的值时, $f'(x) < 0$; 当 x 取 -1 右侧邻近的值时, $f'(x) < 0$; 因为 $f'(x)$ 的符号没有改变, 所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处没有极值. 同理, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处也没有极值(图 3-13).

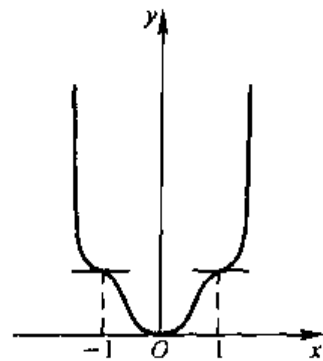


图 3-13

二、最大值最小值问题

在工农业生产、工程技术及科学实验中,常常会遇到这样一类问题:在一定条件下,怎样使“产品最多”、“用料最省”、“成本最低”、“效率最高”等问题,这类问题在数学上有时可归结为求某一函数(通常称为目标函数)的最大值或最小值问题.

假定函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,在开区间 (a, b) 内除有限个点外可导,且至多有有限个驻点.在上述条件下,我们来讨论 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值的求法.

首先,由闭区间上连续函数的性质,可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值一定存在.

其次,如果最大值(或最小值) $f(x_0)$ 在开区间 (a, b) 内的点 x_0 处取得,那么,按 $f(x)$ 在开区间内除有限个点外可导且至多有有限个驻点的假定,可知 $f(x_0)$ 一定也是 $f(x)$ 的极大值(或极小值),从而 x_0 一定是 $f(x)$ 的驻点或不可导点.又 $f(x)$ 的最大值和最小值也可能在区间的端点处取得.因此,可用如下方法求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值.

(1) 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点 x_1, x_2, \dots, x_m 及不可导点 x'_1, x'_2, \dots, x'_n ;

(2) 计算 $f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $f(x'_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 及 $f(a), f(b)$;

(3) 比较(2)中诸值的大小,其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值,最小的便是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

例3 求函数 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 在 $[-3, 4]$ 上的最大值与最小值.

$$\text{解 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \in [-3, 1] \cup [2, 4], \\ -x^2 + 3x - 2, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \in (-3, 1) \cup (2, 4), \\ -2x + 3, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

在 $(-3, 4)$ 内, $f(x)$ 的驻点为 $x = \frac{3}{2}$; 不可导点为 $x = 1, 2$.

由于 $f(-3) = 20, f(1) = 0, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}, f(2) = 0, f(4) = 6$, 比较可得 $f(x)$ 在 $x = -3$ 处取得它在 $[-3, 4]$ 上的最大值 20, 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 处取得它在 $[-3, 4]$ 上的最小值 0.

例4 铁路线上 AB 段的距离为 100 km. 工厂 C 距 A 处为 20 km, AC 垂直于 AB (图 3-14). 为了运输需要, 要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路. 已知铁路每公里货运的运费与公路上每公里货运的运费之比为 3:5. 为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省, 问 D 点应选在何处?

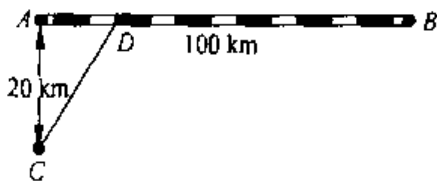


图 3-14

解 设 $AD = x$ (km), 那么 $DB = 100 - x$,

$$CD = \sqrt{20^2 + x^2} = \sqrt{400 + x^2}.$$

由于铁路上每公里货运的运费与公路上每公里货运的运费之比为 3:5, 因此我们不妨设铁路上每公里的运费为 $3k$, 公路上每公里的运费为 $5k$ (k 为某个正数, 因它与本题的解无关, 所以不必定出). 设从 B 点到 C 点需要的总运费为 y , 那么

$$y = 5k \cdot CD + 3k \cdot DB,$$

即
$$y = 5k \sqrt{400 + x^2} + 3k(100 - x) \quad (0 \leq x \leq 100).$$

现在, 问题就归结为: x 在 $[0, 100]$ 内取何值时目标函数 y 的值最小.

先求 y 对 x 的导数:

$$y' = k \left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3 \right).$$

解方程 $y' = 0$, 得 $x = 15(\text{km})$.

由于 $y|_{x=0} = 400k$, $y|_{x=15} = 380k$, $y|_{x=100} = 500k\sqrt{1+\frac{1}{5^2}}$, 其中以 $y|_{x=15} = 380k$ 为最小, 因此, 当 $AD = x = 15 \text{ km}$ 时, 总运费为最省.

在求函数的最大值(或最小值)时, 特别值得指出的是下述情形: $f(x)$ 在一个区间(有限或无限, 开或闭)内可导且只有一个驻点 x_0 , 并且这个驻点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 那么, 当 $f(x_0)$ 是极大值时, $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最大值(图 3-15(a)); 当 $f(x_0)$ 是极小值时, $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最小值(图 3-15(b)). 在应用问题中往往遇到这样的情形.

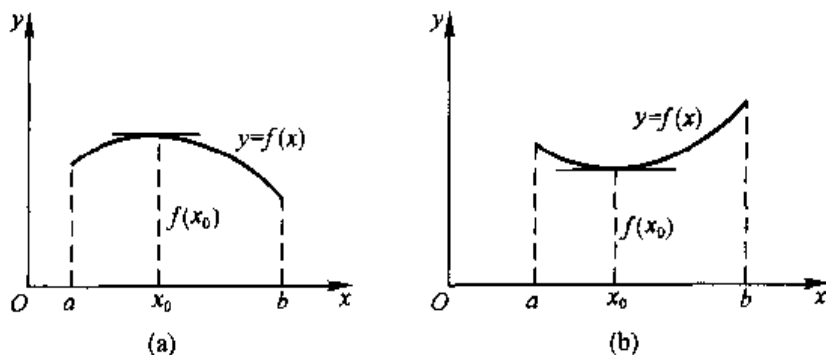


图 3-15

例 5 一束光线由空气中 A 点经过水面折射后到达水中 B 点(图 3-16). 已知光在空气中和水中传播的速度分别是 v_1 和 v_2 , 光线在介质中总是沿着耗时最少的路径传播. 试确定光线传播的路径.

解 设 A 点到水面的垂直距离为 $AO = h_1$, B 点到水面的垂直距离为 $BQ = h_2$, x 轴沿水面过点 O, Q , OQ 的长度为 l .

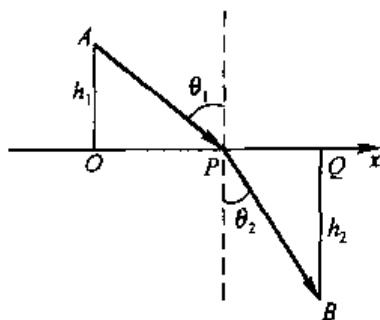


图 3-16

由于光线总是沿着耗时最少的路径传播, 因此光线在同一介质内必沿直线传播. 设光线的传播路径与 x 轴的交点为 P , $OP = x$, 则光线从 A 到 B 的传播

路径必为折线 APB , 其所需要的传播时间为

$$T(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{v_2}, x \in [0, l].$$

下面来确定 x 满足什么条件时, $T(x)$ 在 $[0, l]$ 上取得最小值.

由于

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}, x \in [0, l]$$

$$T''(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{h_1^2}{(h_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{h_2^2}{[h_2^2 + (l-x)^2]^{\frac{3}{2}}} > 0, x \in [0, l]$$

$$T'(0) < 0, T'(l) > 0,$$

又 $T'(x)$ 在 $[0, l]$ 上连续, 故 $T'(x)$ 在 $(0, l)$ 内存在唯一零点 x_0 , 且 x_0 是 $T(x)$ 在 $(0, l)$ 内的唯一极小值点, 从而也是 $T(x)$ 在 $[0, l]$ 上的最小值点.

设 x_0 满足 $T'(x) = 0$, 即

$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x_0^2}} = \frac{l-x_0}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (l-x_0)^2}}.$$

记

$$\frac{x_0}{\sqrt{h_1^2 + x_0^2}} = \sin \theta_1, \frac{l-x_0}{\sqrt{h_2^2 + (l-x_0)^2}} = \sin \theta_2,$$

就得到

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}.$$

这就是说, 当 P 点满足以上条件时, APB 就是光线的传播路径. 上式就是光学中著名的折射定律, 其中 θ_1, θ_2 分别是光线的入射角和折射角 (见图 3-16).

还要指出, 实际问题中, 往往根据问题的性质就可以断定可导函数 $f(x)$ 确有最大值或最小值, 而且一定在定义区间内部取得. 这时如果 $f(x)$ 在定义区间内部只有一个驻点 x_0 , 那么不必讨论 $f(x_0)$ 是不是极值, 就可以断定 $f(x_0)$ 是最大值或最小值.

例 6 把一根直径为 d 的圆木锯成截面为矩形的梁 (图 3-17). 问矩形截面的高 h 和宽 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解 由力学分析知道: 矩形梁的抗弯截面模量为

$$W = \frac{1}{6}bh^2.$$

由图 3-17 看出, b 与 h 有下面的关系:

$$h^2 = d^2 - b^2,$$

因而

$$W = \frac{1}{6}(d^2 b - b^3).$$

这样, W 就与 b 存在函数关系, b 的变化范围是 $(0, d)$.

现在, 问题化为: b 等于多少时目标函数 $W = W(b)$ 取最大值? 为此, 求 W 对 b 的导数:

$$W' = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2).$$

令 $W' = 0$, 解得

$$b = \sqrt{\frac{1}{3}}d.$$

由于梁的最大抗弯截面模量一定存在, 而且在 $(0, d)$ 内部取得; 现在, $W' = 0$ 在

$(0, d)$ 内只有一个根 $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$, 所以, 当 $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$ 时, W 的值最大. 这时,

$$h^2 = d^2 - b^2 = d^2 - \frac{1}{3}d^2 = \frac{2}{3}d^2,$$

即

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}d.$$

$$d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1.$$

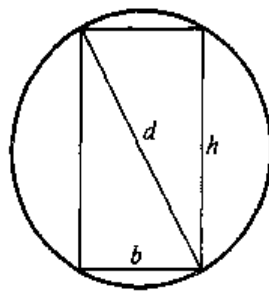


图 3-17

习 题 3-5

1. 求下列函数的极值:

(1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

(2) $y = x - \ln(1+x)$;

(3) $y = -x^4 + 2x^2$;

(4) $y = x + \sqrt{1-x}$;

(5) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(6) $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y = e^x \cos x$;

(8) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$;

(10) $y = x + \tan x$.

2. 试证明: 如果函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足条件 $b^2 - 3ac < 0$, 那么这函数没有极值.

3. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

4. 求下列函数的最大值、最小值;

(1) $y = 2x^3 - 3x^2, -1 \leq x \leq 4$;

(2) $y = x^4 - 8x^2 + 2, -1 \leq x \leq 3$;

(3) $y = x + \sqrt{1-x}, -5 \leq x \leq 1$.

5. 问函数 $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7 (1 \leq x \leq 4)$ 在何处取得最大值? 并求出它的最大值.

6. 问函数 $y = x^2 - \frac{54}{x} (x < 0)$ 在何处取得最小值?

7. 问函数 $y = \frac{x}{x^2 + 1} (x \geq 0)$ 在何处取得最大值?

8. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌 20 m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

9. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

10. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3-18). 截面的面积为 5 m^2 . 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省?

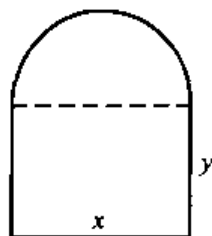


图 3-18

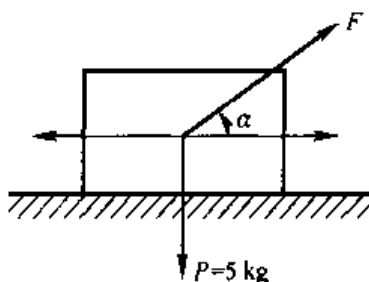


图 3-19

11. 设有质量为 5 kg 的物体, 置于水平面上, 受力 F 的作用而开始移动(图 3-19). 设摩擦系数 $\mu = 0.25$, 问力 F 与水平线的交角 α 为多少时, 才可使力 F 的大小为最小.

12. 有一杠杆, 支点在它的一端. 在距支点 0.1 m 处挂一质量为 49 kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(图 3-20). 如果杠杆的线密度为 5 kg/m, 求最省力的杆长?

13. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(图 3-21). 问留下的扇形的中心角 φ 取多大时, 做成的漏斗的容积最大?

14. 某吊车的车身高为 1.5 m, 吊臂长 15 m. 现在要把一个 6 m 宽、2 m 高的屋架, 水平地吊到 6 m 高的柱子上去(图 3-22), 问能否吊得上去?

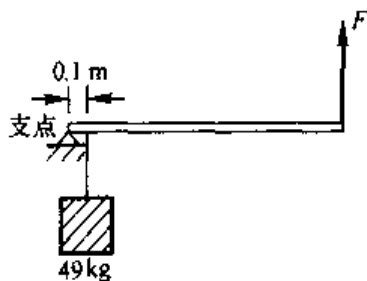


图 3-20

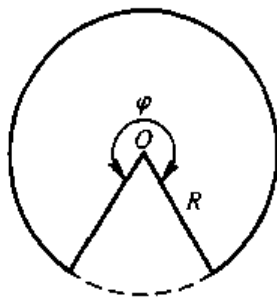


图 3-21

15. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 1 000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修

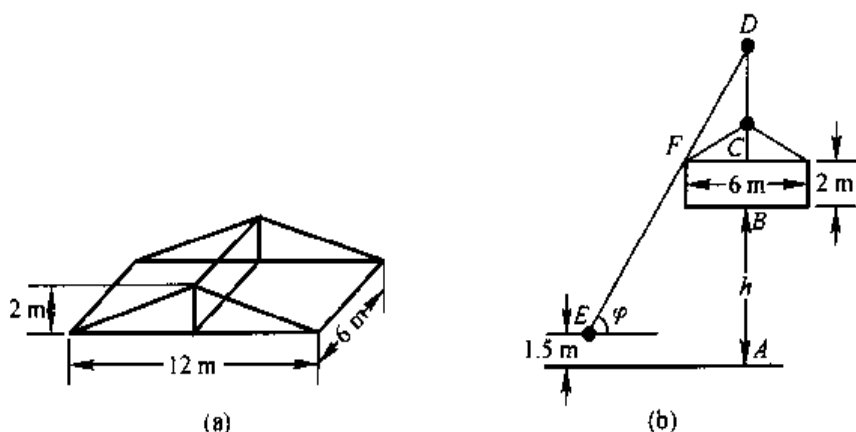


图 3-22

费. 试问房租定为多少可获得最大收入?

第六节 函数图形的描绘

借助于一阶导数的符号, 可以确定函数图形在哪个区间上上升, 在哪个区间上下降, 在什么地方有极值点; 借助于二阶导数的符号, 可以确定函数图形在哪个区间上为凹, 在哪个区间上为凸, 在什么地方有拐点. 知道了函数图形的升降、凹凸以及极值点和拐点后, 也就可以掌握函数的性态, 并把函数的图形画得比较准确.

现在, 随着现代计算机技术的发展, 借助于电子计算机和许多数学软件, 可以方便地画出各种函数的图形. 但是, 如何识别机器作图中的误差, 如何掌握图形上的关键点, 如何选择作图的范围等, 从而进行人工干预, 仍然需要我们有运用微分学的方法描绘函数图形的基本知识.

利用导数描绘函数图形的一般步骤如下:

第一步 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域及函数所具有的某些特性(如奇偶性、周期性等), 并求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;

第二步 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点, 并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点, 用这些点把函数的定义域划分成几个部分区间;

第三步 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降和凹凸, 极值点和拐点;

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势;

第五步 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点所对应的函数值, 定出图形上相应的点; 为了把图形描绘得准确些, 有时还需要补充一些点; 然后结合第三、第四步中得到的结果, 联结这些点画出函数 $y = f(x)$ 的图形.

例1 画出函数 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ 的图形.

解 (1) 所给函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1),$$

$$f''(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1).$$

(2) $f'(x)$ 的零点为 $x = -\frac{1}{3}$ 和 1 ; $f''(x)$ 的零点为 $x = \frac{1}{3}$. 将点 $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$ 由小到大排列, 依次把定义域 $(-\infty, +\infty)$ 划分成下列四个部分区间:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 1\right], [1, +\infty).$$

(3) 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ 内, $f'(x) > 0, f''(x) < 0$, 所以在 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ 上的曲线弧上升而且是凸的.

在 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 内, $f'(x) < 0, f''(x) < 0$, 所以在 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ 上的曲线弧下降而且是凸的.

同样, 可以讨论在区间 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 上及在区间 $[1, +\infty)$ 上相应的曲线弧的升降和凹凸. 为了明确起见, 我们把所得的结论列成下表:

| x | $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ | $-\frac{1}{3}$ | $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ | $\frac{1}{3}$ | $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ | 1 | $(1, +\infty)$ |
|-------------------|--------------------------------------|----------------|--|---------------|-------------------------------|-----|----------------|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| $f''(x)$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $y = f(x)$ 的图形 | ↗ | 极大 | ↘ | 拐点 | ↘ | 极小 | ↗ |

这里记号 ↗ 表示曲线弧上升而且是凸的, ↘ 表示曲线弧下降而且是凸的, ↘ 表示曲线弧下降而且是凹的, ↗ 表示曲线弧上升而且是凹的.

(4) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow -\infty$;

(5) 算出 $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$ 处的函数值:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}, f(1) = 0.$$

从而得到函数 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ 图形上的三个点:

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{16}{27}\right), (1, 0).$$

适当补充一些点. 例如, 计算出

$$f(-1) = 0, f(0) = 1, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{8},$$

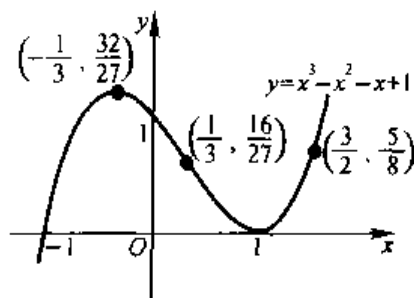


图 3-23

就可补充描出点 $(-1, 0)$, 点 $(0, 1)$ 和点 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{8})$. 结合(3)、(4)中得到的结果, 就可以画出

$$y = x^3 - x^2 - x + 1$$

的图形(图 3-23).

例 2 描绘函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解 (1) 所给函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

由于

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数, 它的图形关于 y 轴对称. 因此可以只讨论 $[0, +\infty)$ 上该函数的图形. 求出

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1).$$

(2) 在 $[0, +\infty)$ 上, $f'(x)$ 的零点为 $x=0$; $f''(x)$ 的零点为 $x=1$. 用点 $x=1$ 把 $[0, +\infty)$ 划分成两个区间 $[0, 1]$ 和 $[1, +\infty)$.

(3) 在 $(0, 1)$ 内, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, 所以在 $[0, 1]$ 上的曲线弧下降而且是凸的. 结合 $f'(0) = 0$ 以及图形关于 y 轴对称可知, $x=0$ 处函数 $f(x)$ 有极大值.

在 $(1, +\infty)$ 内, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 所以在 $[1, +\infty)$ 上的曲线弧下降而且是凹的.

上述的这些结果, 可以列成下表:

| | | | | |
|--------------|----|-------|----|---------|
| x | 0 | (0,1) | 1 | (1, +∞) |
| $f'(x)$ | 0 | - | - | - |
| $f''(x)$ | - | - | 0 | + |
| $y=f(x)$ 的图形 | 极大 | ↘ | 拐点 | ↘ |

(4) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 所以图形有一条水平渐近线 $y = 0$.

(5) 算出 $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. 从而得到函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

图形上的两点 $M_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ 和 $M_2\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)$. 又由 $f(2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}$

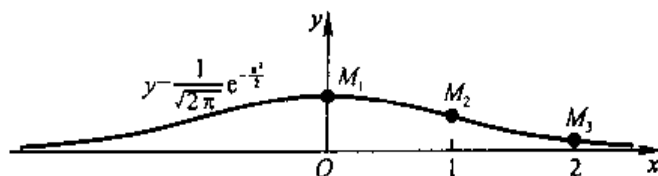


图 3-24

得 $M_3\left(2, \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}\right)$. 结合(3)、(4)的讨论, 画出函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的图形. 最后, 利用图形的对称性, 便可得到函数在 $(-\infty, 0]$ 上的图形(图 3-24).

例 3 描绘函数 $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 (1) 所给函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -3), (-3, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{36(3-x)}{(x+3)^3}; f''(x) = \frac{72(x-6)}{(x+3)^4}.$$

(2) $f'(x)$ 的零点为 $x=3$; $f''(x)$ 的零点为 $x=6$; $x=-3$ 是函数的间断点. 点 $x=-3$ 、 $x=3$ 和 $x=6$ 把定义域划分成四个部分区间:

$$(-\infty, -3), (-3, 3], [3, 6], [6, +\infty).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降及凹凸, 以及极值点和拐点等如下表:

| | | | | | | |
|--------------|-----------------|-----------|----|----------|----|----------------|
| x | $(-\infty, -3)$ | $(-3, 3)$ | 3 | $(3, 6)$ | 6 | $(6, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | - | + | 0 | - | - | - |
| $f''(x)$ | - | - | - | - | 0 | + |
| $y=f(x)$ 的图形 | ↘ | ↗ | 极大 | ↘ | 拐点 | ↘ |

(4) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$, 所以图形有一条水平渐近线 $y = 1$ 和一条铅直渐近线 $x = -3$.

(5) 算出 $x = 3, 6$ 处的函数值:

$$f(3) = 4, f(6) = \frac{11}{3},$$

从而得到图形上的两个点:

$$M_1(3, 4), M_2\left(6, \frac{11}{3}\right).$$

又由于

$$f(0) = 1, f(-1) = -8, f(-9) = -8,$$

$$f(-15) = -\frac{11}{4},$$

得图形上的四个点:

$$M_3(0, 1), M_4(-1, -8),$$

$$M_5(-9, -8), M_6\left(-15, -\frac{11}{4}\right).$$

结合(3)、(4)中得到的结果, 画出函数 $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形如图 3-25 所示.

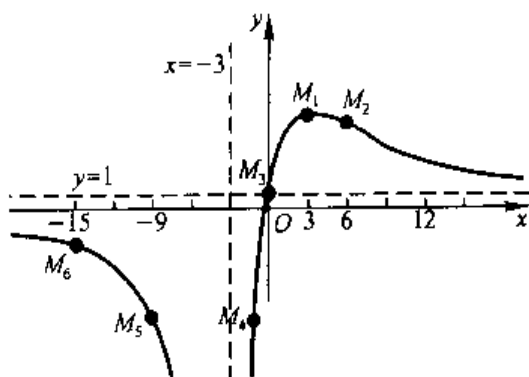


图 3-25

习 题 3-6

描绘下列函数的图形:

1. $y = \frac{1}{5}(x^4 - 6x^2 + 8x + 7);$

2. $y = \frac{x}{1+x^2};$

3. $y = e^{-(x-1)^2};$

$$4. y = x^2 + \frac{1}{x};$$

$$5. y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

第七节 曲 率

一、弧微分

作为曲率的预备知识,先介绍弧微分的概念.

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有连续导数. 在曲线 $y = f(x)$ 上取固定点 $M_0(x_0, y_0)$ 作为度量弧长的基点(图 3-26), 并规定依 x 增大的方向作为曲线的正向. 对曲线上任一点 $M(x, y)$, 规定有向弧段 $\overline{M_0 M}$ 的值 s (简称为弧 s)^① 如下: s 的绝对值等于这弧段的长度, 当有向弧段 $\overline{M_0 M}$ 的方向与曲线的正向一致时 $s > 0$, 相反时 $s < 0$. 显然, 弧 s 与 x 存在函数关系: $s = s(x)$, 而且 $s(x)$ 是 x 的单调增加函数. 下面来求 $s(x)$ 的导数及微分.

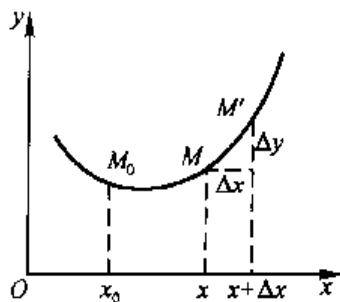


图 3-26

设 $x, x + \Delta x$ 为 (a, b) 内两个邻近的点, 它们在曲线 $y = f(x)$ 上的对应点为 M, M' (图 3-26), 并设对应于 x 的增量 Δx , 弧 s 的增量为 Δs , 那么

$$\Delta s = \overline{M_0 M'} - \overline{M_0 M} = \overline{MM'}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \left(\frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 &= \left(\frac{\overline{MM'}}{\Delta x} \right)^2 = \left(\frac{\overline{MM'}}{|\overline{MM'}|} \right)^2 \cdot \frac{|\overline{MM'}|^2}{(\Delta x)^2} \\ &= \left(\frac{\overline{MM'}}{|\overline{MM'}|} \right)^2 \cdot \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

^① 有向弧段 $\overline{M_0 M}$ 的值也常记作 $\widehat{M_0 M}$, 即记号 $\widehat{M_0 M}$ 既表示有向弧段, 又表示有向弧段的值.

$$= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right],$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{\left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right]}.$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取极限, 由于 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $M' \rightarrow M$, 这时弧的长度与弦的长度之比的极限等于 1, 即

$$\lim_{M' \rightarrow M} \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} = 1,$$

又

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y',$$

因此得

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + y'^2}.$$

由于 $s = s(x)$ 是单调增加函数, 从而根号前应取正号, 于是有

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1)$$

这就是弧微分公式.

二、曲率及其计算公式

我们直觉地认识到: 直线不弯曲, 半径较小的圆弯曲得比半径较大的圆厉害些, 而其他曲线的不同部分有不同的弯曲程度, 例如抛物线 $y = x^2$ 在顶点附近弯曲得比远离顶点的部分厉害些.

在工程技术中, 有时需要研究曲线的弯曲程度. 例如, 船体结构中的钢梁, 机床的转轴等, 它们在荷载作用下要产生弯曲变形, 在设计时对它们的弯曲必须有一定的限制, 这就要定量地研究它们的弯曲程度. 为此首先要讨论如何用数量来描述曲线的弯曲程度.

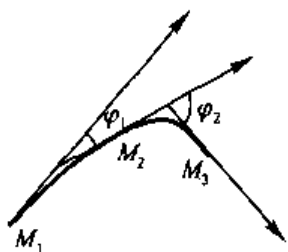


图 3-27

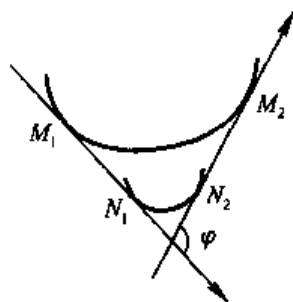


图 3-28

在图 3-27 中可以看出, 弧段 $\widehat{M_1M_2}$ 比较平直, 当动点沿这段弧从 M_1 移动到 M_2 时, 切线转过的角度 φ_1 不大, 而弧段 $\widehat{M_2M_3}$ 弯曲得比较厉害, 角 φ_2 就比

较大.

但是,切线转过的角度的大小还不能完全反映曲线弯曲的程度.例如,从图 3-28 中可以看出,两段曲线弧 $\overline{M_1 M_2}$ 及 $\overline{N_1 N_2}$ 尽管切线转过的角度都是 φ ,然而弯曲程度并不相同,短弧段比长弧段弯曲得厉害些.由此可见,曲线弧的弯曲程度还与弧段的长度有关.

按上面的分析,我们引入描述曲线弯曲程度的曲率概念如下.

设曲线 C 是光滑的^①,在曲线 C 上选定一点 M_0 作为度量弧 s 的基点.设曲线上点 M 对应于弧 s ,在点 M 处切线的倾角为 α (这里假定曲线 C 所在的平面上已设立了 xOy 坐标系),曲线上另外一点 M' 对应于弧 $s + \Delta s$,在点 M' 处切线的倾角为 $\alpha + \Delta\alpha$ (图 3-29),那么,弧段 $\overline{MM'}$ 的长度为 $|\Delta s|$,当动点从 M 移动到 M' 时切线转过的角度为 $|\Delta\alpha|$.

我们用比值 $\left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$,即单位弧段上切线转过的角度的大小来表达弧段 $\overline{MM'}$ 的平均弯曲程度,把这比值叫做弧段 $\overline{MM'}$ 的平均曲率,并记作 \bar{K} ,即

$$\bar{K} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|.$$

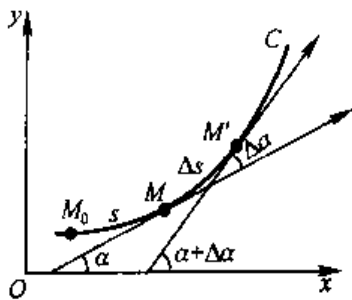


图 3-29

类似于从平均速度引进瞬时速度的方法,当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时(即 $M' \rightarrow M$ 时),上述平均曲率的极限叫做曲线 C 在点 M 处的曲率,记作 K ,即

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|.$$

在 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$ 存在的条件下, K 也可以表示为

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|. \quad (2)$$

对于直线来说,切线与直线本身重合,当点沿直线移动时,切线的倾角 α 不

^① 当曲线上每一点处都具有切线,且切线随切点的移动而连续转动,这样的曲线称为光滑曲线.

变(图 3-30), $\Delta\alpha=0$, $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=0$, 从而 $K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = 0$. 这就是说, 直线上任意点 M 处的曲率都等于零, 这与我们直觉认识到的“直线不弯曲”一致.

设圆的半径为 a , 由图 3-31 可见圆在点 M 、 M' 处的切线所夹的角 $\Delta\alpha$ 等于中心角 MDM' . 但 $\angle MDM' = \frac{\Delta s}{a}$, 于是

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{a}}{\Delta s} = \frac{1}{a},$$

从而

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{1}{a}.$$

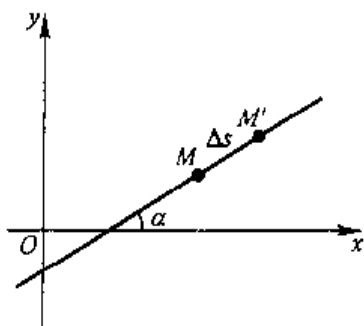


图 3-30

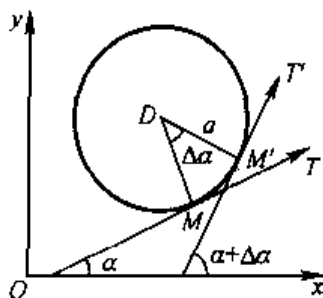


图 3-31

因为点 M 是圆上任意取定的一点, 上述结论表示圆上各点处的曲率都等于半径 a 的倒数 $\frac{1}{a}$, 这就是说, 圆的弯曲程度到处一样, 且半径越小曲率越大, 即圆弯曲得越厉害.

在一般情况下, 我们根据(2)式来导出便于实际计算曲率的公式.

设曲线的直角坐标方程是 $y = f(x)$, 且 $f(x)$ 具有二阶导数(这时 $f'(x)$ 连续, 从而曲线是光滑的). 因为 $\tan \alpha = y'$, 所以

$$\sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{dx} = y'',$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{y''}{1 + y'^2},$$

于是

$$d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2} dx.$$

又由(1)知道

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

从而, 根据曲率 K 的表达式(2), 有

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

设曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出,则可利用由参数方程所确定的函数的求导法,求出 y'_x 及 y''_x ,代入(3)便得

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{3/2}}. \quad (4)$$

例 1 计算等边双曲线 $xy=1$ 在点(1,1)处的曲率.

解 由 $y = \frac{1}{x}$, 得

$$y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}.$$

因此, $y'|_{x=1} = -1, y''|_{x=1} = 2$.

把它们代入公式(3), 使得曲线 $xy=1$ 在点(1,1)处的曲率为

$$K = \frac{2}{[1 + (-1)^2]^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点处的曲率最大?

解 由 $y = ax^2 + bx + c$, 得

$$y' = 2ax + b, y'' = 2a,$$

代入公式(3), 得

$$K = \frac{|2a|}{[1 + (2ax + b)^2]^{3/2}}.$$

因为 K 的分子是常数 $|2a|$, 所以只要分母最小, K 就最大. 容易看出, 当 $2ax + b = 0$, 即 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, K 的分母最小, 因而 K 有最大值 $|2a|$. 而 $x = -\frac{b}{2a}$ 所对应的点为抛物线的顶点. 因此, 抛物线在顶点处的曲率最大.

在有些实际问题中, $|y'|$ 同 1 比较起来是很小的(有的工程技术书上把这种关系记成 $|y'| \ll 1$), 可以忽略不计. 这时, 由

$$1 + y'^2 \approx 1,$$

而有曲率的近似计算公式

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx |y''|.$$

这就是说, 当 $|y'| \ll 1$ 时, 曲率 K 近似于 $|y''|$. 经过这样简化之后, 对一些复杂问题的计算和讨论就方便多了.

三、曲率圆与曲率半径

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $K (K \neq 0)$. 在点 M 处的曲线的

法线上,在凹的一侧取一点 D ,使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆 (图 3-32),这个圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆,曲率圆的圆心 D 叫做曲线在点 M 处的曲率中心,曲率圆的半径 ρ 叫做曲线在点 M 处的曲率半径.

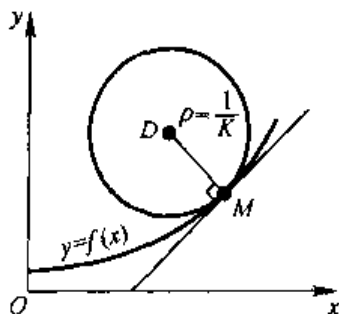


图 3-32

按上述规定可知,曲率圆与曲线在点 M 有相同的切线和曲率,且在点 M 邻近有相同的凹向.因此,在实际问题中,常常用曲率圆在点 M 邻近的一段圆弧来近似代替曲线弧,以使问题简化.

按上述规定,曲线在点 M 处的曲率 K ($K \neq 0$) 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系:

$$\rho = \frac{1}{K}, K = \frac{1}{\rho}.$$

这就是说:曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数.

例 3 设工件内表面的截线为抛物线 $y = 0.4x^2$ (图 3-33). 现在要用砂轮磨削其内表面. 问用直径多大的砂轮才比较合适?

解 为了在磨削时不使砂轮与工件接触处附近的那部分工件磨去太多,砂轮的半径应不大于抛物线上各点处曲率半径中的最小值. 由本节例 2 知道,抛物线在其顶点处的曲率最大,也就是说,抛物线在其顶点处的曲率半径最小. 因此,只要求出抛物线 $y = 0.4x^2$ 在顶点 $O(0,0)$ 处的曲率半径. 由

$$y' = 0.8x, y'' = 0.8,$$

$$\text{而有 } y'|_{x=0} = 0, y''|_{x=0} = 0.8.$$

把它们代入公式(3),得

$$K = 0.8.$$

因而求得抛物线顶点处的曲率半径

$$\rho = \frac{1}{K} = 1.25.$$

所以选用砂轮的半径不得超过 1.25 单位长,即直径不得超过 2.50 单位长.

对于用砂轮磨削一般工件的内表面时,也有类似的结论,即选用的砂轮的半

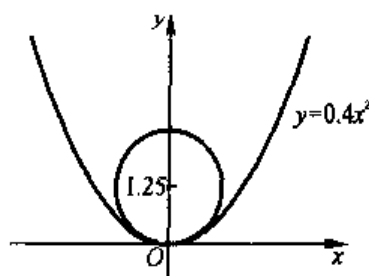


图 3-33

径不应超过这工件内表面的截线上各点处曲率半径中的最小值.

* 四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线

设已知曲线的方程是 $y = f(x)$, 且其二阶导数 y'' 在点 x 不为零, 则曲线在对应点 $M(x, y)$ 的曲率中心 $D(\alpha, \beta)$ 的坐标为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \end{cases} \quad (5)$$

这是因为, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 的曲率圆的方程为

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = \rho^2,$$

其中 ξ, η 是曲率圆上的动点坐标, 且

$$\rho^2 = \frac{1}{K^2} = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

因为点 M 在曲率圆上, 所以

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2; \quad (6)$$

又因为曲线在点 M 的切线与曲率圆的半径 DM 相垂直(图 3-32), 所以

$$y' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}. \quad (7)$$

由(6)和(7)消去 $x - \alpha$, 解出

$$(y - \beta)^2 = \frac{\rho^2}{1+y'^2} = -\frac{(1+y'^2)^2}{y''}.$$

由于当 $y'' > 0$ 时曲线为凹弧, $y - \beta < 0$; 当 $y'' < 0$ 时曲线为凸弧, $y - \beta > 0$. 总之, y'' 与 $y - \beta$ 异号. 因此取上式两边的平方根, 得

$$y - \beta = -\frac{1+y'^2}{y''},$$

又

$$x - \alpha = -y'(y - \beta) = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

从而有公式(5).

当点 $(x, f(x))$ 沿曲线 C 移动时,相应的曲率中心 D 的轨迹曲线 G 称为曲线 C 的渐屈线,而曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线(图3-34).所以曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线的参数方程为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $y=f(x)$, $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$, x 为参数,直角坐标系 $\alpha O \beta$ 与 xOy 坐标系重合.

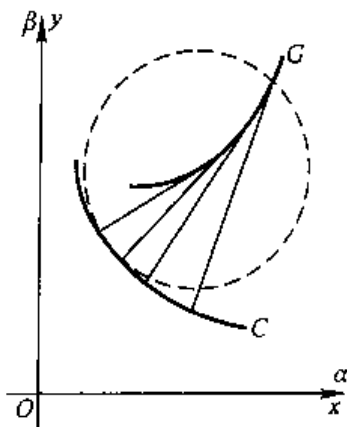


图 3-34

例 4 求摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

的渐屈线方程.

解 $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a \sin t$, 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^2}}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

将这些结果代入(8)式并化简, 使得摆线的渐屈线的参数方程:

$$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t), \\ \beta = a(\cos t - 1), \end{cases} \quad (9)$$

其中 t 为参数, 直角坐标系 $\alpha O \beta$ 与 xOy 坐标系重合. 为了作出渐屈线(9), 令 $t = \pi + \tau$, 代入(9)式得

$$\begin{cases} \alpha - \pi a = a(\tau - \sin \tau), \\ \beta + 2a = a(1 - \cos \tau), \end{cases}$$

再令 $\alpha - \pi a = \xi$, $\beta + 2a = \eta$, 则得

$$\begin{cases} \xi = a(\tau - \sin \tau), \\ \eta = a(1 - \cos \tau). \end{cases} \quad (10)$$

在新坐标系 $\xi O_1 \eta$ 中, 曲线(10)为一摆线, 其中新坐标系 $\xi O_1 \eta$ 由旧坐标系 xOy

平移到新原点 $O_1(\pi a, -2a)$ 得到. 由此可知摆线的渐屈线仍为一摆线, 如图 3-35 所示.

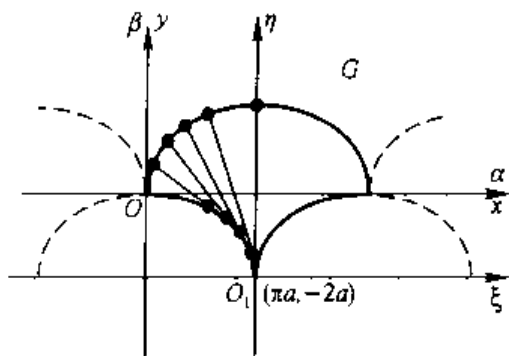


图 3-35

习 题 3-7

1. 求椭圆 $4x^2 + y^2 = 4$ 在点 $(0, 2)$ 处的曲率.
2. 求曲线 $y = \ln \sec x$ 在点 (x, y) 处的曲率及曲率半径.
3. 求抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.
4. 求曲线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 在 $t = t_0$ 相应的点处的曲率.
5. 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.
6. 证明曲线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 在点 (x, y) 处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.
7. 一飞机沿抛物线路径 $y = \frac{x^2}{10\,000}$ (y 轴铅直向上, 单位为 m) 作俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v = 200$ m/s. 飞行员体重 $G = 70$ kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.
8. 汽车连同载重共 5 t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6 km/h, 桥的跨度为 10 m, 拱的矢高为 0.25 m (图 3-36). 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

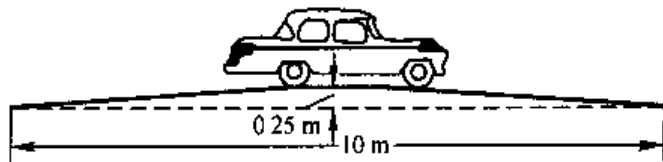


图 3-36

9. 求曲线 $y = \ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.
10. 求曲线 $y = \tan x$ 在点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 处的曲率圆方程.
11. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线方程.

第八节 方程的近似解

在科学技术问题中,经常会遇到求解高次代数方程或其他类型的方程的问题.要求得这类方程的实根的精确值,往往比较困难,因此就需要寻求方程的近似解.

求方程的近似解,可分两步来做.

第一步是确定根的大致范围.具体地说,就是确定一个区间 $[a, b]$,使所求的根是位于这个区间内的唯一实根.这一步工作称为根的隔离,区间 $[a, b]$ 称为所求实根的隔离区间.由于方程 $f(x) = 0$ 的实根在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标,因此为了确定根的隔离区间,可以先较精确地画出 $y = f(x)$ 的图形,然后从图上定出它与 x 轴交点的大概位置.由于作图和读数的误差,这种做法得不出根的高精确度的近似值,但一般已可以确定出根的隔离区间.

第二步是以根的隔离区间的端点作为根的初始近似值,逐步改善根的近似值的精确度,直至求得满足精确度要求的近似解.完成这一步工作有多种方法,这里我们介绍两种常用的方法——二分法和切线法,按照这些方法,编出简单的程序,就可以在计算机上求出方程足够精确的近似解.

一、二分法

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \cdot f(b) < 0$,且方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内仅有一个实根 ξ ,于是 $[a, b]$ 即是这个根的一个隔离区间.

取 $[a, b]$ 的中点 $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$,计算 $f(\xi_1)$.

如果 $f(\xi_1) = 0$,那么 $\xi = \xi_1$;

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(a)$ 同号,那么取 $a_1 = \xi_1, b_1 = b$,由 $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$,即知 $a_1 < \xi < b_1$,且 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$;

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(b)$ 同号,那么取 $a_1 = a, b_1 = \xi_1$,也有 $a_1 < \xi < b_1$ 及 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$;

总之,当 $\xi \neq \xi_1$ 时,可求得 $a_1 < \xi < b_1$,且 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b - a)$.

以 $[a_1, b_1]$ 作为新的隔离区间,重复上述做法,当 $\xi \neq \xi_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ 时,可求得 $a_2 < \xi < b_2$,且 $b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2}(b - a)$.

如此重复 n 次,可求得 $a_n < \xi < b_n$, 且 $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$. 由此可知, 如果以 a_n 或 b_n 作为 ξ 的近似值, 那么其误差小于 $\frac{1}{2^n}(b - a)$.

例 1 用二分法求方程 $x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-3} .

解 令 $f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$, 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

由 $f'(x) = 3x^2 + 2.2x + 0.9$, 根据判别式 $B^2 - 4AC = 2.2^2 - 4 \times 3 \times 0.9 = -5.96 < 0$, 知 $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, $f(x) = 0$ 至多有一个实根.

由 $f(0) = -1.4 < 0$, $f(1) = 1.6 > 0$, 知 $f(x) = 0$ 在 $[0, 1]$ 内有唯一的实根. 取 $a = 0$, $b = 1$, $[0, 1]$ 即是一个隔离区间.

计算得:

$$\xi_1 = 0.5, \quad f(\xi_1) = -0.55 < 0,$$

$$\text{故 } a_1 = 0.5, b_1 = 1;$$

$$\xi_2 = 0.75, \quad f(\xi_2) = 0.32 > 0,$$

$$\text{故 } a_2 = 0.5, b_2 = 0.75;$$

$$\xi_3 = 0.625, \quad f(\xi_3) = -0.16 < 0,$$

$$\text{故 } a_3 = 0.625, b_3 = 0.75;$$

$$\xi_4 = 0.687^{(1)}, \quad f(\xi_4) = 0.062 > 0,$$

$$\text{故 } a_4 = 0.625, b_4 = 0.687;$$

$$\xi_5 = 0.656, \quad f(\xi_5) = -0.054 < 0,$$

$$\text{故 } a_5 = 0.656, b_5 = 0.687;$$

$$\xi_6 = 0.672, \quad f(\xi_6) = 0.005 > 0,$$

$$\text{故 } a_6 = 0.656, b_6 = 0.672;$$

$$\xi_7 = 0.664, \quad f(\xi_7) = -0.025 < 0,$$

$$\text{故 } a_7 = 0.664, b_7 = 0.672;$$

$$\xi_8 = 0.668, \quad f(\xi_8) = -0.010 < 0,$$

$$\text{故 } a_8 = 0.668, b_8 = 0.672;$$

$$\xi_9 = 0.670, \quad f(\xi_9) = -0.002 < 0,$$

$$\text{故 } a_9 = 0.670, b_9 = 0.672;$$

① 按本例误差不超过 10^{-3} 的要求, 计算时只取 3 位小数.

$$\xi_{10} = 0.671, \quad f(\xi_{10}) = 0.001 > 0,$$

$$\text{故 } a_{10} = 0.670, b_{10} = 0.671.$$

于是 $0.670 < \xi < 0.671$.

即 0.670 作为根的不足近似值, 0.671 作为根的过剩近似值, 其误差都小于 10^{-3} .

二、切线法

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶导数, $f(a) \cdot f(b) < 0$ 且 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上保持定号. 在上述条件下, 方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内有唯一的实根 ξ , $[a, b]$ 为根的一个隔离区间. 此时, $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形 \widehat{AB} 只有如图 3-37 所示的四种不同情形.

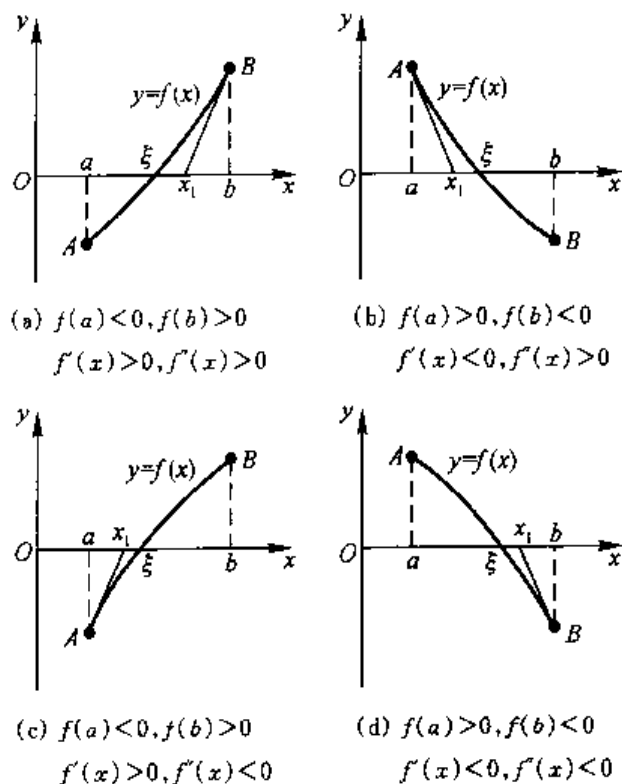


图 3-37

考虑用曲线弧一端的切线来代替曲线弧, 从而求出方程实根的近似值. 这种方法叫做切线法. 从图 3-37 中看出, 如果在纵坐标与 $f''(x)$ 同号的那个端点 (此端点记作 $(x_0, f(x_0))$) 作切线, 这切线与 x 轴的交点的横坐标 x_1 就比 x_0 更

接近方程的根 ξ ①.

下面以图 3-37(c): $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$ 的情形为例进行讨论. 此时因为 $f(a)$ 与 $f''(x)$ 同号, 所以令 $x_0 = a$, 在端点 $(x_0, f(x_0))$ 作切线, 这切线的方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

令 $y = 0$, 从上式中解出 x , 就得到切线与 x 轴交点的横坐标为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

它比 x_0 更接近方程的根 ξ .

再在点 $(x_1, f(x_1))$ 作切线, 可得根的近似值 x_2 . 如此继续, 一般地, 在点 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 作切线, 得根的近似值

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \quad (1)$$

如果 $f(b)$ 与 $f''(x)$ 同号, 切线作在端点 B (如情形(a)及(d)), 可记 $x_0 = b$, 仍按公式(1)计算切线与 x 轴交点的横坐标.

例 2 用切线法求方程 $x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-3} .

解 令 $f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$. 由例 1 知 $[0, 1]$ 是根的一个隔离区间. $f(0) < 0, f(1) > 0$.

在 $[0, 1]$ 上,

$$f'(x) = 3x^2 + 2.2x + 0.9 > 0,$$

$$f''(x) = 6x + 2.2 > 0,$$

故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图形属于图 3-37 中情形(a). 按 $f''(x)$ 与 $f(1)$ 同号, 所以令 $x_0 = 1$.

连续应用公式(1), 得

① 如图 3-38 所示, 如果把切线作在纵坐标与 $f''(x)$ 异号的那个端点, 就不能保证切线与 x 轴的交点的横坐标 x_1 比原来的近似值 a 或 b 更接近于方程的根 ξ .

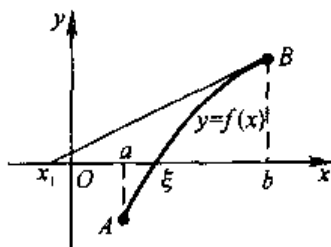


图 3-38

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \approx 0.738;$$

$$x_2 = 0.738 - \frac{f(0.738)}{f'(0.738)} \approx 0.674;$$

$$x_3 = 0.674 - \frac{f(0.674)}{f'(0.674)} \approx 0.671;$$

$$x_4 = 0.671 - \frac{f(0.671)}{f'(0.671)} \approx 0.671.$$

至此,计算不能再继续.注意到 $f(x_i) (i=0,1,\dots)$ 与 $f'(x)$ 同号,知 $f(0.671) > 0$, 经计算可知 $f(0.670) < 0$, 于是有

$$0.670 < \xi < 0.671.$$

以 0.670 或 0.671 作为根的近似值,其误差都小于 10^{-3} .

习 题 3-8

1. 试证明方程 $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一的实根,并用二分法求这个根的近似值,使误差不超过 0.01.

2. 试证明方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1,0)$ 内有唯一的实根,并用切线法求这个根的近似值,使误差不超过 0.01.

3. 求方程 $x^3 + 3x - 1 = 0$ 的近似根,使误差不超过 0.01.

4. 求方程 $x \lg x = 1$ 的近似根,使误差不超过 0.01.

总 习 题 三

1. 填空:

设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为_____.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在 $[0,1]$ 上 $f'(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 几个数的大小顺序为().

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$. (B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$.

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$. (D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$.

3. 列举一个函数 $f(x)$ 满足: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内除某一点外处处可导, 但在 (a,b) 内不存在点 ξ , 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

4. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = k$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a) - f(x)]$.

5. 证明多项式 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点.

6. 设 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, 证明多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 内可导, 且 $f(a)=0$, 证明存在一点 $\xi \in (0,a)$, 使 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

8. 设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 试利用柯西中值定理, 证明存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

9. 设 $f(x), g(x)$ 都是可导函数, 且 $|f'(x)| < g'(x)$. 证明: 当 $x > a$ 时, $|f(x) - f(a)| < g(x) - g(a)$.

10. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^2}{1 - x + \ln x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(a_1^{\frac{1}{n}} + a_2^{\frac{1}{n}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{n}}) / n \right]^{nr} \quad (\text{其中 } a_1, a_2, \cdots, a_n > 0).$$

11. 证明下列不等式:

$$(1) \text{ 当 } 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1};$$

$$(2) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } \ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

$$12. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^{2r}, & x > 0 \\ x+2, & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 求 } f(x) \text{ 的极值.}$$

13. 求椭圆 $x^2 - xy + y^2 = 3$ 上纵坐标最大和最小的点.

14. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

15. 曲线弧 $y = \sin x (0 < x < \pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

16. 证明方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只有一个正根, 并求此正根的近似值, 精确到 10^{-3} .

17. 设 $f''(x_0)$ 存在, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

18. 设 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 且 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 证明

$$f(x) = o[(x-x_0)^n] \quad (x \rightarrow x_0).$$

19. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0$. 证明对于 (a,b) 内任意两点 x_1, x_2 及 $0 \leq t \leq 1$, 有

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

20. 试确定常数 a 和 b , 使 $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

第四章 不定积分

在第二章中,我们讨论了如何求一个函数的导函数问题,本章将讨论它的反问题,即要寻求一个可导函数,使它的导函数等于已知函数.这是积分学的基本问题之一.

第一节 不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

定义 1 如果在区间 I 上,可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$,即对任一 $x \in I$,都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x)dx,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的原函数.

例如,因 $(\sin x)' = \cos x$,故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数.

又如当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$$[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

故 $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 是 $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内的原函数.

关于原函数,我们首先要问:一个函数具备什么条件,能保证它的原函数一定存在? 这个问题将在下一章中讨论,这里先介绍一个结论.

原函数存在定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$,使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

简单地说就是:连续函数一定有原函数.

下面还要说明两点.

第一,如果 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数,即有一个函数 $F(x)$,使对任一 $x \in I$,都有 $F'(x) = f(x)$,那么,对任何常数 C ,显然也有

$$[F(x) + C]' = f(x),$$

即对任何常数 C ,函数 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数.这说明,如果 $f(x)$ 有一个原函数,那么 $f(x)$ 就有无限多个原函数.

第二,如果在区间 I 上 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,那么 $f(x)$ 的其他原函数与 $F(x)$ 有什么关系?

设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的另一个原函数,即对任一 $x \in I$ 有

$$\Phi'(x) = f(x),$$

于是

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

在第三章第一节中已经知道,在一个区间上导数恒为零的函数必为常数,所以

$$\Phi(x) - F(x) = C_0 \quad (C_0 \text{ 为某个常数}).$$

这表明 $\Phi(x)$ 与 $F(x)$ 只差一个常数.因此,当 C 为任意的常数时,表达式

$$F(x) + C$$

就可表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.也就是说, $f(x)$ 的全体原函数所组成的集合,就是函数族

$$\{F(x) + C \mid -\infty < C < +\infty\}.$$

由以上两点说明,我们引进下述定义.

定义 2 在区间 I 上,函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的不定积分,记作

$$\int f(x)dx.$$

其中记号 \int 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

由此定义及前面的说明可知,如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数,那么 $F(x) + C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分,即

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

因而不定积分 $\int f(x)dx$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

例 1 求 $\int x^2 dx$.

解 由于 $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, 所以 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数. 因此

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

例 2 求 $\int \frac{1}{x} dx$.

解 当 $x > 0$ 时, 由于 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的一个原函

数. 因此, 在 $(0, +\infty)$ 内,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

当 $x < 0$ 时, 由于 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的一个原函数. 因此, 在 $(-\infty, 0)$ 内,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C.$$

把在 $x > 0$ 及 $x < 0$ 内的结果合起来, 可写作

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

例 3 设曲线通过点 $(1, 2)$, 且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解 设所求的曲线方程为 $y = f(x)$, 按题设, 曲线上任一点 (x, y) 处的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

即 $f'(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

因为
$$\int 2x dx = x^2 + C,$$

故必有某个常数 C 使 $f(x) = x^2 + C$, 即曲线方程为 $y = x^2 + C$. 因所求曲线通过点 $(1, 2)$, 故

$$2 = 1 + C, C = 1.$$

于是所求曲线方程为

$$y = x^2 + 1.$$

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. 本例即是求函数 $2x$ 的通过点 $(1, 2)$ 的那条积分曲线. 显然, 这条积分曲线可以由另一条积分曲线(例如 $y = x^2$)经 y 轴方向平移而得(图 4-1).

例 4 质点以初速 v_0 铅直上抛, 不计阻力, 求它的运动规律.

解 所谓运动规律, 是指质点的位置关于时间 t 的函数关系. 为表示质点的位置, 取坐标系如下: 把质点所在的铅直线取作坐标轴, 指向朝上, 轴与地面的交点取作坐标原点. 设质点抛出时刻为 $t = 0$, 当 $t = 0$ 时质点所在位置的坐标为 x_0 , 在时刻 t 时坐标为 x (图 4-2), $x = x(t)$ 就是要求的函数.

按导数的物理意义知道,

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

即为质点在时刻 t 时向上运动的速度(如果 $v(t) < 0$, 那么运动方向实际朝下).

又知

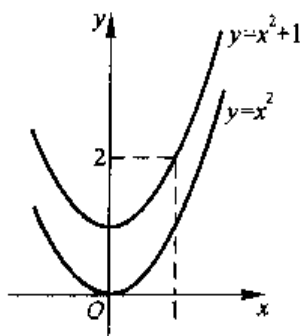


图 4-1

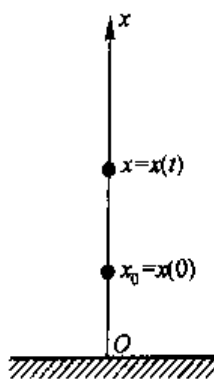


图 4-2

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t)$$

即为质点在时刻 t 时向上运动的加速度,按题意,有 $a(t) = -g$,即

$$\frac{dv}{dt} = -g \text{ 或 } \frac{d^2 x}{dt^2} = -g.$$

先求 $v(t)$. 由 $\frac{dv}{dt} = -g$, 即 $v(t)$ 是 $(-g)$ 的原函数,故

$$v(t) = \int (-g) dt = -gt + C_1,$$

由 $v(0) = v_0$, 得 $v_0 = C_1$, 于是

$$v(t) = -gt + v_0.$$

再求 $x(t)$. 由 $\frac{dx}{dt} = v(t)$, 即 $x(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数,故

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2,$$

由 $x(0) = x_0$, 得 $x_0 = C_2$, 于是所求运动规律为

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0, t \in [0, T],$$

其中 T 表示质点落地的时刻.

从不定积分的定义,即可知下述关系:

由于 $\int f(x) dx$ 是 $f(x)$ 的原函数,所以

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x),$$

或

$$d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx; \quad (1)$$

又由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数,所以

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

或记作

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (2)$$

由此可见,微分运算(以记号 d 表示)与求不定积分的运算(简称积分运算,以记号 \int 表示)是互逆的.当记号 \int 与 d 连在一起时,或者抵消,或者抵消后差一个常数.

二、基本积分表

既然积分运算是微分运算的逆运算,那么很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式.

例如,因为 $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu}$, 所以 $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ 是 x^{μ} 的一个原函数,于是

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$$

类似地可以得到其他积分公式.下面我们把一些基本的积分公式列成一个表,这个表通常叫做基本积分表.

$$\textcircled{1} \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 是常数}),$$

$$\textcircled{2} \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1),$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$\textcircled{5} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\textcircled{6} \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\textcircled{7} \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\textcircled{8} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C,$$

$$\textcircled{9} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C,$$

$$\textcircled{10} \int \sec x \tan x dx = \sec x + C,$$

$$\textcircled{11} \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C,$$

$$\textcircled{12} \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\textcircled{13} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\textcircled{14} \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$\textcircled{15} \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

以上十五个基本积分公式,是求不定积分的基础,必须熟记,下面举几个应用幂函数的积分公式②的例子.

例 5 求 $\int \frac{dx}{x^3}$.

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

例 6 求 $\int x^2 \sqrt{x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 \sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C \\ &= \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

例 7 求 $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}} &= \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C \\ &= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C. \end{aligned}$$

上面三个例子表明,有时被积函数实际是幂函数,但用分式或根式表示.遇此情形,应先把它化为 x^μ 的形式,然后应用幂函数的积分公式②来求不定积分.

三、不定积分的性质

根据不定积分的定义,可以推得它有如下两个性质:

性质 1 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在,则

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx. \quad (3)$$

证 将(3)式右端求导,得

$$\begin{aligned}\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right]' &= \left[\int f(x)dx\right]' + \left[\int g(x)dx\right]' \\ &= f(x) + g(x).\end{aligned}$$

这表示,(3)式右端是 $f(x) + g(x)$ 的原函数,又(3)式右端有两个积分记号,形式上含两个任意常数,由于任意常数之和仍为任意常数,故实际上含一个任意常数,因此(3)式右端是 $f(x) + g(x)$ 的不定积分.

性质1 对于有限个函数都是成立的.

类似地可以证明不定积分的第二性质.

性质2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数,则

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

利用基本积分表以及不定积分的这两个性质,可以求出一些简单函数的不定积分.

例8 求 $\int \sqrt{x}(x^2 - 5)dx$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \sqrt{x}(x^2 - 5)dx &= \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}})dx \\ &= \int x^{\frac{5}{2}}dx - \int 5x^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \int x^{\frac{5}{2}}dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 5 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

注意 检验积分结果是否正确,只要对结果求导,看它的导数是否等于被积函数,相等时结果是正确的,否则结果是错误的.如就例8的结果来看,由于

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C\right)' &= \left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)' \\ &= x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}(x^2 - 5),\end{aligned}$$

所以结果是正确的.

例9 求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx &= \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2}dx \\ &= \int \left(x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int x dx - 3 \int dx + 3 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} \\
 &= \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln|x| + \frac{1}{x} + C.
 \end{aligned}$$

例 10 求 $\int (e^x - 3\cos x) dx$.

解
$$\begin{aligned}
 \int (e^x - 3\cos x) dx &= \int e^x dx - 3 \int \cos x dx \\
 &= e^x - 3\sin x + C.
 \end{aligned}$$

例 11 求 $\int 2^x e^x dx$.

解 因为

$$2^x e^x = (2e)^x,$$

所以可把 $2e$ 看作 a , 并利用积分公式⑬, 便得

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1 + \ln 2} + C.$$

例 12 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx$.

解 基本积分表中没有这种类型的积分, 可以先把被积函数变形, 化为表中所列类型的积分之后, 再逐项求积分:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx &= \int \frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{x} dx = \arctan x + \ln|x| + C.
 \end{aligned}$$

例 13 求 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$.

解 基本积分表中也没有这种类型的积分, 同上题一样, 经过变形, 化为表中所列类型之后, 就可以逐项求积分:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4}{1+x^2} dx &= \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1) + 1}{1+x^2} dx \\
 &= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
 &= \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

例 14 求 $\int \tan^2 x dx$.

解 基本积分表中没有这种类型的积分,先利用三角恒等式变形,然后再求积分:

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx \\ &= \tan x - x + C.\end{aligned}$$

例 15 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

解 基本积分表中也没有这种类型的积分,同上例一样,可以先利用三角恒等式变形,然后再求积分:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int dx - \int \cos x dx \right] = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C.\end{aligned}$$

例 16 求 $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx$.

解 同上例一样,先利用三角恒等式变形,然后再求积分:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} dx \\ &= 4 \int \csc^2 x dx = -4 \cot x + C.\end{aligned}$$

习 题 4-1

1. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{x^2};$

(2) $\int x\sqrt{x} dx;$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}};$

(4) $\int x^2 \sqrt[3]{x} dx;$

(5) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}};$

(6) $\int \sqrt[n]{x^n} dx;$

(7) $\int 5x^3 dx;$

(8) $\int (x^2 - 3x + 2) dx;$

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} \quad (g \text{ 是常数});$

(10) $\int (x-2)^2 dx;$

(11) $\int (x^2 + 1)^2 dx;$

(12) $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx;$

(13) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx;$

(14) $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx;$

$$\begin{aligned}
(15) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx; & \quad (16) \int \left(2e^x + \frac{3}{x} \right) dx; \\
(17) \int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx; & \quad (18) \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx; \\
(19) \int 3^x e^x dx; & \quad (20) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx; \\
(21) \int \sec x (\sec x - \tan x) dx; & \quad (22) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx; \\
(23) \int \frac{dx}{1 + \cos 2x}; & \quad (24) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx; \\
(25) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx; & \quad (26) \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.
\end{aligned}$$

2. 一曲线通过点 $(e^2, 3)$, 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

3. 一物体由静止开始运动, 经 t 秒后的速度是 $3t^2$ (m/s), 问

(1) 在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完 360 m 需要多少时间?

4. 证明函数 $\frac{1}{2}e^{2x}$, $e^x \operatorname{sh} x$ 和 $e^x \operatorname{ch} x$ 都是 $\frac{e^x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$ 的原函数.

第二节 换元积分法

利用基本积分表与积分的性质, 所能计算的不定积分是非常有限的. 因此, 有必要进一步来研究不定积分的求法. 本节把复合函数的微分法反过来用于求不定积分, 利用中间变量的代换, 得到复合函数的积分法, 称为换元积分法, 简称换元法. 换元法通常分成两类, 下面先讲第一类换元法.

一、第一类换元法

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u) = f(u), \quad \int f(u) du = F(u) + C.$$

如果 u 是中间变量: $u = \varphi(x)$, 且设 $\varphi(x)$ 可微, 那么, 根据复合函数微分法, 有

$$dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx,$$

从而根据不定积分的定义就得

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C = \left[\int f(u) du \right]_{u=\varphi(x)}.$$

于是有下述定理:

定理 1 设 $f(u)$ 具有原函数, $u = \varphi(x)$ 可导, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)}. \quad (1)$$

由此定理可见,虽然 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 是一个整体的记号,但如同导数记号 $\frac{dy}{dx}$ 中的 dx 及 dy 可看作微分一样,被积表达式中的 dx 也可当作变量 x 的微分来对待,从而微分等式 $\varphi'(x)dx = du$ 可以方便地应用到被积表达式中来,我们在上节第一目中已经这样用了,那里把积分 $\int F'(x)dx$ 记作 $\int dF(x)$,就是按微分 $F'(x)dx = dF(x)$,把被积表达式 $F'(x)dx$ 记作 $dF(x)$.

如何应用公式(1)来求不定积分? 设要求 $\int g(x)dx$, 如果函数 $g(x)$ 可以化为 $g(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的形式,那么

$$\int g(x)dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=\varphi(x)},$$

这样,函数 $g(x)$ 的积分即转化为函数 $f(u)$ 的积分. 如果能求得 $f(u)$ 的原函数,那么也就得到了 $g(x)$ 的原函数.

例 1 求 $\int 2\cos 2x dx$.

解 被积函数中, $\cos 2x$ 是一个复合函数: $\cos 2x = \cos u$, $u = 2x$, 常数因子恰好是中间变量 u 的导数. 因此,作变换 $u = 2x$, 便有

$$\begin{aligned} \int 2\cos 2x dx &= \int \cos 2x \cdot 2dx = \int \cos 2x \cdot (2x)' dx \\ &= \int \cos u du = \sin u + C, \end{aligned}$$

再以 $u = 2x$ 代入, 即得

$$\int 2\cos 2x dx = \sin 2x + C.$$

例 2 求 $\int \frac{1}{3+2x} dx$.

解 被积函数 $\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{u}$, $u = 3+2x$. 这里缺少 $\frac{du}{dx} = 2$ 这样一个因子, 但由于 $\frac{du}{dx}$ 是个常数, 故可改变系数凑出这个因子:

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} (3+2x)',$$

从而令 $u = 3+2x$, 便有

$$\int \frac{1}{3+2x} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} (3+2x)' dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |3+2x| + C.$$

一般地,对于积分 $\int f(ax+b)dx$,总可作变换 $u=ax+b$,把它化为

$$\begin{aligned} \int f(ax+b)dx &= \int \frac{1}{a} f(ax+b) d(ax+b) \\ &= \frac{1}{a} \left[\int f(u) du \right]_{u=ax+b}. \end{aligned}$$

例3 求 $\int 2xe^{x^2} dx$.

解 被积函数中的一个因子为 $e^{x^2} = e^u$, $u = x^2$;剩下的因子 $2x$ 恰好是中间变量 $u = x^2$ 的导数,于是有

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d(x^2) = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

例4 求 $\int x \sqrt{1-x^2} dx$.

解 设 $u = 1 - x^2$, 则 $du = -2x dx$, 即 $-\frac{1}{2} du = x dx$, 因此,

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1-x^2} dx &= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

例5 求 $\int \tan x dx$.

解 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$.

因为 $-\sin x dx = d \cos x$, 所以如果设 $u = \cos x$, 那么 $du = -\sin x dx$, 即 $-du = \sin x dx$, 因此

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C \\ &= -\ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

类似地可得 $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$.

在对变量代换比较熟练以后,就不一定写出中间变量 u .

例6 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$.

解 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

在上例中,我们实际上已经用了变量代换 $u = \frac{x}{a}$,并在求出积分 $\frac{1}{a} \int \frac{1}{1+u^2} du$ 之后,代回了原积分变量 x ,只是没有把这些步骤写出来而已.

例 7 求 $\int \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx$.

解 $\int \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \int \operatorname{ch} \frac{x}{a} d\frac{x}{a} = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} + C.$

例 8 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$).

解
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{1}{a} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \\ &= \arcsin \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

例 9 求 $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$.

解 由于

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right),$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{1}{x - a} dx - \int \frac{1}{x + a} dx \right) \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{x - a} d(x - a) - \int \frac{1}{x + a} d(x + a) \right] \\ &= \frac{1}{2a} (\ln|x - a| - \ln|x + a|) + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C. \end{aligned}$$

例 10 求 $\int \frac{dx}{x(1 + 2\ln x)}$.

解
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1 + 2\ln x)} &= \int \frac{d\ln x}{1 + 2\ln x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + 2\ln x)}{1 + 2\ln x} = \frac{1}{2} \ln|1 + 2\ln x| + C. \end{aligned}$$

例 11 求 $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

解 由于 $d\sqrt{x} = \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, 因此,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int e^{\sqrt[3]{x}} d\sqrt{x} = \frac{2}{3} \int e^{\sqrt[3]{x}} d(3\sqrt{x}) \\ &= \frac{2}{3} e^{\sqrt[3]{x}} + C.\end{aligned}$$

下面再举一些积分的例子, 它们的被积函数中含有三角函数, 在计算这种积分的过程中, 往往要用到一些三角恒等式.

例 12 求 $\int \sin^3 x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\ &= - \int d(\cos x) + \int \cos^2 x d(\cos x) \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.\end{aligned}$$

例 13 求 $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \sin^2 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d\sin x \\ &= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d\sin x \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C.\end{aligned}$$

例 14 求 $\int \cos^2 x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.\end{aligned}$$

类似地可得 $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

例 15 求 $\int \cos^4 x dx$

解 由于

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 \\&= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \\&= \frac{1}{4} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\&= \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \\&= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2} \right),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\&= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} \int dx + \int 2\cos 2x dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx \right] \\&= \frac{1}{4} \left[\frac{3x}{2} + \int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) \right] \\&= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

例 16 求 $\int \csc x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \csc x dx &= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\&= \int \frac{d\frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} \\&= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

因为

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x,$$

所以上述不定积分又可表为:

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

例 17 求 $\int \sec x dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \sec x \, dx &= \int \frac{dx}{\cos x} \\
 &= \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \\
 &= \ln \left| \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| + C \\
 &= \ln |\sec x + \tan x| + C.
 \end{aligned}$$

例 18 求 $\int \sec^6 x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \sec^6 x \, dx &= \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x \, dx \\
 &= \int (1 + \tan^2 x)^2 d\tan x \\
 &= \int (1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x) d\tan x \\
 &= \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C.
 \end{aligned}$$

例 19 求 $\int \tan^5 x \sec^3 x \, dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \tan^5 x \sec^3 x \, dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x \, dx \\
 &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x d\sec x \\
 &= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x) d\sec x \\
 &= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C.
 \end{aligned}$$

例 20 求 $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$.

解 利用三角学中的积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

得
$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2} (\cos x + \cos 5x),$$

于是
$$\begin{aligned}
 \int \cos 3x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 5x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int \cos x \, dx + \frac{1}{5} \int \cos 5x \, d(5x) \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C.$$

上面所举的例子,可以使我们认识到公式(1)在求不定积分中所起的作用.像复合函数的求导法则在微分学中一样,公式(1)在积分学中也是经常使用的.但利用公式(1)来求不定积分,一般却比利用复合函数的求导法则求函数的导数要来得困难,因为其中需要一定的技巧,而且如何适当地选择变量代换 $u = \varphi(x)$ 没有一般途径可循,因此要掌握换元法,除了熟悉一些典型的例子外,还要做较多的练习才行.

上述各例用的都是第一类换元法,即形如 $u = \varphi(x)$ 的变量代换.下面介绍另一种形式的变量代换 $x = \psi(t)$,即所谓第二类换元法.

二、第二类换元法

上面介绍的第一类换元法是通过变量代换 $u = \varphi(x)$,将积分 $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$ 化为积分 $\int f(u) du$.

下面将介绍的第二类换元法是:适当地选择变量代换 $x = \psi(t)$,将积分 $\int f(x) dx$ 化为积分 $\int f[\psi(t)] \psi'(t) dt$.这是另一种形式的变量代换,换元公式可表达为

$$\int f(x) dx = \int f[\psi(t)] \psi'(t) dt.$$

这公式的成立是需要一定条件的.首先,等式右边的不定积分要存在,即 $f[\psi(t)] \psi'(t)$ 有原函数;其次, $\int f[\psi(t)] \psi'(t) dt$ 求出后必须用 $x = \psi(t)$ 的反函数 $t = \psi^{-1}(x)$ 代回去,为了保证这反函数存在而且是可导的,我们假定直接函数 $x = \psi(t)$ 在 t 的某一个区间(这区间和所考虑的 x 的积分区间相对应)上是单调的、可导的,并且 $\psi'(t) \neq 0$.

归纳上述,我们给出下面的定理.

定理 2 设 $x = \psi(t)$ 是单调的、可导的函数,并且 $\psi'(t) \neq 0$. 又设 $f[\psi(t)] \psi'(t)$ 具有原函数,则有换元公式

$$\int f(x) dx = \left[\int f[\psi(t)] \psi'(t) dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)}, \quad (2)$$

其中 $\psi^{-1}(x)$ 是 $x = \psi(t)$ 的反函数.

证 设 $f[\psi(t)] \psi'(t)$ 的原函数为 $\Phi(t)$, 记 $\Phi[\psi^{-1}(x)] = F(x)$, 利用复合函数及反函数的求导法则,得到

$$F'(x) = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f[\psi(t)] \psi'(t) \cdot \frac{1}{\psi'(t)}$$

$$= f[\psi(t)] = f(x),$$

即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 所以有

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= F(x) + C = \Phi[\psi^{-1}(x)] + C \\ &= \left[\int f[\psi(t)] \psi'(t) dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)},\end{aligned}$$

这就证明了公式(2).

下面举例说明换元公式(2)的应用.

例 21 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$.

解 求这个积分的困难在于有根式 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 但我们可以利用三角公式

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

来化去根式.

设 $x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 那么 $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t, dx = a \cos t dt$, 于是根式化成了三角式, 所求积分化为

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

利用例 14 的结果得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C.\end{aligned}$$

由于 $x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 所以

$$t = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

于是所求积分为

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 22 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (a > 0)$.

解 和上例类似, 可以利用三角公式

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

来化去根式.

设 $x = a \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$, 那么 $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = a \sqrt{1 + \tan^2 t} = a \sec t$, $dx = a \sec^2 t dt$, 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2 t}{a \sec t} dt = \int \sec t dt.$$

利用例 17 的结果得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |\sec t + \tan t| + C.$$

为了要把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数, 可以根据 $\tan t = \frac{x}{a}$ 作辅助三角形 (图 4-3), 便有

$$\sec t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a},$$

且 $\sec t + \tan t > 0$, 因此,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \ln \left[\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right] + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$.

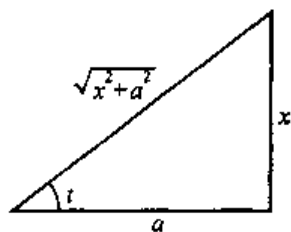


图 4-3

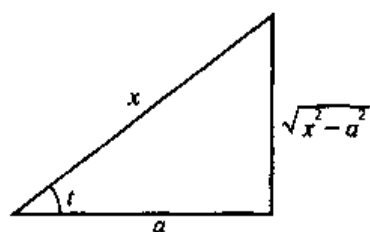


图 4-4

例 23 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (a > 0)$.

解 和以上两例类似, 可以利用公式

$$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$$

来化去根式. 注意到被积函数的定义域是 $x > a$ 和 $x < -a$ 两个区间, 我们在两个区间内分别求不定积分.

当 $x > a$ 时, 设 $x = a \sec t \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$, 那么

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = a \sqrt{\sec^2 t - 1} = a \tan t, \\ dx &= a \sec t \tan t dt, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec t \tan t}{a \tan t} dt = \int \sec t dt \\ &= \ln(\sec t + \tan t) + C.\end{aligned}$$

为了把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数, 我们根据 $\sec t = \frac{x}{a}$ 作辅助三角形(图 4-4), 得到

$$\tan t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

因此,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right) + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1,\end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$.

当 $x < -a$ 时, 令 $x = -u$, 那么 $u > a$. 由上段结果, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= - \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = -\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + C \\ &= -\ln(-x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C \\ &= \ln \frac{-x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a^2} + C \\ &= \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1,\end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - 2\ln a$.

把在 $x > a$ 及 $x < -a$ 内的结果合起来, 可写作

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

从上面的三个例子可以看出: 如果被积函数含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 可以作代换 $x = a \sin t$ 化去根式; 如果被积函数含有 $\sqrt{x^2 + a^2}$, 可以作代换 $x = a \tan t$ 化去根式; 如果被积函数含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 可以作代换 $x = \pm a \sec t$ 化去根式. 但具体解题时要分析被积函数的具体情况, 选取尽可能简捷的代换, 不要拘泥于上述的变量代换(如例 4、例 8).

当被积函数含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 时, 为了化去根式, 除采用三角代换 $x = a \tan t$ 或 $x = \pm a \sec t$ 外, 还可利用公式

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$

采用双曲代换 $x = a \operatorname{sh} t, x = \pm a \operatorname{ch} t$ 来化去根式.

例如,在例 22 中,可设 $x = a \operatorname{sh} t$,那么

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2} = a \operatorname{ch} t, dx = a \operatorname{ch} t dt,$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{ch} t}{a \operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + C \\ &= \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C \\ &= \ln \left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} \right] + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$.

在例 23 中,当 $x > a$ 时,可设 $x = a \operatorname{ch} t (t > 0)$,那么

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2} = a \operatorname{sh} t, \\ dx &= a \operatorname{sh} t dt, \end{aligned}$$

于是当 $x > a$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{sh} t}{a \operatorname{sh} t} dt = \int dt = t + C \\ &= \operatorname{arch} \frac{x}{a} + C \\ &= \ln \left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1} \right] + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$.

当 $x < -a$ 时,令 $x = -a \operatorname{ch} t (t > 0)$,类似可得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1.$$

下面我们通过例子来介绍一种也很有用的代换——倒代换,利用它常可消去被积函数的分母中的变量因子 x .

例 24 求 $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$.

解 设 $x = \frac{1}{t}$,那么 $dx = -\frac{dt}{t^2}$,于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx &= \int \frac{\sqrt{a^2 - \frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{dt}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^4}} \\ &= - \int (a^2 t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} |t| dt,\end{aligned}$$

当 $x > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx &= -\frac{1}{2a^2} \int (a^2 t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d(a^2 t^2 - 1) \\ &= -\frac{(a^2 t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} + C \\ &= -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^3} + C,\end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时, 有相同的结果.

在本节的例题中, 有几个积分是以后经常会遇到的, 所以它们通常也被当作公式使用. 这样, 常用的积分公式, 除了基本积分表中的几个外, 再添加下面几个 (其中常数 $a > 0$):

$$\textcircled{16} \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\textcircled{17} \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C,$$

$$\textcircled{18} \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C,$$

$$\textcircled{19} \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C,$$

$$\textcircled{20} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

$$\textcircled{21} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$$

$$\textcircled{22} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\textcircled{23} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\textcircled{24} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

例 25 求 $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$.

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} d(x+1),$$

利用公式②, 便得

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

$$\text{例 26} \quad \text{求} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2+3^2}},$$

利用公式③, 便得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2+9}) + C.$$

$$\text{例 27} \quad \text{求} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}},$$

利用公式②, 便得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

习 题 4-2

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数, 使等式成立 (例如: $dx = \frac{1}{4} d(4x + 7)$):

$$(1) dx = d(ax);$$

$$(2) dx = d(7x-3);$$

$$(3) xdx = d(x^2);$$

$$(4) xdx = d(5x^2);$$

$$(5) xdx = d(1-x^2);$$

$$(6) x^3 dx = d(3x^4-2);$$

$$(7) e^{2x} dx = d(e^{2x});$$

$$(8) e^{-\frac{x}{2}} dx = d(1+e^{-\frac{x}{2}});$$

$$(9) \sin \frac{3}{2} x dx = d\left(\cos \frac{3}{2} x\right);$$

$$(10) \frac{dx}{x} = d(5 \ln |x|);$$

$$(11) \frac{dx}{x} = d(3-5 \ln |x|);$$

$$(12) \frac{dx}{1+9x^2} = d(\arctan 3x);$$

$$(13) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(1-\arcsin x);$$

$$(14) \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\sqrt{1-x^2}).$$

2. 求下列不定积分(其中 a, b, ω, φ 均为常数):

- | | |
|---|---|
| (1) $\int e^{5t} dt;$ | (2) $\int (3-2x)^3 dx;$ |
| (3) $\int \frac{dx}{1-2x};$ | (4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}};$ |
| (5) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}}) dx;$ | (6) $\int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt;$ |
| (7) $\int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x dx;$ | (8) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x};$ |
| (9) $\int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}};$ | (10) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x};$ |
| (11) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$ | (12) $\int x e^{-x^2} dx;$ |
| (13) $\int x \cos(x^2) dx;$ | (14) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx;$ |
| (15) $\int \frac{3x^3}{1-x^4} dx;$ | (16) $\int \cos^2(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt;$ |
| (17) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx;$ | (18) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx;$ |
| (19) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx;$ | (20) $\int \frac{x^3}{9+x^2} dx;$ |
| (21) $\int \frac{dx}{2x^2-1};$ | (22) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)};$ |
| (23) $\int \cos^3 x dx;$ | (24) $\int \cos^2(\omega t + \varphi) dt;$ |
| (25) $\int \sin 2x \cos 3x dx;$ | (26) $\int \cos x \cos \frac{x}{2} dx;$ |
| (27) $\int \sin 5x \sin 7x dx;$ | (28) $\int \tan^3 x \sec x dx;$ |
| (29) $\int \frac{10^{2 \arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$ | (30) $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$ |
| (31) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}};$ | (32) $\int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx;$ |
| (33) $\int \frac{\ln \tan x}{\cos x \sin x} dx;$ | (34) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0);$ |
| (35) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}};$ | (36) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}};$ |
| (37) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx;$ | (38) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}};$ |
| (39) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}};$ | (40) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}.$ |

第三节 分部积分法

前面我们在复合函数求导法则的基础上,得到了换元积分法.现在我们利用两个函数乘积的求导法则,来推得另一个求积分的基本方法——分部积分法.

设函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 具有连续导数.那么,两个函数乘积的导数公式为

$$(uv)' = u'v + uv',$$

移项,得

$$uv' = (uv)' - u'v.$$

对这个等式两边求不定积分,得

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx. \quad (1)$$

公式(1)称为分部积分公式.如果求 $\int uv' dx$ 有困难,而求 $\int u'v dx$ 比较容易时,分部积分公式就可以发挥作用了.

为简便起见,也可把公式(1)写成下面的形式:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2)$$

现在通过例子说明如何运用这个重要公式.

例 1 求 $\int x \cos x dx$.

解 这个积分用换元积分法不易求得结果.现在试用分部积分法来求它.但是怎样选取 u 和 dv 呢? 如果设 $u = x, dv = \cos x dx$, 那么 $du = dx, v = \sin x$, 代入分部积分公式(2),得

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx,$$

而 $\int v du = \int \sin x dx$ 容易积出,所以

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

求这个积分时,如果设 $u = \cos x, dv = x dx$, 那么

$$du = -\sin x dx, v = \frac{x^2}{2}.$$

于是 $\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$.

上式右端的积分比原积分更不容易求出.

由此可见,如果 u 和 dv 选取不当,就求不出结果,所以应用分部积分法时,恰当选取 u 和 dv 是一个关键.选取 u 和 dv 一般要考虑下面两点:

(1) v 要容易求得;

(2) $\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易积出.

例 2 求 $\int x e^x dx$.

解 设 $u = x, dv = e^x dx$, 那么 $du = dx, v = e^x$. 于是

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

运用分部积分公式(2)的形式, 如上列例 1、例 2 的求解过程也可表述为

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C = (x - 1) e^x + C.\end{aligned}$$

例 3 求 $\int x^2 e^x dx$.

解 设 $u = x^2, dv = e^x dx$, 那么

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d e^x = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

这里 $\int x e^x dx$ 比 $\int x^2 e^x dx$ 容易积出, 因为被积函数中 x 的幂次前者比后者降低了一次. 由例 2 可知, 对 $\int x e^x dx$ 再使用一次分部积分法就可以了. 于是

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x d e^x \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C \\ &= e^x (x^2 - 2x + 2) + C.\end{aligned}$$

总结上面三个例子可以知道, 如果被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就可以考虑用分部积分法, 并设幂函数为 u . 这样用一次分部积分法就可以使幂函数的幂次降低一次. 这里假定幂指数是正整数.

例 4 求 $\int x \ln x dx$.

解 设 $u = \ln x, dv = x dx$, 那么

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \int \ln x d \frac{x^2}{2} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} d \ln x \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx\end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

例5 求 $\int \arccos x dx$.

解 设 $u = \arccos x, dv = dx$, 那么

$$\begin{aligned} \int \arccos x dx &= x \arccos x - \int x d\arccos x \\ &= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} d(1-x^2) \\ &= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

在分部积分法运用比较熟练以后,就不必再写出哪一部分选作 u , 哪一部分选作 dv . 只要把被积表达式凑成 $\varphi(x)d\psi(x)$ 的形式, 便可使用分部积分公式.

例6 求 $\int x \arctan x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x d(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + C \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

总结上面三个例子可以知道, 如果被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积, 就可以考虑用分部积分法, 并设对数函数或反三角函数为 u .

下面几个例子中所用的方法也是比较典型的.

例7 求 $\int e^x \sin x dx$.

$$\text{解 } \int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx,$$

等式右端的积分与等式左端的积分是同一类型的, 对右端的积分再用一次分部积分法, 得

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int \cos x de^x \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx,\end{aligned}$$

由于上式右端的第三项就是所求的积分 $\int e^x \sin x dx$, 把它移到等号左端去, 再两端同除以 2, 便得

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

因上式右端已不包含积分项, 所以必须加上任意常数 C .

例 8 求 $\int \sec^3 x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \sec^3 x dx &= \int \sec x d \tan x \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\ &= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x dx.\end{aligned}$$

由于上式右端的第三项就是所求的积分 $\int \sec^3 x dx$, 把它移到等号左端去, 再两端各除以 2, 便得

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C.$$

例 9 求 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, 其中 n 为正整数.

解 用分部积分法, 当 $n > 1$ 时有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \left[\frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} \right] dx,\end{aligned}$$

$$\text{即 } I_{n-1} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(n-1)(I_{n-1} - a^2 I_n),$$

$$\text{于是 } I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right].$$

以此作递推公式, 并由 $I_1 = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$, 即可得 I_n .

在积分的过程中往往要兼用换元法与分部积分法,如例 5,下面再来举一个例子.

例 10 求 $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

解 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$. 于是

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt.$$

利用例 2 的结果,并用 $t = \sqrt{x}$ 代回,便得所求积分:

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t dt = 2e^t(t-1) + C \\ &= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C. \end{aligned}$$

习 题 4-3

求下列不定积分:

1. $\int x \sin x dx$.
2. $\int \ln x dx$.
3. $\int \arcsin x dx$.
4. $\int x e^{-x} dx$.
5. $\int x^2 \ln x dx$.
6. $\int e^{-x} \cos x dx$.
7. $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx$.
8. $\int x \cos \frac{x}{2} dx$.
9. $\int x^2 \arctan x dx$.
10. $\int x \tan^2 x dx$.
11. $\int x^2 \cos x dx$.
12. $\int t e^{-2t} dt$.
13. $\int \ln^2 x dx$.
14. $\int x \sin x \cos x dx$.
15. $\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx$.
16. $\int x \ln(x-1) dx$.
17. $\int (x^2-1) \sin 2x dx$.
18. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$.
19. $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$.
20. $\int \cos \ln x dx$.
21. $\int (\arcsin x)^2 dx$.
22. $\int e^x \sin^2 x dx$.

第四节 有理函数的积分

前面已经介绍了求不定积分的两个基本方法——换元积分法与分部积分

法.下面讨论有理函数的积分及可化为有理函数的积分.

一、有理函数的积分

有理函数是指由两个多项式的商所表示的函数,即具有如下形式的函数:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}, \quad (1)$$

其中 m 和 n 都是非负整数; $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 都是实数,并且 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

我们总假定在分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 之间是没有公因式的. 当有理函数(1)的分子多项式的次数 n 小于其分母多项式的次数 m , 即 $n < m$ 时, 称这有理函数是真分式; 而当 $n \geq m$ 时, 称这有理函数是假分式.

利用多项式的除法, 总可以将一个假分式化成一个多项式和一个真分式之和的形式. 例如

$$\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

多项式的积分容易求得, 而要计算真分式的积分需要用到真分式的下列性质:

如果多项式 $Q(x)$ 在实数范围内能分解成一次因式和二次质因式的乘积, 如

$$Q(x) = b_0 (x-a)^\alpha \cdots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \cdots (x^2+rx+s)^\mu$$

(其中 $p^2 - 4q < 0, \cdots, r^2 - 4s < 0$), 那么真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可以分解成如下部分分式之和:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \\ &\quad + \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_\beta}{x-b} \\ &\quad + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{x^2+px+q} \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \\ &\quad + \frac{R_1 x + S_1}{(x^2+rx+s)^\mu} + \frac{R_2 x + S_2}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \cdots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{x^2+rx+s}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $A_i, \cdots, B_i, M_i, N_i, \cdots, R_i$ 及 S_i 等都是常数.

对于(2)式应注意到下列两点:

1) 分母 $Q(x)$ 中如果有因式 $(x-a)^k$, 那么分解后有下列 k 个部分分式之和:

$$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x-a},$$

其中 A_1, A_2, \dots, A_k 都是常数. 特别地, 如果 $k=1$, 那么分解后有 $\frac{A}{x-a}$;

2) 分母 $Q(x)$ 中如果有因式 $(x^2 + px + q)^k$, 其中 $p^2 - 4q < 0$, 那么分解后有下列 k 个部分分式之和:

$$\frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \cdots + \frac{M_k x + N_k}{x^2 + px + q},$$

其中 M_i, N_i 都是常数. 特别地, 如果 $k=1$, 那么分解后有 $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$.

例如, 真分式 $\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)}$ 可分解成

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3},$$

其中 A, B 为待定常数, 可以用如下的方法求出待定系数.

第一种方法 两端去分母后, 得

$$x+3 = A(x-3) + B(x-2), \quad (3)$$

或

$$x+3 = (A+B)x - (3A+2B).$$

因为这是恒等式, 等式两端 x 的系数和常数项必须分别相等, 于是有

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -(3A+2B)=3, \end{cases}$$

从而解得

$$A=-5, B=6.$$

第二种方法 在恒等式(3)中, 代入特殊的 x 值, 从而求出待定的常数. 在(3)式中

$$\text{令 } x=2, \text{ 得 } A=-5;$$

$$\text{令 } x=3, \text{ 得 } B=6.$$

同样得到

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}.$$

又如, 真分式 $\frac{1}{x(x-1)^2}$ 可分解成

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1},$$

再求待定系数 A, B, C . 两端去分母后, 得

$$1 = A(x-1)^2 + Bx + Cx(x-1). \quad (4)$$

在(4)式中, 令 $x=0$, 得 $A=1$; 令 $x=1$, 得 $B=1$. 把 A, B 的值代入(4)式, 并令 $x=2$, 得 $1=1+2+2C$, 即 $C=-1$. 所以

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1}.$$

再如,真分式 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$ 可分解成

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2},$$

两端去分母后,得

$$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+2x),$$

或

$$1 = (A+2B)x^2 + (B+2C)x + C + A. \quad (5)$$

比较(5)式两端 x 的各同次幂的系数及常数项,有

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1. \end{cases}$$

解之得

$$A = \frac{4}{5}, B = -\frac{2}{5}, C = \frac{1}{5}.$$

于是

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

下面举几个有理真分式的积分例子.

例 1 求 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx$.

解 因为

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3},$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} dx &= \int \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3} \right) dx \\ &= -5 \int \frac{1}{x-2} dx + 6 \int \frac{1}{x-3} dx \\ &= -5 \ln|x-2| + 6 \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

例 2 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3} dx$.

解 由于被积函数的分母是二次质因式,所以应另想别的方法.因为分子是一次式 $x-2$,而分母的导数也是一个一次式: $(x^2+2x+3)' = 2x+2$,所以可以把分子拆成两部分之和:一部分是分母的导数乘上一个常数因子;另一部分是常数,即

$$\begin{aligned}x-2 &= \left[\frac{1}{2}(2x+2) - 1 \right] - 2 \\&= \frac{1}{2}(2x+2) - 3.\end{aligned}$$

这样,所求的积分可计算如下:

$$\begin{aligned}&\int \frac{x-2}{x^2+2x+3} dx \\&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - 3}{x^2+2x+3} dx \\&= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx - 3 \int \frac{dx}{x^2+2x+3} \\&= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2} \\&= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

例 3 求 $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$.

解 因为

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1},$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx &= \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx \\&= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \\&= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.\end{aligned}$$

例 4 求 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} dx$.

解 因为

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2},$$

所以

$$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left[\frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2} \right] dx \\
&= \frac{2}{5} \int \frac{2}{1+2x} dx - \frac{1}{5} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{2}{5} \int \frac{1}{1+2x} d(1+2x) - \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{5} \ln|1+2x| - \frac{1}{5} \ln(1+x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C.
\end{aligned}$$

当有理函数分解为多项式及部分分式之和以后,只出现多项式、 $\frac{A}{(x-a)^n}$ 及 $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ 等三类函数.前两类函数的积分很简单,下面讨论积分

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx.$$

把分母中的二次质因式配方得

$$x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

故令 $x + \frac{p}{2} = t$, 并记 $x^2+px+q = t^2+a^2$, $Mx+N = Mt+b$, 其中 $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$,

$b = N - \frac{Mp}{2}$, 于是

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{Mt dt}{(t^2+a^2)^n} + \int \frac{b dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

当 $n=1$ 时(如例2), 有

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{b}{a} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C.$$

当 $n>1$ 时,

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = -\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + b \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n},$$

上式最后一个积分的求法见上节例9.

总之,有理函数分解为多项式及部分分式之和以后,各个部分都能积出,且原函数都是初等函数.此外,由代数学知道,从理论上说,多项式 $Q(x)$ 总可以在实数范围内分解成一次因式及二次质因式的乘积,从而把有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解为多项式与部分分式之和.因此,有理函数的原函数都是初等函数.

二、可化为有理函数的积分举例

例5 求 $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx$.

解 由三角学知道, $\sin x$ 与 $\cos x$ 都可以用 $\tan \frac{x}{2}$ 的有理式表示, 即

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

所以如果作变换 $u = \tan \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$), 那么

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

而 $x = 2 \arctan u$, 从而

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx &= \int \frac{\left(1 + \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} \left(1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(u + 2 + \frac{1}{u}\right) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} + 2u + \ln|u|\right) + C \\ &= \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

本例所用的变量代换 $u = \tan \frac{x}{2}$ 对三角函数有理式的积分都可以应用.

例6 求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$.

解 为了去掉根号, 可以设 $\sqrt{x-1} = u$, 于是 $x = u^2 + 1$, $dx = 2u du$, 从而

所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{u}{u^2+1} \cdot 2u du = 2 \int \frac{u^2}{u^2+1} du \\&= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2} \right) du = 2(u - \arctan u) + C \\&= 2(\sqrt{x-1} - \arctan \sqrt{x-1}) + C.\end{aligned}$$

例7 求 $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解 为了去掉根号,可以设 $\sqrt[3]{x+2}=u$. 于是 $x=u^3-2$, $dx=3u^2du$, 从而所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} &= \int \frac{3u^2}{1+u} du = 3 \int \frac{u^2-1+1}{1+u} du \\&= 3 \int \left(u-1+\frac{1}{1+u} \right) du = 3 \left(\frac{u^2}{2} - u + \ln|1+u| \right) + C \\&= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^2} - 3 \sqrt[3]{x+2} + 3 \ln|1+\sqrt[3]{x+2}| + C.\end{aligned}$$

例8 求 $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

解 被积函数中出现了两个根式 \sqrt{x} 及 $\sqrt[3]{x}$. 为了能同时消去这两个根式,可令 $x=t^6$. 于是 $dx=6t^5dt$, 从而所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} &= \int \frac{6t^5}{(1+t^2)t^3} dt = 6 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt \\&= 6 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 6(t - \arctan t) + C \\&= 6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[3]{x}) + C.\end{aligned}$$

例9 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$.

解 为了去掉根号,可以设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$, 于是 $\frac{1+x}{x}=t^2$, $x=\frac{1}{t^2-1}$, $dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$, 从而所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= \int (t^2-1)t \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt = -2 \int \frac{t^2}{t^2-1} dt \\&= -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = -2t - \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\&= -2t + 2\ln(t+1) - \ln|t^2-1| + C\end{aligned}$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1\right) + \ln|x| + C.$$

以上四个例子表明, 如果被积函数中含有简单根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 可以令这个简单根式为 u . 由于这样的变换具有反函数, 且反函数是 u 的有理函数, 因此原积分即可化为有理函数的积分.

习 题 4-4

求下列不定积分:

1. $\int \frac{x^3}{x+3} dx.$
2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx.$
3. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx.$
4. $\int \frac{3}{x^3+1} dx.$
5. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$
6. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$
7. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$
8. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$
9. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$
10. $\int \frac{1}{x^4+1} dx.$
11. $\int \frac{x^2-2}{(x^2+x+1)^2} dx.$
12. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}.$
13. $\int \frac{dx}{3+\cos x}.$
14. $\int \frac{dx}{2+\sin x}.$
15. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$
16. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$
17. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$
18. $\int \frac{(\sqrt{x})^3+1}{\sqrt{x}+1} dx.$
19. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx.$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$
21. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

第五节 积分表的使用

通过前面的讨论可以看出, 积分的计算要比导数的计算来得灵活、复杂. 为了实用的方便, 往往把常用的积分公式汇集成表, 这种表叫做积分表. 积分表是按照被积函数的类型来排列的. 求积分时, 可根据被积函数的类型直接地或经过简单的变形后, 在表内查得所需的结果.

本书末附录Ⅲ有一个简单的积分表,以供查阅.

我们先举几个可以直接从积分表中查得结果的积分例子.

例1 求 $\int \frac{x}{(3x+4)^2} dx$.

解 被积函数含有 $ax+b$,在积分表(一)中查得公式(7)

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^2} \left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b} \right) + C.$$

现在 $a=3$ 、 $b=4$,于是

$$\int \frac{x}{(3x+4)^2} dx = \frac{1}{9} \left(\ln|3x+4| + \frac{4}{3x+4} \right) + C.$$

例2 求 $\int \frac{dx}{5-4\cos x}$.

解 被积函数含有三角函数,在积分表(十一)中查得关于积分 $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$

的公式,但是公式有两个,要看 $a^2 > b^2$ 或 $a^2 < b^2$ 而决定采用哪一个.

现在 $a=5$ 、 $b=-4$, $a^2 > b^2$,所以用公式(105)

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{a+b\cos x} \\ &= \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \quad (a^2 > b^2). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{5-4\cos x} \\ &= \frac{2}{5+(-4)} \sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{5-(-4)}{5+(-4)}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \\ &= \frac{2}{3} \arctan \left(3 \tan \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

下面再举一个需要先进行变量代换,然后再查表求积分的例子.

例3 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解 这个积分不能在表中直接查到,需要先进行变量代换.

令 $2x=u$,那么 $\sqrt{4x^2+9}=\sqrt{u^2+3^2}$, $x=\frac{u}{2}$, $dx=\frac{1}{2}du$. 于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}}.$$

被积函数中含有 $\sqrt{u^2+3^2}$,在积分表(六)中查到公式(37)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C.$$

现在 $a=3$, x 相当于 u , 于是

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|} + C.$$

再把 $u=2x$ 代入, 最后得到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} &= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|} + C. \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2|x|} + C. \end{aligned}$$

最后, 举一个用递推公式求积分的例子.

例 4 求 $\int \sin^4 x dx$.

解 在积分表(十一)中查到公式(95)

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

利用这个公式可以使被积函数中正弦的幂次减少两次, 只要重复使用这个公式, 可以使正弦的幂次继续减少, 直到求出最后结果为止, 这种公式叫做递推公式.

现在 $n=4$, 于是

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx.$$

对积分 $\int \sin^2 x dx$ 用公式(93)

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C,$$

从而所求积分为

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) + C.$$

一般说来, 查积分表可以节省计算积分的时间, 但是, 只有掌握了前而学过的基本积分方法才能灵活地使用积分表, 而且对一些比较简单的积分, 应用基本积分方法来计算比查表更快些, 例如, 对 $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$, 用变换 $u = \sin x$ 很快就可得到结果. 所以, 求积分时究竟是直接计算, 还是查表, 或是两者结合使用, 应该作具体分析, 不能一概而论.

在本章结束之前, 我们还要指出: 对初等函数来说, 在其定义区间上, 它的原

函数一定存在,但原函数不一定是初等函数,如

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

等等,就都不是初等函数.

习 题 4-5

利用积分表计算下列不定积分:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}.$
2. $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}.$
4. $\int \sqrt{2x^2+9} dx.$
5. $\int \sqrt{3x^2-2} dx.$
6. $\int e^{2x} \cos x dx.$
7. $\int x \arcsin \frac{x}{2} dx.$
8. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}.$
9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$
10. $\int e^{-2x} \sin 3x dx.$
11. $\int \sin 3x \sin 5x dx.$
12. $\int \ln^3 x dx.$
13. $\int \frac{1}{x^2(1-x)} dx.$
14. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx.$
15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$
16. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$
17. $\int \frac{x}{(2+3x)^2} dx.$
18. $\int \cos^6 x dx.$
19. $\int x^2 \sqrt{x^2-2} dx.$
20. $\int \frac{1}{2+5\cos x} dx.$
21. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-1}}.$
22. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$
23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1} dx.$
24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}.$
25. $\int \frac{x^4}{25+4x^2} dx.$

总 习 题 四

求下列不定积分(其中 a, b 为常数):

1. $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$
2. $\int \frac{x}{(1-x)^3} dx.$

3. $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx \quad (a > 0).$
5. $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx.$
7. $\int \tan^4 x dx.$
9. $\int \frac{dx}{x(x^6 + 4)}.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$
13. $\int e^{ax} \cos bx \, dx.$
15. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$
17. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}.$
19. $\int \ln(1+x^2) dx.$
21. $\int \arctan \sqrt{x} dx.$
23. $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2} dx.$
25. $\int \frac{dx}{16x^4}.$
27. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx.$
29. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx.$
31. $\int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} - e^{2x} + 1} dx.$
33. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$
35. $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$
37. $\int \frac{\cot x}{1 + \sin x} dx.$
39. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x},$
4. $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx.$
6. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$
8. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$
10. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (a > 0).$
12. $\int x \cos^2 x dx.$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$
16. $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$
18. $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx.$
20. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx.$
22. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx.$
24. $\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx.$
26. $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx.$
28. $\int e^{\sin x} \frac{\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx.$
30. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$
32. $\int \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx.$
34. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$
36. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
38. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}.$
40. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$

第五章 定 积 分

本章中将讨论积分学的另一个基本问题——定积分问题. 我们先从几何与力学问题出发引进定积分的定义, 然后讨论它的性质与计算方法. 关于定积分的应用, 将在第六章讨论.

第一节 定积分的概念与性质

一、定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负、连续. 由直线 $x=a$ 、 $x=b$ 、 $y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形(如图 5-1)称为曲边梯形, 其中曲线弧称为曲边.

我们知道, 矩形的高是不变的, 它的面积可按公式

$$\text{矩形面积} = \text{高} \times \text{底}$$

来定义和计算. 而曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是变动的, 故它的面积不能直接按上述公式来定义和计算. 然而, 由于曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续变化的, 在很小一段区间上它的变化很小, 近似于不变. 因此, 如果把区间 $[a, b]$ 划分为许多小区间, 在每个小区间上用其中某一点处的高来近似代替同一个小区间上的窄曲边梯形的变高, 那么, 每个窄曲边梯形就可近似地看成这样得到的窄矩形. 我们就以所有这些窄矩形面积之和作为曲边梯形面积的近似值, 并把区间 $[a, b]$ 无限细分下去, 即使每个小区间的长度都趋于零, 这时所有窄矩形面积之和的极限就可定义为曲边梯形的面积. 这个定义同时也给出了计算曲边梯形面积的方法, 现详述于下.

在区间 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

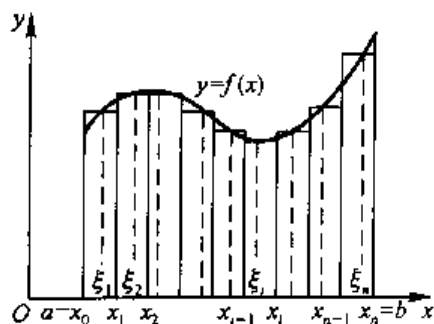


图 5-1

它们的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

经过每一个分点作平行于 y 轴的直线段, 把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形. 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i , 以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底、 $f(\xi_i)$ 为高的窄矩形近似替代第 i 个窄曲边梯形 ($i = 1, 2, \cdots, n$), 把这样得到的 n 个窄矩形面积之和作为所求曲边梯形面积 A 的近似值, 即

$$\begin{aligned} A &\approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

为了保证所有小区间的长度都无限缩小, 我们要求小区间长度中的最大值趋于零, 如记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 则上述条件可表为 $\lambda \rightarrow 0$. 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时 (这时分段数 n 无限增多, 即 $n \rightarrow \infty$), 取上述和式的极限, 便得曲边梯形的面积

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动, 已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的连续函数, 且 $v(t) \geq 0$, 计算在这段时间内物体所经过的路程 s .

我们知道, 对于等速直线运动, 有公式:

$$\text{路程} = \text{速度} \times \text{时间}.$$

但是, 在我们的问题中, 速度不是常量而是随时间变化的变量, 因此, 所求路程 s 不能直接按等速直线运动的路程公式来计算. 然而, 物体运动的速度函数 $v = v(t)$ 是连续变化的, 在很短一段时间内, 速度的变化很小, 近似于等速. 因此, 如果把时间间隔分小, 在小段时间内, 以等速运动代替变速运动, 那么, 就可算出部分路程的近似值; 再求和, 得到整个路程的近似值; 最后, 通过对时间间隔无限细分的极限过程, 这时所有部分路程的近似值之和的极限, 就是所求变速直线运动的路程的精确值.

具体计算步骤如下:

在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内任意插入若干个分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

把 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小段

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n],$$

各小段时间的长依次为

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \cdots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}.$$

相应地, 在各段时间内物体经过的路程依次为

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n.$$

在时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一个时刻 $\tau_i (t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i)$, 以 τ_i 时的速度 $v(\tau_i)$ 来代替 $[t_{i-1}, t_i]$ 上各个时刻的速度, 得到部分路程 Δs_i 的近似值, 即

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i) \Delta t_i, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

于是这 n 段部分路程的近似值之和就是所求变速直线运动路程 s 的近似值, 即

$$\begin{aligned} s &\approx v(\tau_1) \Delta t_1 + v(\tau_2) \Delta t_2 + \dots + v(\tau_n) \Delta t_n \\ &= \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i. \end{aligned}$$

记 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 取上述和式的极限, 即得变速直线运动的路程

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

二、定积分定义

从上面两个例子可以看到: 所要计算的量, 即曲边梯形的面积 A 及变速直线运动的路程 s 的实际意义虽然不同, 前者是几何量, 后者是物理量, 但是它们都决定于一个函数及其自变量的变化区间, 如:

曲边梯形的高度 $y = f(x)$ 及其底边上的点 x 的变化区间 $[a, b]$,

直线运动的速度 $v = v(t)$ 及时间 t 的变化区间 $[T_1, T_2]$;

其次, 计算这些量的方法与步骤都是相同的, 并且它们都归结为具有相同结构的一种特定和的极限, 如

$$\text{面积 } A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

$$\text{路程 } s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

抛开这些问题的具体意义, 抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括, 我们就可以抽象出下述定积分的定义.

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 在 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$, 作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i) \Delta x_i (i=1, 2, \dots, n)$, 并作出和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$, 如果不论对 $[a, b]$ 怎样分法, 也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 怎样取法, 只要当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和 S 总趋于确定的极限 I , 这时我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分 (简称积分), 记作

$\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (2)$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x) dx$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a, b]$ 叫做积分区间.

利用“ $\epsilon - \delta$ ”的说法, 上述定积分的定义可以精确地表述如下:

设有常数 I , 如果对于任意给定的正数 ϵ , 总存在一个正数 δ , 使得对于区间 $[a, b]$ 的任何分法, 不论 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中怎样取法, 只要 $\lambda < \delta$, 总有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \epsilon$$

成立, 则称 I 是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$.

注意 当和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 的极限存在时, 其极限 I 仅与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a, b]$ 有关. 如果既不改变被积函数 f , 也不改变积分区间 $[a, b]$, 而只把积分变量 x 改写成其他字母, 例如 t 或 u , 那么, 这时和的极限 I 不变, 也就是定积分的值不变, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

所以我们也说, 定积分的值只与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量的记法无关.

和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 通常称为 $f(x)$ 的积分和. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分存在, 我们就说 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

对于定积分, 有这样一个重要问题: 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足怎样的条件, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定可积? 这个问题我们不作深入讨论, 而只给出以下两个充分条件.

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定理 2 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

利用定积分的定义,前面所讨论的两个实际问题可以分别表述如下:

曲线 $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$)、 x 轴及两条直线 $x=a$ 、 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积 A 等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分. 即

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

物体以变速 $v=v(t)$ ($v(t)\geq 0$) 作直线运动,从时刻 $t=T_1$ 到时刻 $t=T_2$, 这物体经过的路程 s 等于函数 $v(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的定积分, 即

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

下面讨论定积分的几何意义. 在 $[a, b]$ 上 $f(x)\geq 0$ 时, 我们已经知道, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$ 、两条直线 $x=a$ 、 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积; 在 $[a, b]$ 上 $f(x)\leq 0$ 时, 由曲线 $y=f(x)$ 、两条直线 $x=a$ 、 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方, 定积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

在几何上表示上述曲边梯形面积的负值; 在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时, 函数 $f(x)$ 的图形某些部分在 x 轴的上方, 而其他部分在 x 轴下方 (图 5-2), 此时定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示 x 轴上方图形面积减去 x 轴下方图形面积所得之差.

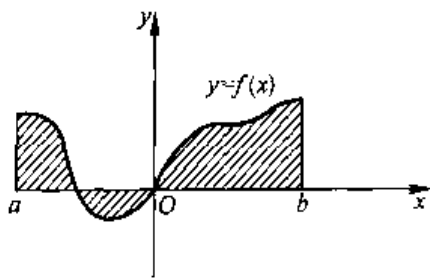


图 5-2

最后, 我们举一个按定义计算定积分的例子.

例 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解 因为被积函数 $f(x)=x^2$ 在积分区间 $[0, 1]$ 上连续, 而连续函数是可积的, 所以积分与区间 $[0, 1]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关. 因此, 为了便于计算, 不妨把区间 $[0, 1]$ 分成 n 等份, 分点为 $x_i = \frac{i}{n}$, $i=1, 2, \dots, n-1$; 这样, 每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $i=1, 2, \dots, n$; 取 $\xi_i = x_i$, $i=1, 2, \dots, n$. 于是, 得和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \textcircled{1} \\
&= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

当 $\lambda \rightarrow 0$ 即 $n \rightarrow \infty$ 时, 取上式右端的极限. 由定积分的定义, 即得所要计算的积分为

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

从本例的计算过程中我们可以看到, 对于任一确定的自然数 n , 积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

都是定积分 $\int_0^1 x^2 dx$ 的近似值. 当 n 取不同值时, 可得到定积分 $\int_0^1 x^2 dx$ 精度不同的近似值. 一般说来, n 取得越大, 近似程度越好.

下面就一般情形, 讨论定积分的近似计算问题. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 这时定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在. 如同上例, 采取把区间 $[a, b]$ 等分的分法, 即用分点 $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ 将 $[a, b]$ 分成 n 个长度相等的小区间, 每个小区间的长为

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 取 $\xi_i = x_{i-1}$, 应有

① 利用恒等式 $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, 得

$$\begin{cases} (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1, \\ n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1, \\ \dots\dots\dots \\ 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1, \\ 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1. \end{cases}$$

把这 n 个等式两端分别相加, 得

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n.$$

由于

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1),$$

代入上式, 得

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \frac{3}{2} n(n+1) + n.$$

整理后, 得

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}),$$

从而对于任一确定的自然数 n , 有

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}).$$

记 $f(x_i) = y_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$, 上式可记作

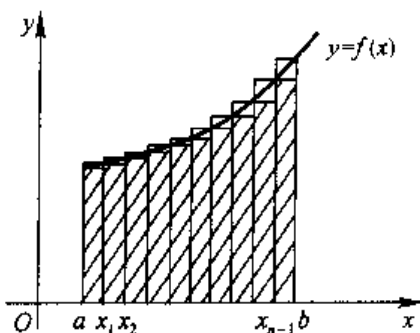
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (3)$$

如果取 $\xi_i = x_i$, 则可得近似公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (4)$$

以上求定积分近似值的方法称为矩形法, 公式(3)、(4)称为矩形法公式.

矩形法的几何意义是: 用窄条矩形的面积作为窄条曲边梯形面积的近似值. 整体上用台阶形的面积作为曲面梯形面积的近似值. 如图 5-3 所示.



计算定积分的近似值的方法很多, 这里不再作介绍. 随着计算机应用的普及, 定积分的近似计算已变得更为方便, 现在已有很多现成的数学软件可用于定积分的近似计算.

图 5-3

三、定积分的性质

为了以后计算及应用方便起见, 我们先对定积分作以下两点补充规定:

- (1) 当 $a = b$ 时, $\int_a^b f(x) dx = 0$;
- (2) 当 $a > b$ 时, $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

由上式可知, 交换定积分的上下限时, 绝对值不变而符号相反.

下面我们讨论定积分的性质. 下列各性质中积分上下限的大小, 如不特别指明, 均不加限制; 并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

性质 1

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

证

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)] \Delta x_i,$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\
&= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.
\end{aligned}$$

性质 1 对于任意有限个函数都是成立的. 类似地, 可以证明:

性质 2

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 是常数}).$$

性质 3 设 $a < c < b$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

证 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 所以不论把 $[a, b]$ 怎样分, 积分和的极限总是不变的. 因此, 我们在分区间时, 可以使 c 永远是个分点. 那么, $[a, b]$ 上的积分和等于 $[a, c]$ 上的积分和加 $[c, b]$ 上的积分和, 记为

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a, c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c, b]} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

令 $\lambda \rightarrow 0$, 上式两端同时取极限, 即得

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

按定积分的补充规定, 我们有: 不论 a, b, c 的相对位置如何, 总有等式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

成立. 例如, 当 $a < b < c$ 时, 由于

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

于是得

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \\
&= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.
\end{aligned}$$

性质 4 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 1$, 则

$$\int_a^b 1 dx = \int_a^b dx = b - a.$$

这个性质的证明请读者自己完成.

性质 5 如果在区间 $[a, b]$ 上, $f(x) \geqslant 0$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \geqslant 0 \quad (a < b).$$

证 因为 $f(x) \geq 0$, 所以

$$f(\xi_i) \geq 0 (i=1, 2, \dots, n).$$

又由于 $\Delta x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 因此

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0,$$

令 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\} \rightarrow 0$, 便得要证的不等式.

推论 1 如果在区间 $[a, b]$ 上, $f(x) \leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (a < b).$$

证 因为 $g(x) - f(x) \geq 0$, 由性质 5 得

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0.$$

再利用性质 1, 便得要证的不等式.

推论 2 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b).$

证 因为

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

所以由推论 1 及性质 2 可得

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

即

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

注 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的可积性可由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积性推出, 这里我们不作证明.

性质 6 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

证 因为 $m \leq f(x) \leq M$, 所以由性质 5 推论 1, 得

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

再由性质 2 及性质 4, 即得所要证的不等式.

这个性质说明, 由被积函数在积分区间上的最大值及最小值, 可以估计积分值的大致范围. 例如, 定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx$, 它的被积函数 $f(x) = x^4$ 在积分区间

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上是单调增加的, 于是有最小值 $m = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 、最大值 $M = (1)^4 = 1$.

由性质 6, 得

$$\frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx \leq 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

即
$$\frac{1}{32} \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx \leq \frac{1}{2}.$$

性质 7 (定积分中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在积分区间 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ξ , 使下式成立:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

这个公式叫做积分中值公式.

证 把性质 6 中的不等式各除以 $b-a$, 得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

这表明, 确定的数值 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 介于函数 $f(x)$ 的最小值 m 及最大值 M 之间. 根据闭区间上连续函数的介值定理(第一章第十节定理 3 推论), 在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得函数 $f(x)$ 在点 ξ 处的值与这个确定的数值相等, 即应有

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

两端各乘以 $b-a$, 即得所要证的等式.

显然, 积分中值公式

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (\xi \text{ 在 } a \text{ 与 } b \text{ 之间})$$

不论 $a < b$ 或 $a > b$ 都是成立的.

积分中值公式有如下的几何解释: 在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得以区间 $[a, b]$ 为底边、以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积(图 5-4).

按积分中值公式所得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值. 例如按图 5-4, $f(\xi)$ 可看作图中曲边梯形的平均高度. 又如物体以变速 $v(t)$ 作直线运动, 在时间区间 $[T_1, T_2]$ 上经过的路程为

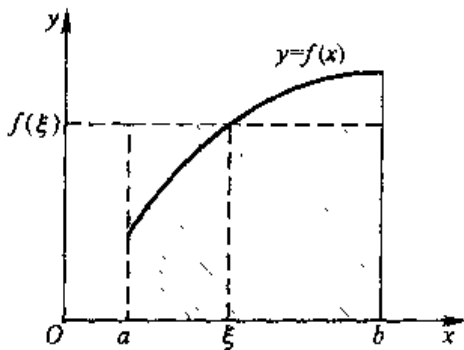


图 5-4

$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt$, 因此,

$$v(\xi) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt \quad \xi \in [T_1, T_2]$$

便是运动物体在 $[T_1, T_2]$ 这段时间内的平均速度.

习 题 5-1

1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y = x^2 + 1$, 两直线 $x = a, x = b (b > a)$ 及横轴所围成的图形的面积.

2. 利用定积分定义计算下列积分:

$$(1) \int_a^b x dx \quad (a < b); \quad (2) \int_0^1 e^x dx.$$

3. 利用定积分的几何意义, 证明下列等式:

$$(1) \int_0^1 2x dx = 1; \quad (2) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0; \quad (4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

4. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力. 已知闸门上水的压强 p (单位面积上的压力大小) 与水深 h 存在函数关系, 且有 $p = 9.8h$ (kN/m²). 若闸门高 $H = 3$ m, 宽 $L = 2$ m, 求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P .

5. 证明定积分性质:

$$(1) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 是常数});$$

$$(2) \int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

6. 估计下列各积分的值:

$$(1) \int_1^4 (x^2 + 1) dx; \quad (2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x) dx;$$

$$(3) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx; \quad (4) \int_2^0 e^{x^2-x} dx.$$

7. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明

(1) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$;

(2) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \not\equiv 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$;

(3) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \leq g(x)$, 且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv g(x)$.

8. 根据定积分的性质及第 7 题的结论, 说明下列积分哪一个的值较大:

- (1) $\int_0^1 x^2 dx$ 还是 $\int_0^1 x^3 dx$?
- (2) $\int_1^2 x^2 dx$ 还是 $\int_1^2 x^3 dx$?
- (3) $\int_1^2 \ln x dx$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$?
- (4) $\int_0^1 x dx$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x) dx$?
- (5) $\int_0^1 e^x dx$ 还是 $\int_0^1 (1+x) dx$?

第二节 微积分基本公式

在第一节中,我们举过应用定积分定义计算积分的例子.从这个例子我们看到,被积函数虽然是简单的二次幂函数 $f(x) = x^2$,但直接按定义来计算它的定积分已经不是很容易的事.如果被积函数是其他复杂的函数,其困难就更大了.因此,我们必须寻求计算定积分的新方法.

下面我们先从实际问题中寻找解决问题的线索.为此,我们对变速直线运动中遇到的位置函数 $s(t)$ 及速度函数 $v(t)$ 之间的联系作进一步的研究.

一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系

有一物体在一直线上运动.在这直线上取定原点、正向及长度单位,使它成一数轴.设时刻 t 时物体所在位置为 $s(t)$,速度为 $v(t)$. (为了讨论方便起见,可以设 $v(t) \geq 0$.)

从第一节知道:物体在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程可以用速度函数 $v(t)$ 在 $[T_1, T_2]$ 上的定积分

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt$$

来表达;另一方面,这段路程又可以通过位置函数 $s(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的增量

$$s(T_2) - s(T_1)$$

来表达.由此可见,位置函数 $s(t)$ 与速度函数 $v(t)$ 之间有如下关系:

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt = s(T_2) - s(T_1). \quad (1)$$

因为 $s'(t) = v(t)$,即位置函数 $s(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的原函数,所以关系式(1)表示,速度函数 $v(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的定积分等于 $v(t)$ 的原函数 $s(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的增量

$$s(T_2) - s(T_1).$$

上述从变速直线运动的路程这个特殊问题中得出来的关系,在一定条件下具有普遍性.事实上,我们将在第三目中证明,如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,那么, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分就等于 $f(x)$ 的原函数(设为 $F(x)$) 在区间 $[a, b]$ 上的增量

$$F(b) - F(a).$$

二、积分上限的函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,并且设 x 为 $[a, b]$ 上的一点.现在我们来考察 $f(x)$ 在部分区间 $[a, x]$ 上的定积分

$$\int_a^x f(x) dx.$$

首先,由于 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上仍旧连续,因此这个定积分存在.这时, x 既表示定积分的上限,又表示积分变量.因为定积分与积分变量的记法无关,所以,为了明确起见,可以把积分变量改用其他符号,例如用 t 表示,则上面的定积分可以写成

$$\int_a^x f(t) dt.$$

如果上限 x 在区间 $[a, b]$ 上任意变动,则对于每一个取定的 x 值,定积分有一个对应值,所以它在 $[a, b]$ 上定义了一个函数,记作 $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

这个函数 $\Phi(x)$ 具有下面定理 1 所指出的重要性质.

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,则积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

在 $[a, b]$ 上可导,并且它的导数是

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt \\ &= f(x) \quad (a \leq x \leq b). \end{aligned} \quad (2)$$

证 若 $x \in (a, b)$, 设 x 获得增量 Δx , 其绝对值足够地小,使得 $x + \Delta x \in (a, b)$, 则 $\Phi(x)$ (图 5-5, 图中 $\Delta x > 0$) 在 $x + \Delta x$ 处的函数值为

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

由此得函数的增量

$$\Delta \Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\
&= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\
&= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.
\end{aligned}$$

再应用积分中值定理, 即有等式

$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x,$$

这里, ξ 在 x 与 $x + \Delta x$ 之间. 把上式两端各除以 Δx , 得函数增量与自变量增量的比值

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi).$$

由于假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow x$, 因此 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$. 于是, 令 $\Delta x \rightarrow 0$ 对上式两端取极限时, 左端的极限也应该存在且等于 $f(x)$. 这就是说, 函数 $\Phi(x)$ 的导数存在, 并且

$$\Phi'(x) = f(x).$$

若 $x = a$, 取 $\Delta x > 0$, 则同理可证 $\Phi'_+(a) = f(a)$; 若 $x = b$, 取 $\Delta x < 0$, 则同理可证 $\Phi'_-(b) = f(b)$.

定理 1 证毕.

这个定理指出了一个重要结论: 连续函数 $f(x)$ 取变上限 x 的定积分然后求导, 其结果还原为 $f(x)$ 本身. 联想到原函数的定义, 就可以从定理 1 推知 $\Phi(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数. 因此, 我们引出如下的原函数的存在定理.

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (3)$$

就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

这个定理的重要意义是: 一方面肯定了连续函数的原函数是存在的, 另一方面初步地揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系. 因此, 我们就有可能通过原函数来计算定积分.

三、牛顿 - 莱布尼茨公式

现在我们根据定理 2 来证明一个重要定理, 它给出了用原函数计算定积分的公式.

定理 3 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

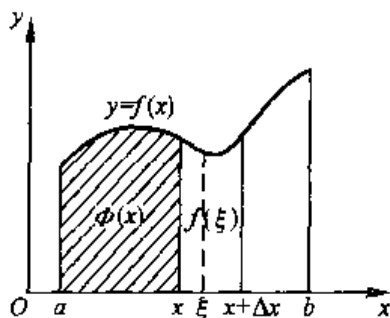


图 5-5

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (4)$$

证 已知函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, 又根据定理 2 知道, 积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

也是 $f(x)$ 的一个原函数. 于是这两个原函数之差 $F(x) - \Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上必定是某一个常数 C (第四章第一节), 即

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b). \quad (5)$$

在上式中令 $x = a$, 得 $F(a) - \Phi(a) = C$. 又由 $\Phi(x)$ 的定义式(3)及上节定积分的补充规定(1)可知 $\Phi(a) = 0$, 因此, $C = F(a)$. 以 $F(a)$ 代入(5)式中的 C , 以 $\int_a^x f(t)dt$ 代入(5)式中的 $\Phi(x)$, 可得

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

在上式中令 $x = b$, 就得到所要证明的公式(4).

由上节定积分的补充规定(2)可知, (4)式对 $a > b$ 的情形同样成立.

为了方便起见, 以后把 $F(b) - F(a)$ 记成 $[F(x)]_a^b$, 于是(4)式又可写成

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

公式(4)叫做牛顿(Newton) - 莱布尼茨(Leibniz)公式. 这个公式进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系. 它表明: 一个连续函数在区间 $[a, b]$ 上的定积分等于它的任一个原函数在区间 $[a, b]$ 上的增量. 这就给定积分提供了一个有效而简便的计算方法, 大大简化了定积分的计算手续.

通常也把公式(4)叫做微积分基本公式.

下面我们举几个应用公式(4)来计算定积分的简单例子.

例 1 计算第一节中的定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解 由于 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数, 所以按牛顿 - 莱布尼茨公式, 有

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

解 由于 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数, 所以

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan(-1)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi.$$

例3 计算 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$.

解 当 $x < 0$ 时, $\frac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln|x|$, 现在积分区间是 $[-2, -1]$, 所以按牛顿-莱布尼茨公式, 有

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

通过例3, 我们应该特别注意: 公式(4)中的函数 $F(x)$ 必须是 $f(x)$ 在该积分区间 $[a, b]$ 上的原函数.

例4 计算正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形(图5-6)的面积.

解 这图形是曲边梯形的一个特例. 它的面积

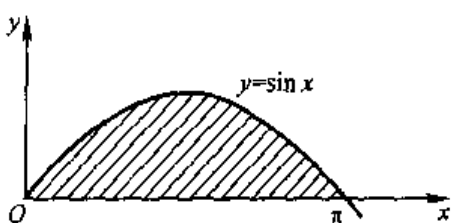


图 5-6

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

由于 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数, 所以

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= -(-1) - (-1) = 2. \end{aligned}$$

例5 汽车以每小时 36 km 速度行驶, 到某处需要减速停车. 设汽车以等加速度 $a = -5 \text{ m/s}^2$ 刹车. 问从开始刹车到停车, 汽车驶过了多少距离?

解 首先要算出从开始刹车到停车经过的时间. 设开始刹车的时刻为 $t = 0$, 此时汽车速度

$$v_0 = 36 \text{ km/h} = \frac{36 \times 1\,000}{3\,600} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}.$$

刹车后汽车减速行驶, 其速度为

$$v(t) = v_0 + at = 10 - 5t.$$

当汽车停住时, 速度 $v(t) = 0$, 故从

$$v(t) = 10 - 5t = 0$$

解得 $t = \frac{10}{5} = 2(\text{s})$.

于是在这段时间内, 汽车所驶过的距离为

$$s = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (10 - 5t) dt = \left[10t - 5 \times \frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 10(\text{m}),$$

即在刹车后,汽车需驶过 10 m 才能停住.

例 6 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 证明在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b).$$

证 因 $f(x)$ 连续, 故它的原函数存在, 设为 $F(x)$, 即设在 $[a, b]$ 上 $F'(x) = f(x)$. 根据牛顿-莱布尼茨公式, 有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

显然函数 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足微分中值定理的条件, 因此按微分中值定理, 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) \quad \xi \in (a, b),$$

故
$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad \xi \in (a, b).$$

本例的结论是上一节所述积分中值定理的改进. 从本例的证明中不难看出积分中值定理与微分中值定理的联系.

下面再举几个应用公式(2)的例子.

例 7 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续且 $f(x) > 0$. 证明函数

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

在 $(0, +\infty)$ 内为单调增加函数.

证 由公式(2), 得

$$\frac{d}{dx} \int_0^x tf(t) dt = xf(x), \quad \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x).$$

故

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{xf(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x tf(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2} \\ &= \frac{f(x) \int_0^x (x-t)f(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2}. \end{aligned}$$

按假设, 当 $0 < t < x$ 时 $f(t) > 0$, $(x-t)f(t) > 0$, 按例 6 所述积分中值定理可知

$$\int_0^x f(t) dt > 0, \quad \int_0^x (x-t)f(t) dt > 0,$$

所以 $F'(x) > 0 (x > 0)$, 从而 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内为单调增加函数.

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt}{x^2}$.

解 易知这是一个 $\frac{0}{0}$ 型的未定式, 我们利用洛必达法则来计算. 分子可写成

$$-\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt,$$

它是以 $\cos x$ 为上限的积分, 作为 x 的函数可看成是以 $u = \cos x$ 为中间变量的复合函数, 故由公式(2)有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt &= -\frac{d}{dx} \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{d}{du} \int_1^u e^{-t^2} dt \Big|_{u=\cos x} \cdot (\cos x)' \\ &= -e^{-\cos^2 x} \cdot (-\sin x) \\ &= \sin x e^{-\cos^2 x}. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

习 题 5-2

1. 试求函数 $y = \int_0^x \sin t dt$ 当 $x=0$ 及 $x = \frac{\pi}{4}$ 时的导数.
2. 求由参数表达式 $x = \int_0^t \sin u du, y = \int_0^t \cos u du$ 所确定的函数对 x 的导数.
3. 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所决定的隐函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.
4. 当 x 为何值时, 函数 $I(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 有极值?

5. 计算下列各导数:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt; \quad (2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

6. 计算下列各定积分:

$$(1) \int_0^a (3x^2 - x + 1) dx; \quad (2) \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) dx;$$

$$(3) \int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx;$$

$$(4) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$$

$$(5) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2};$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(8) \int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx;$$

$$(9) \int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x};$$

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta;$$

$$(11) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx;$$

$$(12) \int_0^2 f(x)dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1. \end{cases}$$

7. 设 k 为正整数, 试证下列各题:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi;$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi.$$

8. 设 k 及 l 为正整数, 且 $k \neq l$. 证明:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = 0;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = 0.$$

9. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}.$$

10. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1], \\ x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式, 并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0, 2)$ 内的连续性.

11. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > \pi. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式.

12. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导且 $f'(x) \leq 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt.$$

证明在 (a, b) 内有 $F'(x) \leq 0$.

第三节 定积分的换元法和分部积分法

由上节结果知道,计算定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的简便方法是把它转化为求 $f(x)$ 的原函数的增量.在第四章中,我们知道用换元积分法和分部积分法可以求出一些函数的原函数.因此,在一定条件下,可以用换元积分法和分部积分法来计算定积分.下面就来讨论定积分的这两种计算方法.

一、定积分的换元法

为了说明如何用换元法来计算定积分,先证明下面的定理.

定理 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

(1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数,且其值域 $R_\varphi \subset [a, b]$ ^①,

则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

公式(1)叫做定积分的换元公式.

证 由假设可以知道,上式两边的被积函数都是连续的,因此不仅上式两边的定积分都存在,而且由上节的定理 2 知道,被积函数的原函数也都存在.所以, (1)式两边的定积分都可应用牛顿-莱布尼茨公式.假设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

另一方面, $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ 可看作是由 $F(x)$ 与 $x = \varphi(t)$ 复合而成的函数.因此,由复合函数求导法则,得

$$\Phi'(t) = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

这表明 $\Phi(t)$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数.因此有

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

又由 $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ 及 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ 可知

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

^① 当 $\varphi(t)$ 的值域 $R_\varphi = [A, B] \supset [a, b]$, 但满足其余条件时,只要 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 上连续,则定理的结论仍成立.

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \\ &= \int_a^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.\end{aligned}$$

这就证明了换元公式.

在定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中的 dx , 本来是整个定积分记号中不可分割的一部分, 但由上述定理可知, 在一定条件下, 它确实可以作为微分记号来对待. 这就是说, 应用换元公式时, 如果把 $\int_a^b f(x)dx$ 中的 x 换成 $\varphi(t)$, 则 dx 就换成 $\varphi'(t)dt$, 这正好是 $x = \varphi(t)$ 的微分 dx .

应用换元公式时有两点值得注意: (1) 用 $x = \varphi(t)$ 把原来变量 x 代换成新变量 t 时, 积分限也要换成相应于新变量 t 的积分限; (2) 求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后, 不必像计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原来变量 x 的函数, 而只要把新变量 t 的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 中然后相减就行了.

例 1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$.

解 设 $x = a \sin t$, 则 $dx = a \cos t dt$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = a$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.\end{aligned}$$

换元公式也可反过来使用. 为使用方便起见, 把换元公式中左右两边对调位置, 同时把 t 改记为 x , 而 x 改记为 t , 得

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

这样, 我们可用 $t = \varphi(x)$ 来引入新变量 t , 而 $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$.

例 2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$.

解 设 $t = \cos x$, 则 $dt = -\sin x dx$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = 1$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = - \int_1^0 t^5 dt = \int_0^1 t^5 dt = \left[\frac{t^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

在例2中,如果我们不明显地写出新变量 t ,那么定积分的上、下限就不要变更.现在用这种记法计算如下:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d(\cos x) \\ &= - \left[\frac{\cos^6 x}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = - \left(0 - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例3 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$.

解 由于 $\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sqrt{\sin^3 x (1 - \sin^2 x)} = \sin^{\frac{3}{2}} x \cdot |\cos x|$, 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, $|\cos x| = \cos x$; 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上, $|\cos x| = -\cos x$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x (-\cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d(\sin x) \\ &= \left[\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{5} \right) = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

注意 如果忽略 $\cos x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上非正, 而按

$$\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x$$

计算, 将导致错误.

例4 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$.

解 设 $\sqrt{2x+1} = t$, 则 $x = \frac{t^2-1}{2}$, $dx = t dt$, 且

当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=4$ 时, $t=3$.

于是

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx &= \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2} + 2}{t} t dt = \frac{1}{2} \int_1^3 (t^2 + 3) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} + 3t \right]_1^3 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{27}{3} + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 3 \right) \right] = \frac{22}{3}.$$

例 5 证明:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为奇函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

证 因为

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx,$$

对积分 $\int_{-a}^0 f(x) dx$ 作代换 $x = -t$, 则得

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx. \end{aligned}$$

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则

$$f(x) + f(-x) = 2f(x),$$

从而

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则

$$f(x) + f(-x) = 0,$$

从而

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

利用例 5 的结论, 常可简化计算偶函数、奇函数在对称于原点的区间上的定积分.

例 6 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx, \text{ 由此计算}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

证 (1) 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则 $dx = -dt$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.\end{aligned}$$

(2) 设 $x = \pi - t$, 则 $dx = -dt$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = \pi$; 当 $x = \pi$ 时, $t = 0$.

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx &= - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f[\sin(\pi - t)] dt \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx,\end{aligned}$$

所以
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

利用上述结论, 即得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} \\ &= - \frac{\pi}{2} [\arctan(\cos x)]_0^{\pi} \\ &= - \frac{\pi}{2} \left(- \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

例 7 设函数

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1 + \cos x}, & -1 < x < 0, \end{cases}$$

计算 $\int_1^4 f(x-2) dx$.

解 设 $x-2=t$, 则 $dx=dt$, 且

当 $x=1$ 时, $t=-1$; 当 $x=4$ 时, $t=2$.

于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t} + \int_0^2 t e^{-t^2} dt \\&= \left[\tan \frac{t}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^2 \\&= \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

二、定积分的分部积分法

依据不定积分的分部积分法,可得

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)dx &= \left[\int u(x)v'(x)dx \right]_a^b \\&= \left[u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \right]_a^b \\&= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,\end{aligned}$$

简记作

$$\int_a^b uv'dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu'dx,$$

或

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

这就是定积分的分部积分公式.公式表明原函数已经积出的部分可以先用上、下限代入.

例 8 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + [\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.\end{aligned}$$

例 9 计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$.

解 先用换元法.令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2, dx=2t dt$, 且
当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=1$ 时, $t=1$.

$$\begin{aligned}\text{于是} \quad \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 t e^t dt = 2 \int_0^1 t de^t \\&= 2([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt) = 2(e - [e^t]_0^1) \\&= 2[e - (e-1)] = 2.\end{aligned}$$

例 10 证明定积分公式(见附录Ⅲ积分表(147)):

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \right) \\ = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, n \text{ 为大于 1 的正奇数.} \end{cases}$$

证

$$I_n = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x \\ = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

右端第一项等于零;将第二项里的 $\cos^2 x$ 写成 $1 - \sin^2 x$,并把积分分成两个,得

$$I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

由此得

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

这个等式叫做积分 I_n 关于下标的递推公式.

如果把 n 换成 $n-2$,则得

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

同样地依次进行下去,直到 I_n 的下标递减到 0 或 1 为止.于是,

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0, \\ I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 \\ (m=1,2,\cdots),$$

而

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

因此

$$I_{2m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ I_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \\ (m=1,2,\cdots).$$

至于定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ 相等,由本节例 6(1) 即可知道,证毕.

习 题 5-3

1. 计算下列定积分:

- | | |
|--|---|
| (1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx$; | (2) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{(11 + 5x)^3}$; |
| (3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi$; | (4) $\int_0^{\pi} (1 - \sin^3 \theta) d\theta$; |
| (5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du$; | (6) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx$; |
| (7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8 - 2y^2} dy$; | (8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx$; |
| (9) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$; | (10) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}}$; |
| (11) $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}$; | (12) $\int_1^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$; |
| (13) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x} - 1}$; | (14) $\int_0^{\sqrt{2}a} \frac{x dx}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$; |
| (15) $\int_0^1 t e^{\frac{t^2}{2}} dt$; | (16) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}}$; |
| (17) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$; | (18) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx$; |
| (19) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$; | (20) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx$. |

2. 利用函数的奇偶性计算下列积分:

- | | |
|--|---|
| (1) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx$; | (2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta d\theta$; |
| (3) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; | (4) $\int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$. |

3. 证明: $\int_{-a}^a \varphi(x^2) dx = 2 \int_0^a \varphi(x^2) dx$, 其中 $\varphi(u)$ 为连续函数.

4. 设 $f(x)$ 在 $[-b, b]$ 上连续, 证明

$$\int_{-b}^b f(x) dx = \int_{-b}^b f(-x) dx.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx.$$

6. 证明: $\int_x^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{1 + x^2} (x > 0)$.

7. 证明: $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$.

8. 证明: $\int_0^\pi \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

9. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数, 证明 $\int_a^{a+l} f(x) dx$ 的值与 a 无关.

10. 若 $f(t)$ 是连续函数且为奇函数, 证明 $\int_0^x f(t) dt$ 是偶函数; 若 $f(t)$ 是连续函数且为偶函数, 证明 $\int_0^x f(t) dt$ 是奇函数.

11. 计算下列定积分

(1) $\int_0^1 x e^{-x} dx$; (2) $\int_1^e x \ln x dx$;

(3) $\int_0^{2\pi} t \sin \omega t dt$ (ω 为常数); (4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$;

(5) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; (6) $\int_0^1 x \arctan x dx$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$; (8) $\int_1^2 x \log_2 x dx$;

(9) $\int_0^\pi (x \sin x)^2 dx$; (10) $\int_1^e \sin(\ln x) dx$;

(11) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$; (12) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} dx$ (m 为自然数);

(13) $J_m = \int_0^\pi x \sin^m x dx$ (m 为自然数).

第四节 反常积分

在一些实际问题中, 我们常遇到积分区间为无穷区间, 或者被积函数为无界函数的积分, 它们已经不属于前面所说的定积分了. 因此, 我们对定积分作如下两种推广, 从而形成反常积分的概念.

一、无有限反常积分

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 取 $t > a$, 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分, 记作

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \text{ 即}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx. \quad (1)$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; 如果上述极限不存在, 函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 就没有意义, 习惯上称为反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 这时记号 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 不再表示数值了.

类似地, 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续, 取 $t < b$. 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分, 记作 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, 即

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx. \quad (2)$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛; 如果上述极限不存在, 就称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 如果反常积分

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx \text{ 和 } \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

都收敛, 则称上述两反常积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分, 记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, 即

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 f(x)dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x)dx. \end{aligned} \quad (3)$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; 否则就称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

上述反常积分统称为无穷限的反常积分.

由上述定义及牛顿-莱布尼茨公式, 可得如下结果.

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的一个原函数, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 存在, 则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a);$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 不存在, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

如果记 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, $[F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$, 则当 $F(+\infty)$ 存在时,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty};$$

当 $F(+\infty)$ 不存在时, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

类似地, 若在 $(-\infty, b]$ 上 $F'(x) = f(x)$, 则当 $F(-\infty)$ 存在时,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^b;$$

当 $F(-\infty)$ 不存在时, 反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 发散.

若在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $F'(x) = f(x)$, 则当 $F(-\infty)$ 与 $F(+\infty)$ 都存在时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty};$$

当 $F(-\infty)$ 与 $F(+\infty)$ 有一个不存在时, 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 1 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

这个反常积分值的几何意义是: 当 $a \rightarrow -\infty$ 、 $b \rightarrow +\infty$ 时, 虽然图 5-7 中阴影部分向左、右无限延伸, 但其面积却有极限值 π . 简单地说, 它是位于曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的下方, x 轴上方的图形面积.

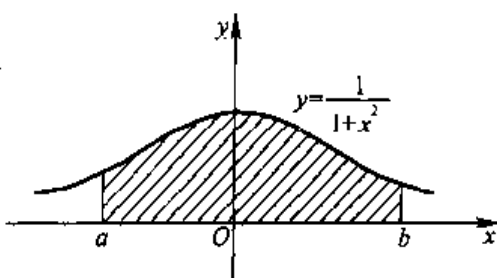


图 5-7

例 2 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$ (p 是常数, 且 $p > 0$).

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt &= \left[\int t e^{-pt} dt \right]_0^{+\infty} = \left[-\frac{1}{p} \int t d e^{-pt} \right]_0^{+\infty} \\ &= \left[-\frac{t}{p} e^{-pt} + \frac{1}{p} \int e^{-pt} dt \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{t}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \left[\frac{1}{p^2} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-pt} - 0 - \frac{1}{p^2} (0 - 1) = \frac{1}{p^2}.
\end{aligned}$$

注意,式中的极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-pt}$ 是未定式,可用洛必达法则确定.

例3 证明反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛,当 $p \leq 1$ 时发散.

证 当 $p=1$ 时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty,$$

当 $p \neq 1$ 时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

因此,当 $p>1$ 时,这反常积分收敛,其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$;当 $p \leq 1$ 时,这反常积分发散.

二、无界函数的反常积分

现在我们把定积分推广到被积函数为无界函数的情形.

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界,那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点(也称为无界间断点).无界函数的反常积分又称为瑕积分.

定义2 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续,点 a 为 $f(x)$ 的瑕点.取 $t > a$,如果极限

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

存在,则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的反常积分,仍然记作 $\int_a^b f(x) dx$,即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx. \quad (4)$$

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛.如果上述极限不存在,就称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

类似地,设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续,点 b 为 $f(x)$ 的瑕点.取 $t < b$,如果极限

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

存在,则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx; \quad (5)$$

否则,就称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 $c (a < c < b)$ 外连续,点 c 为 $f(x)$ 的瑕点.如果两个反常积分

$$\int_a^c f(x)dx \text{ 与 } \int_c^b f(x)dx$$

都收敛,则定义

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x)dx; \end{aligned} \quad (6)$$

否则,就称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

计算无界函数的反常积分,也可借助于牛顿-莱布尼茨公式.

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点,在 $(a, b]$ 上 $F'(x) = f(x)$,如果极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ 存在,则反常积分

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(b) - F(a^+);$$

如果 $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ 不存在,则反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

我们仍用记号 $[F(x)]_a^b$ 来表示 $F(b) - F(a^+)$,从而形式上仍有

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

对于 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续, b 为瑕点的反常积分,也有类似的计算公式,这里不再详述.

例 4 计算反常积分

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0).$$

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = +\infty,$$

所以点 a 是瑕点,于是

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \lim_{x \rightarrow a^-} \arcsin \frac{x}{a} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

这个反常积分值的几何意义是:位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 之下, x 轴之上, 直线 $x=0$ 与 $x=a$ 之间的图形面积(图 5-8).

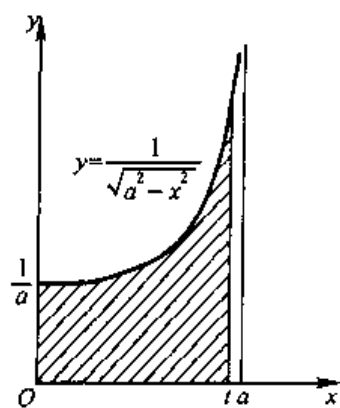


图 5-8

例 5 讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 的收敛性.

解 被积函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在积分区间 $[-1, 1]$ 上除 $x=0$ 外连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

由于

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x} \right) - 1 = +\infty,$$

即反常积分 $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$ 发散, 所以反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 发散.

注意 如果疏忽了 $x=0$ 是被积函数的瑕点, 就会得到以下的错误结果:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$

例 6 证明反常积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $q < 1$ 时收敛; 当 $q \geq 1$ 时发散.

证 当 $q=1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} &= \int_a^b \frac{dx}{x-a} = [\ln(x-a)]_a^b \\ &= \ln(b-a) - \lim_{x \rightarrow a^+} \ln(x-a) = +\infty. \end{aligned}$$

当 $q \neq 1$ 时,

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q} \right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q < 1, \\ +\infty, & q > 1. \end{cases}$$

因此, 当 $q < 1$ 时, 这反常积分收敛, 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$; 当 $q \geq 1$ 时, 这反常积分发散.

设有反常积分 $\int_a^b f(x)dx$, 其中 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$, a, b 也可以是 $f(x)$ 的瑕点. 对这样的反常积分, 在另加换元函数单调的假定下, 可以像定积分一样作换元.

例 7 求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$.

解 这里,积分上限为 $+\infty$,且下限 $x=0$ 为被积函数的瑕点.

令 $\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$, $x\rightarrow 0^+$ 时 $t\rightarrow 0$, $x\rightarrow +\infty$ 时 $t\rightarrow +\infty$.于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^3} = \int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{t(t^2+1)^{3/2}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{3/2}}.$$

再令 $t = \tan u$,取 $u = \arctan t$, $t=0$ 时 $u=0$, $t\rightarrow +\infty$ 时 $u\rightarrow \frac{\pi}{2}$.于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^3} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 u du}{\sec^3 u} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 2.$$

本例如用变换 $\frac{1}{x}=t$ 或 $\frac{1}{x+1}=t$,计算会更简单些,读者可自行解之.

习 题 5-4

1. 判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4};$

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}};$

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx (a > 0);$

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-px} \cosh t dt (p > 1);$

(5) $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt (p > 0, \omega > 0);$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$

(7) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$

(8) $\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2};$

(9) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$

(10) $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}}.$

2. 当 k 为何值时,反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛?当 k 为何值时,这反常积分发散?又当 k 为何值时,这反常积分取得最小值?

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

* 第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数

反常积分的收敛性,可以通过求被积函数的原函数,然后按定义取极限,根据极限的存在与否来判定.本节中我们来建立不通过被积函数的原函数判定反常积分收敛性的判定法.

一、无穷限反常积分的审敛法

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续,且 $f(x) \geq 0$.若函数

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

在 $[a, +\infty)$ 上有上界, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

事实上, 因为 $f(x) \geq 0$, $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调增加, 又 $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界, 故 $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是单调有界的函数. 按照“ $[a, +\infty)$ 上的单调有界函数 $F(x)$ 必有极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ”的准则, 就可知道极限

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r f(t) dt$$

存在, 即反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

根据定理 1, 对于非负函数的无无穷限的反常积分, 我们有以下的比较审敛原理.

定理 2 (比较审敛原理) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续. 如果 $0 \leq f(x) \leq g(x) (a \leq x < +\infty)$, 并且 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛; 如果 $0 \leq g(x) \leq f(x) (a \leq x < +\infty)$, 并且 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也发散.

证 设 $a < t < +\infty$, 由 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ 及 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 得

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

这表明作为积分上限 t 的函数

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

在 $[a, +\infty)$ 上有上界. 由定理 1 即知反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

如果 $0 \leq g(x) \leq f(x)$, 且 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 必定发散. 因为如果 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 由定理的第一部分即知 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 也收敛, 这与假设相矛盾. 证毕.

由上节例 3 知道, 反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} (a > 0)$ 当 $p > 1$ 时收敛; 当 $p \leq 1$ 时发散. 因此, 取 $g(x) = \frac{A}{x^p} (A > 0)$, 立即可得下面的反常积分的比较审敛法.

定理 3 (比较审敛法 1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty) (a > 0)$ 上连续, 且

$f(x) \geq 0$. 如果存在常数 $M > 0$ 及 $p > 1$, 使得 $f(x) \leq \frac{M}{x^p} (a \leq x < +\infty)$, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛; 如果存在常数 $N > 0$, 使得 $f(x) \geq \frac{N}{x} (a \leq x < +\infty)$, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 1 判定反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

解 由于

$$0 < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{4/3}},$$

根据比较审敛法 1, 这个反常积分收敛.

以比较审敛法 1 为基础, 我们可以得到在应用上较为方便的极限审敛法.

定理 4 (极限审敛法 1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$. 如果存在常数 $p > 1$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x)$ 存在, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛; 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = d > 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = +\infty$), 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

证 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c (p > 1)$. 根据极限的定义, 存在充分大的 $x_1 (x_1 \geq a, x_1 > 0)$, 当 $x > x_1$ 时, 必有

$$|x^p f(x) - c| < 1,$$

由此得

$$0 \leq x^p f(x) < 1 + c.$$

令 $1 + c = M > 0$, 于是在区间 $x_1 < x < +\infty$ 内不等式 $0 \leq f(x) < \frac{M}{x^p}$ 成立. 由比

较审敛法 1 知 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 而

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^t f(x) dx \right] \\ &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^t f(x) dx \\ &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx, \end{aligned}$$

故反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛.

如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$ (或 $+\infty$), 则存在充分大的 x_1 , 当 $x > x_1$ 时, 必有

$$|xf(x) - d| < \frac{d}{2},$$

由此得

$$xf(x) > \frac{d}{2}.$$

(当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$ 时, 可取任意正数作为 d .) 令 $\frac{d}{2} = N > 0$. 于是在区间

$x_1 < x < +\infty$ 内不等式 $f(x) \geq \frac{N}{x}$ 成立. 根据比较审敛法 1 知 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$ 发散,

从而反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

例 2 判定反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = 1,$$

根据极限审敛法 1, 所给反常积分收敛.

例 3 判定反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x^{3/2}}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{1+x^2} = +\infty,$$

根据极限审敛法 1, 所给反常积分发散.

例 4 判定反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

根据极限审敛法 1, 所给反常积分发散.

假定反常积分的被积函数在所讨论的区间上可取正值也可取负值. 对于这类反常积分的收敛性, 我们有如下的结论.

定理 5 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续. 如果反常积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

收敛, 则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

也收敛.

证 令 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$. 于是 $\varphi(x) \geq 0$, 且 $\varphi(x) \leq |f(x)|$, 而 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 由比较审敛原理即知 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 也收敛. 但 $f(x) = 2\varphi(x) - |f(x)|$, 因此

$$\int_a^{-\infty} f(x) dx = 2 \int_a^{-\infty} \varphi(x) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$$

可见反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是两个收敛的反常积分的差, 因此它是收敛的. 证毕.

通常称满足定理 5 条件的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 为绝对收敛. 于是, 定理 5 可简单地表达为: 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 必定收敛.

例 5 判定反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$ (a, b 都是常数, 且 $a > 0$) 的收敛性.

解 因为 $|e^{-ax} \sin bx| \leq e^{-ax}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛, 根据比较审敛原理, 反常积分 $\int_0^{+\infty} |e^{-ax} \sin bx| dx$ 收敛. 由定理 5 可知所给反常积分收敛.

二、无界函数的反常积分的审敛法

对于无界函数的反常积分, 也有类似的审敛法.

由上节例 6 知道, 反常积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$$

当 $q < 1$ 时收敛, 当 $q \geq 1$ 时发散. 于是, 与定理 3、定理 4 类似可得如下两个审敛法:

定理 6(比较审敛法 2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $x = a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果存在常数 $M > 0$ 及 $q < 1$, 使得

$$f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^q} \quad (a < x \leq b),$$

则反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛; 如果存在常数 $N > 0$, 使得

$$f(x) \geq \frac{N}{x-a} \quad (a < x \leq b),$$

则反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

定理 7(极限审敛法 2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, $x \rightarrow a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果存在常数 $0 < q < 1$, 使得

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^q f(x)$$

存在, 则反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛; 如果

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a) f(x) = d > 0 \quad (\text{或 } \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a) f(x) = +\infty),$$

则反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

例 6 判定反常积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的收敛性.

解 这里 $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 > 0,$$

根据极限审敛法 2, 所给反常积分发散.

例 7 判定椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1)$$

的收敛性.

解 这里 $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}, \end{aligned}$$

根据极限审敛法 2, 所给反常积分收敛.

对于无界函数的反常积分, 当被积函数在所讨论的区间上可取正值也可取负值时, 有与定理 5 相类似的结论, 在此不再详述.

例 8 判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ 的收敛性.

解 因为 $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, 而 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛, 根据比较审敛原理, 反常积分 $\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| dx$ 收敛, 从而反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ 也收敛.

三、Γ 函数

现在我们研究在理论上和应用上都有重要意义的 Γ 函数. 这函数的定义是

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0). \quad (1)$$

首先我们讨论(1)式右端积分的收敛性问题. 这个积分的积分区间为无穷, 又当 $s-1 < 0$ 时 $x=0$ 是被积函数的瑕点. 为此, 我们分别讨论下列两个积分

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

的收敛性.

先讨论 I_1 . 当 $s \geq 1$ 时, I_1 是定积分; 当 $0 < s < 1$ 时, 因为

$$e^{-x} \cdot x^{s-1} = \frac{1}{x^{1-s}} \cdot \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x^{1-s}},$$

而 $1-s < 1$, 根据比较审敛法 2, 反常积分 I_1 收敛.

再讨论 I_2 . 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot (e^{-x} x^{s-1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0,$$

根据极限审敛法 1, I_2 也收敛.

由以上讨论即得反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 对 $s > 0$ 均收敛. Γ 函数的图形如图 5-9 所示.

其次我们来讨论 Γ 函数的几个重要性质.

1. 递推公式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s > 0)$.

证 应用分部积分法, 有

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx = - \int_0^{+\infty} x^s de^{-x} \\ &= [-x^s e^{-x}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \\ &= s\Gamma(s), \end{aligned}$$

其中 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^s e^{-x} = 0$ 可由洛必达法则求得.

$$\text{显然, } \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

反复运用递推公式, 便有

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3!, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

一般地, 对任何正整数 n , 有

$$\Gamma(n+1) = n!$$

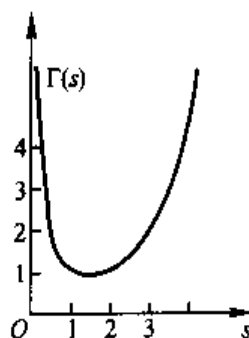


图 5-9

所以,我们可以把 Γ 函数看成是阶乘的推广.

2. 当 $s \rightarrow 0^+$ 时, $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$.

证 因为

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad \Gamma(1) = 1,$$

所以当 $s \rightarrow 0^+$ 时, $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$ ①.

3. $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (0 < s < 1)$.

这个公式称为余元公式,在此我们不作证明.

当 $s = \frac{1}{2}$ 时,由余元公式可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

4. 在 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 中,作代换 $x = u^2$,有

$$\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2s-1} du. \quad (2)$$

再令 $2s-1=t$ 或 $s = \frac{1+t}{2}$, 即有

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^t du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right), \quad (t > -1).$$

上式左端是应用上常见的积分,它的值可以通过上式用 Γ 函数计算出来.

在(2)中,令 $s = \frac{1}{2}$,得

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

上式左端的积分是在概率论中常用的积分.

* 习 题 5-5

1. 判定下列反常积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}};$$

① Γ 函数在 $s > 0$ 时连续.

$$(3) \int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\sin x|};$$

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx;$$

$$(6) \int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3};$$

$$(7) \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}} dx;$$

$$(8) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

2. 设反常积分 $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛. 证明反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛.

3. 用 Γ 函数表示下列积分, 并指出这些积分的收敛范围:

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx (n > 0);$$

$$(2) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^n} dx \quad (n \neq 0).$$

4. 证明 $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$, 其中 k 为自然数.

5. 证明以下各式(其中 n 为自然数):

$$(1) 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n \Gamma(n+1); \quad (2) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1} \Gamma(n)};$$

$$(3) \sqrt{\pi} \Gamma(2n) = 2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

(勒让德(Legendre)倍量公式).

总习题五

1. 填空

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的 _____ 条件, 而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的 _____ 条件;

(2) 对 $[a, +\infty)$ 上非负、连续的函数 $f(x)$, 它的变上限积分 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的 _____ 条件;

(3) 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 一定 _____;

(4) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义且 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积, 此时积分 $\int_a^b f(x) dx$ _____ 存在.

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} (p > 0);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3. 下列计算是否正确, 试说明理由:

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_1^{-1} \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \left[-\arctan \frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$(2) \text{ 因为 } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^{-1} \frac{dt}{t^2+t+1},$$

所以
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = 0.$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = 0.$$

4. 设 $p > 0$, 证明

$$\frac{p}{p+1} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < 1.$$

5. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均连续, 证明:

$$(1) \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \quad (\text{柯西-施瓦茨不等式});$$

$$(2) \left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{闵可夫斯基不等式}).$$

6. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$. 证明

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$$

7. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx;$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx;$$

$$(3) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx;$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$$

8. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)du \right) dt.$$

9. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}, \quad x \in [a, b].$$

证明:

$$(1) F'(x) \geq 2;$$

(2) 方程 $F(x)=0$ 在区间 (a, b) 内有且仅有一个根.

10. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0. \end{cases}$$

求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

11. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且不变号. 证明至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad (\text{积分第一中值定理}).$$

* 12. 证明: $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx \quad (n > 1)$, 并用它证明:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma(n+1) \quad (n \in \mathbf{N})$$

* 13. 判定下列反常积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 2}};$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3(x-1)(x-2)}}.$$

* 14. 计算下列反常积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)} \quad (a \geq 0).$$

第六章 定积分的应用

本章中我们将应用前面学过的定积分理论来分析和解决一些几何、物理中的问题,其目的不仅在于建立计算这些几何、物理量的公式,而且更重要的还在于介绍运用元素法将一个量表达成为定积分的分析方法.

第一节 定积分的元素法

在定积分的应用中,经常采用所谓元素法.为了说明这种方法,我们先回顾一下第五章中讨论过的曲边梯形的面积问题.

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) \geq 0$, 求以曲线 $y = f(x)$ 为曲边、底为 $[a, b]$ 的曲边梯形的面积 A . 把这个面积 A 表示为定积分

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

的步骤是:

(1) 用任意一组分点把区间 $[a, b]$ 分成长度为 $\Delta x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的 n 个小区间,相应地把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形,第 i 个窄曲边梯形的面积设为 ΔA_i ,于是有

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i;$$

(2) 计算 ΔA_i 的近似值

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i);$$

(3) 求和,得 A 的近似值

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i;$$

(4) 求极限,得

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

在上述问题中我们注意到,所求量(即面积 A)与区间 $[a, b]$ 有关.如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间,则所求量相应地分成许多部分量(即 ΔA_i),而所求量等于所有部分量之和(即 $A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i$),这一性质称为所求量对于区间

$[a, b]$ 具有可加性. 我们还要指出, 以 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替部分量 ΔA_i 时, 它们只相差一个比 Δx_i 高阶的无穷小, 因此和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限是 A 的精确值, 而 A 可以表示为定积分:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

在引出 A 的积分表达式的四个步骤中, 主要的是第二步, 这一步是要确定 ΔA_i 的近似值 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 使得

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

在实用上, 为了简便起见, 省略下标 i , 用 ΔA 表示任一小区间 $[x, x+dx]$ 上的窄曲边梯形的面积, 这样,

$$A = \sum \Delta A.$$

取 $[x, x+dx]$ 的左端点 x 为 ξ , 以点 x 处的函数值 $f(x)$ 为高、 dx 为底的矩形的面积 $f(x)dx$ 为 ΔA 的近似值 (如图 6-1 阴影部分所示), 即

$$\Delta A \approx f(x)dx.$$

上式右端 $f(x)dx$ 叫做面积元素, 记为 $dA = f(x)dx$. 于是

$$A \approx \sum f(x)dx,$$

则
$$A = \lim \sum f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

一般地, 如果某一实际问题中的所求量 U 符合下列条件:

(1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关的量;

(2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性, 就是说, 如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间, 则 U 相应地分成许多部分量, 而 U 等于所有部分量之和;

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$;

那么就可考虑用定积分来表达这个量 U . 通常写出这个量 U 的积分表达式的步骤是:

1) 根据问题的具体情况, 选取一个变量例如 x 为积分变量, 并确定它的变化区间 $[a, b]$;

2) 设想把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 取其中任一小区间并记作 $[x, x+dx]$, 求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值. 如果 ΔU 能近似地表示为

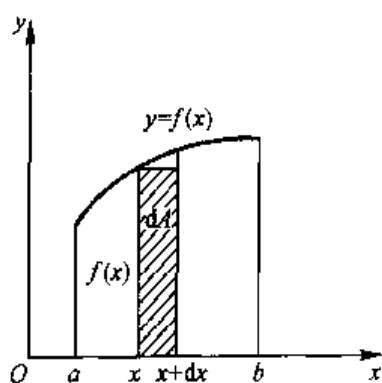


图 6-1

$[a, b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积^①, 就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 dU , 即

$$dU = f(x)dx;$$

3) 以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式, 在区间 $[a, b]$ 上作定积分, 得

$$U = \int_a^b f(x)dx.$$

这就是所求量 U 的积分表达式.

这个方法通常叫做元素法. 下面两节中我们将应用这个方法来讨论几何、物理中的一些问题.

第二节 定积分在几何学上的应用

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

在第五章中我们已经知道, 由曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) 及直线 $x = a$, $x = b$ ($a < b$) 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

其中被积表达式 $f(x)dx$ 就是直角坐标下的面积元素, 它表示高为 $f(x)$ 、底为 dx 的一个矩形面积.

应用定积分, 不但可以计算曲边梯形面积, 还可以计算一些比较复杂的平面图形的面积.

例 1 计算由两条抛物线: $y^2 = x$ 、 $y = x^2$ 所围成的图形的面积.

解 这两条抛物线所围成的图形如图 6-2 所示. 为了具体定出图形的所在范围, 先求出这两条抛物线的交点. 为此, 解方程组

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2, \end{cases}$$

得到两个解:

$$x = 0, y = 0 \quad \text{及} \quad x = 1, y = 1.$$

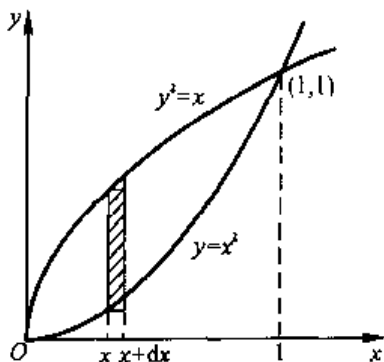


图 6-2

^① 这里 ΔU 与 $f(x)dx$ 相差一个比 dx 高阶的无穷小.

即这两抛物线的交点为 $(0,0)$ 及 $(1,1)$,从而知道这图形在直线 $x=0$ 与 $x=1$ 之间.

取横坐标 x 为积分变量,它的变化区间为 $[0,1]$. 相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄条的面积近似于高为 $\sqrt{x}-x^2$ 、底为 dx 的窄矩形的面积,从而得到面积元素

$$dA = (\sqrt{x} - x^2)dx.$$

以 $(\sqrt{x}-x^2)dx$ 为被积表达式,在闭区间 $[0,1]$ 上作定积分,便得所求面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

解 这个图形如图 6-3 所示. 为了定出这图形所在的范围,先求出所给抛物线和直线的交点. 解方程组

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x - 4, \end{cases}$$

得交点 $(2, -2)$ 和 $(8, 4)$,从而知道这图形在直线 $y = -2$ 及 $y = 4$ 之间.

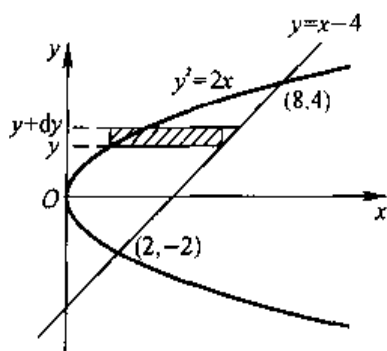


图 6-3

现在,选取纵坐标 y 为积分变量,它的变化区间为 $[-2, 4]$ (读者可以思考一下,取横坐标 x 为积分变量,有什么不方便的地方). 相应于 $[-2, 4]$ 上任一小区间 $[y, y+dy]$ 的窄条面积近似于高为 dy 、底为 $(y+4) - \frac{1}{2}y^2$ 的窄矩形的面积,从而得到面积元素

$$dA = \left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy.$$

以 $\left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy$ 为被积表达式,在闭区间 $[-2, 4]$ 上作定积分,便得所求的面积

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 \left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^4 \\ &= 18. \end{aligned}$$

由例 2 我们可以看到,积分变量选得适当,就可使计算方便.

例 3 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的图形的面积.

解 这椭圆关于两坐标轴都对称(图 6-4),所以椭圆所围成的图形的面积

为

$$A = 4A_1,$$

其中 A_1 为该椭圆在第一象限部分与两坐标轴所围图形的面积, 因此

$$A = 4A_1 = 4 \int_0^a y dx.$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

应用定积分换元法, 令 $x = a \cos t$, 则

$$y = b \sin t, \quad dx = -a \sin t dt.$$

当 x 由 0 变到 a 时, t 由 $\frac{\pi}{2}$ 变到 0, 所以

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

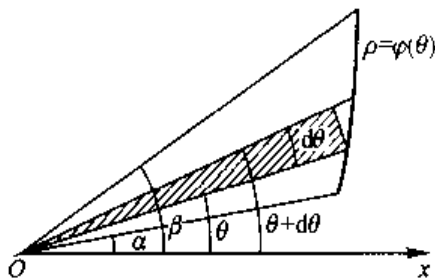
当 $a = b$ 时, 就得到大家所熟悉的圆面积的公式 $A = \pi a^2$.

2. 极坐标情形

某些平面图形, 用极坐标来计算它们的面积比较方便.

设由曲线 $\rho = \varphi(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成一图形(简称为曲边扇形), 现在要计算它的面积(图 6-5). 这里, $\varphi(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $\varphi(\theta) \geq 0$.

由于当 θ 在 $[\alpha, \beta]$ 上变动时, 极径 $\rho = \varphi(\theta)$ 也随之变动, 因此所求图形的面积不能直接利



用圆扇形面积的公式 $A = \frac{1}{2} R^2 \theta$ 来计算.

图 6-5

取极角 θ 为积分变量, 它的变化区间为 $[\alpha, \beta]$. 相应于任一小区间 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的窄曲边扇形的面积可以用半径为 $\rho = \varphi(\theta)$ 、中心角为 $d\theta$ 的圆扇形的面积来近似代替, 从而得到这窄曲边扇形面积的近似值, 即曲边扇形的面积元素

$$dA = \frac{1}{2} [\varphi(\theta)]^2 d\theta.$$

以 $\frac{1}{2} [\varphi(\theta)]^2 d\theta$ 为被积表达式, 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上作定积分, 便得所求曲边扇形的面积为

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} [\varphi(\theta)]^2 d\theta.$$

例 4 计算阿基米德螺线

$$\rho = a\theta \quad (a > 0)$$

上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形(图 6-6)的面积.

解 在指定的这段螺线上, θ 的变化区间为 $[0, 2\pi]$. 相应于 $[0, 2\pi]$ 上任一小区间 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的窄曲边扇形的面积近似于半径为 $a\theta$ 、中心角为 $d\theta$ 的圆扇形的面积. 从而得到面积元素

$$dA = \frac{1}{2} (a\theta)^2 d\theta.$$

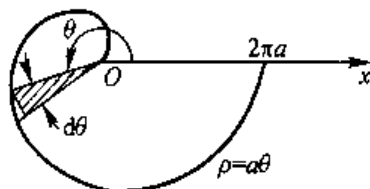


图 6-6

于是所求面积为

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} \theta^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a^2 \pi^3.$$

例 5 计算心形线

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0)$$

所围成的图形的面积.

解 心形线所围成的图形如图 6-7 所示. 这个图形对称于极轴, 因此所求图形的面积 A 是极轴以上部分图形面积 A_1 的两倍.

对于极轴以上部分的图形, θ 的变化区间为 $[0, \pi]$. 相应于 $[0, \pi]$ 上任一小区间 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的窄曲边扇形的面积近似于半径为 $a(1 + \cos \theta)$ 、中心角为 $d\theta$ 的圆扇形的面积. 从而得到面积元素

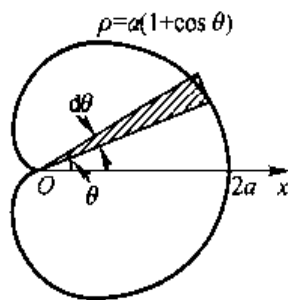


图 6-7

$$dA = \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta,$$

于是

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3}{2} \theta + 2\sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{3}{4} \pi a^2, \end{aligned}$$

因而所求面积为

$$A = 2A_1 = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

二、体积

1. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴. 圆柱、圆锥、圆台、球体可以分别看成是由矩形绕它的一条边、

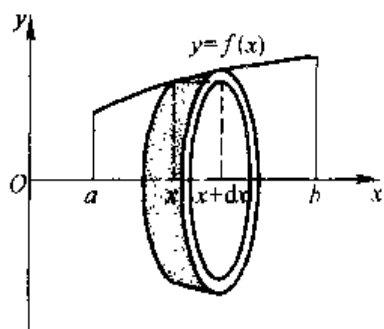


图 6-8

直角三角形绕它的直角边、直角梯形绕它的直角腰、半圆绕它的直径旋转一周而成的立体, 所以它们都是旋转体.

上述旋转体都可以看作是由连续曲线 $y=f(x)$ 、直线 $x=a$ 、 $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体. 现在我们考虑用定积分来计算这种旋转体的体积.

取横坐标 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[a, b]$. 相应于 $[a, b]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径、 dx 为高的扁圆柱体的体积(图 6-8), 即体积元素

$$dV = \pi [f(x)]^2 dx.$$

以 $\pi [f(x)]^2 dx$ 为被积表达式, 在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分, 便得所求旋转体体积为

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

例 6 连接坐标原点 O 及点 $P(h, r)$ 的直线、直线 $x=h$ 及 x 轴围成一个直角三角形(图 6-9). 将它绕 x 轴旋转一周构成一个底半径为 r 、高为 h 的圆锥体. 计算这圆锥体的体积.

解 过原点 O 及点 $P(h, r)$ 的直线方程为

$$y = \frac{r}{h}x.$$

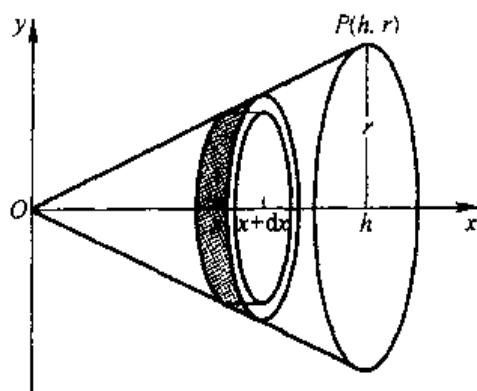


图 6-9

取横坐标 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[0, h]$. 圆锥体中相应于 $[0, h]$ 上任一小区间 $[x, x+dx]$ 的薄片的体积近似于底半径为 $\frac{r}{h}x$ 、高为 dx 的扁圆柱体的体积, 即体积元素

$$dV = \pi \left[\frac{r}{h}x \right]^2 dx.$$

于是所求圆锥体的体积为

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

例 7 计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体(叫做旋转椭球体)的体积.

解 这个旋转椭球体也可以看作是由半个椭圆

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体.

取 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[-a, a]$. 旋转椭球体中相应于 $[-a, a]$ 上任一小区间 $[x, x+dx]$ 的薄片的体积, 近

似于底半径为 $\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 、高为 dx 的扁圆柱

体的体积(图 6-10), 即体积元素

$$dV = \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx.$$

于是所求旋转椭球体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx \\ &= \pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

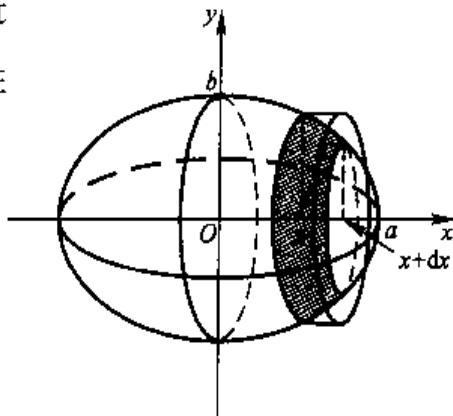


图 6-10

当 $a = b$ 时, 旋转椭球体就成为半径为 a 的球体, 它的体积为 $\frac{4}{3} \pi a^3$.

用与上面类似的方法可以推出: 由曲线 $x = \varphi(y)$ 、直线 $y = c$ 、 $y = d$ ($c < d$) 与 y 轴所围成的曲边梯形, 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体(图 6-11)的体积为

$$V = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy.$$

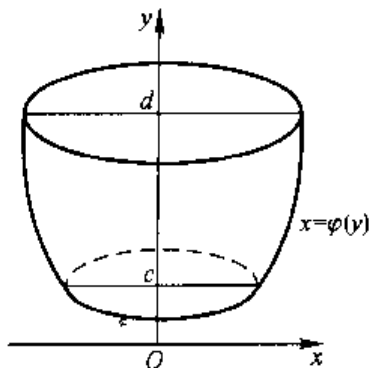


图 6-11

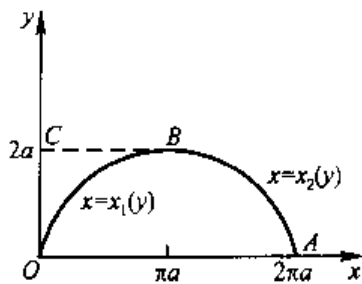


图 6-12

例 8 计算由摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱, 直线 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 按旋转体的体积公式, 所述图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x) dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

所述图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积可看成平面图形 $OABC$ 与 OBC (图 6-12) 分别绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积之差. 因此所求的体积为

$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy \\ &= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt - \pi \int_0^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt \\ &= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

2. 平行截面面积为已知的立体的体积

从计算旋转体体积的过程中可以看出: 如果一个立体不是旋转体, 但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面的面积, 那么, 这个立体的体积也可以用定积分来计算.

如图 6-13 所示, 取上述定轴为 x 轴, 并设该立体在过点 $x = a$ 、 $x = b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间. 以 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积. 假定 $A(x)$ 为 x 的已知的连续函数. 这时, 取 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[a, b]$; 立体中相应于 $[a, b]$ 上任一小区间 $[x, x + dx]$ 的一薄片的体积, 近似于底面积为 $A(x)$ 、高为 dx 的扁柱体的体积, 即体积元素

$$dV = A(x)dx.$$

以 $A(x)dx$ 为被积表达式, 在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分, 便得所求立体的体积

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

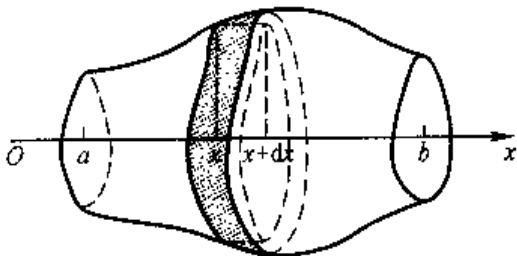


图 6-13

例 9 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 并与底面交成角 α (图

6-14). 计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

解 取这平面与圆柱体的底面的交线为 x 轴, 底面上过圆中心、且垂直于 x 轴的直线为 y 轴. 那么, 底圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$. 立体中过 x 轴上的点 x 且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形. 它的两条直角边的长分别为 y 及 $y \tan \alpha$, 即 $\sqrt{R^2 - x^2}$ 及 $\sqrt{R^2 - x^2} \tan \alpha$. 因而截面积为 $A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \tan \alpha$, 于是所求立体体积为

$$V = \int_{-R}^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2) \tan \alpha dx = \frac{1}{2} \tan \alpha \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^R - \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$$

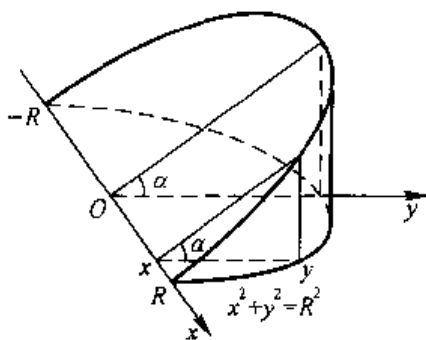


图 6-14

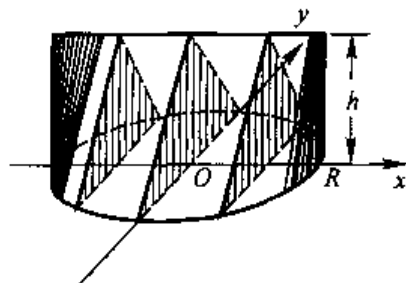


图 6-15

例 10 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 取底圆所在的平面为 xOy 平面, 圆心 O 为原点, 并使 x 轴与正劈锥的顶平行(图 6-15). 底圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$. 过 x 轴上的点 x ($-R \leq x \leq R$) 作垂直于 x 轴的平面, 截正劈锥体得等腰三角形. 这截面的面积为

$$A(x) = h \cdot y = h \sqrt{R^2 - x^2},$$

于是所求正劈锥体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R A(x) dx = h \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= 2R^2 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^2 h}{2}. \end{aligned}$$

由此可知正劈锥体的体积等于同底同高的圆柱体体积的一半.

三、平面曲线的弧长

我们知道, 圆的周长可以利用圆的内接正多边形的周长当边数无限增多时的极限来确定. 现在用类似的方法来建立平面的连续曲线弧长的概念, 从而应用

定积分来计算弧长.

设 A, B 是曲线弧上的两个端点(图 6-16). 在弧 \widehat{AB} 上依次任取分点 $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M_n = B$, 并依次连接相邻的分点得一内接折线(图 6-16). 当分点的数目无限增加且每个小段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 都缩向一点时, 如果此折线的长 $\sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$

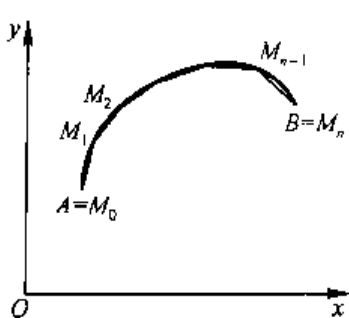


图 6-16

的极限存在, 则称此极限为曲线弧 \widehat{AB} 的弧长, 并称此曲线弧 \widehat{AB} 是可求长的.

对光滑的曲线弧(参看第 169 页上的脚注), 我们有如下结论:

定理 光滑曲线弧是可求长的.

这个定理我们不加证明. 由于光滑曲线弧是可求长的, 故可应用定积分来计算弧长. 下面我们利用定积分的元素法来讨论平面光滑曲线弧长的计算公式.

设曲线弧由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq \beta)$$

给出, 其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[a, \beta]$ 上具有连续导数. 现在来计算这曲线弧的长度.

取参数 t 为积分变量, 它的变化区间为 $[a, \beta]$. 相应于 $[a, \beta]$ 上任一小区间 $[t, t+dt]$ 的小弧段的长度 Δs 近似等于对应的弦的长度 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 因为

$$\Delta x = \varphi(t+dt) - \varphi(t) \approx dx = \varphi'(t)dt,$$

$$\Delta y = \psi(t+dt) - \psi(t) \approx dy = \psi'(t)dt,$$

所以, Δs 的近似值(弧微分)即弧长元素为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t)(dt)^2 + \psi'^2(t)(dt)^2} \\ &= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \end{aligned}$$

于是所求弧长为

$$s = \int_a^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

当曲线弧由直角坐标方程

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 这时曲线弧有参数方程

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$$

从而所求的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx.$$

当曲线弧由极坐标方程

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

给出, 其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数, 则

由直角坐标与极坐标的关系可得

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta, \\ y = \rho(\theta) \sin \theta, \end{cases} \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta).$$

这就是以极角 θ 为参数的曲线弧的参数方程. 于是, 弧长元素为

$$ds = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta,$$

从而所求弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

例 11 计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应于 x 从 a 到 b 的一段弧(图 6-17)的长度.

解 $y' = x^{1/2}$, 从而弧长元素

$$ds = \sqrt{1 + (x^{1/2})^2} dx = \sqrt{1+x} dx.$$

因此, 所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \right]_a^b \\ &= \frac{2}{3} [(1+b)^{3/2} - (1+a)^{3/2}]. \end{aligned}$$

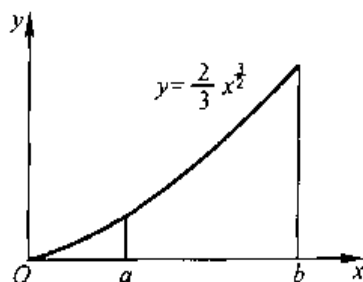


图 6-17

例 12 两根电线杆之间的电线, 由于其本身的重量, 下垂成曲线形. 这样的曲线叫悬链线. 适当选取坐标系后, 悬链线的方程为

$$y = c \operatorname{ch} \frac{x}{c},$$

其中 c 为常数. 计算悬链线上介于 $x = -b$ 与 $x = b$ 之间一段弧(图 6-18)的长度.

解 由于对称性, 要计算的弧长为相应于 x 从 0 到 b 的一段曲线弧长的两倍.

$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{c}$, 从而弧长元素

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{c}} dx = c \operatorname{ch} \frac{x}{c} dx.$$

因此, 所求弧长为

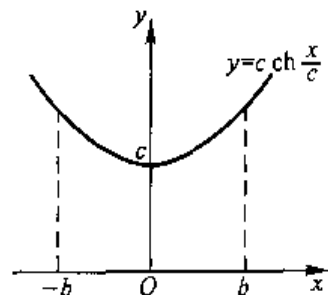


图 6-18

$$s = 2 \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{c} dx = 2c \left[\operatorname{sh} \frac{x}{c} \right]_0^b = 2c \operatorname{sh} \frac{b}{c}.$$

例 13 计算摆线(图 6-19)

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

的一拱($0 \leq \theta \leq 2\pi$)的长度.

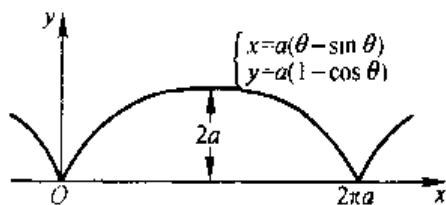


图 6-19

解 弧长元素为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos \theta)} d\theta = 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned}$$

从而, 所求弧长

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 2a \left[-2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

例 14 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ ($a > 0$) 相应于 θ 从 0 到 2π 一段(图 6-20)的弧长.

解 弧长元素为

$$ds = \sqrt{a^2 \theta^2 + a^2} d\theta = a \sqrt{1 + \theta^2} d\theta.$$

于是所求弧长为

$$s = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{a}{2} [2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})].$$

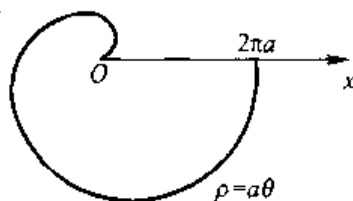


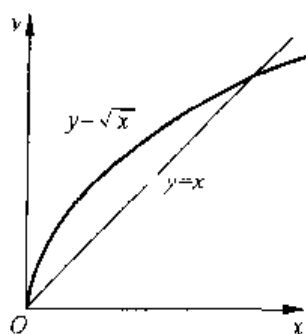
图 6-20

习 题 6-2

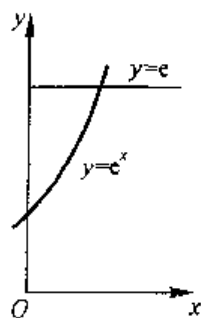
1. 求图 6-21 中各画斜线部分的面积;
2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积;

(1) $y = \frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2 + y^2 = 8$ (两部分都要计算);

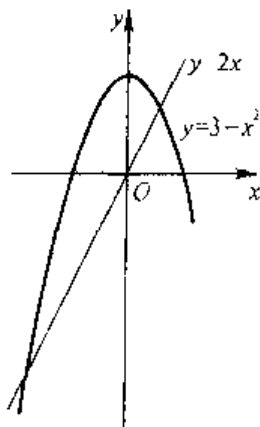
(2) $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 及 $x = 2$;



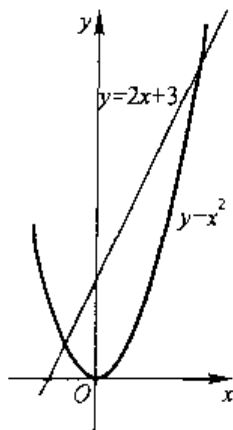
(1)



(2)



(3)



(4)

图 6 21

(3) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ 与直线 $x = 1$;

(4) $y = \ln x$, y 轴与直线 $y = \ln a$, $y = \ln b$ ($b > a > 0$).

3. 求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 及其在点 $(0, -3)$ 和 $(3, 0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

4. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的法线所围成的图形的面积.

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $\rho = 2a \cos \theta$;

(2) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$;

(3) $\rho = 2a(2 + \cos \theta)$.

6. 求出摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与横轴所围成的图形的面积.

7. 求对数螺线 $\rho = ae^{\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) 及射线 $\theta = \pi$ 所围成的图形的面积.

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积:

(1) $\rho = 3 \cos \theta$ 及 $\rho = 1 + \cos \theta$;

(2) $\rho = \sqrt{2} \sin \theta$ 及 $\rho^2 = \cos 2\theta$.

9. 求位于曲线 $y = e^{-x}$ 下方, 该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的

面积.

10. 求由抛物线 $y^2 = 4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

11. 把抛物线 $y^2 = 4ax$ 及直线 $x = x_0$ ($x_0 > 0$) 所围成的图形绕 x 轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

12. 由 $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ 所围成的图形, 分别绕 x 轴及 y 轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.

13. 把星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转(图 6-22), 计算所得旋转体的体积.

14. 用积分方法证明图 6-23 中球缺的体积为

$$V = \pi H^2 \left(R + \frac{H}{3} \right).$$

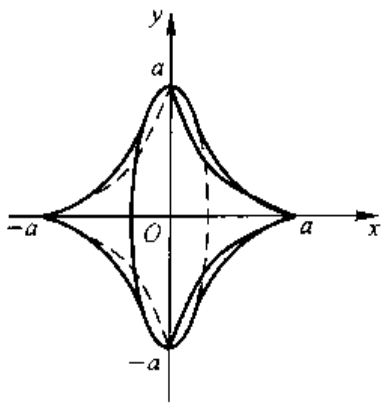


图 6-22

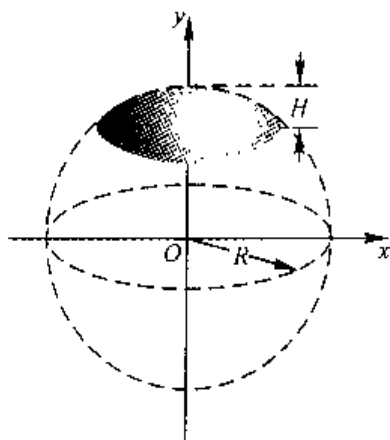


图 6-23

15. 求下列已知曲线所围成的图形, 按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y = x^2$, $x = y^2$, 绕 y 轴;

(2) $y = a \cosh \frac{x}{a}$, $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, 绕 x 轴;

(3) $x^2 + (y - 5)^2 = 16$, 绕 x 轴;

(4) 摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱, $y = 0$, 绕直线 $y = 2a$.

16. 求圆盘 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 绕 $x = b$ ($b > a > 0$) 旋转所成旋转体的体积.

17. 设有一截锥体, 其高为 h , 上、下底均为椭圆, 椭圆的轴长分别为 $2a, 2b$ 和 $2A, 2B$, 求这截锥体的体积.

18. 计算底面是半径为 R 的圆, 而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积(图 6-24).

19. 证明: 由平面图形 $0 \leq a \leq r \leq b, 0 \leq y \leq f(r)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

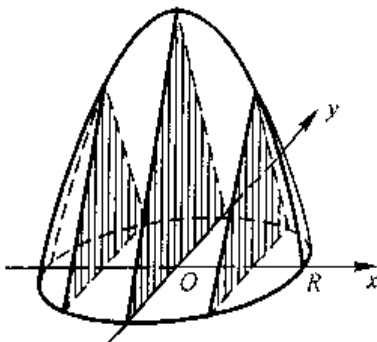


图 6-24

20. 利用题 19 的结论, 计算曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

21. 计算曲线 $y = \ln x$ 上相应于 $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

22. 计算曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1 \leq x \leq 3$ 的一段弧(图 6-25)的长度.

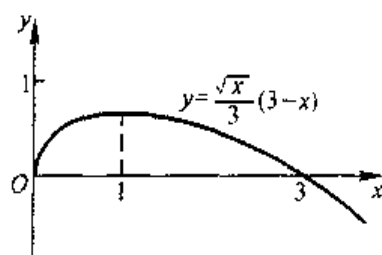


图 6-25

23. 计算半立方抛物线 $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2 = -\frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

24. 计算抛物线 $y^2 = 2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x, y)$ 的弧长.

25. 计算星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ (图 6-26) 的全长.

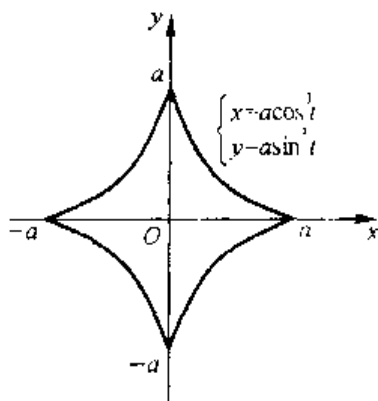


图 6-26

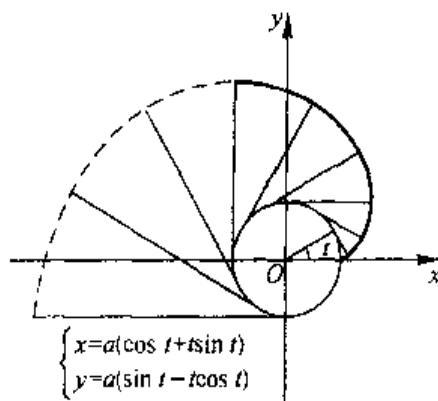


图 6-27

26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直, 使细线与圆周始终相切(图 6-27), 细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线, 它的方程为

$$x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t).$$

算出这曲线上相应于 t 从 0 变到 π 的一段弧的长度.

27. 在摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 上求分摆线第一拱成 1:3 的点的坐标.

28. 求对数螺线 $\rho = e^{2\theta}$ 相应于自 $\theta = 0$ 到 $\theta = \varphi$ 的一段弧长.

29. 求曲线 $\rho\theta = 1$ 相应于自 $\theta = \frac{3}{4}$ 至 $\theta = \frac{4}{3}$ 的一段弧长.

30. 求心形线 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ 的全长.

第三节 定积分在物理学上的应用

一、变力沿直线所作的功

从物理学知道, 如果物体在作直线运动的过程中有一个不变的力 F 作用在

这物体上,且这力的方向与物体运动的方向一致,那么,在物体移动了距离 s 时,力 F 对物体所作的功为

$$W = F \cdot s.$$

如果物体在运动过程中所受到的力是变化的,这就会遇到变力对物体做功的问题.下面通过具体例子说明如何计算变力所作的功.

例 1 把一个带 $+q$ 电荷量的点电荷放在 r 轴上坐标原点 O 处,它产生一个电场.这个电场对周围的电荷有作用力.由物理学知道,如果有一个单位正电荷放在这个电场中距离原点 O 为 r 的地方,那么电场对它的作用力的大小为

$$F = k \frac{q}{r^2} \quad (k \text{ 是常数}).$$

如图 6-28,当这个单位正电荷在电场中从 $r = a$ 处沿 r 轴移动到 $r = b$ ($a < b$) 处时,计算电场力 F 对它所作的功.

解 在上述移动过程中,电场对这单位正电荷的作用力是变的.取 r 为积分变量,它的变化区间为 $[a, b]$. 设 $[r, r + dr]$ 为 $[a, b]$ 上的任一小区间.当单位正电荷从 r 移动到 $r + dr$ 时,电场力对它所作的功近似于 $\frac{kq}{r^2} dr$,即功元素为

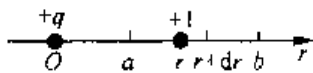


图 6-28

$$dW = \frac{kq}{r^2} dr.$$

于是所求的功为

$$W = \int_a^b \frac{kq}{r^2} dr = kq \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = kq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

在计算静电场中某点的电位时,要考虑将单位正电荷从该点处 ($r = a$) 移到无穷远处时电场力所作的功 W . 此时,电场力对单位正电荷所作的功就是反常积分:

$$\begin{aligned} W &= \int_a^{+\infty} \frac{kq}{r^2} dr = \left[-\frac{kq}{r} \right]_a^{+\infty} \\ &= \frac{kq}{a}. \end{aligned}$$

例 2 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体.在等温条件下,由于气体的膨胀,把容器中的一个活塞(面积为 S) 从点 a 处推移到点 b 处(图 6-29).计算在移动过程中,气体压力所作的功.

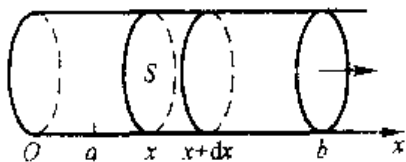


图 6-29

解 取坐标系如图 6-29 所示.活塞的位置可以用坐标 x 来表示.由物理学知道,一定量的

气体在等温条件下,压强 p 与体积 V 的乘积是常数 k ,即

$$pV = k \quad \text{或} \quad p = \frac{k}{V}.$$

因为 $V = xS$, 所以

$$p = \frac{k}{xS}.$$

于是,作用在活塞上的力

$$F = p \cdot S = \frac{k}{xS} \cdot S = \frac{k}{x}.$$

在气体膨胀过程中,体积 V 是变的,因而 x 也是变的,所以作用在活塞上的力也是变的.

取 x 为积分变量,它的变化区间为 $[a, b]$. 设 $[x, x + dx]$ 为 $[a, b]$ 上任一小区间. 当活塞从 x 移动到 $x + dx$ 时,变力 F 所作的功近似于 $\frac{k}{x} dx$, 即功元素为

$$dW = \frac{k}{x} dx.$$

于是所求的功为

$$W = \int_a^b \frac{k}{x} dx = k [\ln x]_a^b = k \ln \frac{b}{a}.$$

下面再举一个计算功的例子,它虽不是一个变力作功问题,但也用积分来计算.

例 3 一圆柱形的贮水桶高为 5 m, 底圆半径为 3 m, 桶内盛满了水. 试问要把桶内的水全部吸出需作多少功?

解 作 x 轴如图 6-30 所示. 取深度 x 为积分变量. 它的变化区间为 $[0, 5]$, 相应于 $[0, 5]$ 上任一小区间 $[x, x + dx]$ 的一薄层水的高度为 dx . 因此如 x 的单位为 m, 这薄层水的重力为 $9.8\pi \cdot 3^2 dx$ kN. 把这薄层水吸出桶外需作的功近似地为

$$dW = 88.2\pi \cdot x \cdot dx,$$

此即功元素. 于是所求的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^5 88.2\pi x dx = 88.2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 \\ &= 88.2\pi \cdot \frac{25}{2} \approx 3462 \text{ (kJ)}. \end{aligned}$$

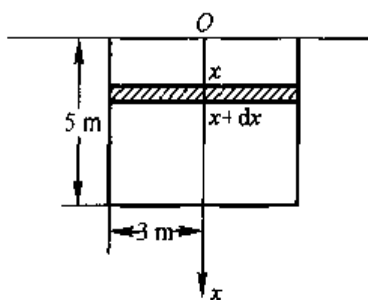


图 6-30

二、水压力

从物理学知道,在水深为 h 处的压强为 $p = \rho gh$, 这里 ρ 是水的密度, g 是重力加速度. 如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处, 那么, 平板一侧所受的水压力为

$$P = p \cdot A.$$

如果平板铅直放置在水中, 那么, 由于水深不同的点处压强 p 不相等, 平板一侧所受的水压力就不能用上述方法计算. 下面我们举例说明它的计算方法.

例 4 一个横放着的圆柱形水桶, 桶内盛有半桶水(图 6-31(a)). 设桶的底半径为 R , 水的密度为 ρ , 计算桶的一个端面上所受的压力.

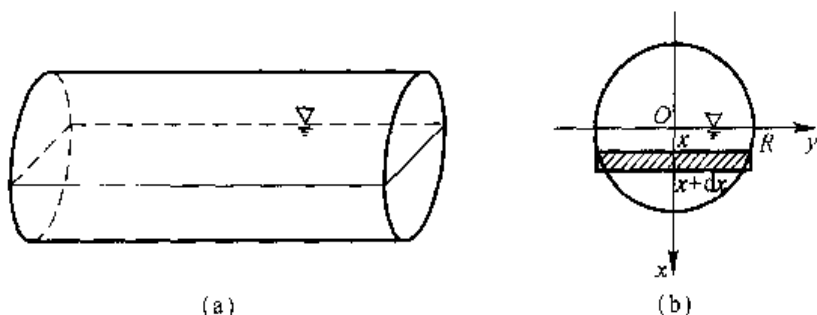


图 6-31

解 桶的一个端面是圆片, 所以现在要计算的是当水平面通过圆心时, 铅直放置的一个半圆片的一侧所受到的水压力.

如图 6-31(b), 在这个圆片上取过圆心且铅直向下的直线为 x 轴, 过圆心的水平线为 y 轴. 对这个坐标系来讲, 所讨论的半圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$ ($0 \leq x \leq R$). 取 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[0, R]$. 设 $[x, x + dx]$ 为 $[0, R]$ 上的任一小区间, 半圆片上相应于 $[x, x + dx]$ 的窄条上各点处的压强近似于 ρgx , 这窄条的面积近似于 $2\sqrt{R^2 - x^2}dx$. 因此, 这窄条一侧所受水压力的近似值, 即压力元素为

$$dP = 2\rho gx \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

于是所求压力为

$$\begin{aligned} P &= \int_0^R 2\rho gx \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\rho g \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) \\ &= -\rho g \left[\frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{2\rho g}{3} R^3. \end{aligned}$$

三、引力

从物理学知道,质量分别为 m_1, m_2 , 相距为 r 的两质点间的引力的大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

其中 G 为引力系数,引力的方向沿着两质点的连线方向.

如要计算一根细棒对一个质点的引力,那么,由于细棒上各点与该质点的距离是变化的,且各点对该质点的引力的方向也是变化的,因此就不能用上述公式来计算.下面我们举例说明它的计算方法.

例 5 设有一长度为 l 、线密度为 μ 的均匀细直棒,在其中垂线上距棒 a 单位处有一质量为 m 的质点 M . 试计算该棒对质点 M 的引力.

解 取坐标系如图 6-32 所示,使棒位于 y 轴上,质点 M 位于 x 轴上,棒的中点为原点 O . 取 y 为积分变量,它的变化区间为 $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$. 设 $[y, y+dy]$ 为 $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ 上任一小区间. 把细直棒上相应于 $[y, y+dy]$ 的一段近似地看成质点,其质量为 μdy , 与 M 相距 $r = \sqrt{a^2 + y^2}$. 因此可以按照两质点间的引力计算公式求出这段细直棒对质点 M 的引力 ΔF 的大小为

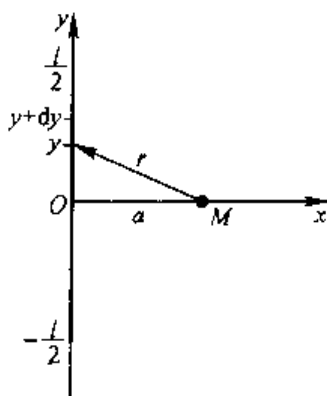


图 6-32

$$\Delta F \approx G \frac{m\mu dy}{a^2 + y^2},$$

从而求出 ΔF 在水平方向分力 ΔF_x 的近似值,即细直棒对质点 M 的引力在水平方向分力 F_x 的元素为

$$dF_x = -G \frac{am\mu dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

于是得引力在水平方向分力为

$$\begin{aligned} F_x &= - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{Gam\mu}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy \\ &= - \frac{2Gm\mu l}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a^2 + l^2}}. \end{aligned}$$

由对称性知,引力在铅直方向分力为 $F_y = 0$.

当细直棒的长度 l 很大时,可视 l 趋于无穷. 此时,引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{a}$, 方

向与细棒垂直且由 M 指向细棒.

习 题 6-3

1. 由实验知道, 弹簧在拉伸过程中, 需要的力 F (单位: N) 与伸长量 s (单位: cm) 成正比, 即

$$F = ks \quad (k \text{ 是比例常数}).$$

如果把弹簧由原长拉伸 6 cm, 计算所作的功.

2. 直径为 20 cm、高为 80 cm 的圆筒内充满压强为 10 N/cm^2 的蒸汽, 设温度保持不变, 要使蒸汽体积缩小一半, 问需要作多少功?

3. (1) 证明: 把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W = \frac{mgRh}{R+h}$$

其中 g 是地面上的重力加速度, R 是地球的半径;

(2) 一颗人造地球卫星的质量为 173 kg, 在高于地面 630 km 处进入轨道. 问把这颗卫星从地面送到 630 km 的高空处, 克服地球引力要作多少功? 已知 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 地球半径 $R = 6370 \text{ km}$.

4. 一物体按规律 $s = ct^2$ 作直线运动, 介质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由 $t = 0$ 移至 $t = a$ 时, 克服介质阻力所作的功.

5. 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比. 在击第一次时, 将铁钉击入木板 1 cm. 如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等, 问锤击第二次时, 铁钉又击入多少?

6. 设一锥形贮水池, 深 15 m, 口径 20 m, 盛满水, 今以唧筒将水吸尽, 问要作多少功?

7. 有一闸门, 它的形状和尺寸如图 6-33 所示, 水面超过门顶 2 m. 求闸门上所受的静压力.

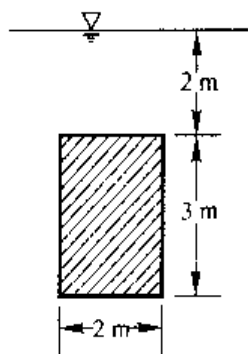


图 6-33

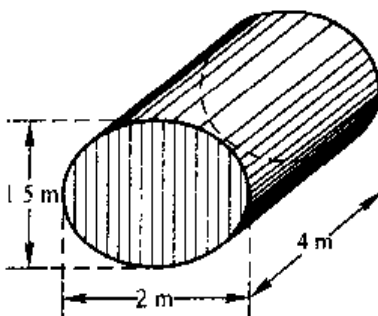


图 6-34

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体, 尺寸如图 6-34 所示. 当水箱装满水时, 计算水箱的一个端面所受的压力.

9. 有一等腰梯形闸门, 它的两条底边各长 10 m 和 6 m, 高为 20 m. 较长的底边与水面相

齐,计算闸门的一侧所受的水压力

10. 一底为 8 cm、高为 6 cm 的等腰三角形片,铅直地沉没在水中,顶在上,底在下且与水面平行,而顶离水面 3 cm,试求它每面所受的压力.

11. 设有一长度为 l 、线密度为 μ 的均匀细直棒,在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M ,试求这细棒对质点 M 的引力.

12. 设有一半径为 R 、中心角为 φ 的圆弧形细棒,其线密度为常数 μ . 在圆心处有一质量为 m 的质点 M ,试求这细棒对质点 M 的引力.

总习题六

1. 一金属棒长 3 m,离棒左端 x m 处的线密度为 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (kg/m). 问 x 为何值时, $[0, x]$ 一段的质量为全棒质量的一半.

2. 求由曲线 $\rho = a \sin \theta$, $\rho = a(\cos \theta + \sin \theta)$ ($a > 0$) 所围图形公共部分的面积.

3. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0, 0)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $y \geq 0$. 试确定 a, b, c 的值, 使得抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$, 且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

4. 求由曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 与直线 $x = 4, x$ 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

5. 求圆盘 $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

6. 求抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2 + y^2 = 3$ 所截下的有限部分的弧长.

7. 半径为 r 的球沉入水中,球的上部与水面相切,球的密度与水相同,现将球从水中取出,需作多少功?

8. 边长为 a 和 b 的矩形薄板,与液面成 α 角斜沉于液体中,长边平行于液面而位于深 h 处,设 $a > b$,液体的密度为 ρ ,试求薄板每面所受的压力.

9. 设星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方,在原点 O 处有一单位质点,求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

第七章 空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中,通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来,把平面上的图形和方程对应起来,从而可以用代数方法来研究几何问题.空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样,空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

本章先引进向量的概念,根据向量的线性运算建立空间坐标系,然后利用坐标讨论向量的运算,并介绍空间解析几何的有关内容.

第一节 向量及其线性运算

一、向量概念

客观世界中有这样一类量,它们既有大小,又有方向,例如位移、速度、加速度、力、力矩等等,这一类量叫做向量(或矢量).

在数学上,往往用一条有方向的线段,即有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 A 为起点、 B 为终点的有向线段所表示的向量记作 \overrightarrow{AB} (图 7-1). 有时也用一黑体字母(书写时,在字母上面加箭头)来表示向量,例如 \mathbf{a} 、 \mathbf{r} 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{F} 或 \vec{a} 、 \vec{r} 、 \vec{v} 、 \vec{F} 等等.

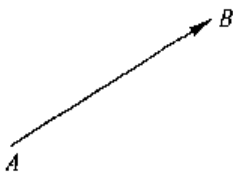


图 7-1

在实际问题中,有些向量与其起点有关(例如质点的运动的速度与该质点的位置有关,一个力与该力的作用点的位置有关),有些向量与其起点无关.由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,因此在数学上我们只研究与起点无关的向量,并称这种向量为自由向量(以后简称向量),即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么地方.当遇到与起点有关的向量时,可在一般原则下作特别处理.

由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的大小相等,且方向相同,我们就说向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 是相等的,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. 这就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模. 向量 \overrightarrow{AB} 、 \mathbf{a} 、 \vec{a} 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量,模等于零的向量叫做零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量

的起点和终点重合,它的方向可以看作是任意的.

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反,就称这两个向量平行. 向量 a 与 b 平行,记作 $a \parallel b$. 由于零向量的方向可以看作是任意的,因此可以认为零向量与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点应在一条直线上. 因此,两向量平行,又称两向量共线.

类似还有向量共面的概念. 设有 $k(k \geq 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下:

设有两个向量 a 与 b ,任取一点 A ,作 $\overrightarrow{AB} = a$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC} = b$,连接 AC (图 7-2),那么向量 $\overrightarrow{AC} = c$ 称为向量 a 与 b 的和,记作 $a + b$,即

$$c = a + b.$$

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

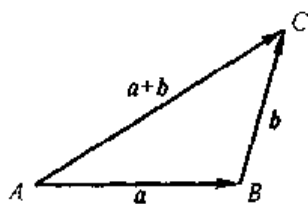


图 7-2

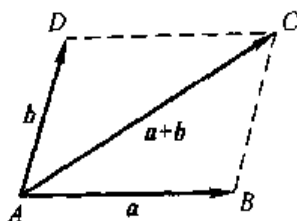


图 7-3

力学上有求合力的平行四边形法则,仿此,我们也有向量相加的平行四边形法则. 这就是:当向量 a 与 b 不平行时,作 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$,以 AB 、 AD 为边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC (图 7-3),显然向量 \overrightarrow{AC} 即等于向量 a 与 b 的和 $a + b$.

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $a + b = b + a$;

(2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$.

这是因为,按向量加法的规定(三角形法则),从图 7-3 可见:

$$a + b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = c,$$

$$b + a = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = c,$$

所以符合交换律. 又如图 7-4 所示,先作 $a + b$ 再加上 c ,即得和 $(a + b) + c$,如以 a 与 $b + c$ 相加,则得同一结果,所以符合结合律.

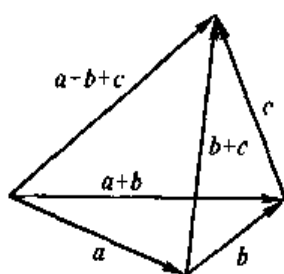


图 7-4

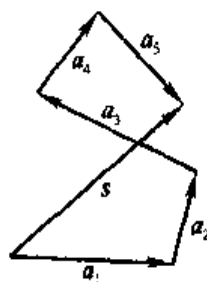


图 7-5

由于向量的加法符合交换律与结合律,故 n 个向量 a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 3$) 相加可写成

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

并按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下:使前一向量的终点作为次一向量的起点,相继作向量 a_1, a_2, \dots, a_n ,再以第一向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和.如图 7-5,有

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

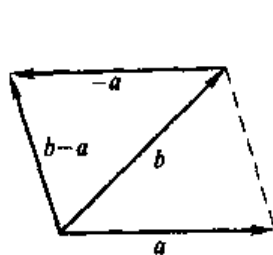
设 a 为一向量,与 a 的模相同而方向相反的向量叫做 a 的负向量,记作 $-a$.由此,我们规定两个向量 b 与 a 的差

$$b - a = b + (-a).$$

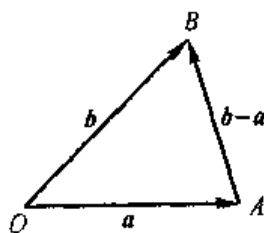
即把向量 $-a$ 加到向量 b 上,便得 b 与 a 的差 $b - a$ (图 7-6(a)).

特别地,当 $b = a$ 时,有

$$a - a = a + (-a) = 0.$$



(a)



(b)

图 7-6

显然,任给向量 \overrightarrow{AB} 及点 O ,有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

因此,若把向量 a 与 b 移到同一起点 O ,则从 a 的终点 A 向 b 的终点 B 所引向量 \overrightarrow{AB} 便是向量 b 与 a 的差 $b - a$ (图 7-6(b)).

由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{及} \quad |a-b| \leq |a| + |b|,$$

其中等号在 a 与 b 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

向量 a 与实数 λ 的乘积记作 λa , 规定 λa 是一个向量, 它的模

$$|\lambda a| = |\lambda| |a|,$$

它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反.

当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即 λa 为零向量, 这时它的方向可以是任意的.

特别地, 当 $\lambda = \pm 1$ 时, 有

$$1a = a, \quad (-1)a = -a.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$;

这是因为由向量与数的乘积的规定可知, 向量 $\lambda(\mu a)$ 、 $\mu(\lambda a)$ 、 $(\lambda\mu)a$ 都是平行的向量, 它们的指向也是相同的, 而且

$$|\lambda(\mu a)| = |\mu(\lambda a)| = |(\lambda\mu)a| = |\lambda\mu| |a|.$$

所以

$$\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a.$$

(2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$; (1)

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b. \quad (2)$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明, 这里从略了.

向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$. 试用 a 和 b 表示向量 \overrightarrow{MA} 、 \overrightarrow{MB} 、 \overrightarrow{MC} 和 \overrightarrow{MD} , 这里 M 是平行四边形对角线的交点 (图 7-7).

解 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以

$$a + b = \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{AM},$$

即

$$-(a + b) = 2 \overrightarrow{MA},$$

于是

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(a + b).$$

因为 $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$, 所以 $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(a + b)$.

又因 $-a + b = \overrightarrow{BD} = 2 \overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(b - a)$.

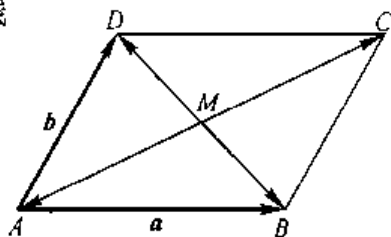


图 7-7

由于 $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD}$, 所以 $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

前面已经讲过, 模等于 1 的向量叫做单位向量. 设 \mathbf{e}_a 表示与非零向量 \mathbf{a} 同方向的单位向量, 那么按照向量与数的乘积的规定, 由于 $|\mathbf{a}| > 0$, 所以 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 与 \mathbf{e}_a 的方向相同, 即 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 与 \mathbf{a} 的方向相同. 又因 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 的模是

$$|\mathbf{a}||\mathbf{e}_a| = |\mathbf{a}| \cdot 1 = |\mathbf{a}|,$$

即 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 与 \mathbf{a} 的模也相同. 因此,

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_a.$$

我们规定, 当 $\lambda \neq 0$ 时, $\frac{\mathbf{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{a}$. 由此, 上式又可写成

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \mathbf{e}_a.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

由于向量 $\lambda\mathbf{a}$ 与 \mathbf{a} 平行, 因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 1 设向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 那么, 向量 \mathbf{b} 平行于 \mathbf{a} 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

证 条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$. 取 $|\lambda| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, 当 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 同向时 λ 取正值, 当 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 反向时 λ 取负值, 即有 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. 这是因为此时 \mathbf{b} 与 $\lambda\mathbf{a}$ 同向, 且

$$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, 又设 $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$, 两式相减, 使得

$$(\lambda - \mu)\mathbf{a} = \mathbf{0}, \text{ 即 } |\lambda - \mu||\mathbf{a}| = 0.$$

因 $|\mathbf{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

定理证毕.

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道, 给定一个点、一个方向及单位长度, 就确定了一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向, 又确定了单位长度, 因此, 给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 \mathbf{i} 确定了数轴 Ox (图 7-8), 对于轴上任一点 P , 对应一个向量 \overrightarrow{OP} , 由于 $\overrightarrow{OP} \parallel \mathbf{i}$, 根据定理 1, 必有唯一的实数 x , 使 $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i}$ (实数 x 叫做轴上有向线段 \overrightarrow{OP} 的值), 并知 \overrightarrow{OP} 与实数 x 一一对应. 于是

$$\text{点 } P \longleftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} \longleftrightarrow \text{实数 } x,$$

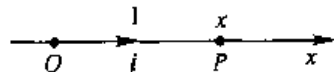


图 7-8

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此, 定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知, 轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP} = xi.$$

三、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 i, j, k , 就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴, 依次记为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ 坐标系或 $[O; i, j, k]$ 坐标系(图 7-9). 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴则是铅垂线; 它们的正向通常符合右手规则, 即以右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向, 如图 7-10.

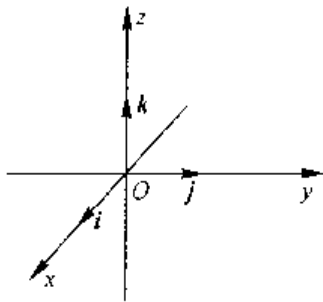


图 7-9

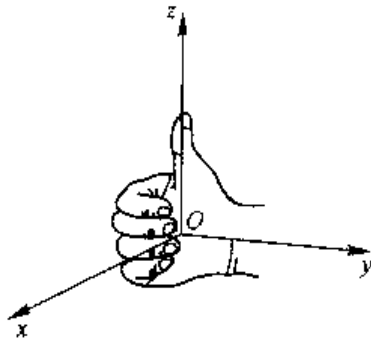


图 7-10

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面, 另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面, 分别叫做 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 每一部分叫做一个卦限. 含有 x 轴、 y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限, 其他第二、第三、第四卦限, 在 xOy 面的上方, 按逆时针方向确定. 第五至第八卦限, 在 xOy 面的下方, 由第一卦限之下的第五卦限, 按逆时针方向确定, 这八个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示(图 7-11).

任给向量 r , 对应有点 M , 使 $\overrightarrow{OM} = r$. 以 OM 为对角线, 三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK - OPNQ$, 如图 7-12 所示, 有

$$r = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

$$\text{设 } \overrightarrow{OP} = xi, \overrightarrow{OQ} = yj, \overrightarrow{OR} = zk,$$

$$\text{则 } r = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk.$$

上式称为向量 r 的坐标分解式, xi 、 yj 、 zk 称为向量 r 沿三个坐标轴方向的

分向量.

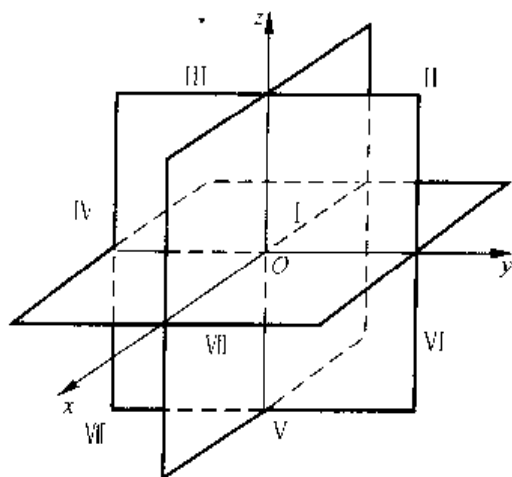


图 7-11

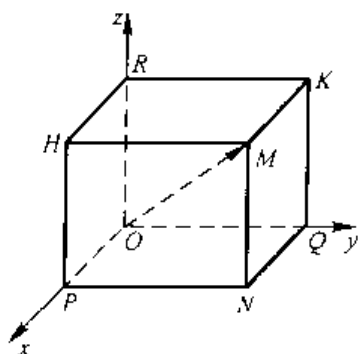


图 7-12

显然,给定向量 \vec{r} ,就确定了点 M 及 \vec{OP} 、 \vec{OQ} 、 \vec{OR} 三个分向量,进而确定了 x 、 y 、 z 三个有序数;反之,给定三个有序数 x 、 y 、 z ,也就确定了向量 \vec{r} 与点 M . 于是点 M 、向量 \vec{r} 与三个有序数 x 、 y 、 z 之间有一一对应的关系

$$M \leftrightarrow \vec{r} = \vec{OM} = xi + yj + zk \leftrightarrow (x, y, z),$$

据此,定义:有序数 x 、 y 、 z 称为向量 \vec{r} (在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作 $\vec{r} = (x, y, z)$;有序数 x 、 y 、 z 也称为点 M (在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作 $M(x, y, z)$.

向量 $\vec{r} = \vec{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径.上述定义表明,一个点与该点的向径有相同的坐标.记号 (x, y, z) 既表示点 M ,又表示向量 \vec{OM} .

坐标面上和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征.例如:如果点 M 在 yOz 面上,则 $x = 0$;同样,在 zOx 面上的点, $y = 0$;在 xOy 面上的点, $z = 0$.如果点 M 在 x 轴上,则 $y = z = 0$;同样,在 y 轴上的点,有 $z = x = 0$;在 z 轴上的点,有 $x = y = 0$.如点 M 为原点,则 $x = y = z = 0$.

四、利用坐标作向量的线性运算

利用向量的坐标,可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下:

$$\text{设 } \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

$$\text{即 } \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律,以及向量与数乘法的结合律与分配律,有

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k},$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{i} + (\lambda a_2)\vec{j} + (\lambda a_3)\vec{k}, (\lambda \text{ 为实数})$$

即

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

由此可见,对向量进行加、减及与数相乘,只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算就行了.

定理 1 指出,当向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时,向量 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$ 相当于 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$,坐标表示式为

$$(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z),$$

这也就相当于向量 \mathbf{b} 与 \mathbf{a} 对应的坐标成比例:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \quad (3)$$

例 2 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\mathbf{x} - 3\mathbf{y} = \mathbf{a}, \\ 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = \mathbf{b}, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{a} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, -2)$.

解 如同解以实数为未知元的线性方程组一样,可解得

$$\mathbf{x} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = 3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}.$$

以 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 的坐标表示式代入,即得

$$\mathbf{x} = 2(2, 1, 2) - 3(-1, 1, -2) = (7, -1, 10),$$

$$\mathbf{y} = 3(2, 1, 2) - 5(-1, 1, -2) = (11, -2, 16).$$

例 3 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 AB 上求点 M , 使

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}.$$

解 如图 7-13 所示. 由于

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

因此 $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$,

从而 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$.

以 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} 的坐标(即点 A 、点 B 的坐标)代入,即得

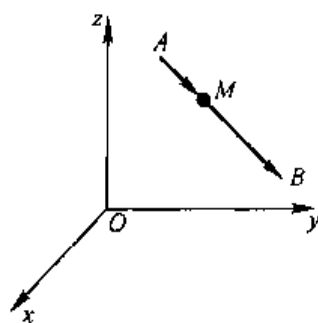


图 7-13

① 当 a_x, a_y, a_z 有一个为零,例如 $a_x = 0, a_y, a_z \neq 0$,这时(1)式应理解为

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}; \end{cases}$$

当 a_x, a_y, a_z 有两个为零,例如 $a_x = a_y = 0, a_z \neq 0$,这时(1)式应理解为

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ b_y = 0. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right),$$

这就是点 M 的坐标.

本例中的点 M 叫做有向线段 \overrightarrow{AB} 的 λ 分点. 特别地, 当 $\lambda = 1$ 时, 得线段 AB 的中点为

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

通过本例, 我们应注意以下两点: (1) 由于点 M 与向量 \overrightarrow{OM} 有相同的坐标, 因此, 求点 M 的坐标, 就是求 \overrightarrow{OM} 的坐标. (2) 记号 (x, y, z) 既可表示点 M , 又可表示向量 \overrightarrow{OM} , 在几何中点与向量是两个不同的概念, 不可混淆. 因此, 在看到记号 (x, y, z) 时, 须从上下文去认清它究竟表示点还是表示向量. 当 (x, y, z) 表示向量时, 可对它进行运算; 当 (x, y, z) 表示点时, 就不能进行运算.

五、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $r = (x, y, z)$, 作 $\overrightarrow{OM} = r$, 如图 7-12 所示, 有

$$r = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|r| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2}.$$

由

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{OR} = z\mathbf{k},$$

有

$$|\overrightarrow{OP}| = |x|, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |y|, \quad |\overrightarrow{OR}| = |z|,$$

于是得向量模的坐标表示式

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

设有点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和点 $B(x_2, y_2, z_2)$, 则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 \overrightarrow{AB} 的模. 由

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \end{aligned}$$

即得 A, B 两点间的距离

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 4 求证以 $M_1(4, 3, 1)$ 、 $M_2(7, 1, 2)$ 、 $M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14,$$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6,$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6,$$

所以 $|M_2 M_3| = |M_3 M_1|$, 即 $\triangle M_1 M_2 M_3$ 为等腰三角形.

例 5 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0, 0, z)$, 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}.$$

两边去根号, 解得

$$z = \frac{14}{9}.$$

所以, 所求的点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

例 6 已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求与 \overrightarrow{AB} 方向相同的单位向量 e .

解 因为

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7, 1, 3) - (4, 0, 5) = (3, 1, -2),$$

所以

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14},$$

于是

$$e = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 1, -2).$$

2. 方向角与方向余弦

先引进两向量的夹角的概念.

设有两个非零向量 a, b , 任取空间一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$, 规定不超过 π 的 $\angle AOB$ (设 $\varphi = \angle AOB, 0 \leq \varphi \leq \pi$) 称为向量 a 与 b 的夹角 (图 7-14), 记作

$(\widehat{a, b})$ 或 $(\widehat{b, a})$, 即 $(\widehat{a, b}) = \varphi$. 如果向量 a 与 b 中有一个是零向量, 规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

类似地, 可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角, 不再赘述.

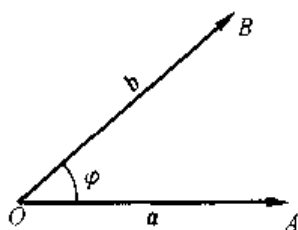


图 7-14

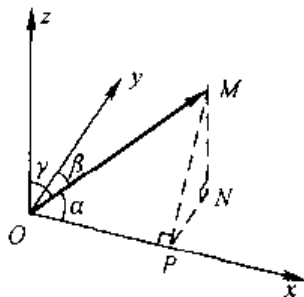


图 7-15

非零向量 r 与三条坐标轴的夹角 α, β, γ 称为向量 r 的方向角. 从图 7-15 可见, 设 $r = (x, y, z)$, 由于 r 是有向线段 \overrightarrow{OP} 的值, $MP \perp OP$, 故

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{x}{r},$$

类似可知

$$\cos \beta = \frac{y}{r}, \cos \gamma = \frac{z}{r}.$$

从而

$$\begin{aligned} (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) &= \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r} (x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 \mathbf{r} 的方向余弦. 上式表明, 以向量 \mathbf{r} 的方向余弦为坐标的向量就是与 \mathbf{r} 同方向的单位向量 \mathbf{e}_r , 并由此可得

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

例 7 已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} &= (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) \\ &= (-1, 1, -\sqrt{2}); \\ |\overrightarrow{M_1 M_2}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2; \\ \cos \alpha &= -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \alpha &= \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

例 8 设点 A 位于第 I 卦限, 向径 \overrightarrow{OA} 与 x 轴、 y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$, 求点 A 的坐标.

解 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$. 由关系式 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 得

$$\cos^2 \gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

因点 A 在第 I 卦限, 知 $\cos \gamma > 0$, 故

$$\cos \gamma = \frac{1}{2}.$$

于是 $\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \mathbf{e}_{OA} = 6 \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) = (3, 3\sqrt{2}, 3),$

这就是点 A 的坐标.

3. 向量在轴上的投影

如果撇开 y 轴和 z 轴, 单独考虑 x 轴与向量 $r = \overrightarrow{OM}$ 的关系, 那么从图 7-15 可见, 过点 M 作与 x 轴垂直的平面, 此平面与 x 轴的交点即是点 P . 作出点 P , 即得向量 r 在 x 轴上的分向量 \overrightarrow{OP} , 进而由 $\overrightarrow{OP} = xi$, 使得向量在 x 轴上的坐标 x , 且 $x = |r| \cos \alpha$.

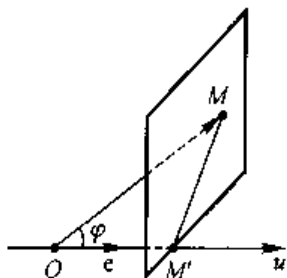


图 7-16

一般地, 设点 O 及单位向量 e 确定 u 轴(图 7-16). 任给向量 r , 作 $\overrightarrow{OM} = r$, 再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M' (点 M' 叫作点 M 在 u 轴上的投影), 则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 r 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM} = \lambda e$, 则数 λ 称为向量 r 在 u 轴上的投影, 记作 $\text{Prj}_u r$ 或 $(r)_u$.

按此定义, 向量 a 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x 、

a_y 、 a_z 就是 a 在三条坐标轴上的投影, 即

$$a_x = \text{Prj}_1 a, \quad a_y = \text{Prj}_2 a, \quad a_z = \text{Prj}_3 a,$$

或记作

$$a_x = (a)_x, \quad a_y = (a)_y, \quad a_z = (a)_z.$$

由此可知, 向量的投影具有与坐标相同的性质:

性质 1 $(a)_u = |a| \cos \varphi$ (即 $\text{Prj}_u a = |a| \cos \varphi$),

其中 φ 为向量 a 与 u 轴的夹角;

性质 2 $(a+b)_u = (a)_u + (b)_u$ (即 $\text{Prj}_u(a+b) = \text{Prj}_u a + \text{Prj}_u b$);

性质 3 $(\lambda a)_u = \lambda (a)_u$ (即 $\text{Prj}_u(\lambda a) = \lambda \text{Prj}_u a$).

例 9 设立方体的一条对角线为 OM , 一条棱为 OA , 且 $|OA| = a$, 求 \overrightarrow{OA} 在 \overrightarrow{OM} 方向上的投影 $\text{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA}$. ①

解 如图 7-17 所示, 记 $\angle MOA = \varphi$, 有

$$\cos \varphi = \frac{|OA|}{|OM|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$\text{Prj}_{\overrightarrow{OM}} \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

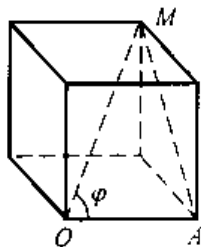


图 7-17

习 题 7-1

1. 设 $u = a - b + 2c$, $v = a + 3b - c$. 试用 a, b, c 表示 $2u - 3v$.
2. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分, 试用向量证明它是平行四边形.
3. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分, 设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 , 再把各分点与点 A 连接.

① 向量 r 在向量 $a (a \neq 0)$ 的方向上的投影 $\text{Prj}_a r$ 是指 r 在某条与 a 同方向的轴上的投影.

试以 $\overrightarrow{AB} = c, \overrightarrow{BC} = a$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

4. 已知两点 $M_1(0, 1, 2)$ 和 $M_2(1, -1, 0)$. 试用坐标表示式表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

5. 求平行于向量 $a = (6, 7, -6)$ 的单位向量.

6. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点在哪个卦限?

$$A(1, -2, 3); B(2, 3, -4); C(2, -3, -4); D(-2, -3, 1).$$

7. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征? 指出下列各点的位置:

$$A(3, 4, 0); B(0, 4, 3); C(3, 0, 0); D(0, -1, 0).$$

8. 求点 (a, b, c) 关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

9. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线, 写出各垂足的坐标.

10. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

11. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

12. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

13. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2), B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

14. 试证明以三点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

15. 设已知两点 $M_1(4\sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

16. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos \alpha = 0$; (2) $\cos \beta = 1$; (3) $\cos \alpha = \cos \beta = 0$. 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

17. 设向量 r 的模是 4, 它与轴 u 的夹角是 60° , 求 r 在轴 u 上的投影.

18. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标.

19. 设 $m = 3i + 5j + 8k, n = 2i - 4j - 7k$ 和 $p = 5i + j - 4k$. 求向量 $a = 4m + 3n - p$ 在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

第二节 数量积 向量积 * 混合积

一、两向量的数量积

设一物体在常力 F 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2 . 以 s 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 由物理学知道, 力 F 所作的功为

$$W = |F| |s| \cos \theta,$$

其中 θ 为 F 与 s 的夹角(图 7-18).

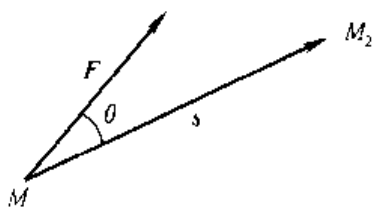


图 7-18

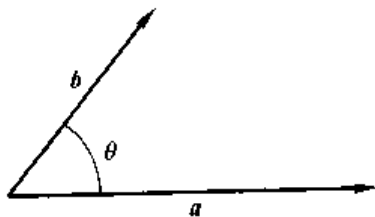


图 7-19

从这个问题看出,我们有时要对两个向量 a 和 b 作这样的运算,运算的结果是一个数,它等于 $|a| \cdot |b|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积,我们把它叫做向量 a 与 b 的数量积,记作 $a \cdot b$ (图 7-19),即

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta.$$

根据这个定义,上述问题中力所作的功 W 是力 F 与位移 s 的数量积,即

$$W = F \cdot s.$$

由于 $|b| \cos \theta = |b| \cos(\widehat{a, b})$, 当 $a \neq 0$ 时是向量 b 在向量 a 的方向上的投影,用 $\text{Prj}_a b$ 来表示这个投影,便有

$$a \cdot b = |a| \text{Prj}_a b,$$

同理,当 $b \neq 0$ 时有 $a \cdot b = |b| \text{Prj}_b a$.

这就是说,两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

由数量积的定义可以推得:

$$(1) a \cdot a = |a|^2.$$

这是因为夹角 $\theta = 0$, 所以

$$a \cdot a = |a|^2 \cos 0 = |a|^2.$$

(2) 对于两个非零向量 a, b , 如果 $a \cdot b = 0$, 那么 $a \perp b$ ^①; 反之, 如果 $a \perp b$, 那么 $a \cdot b = 0$.

这是因为如果 $a \cdot b = 0$, 由于 $|a| \neq 0, |b| \neq 0$, 所以 $\cos \theta = 0$, 从而 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $a \perp b$; 反之, 如果 $a \perp b$, 那么 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$, 于是 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta = 0$.

由于零向量的方向可以看作是任意的, 故可以认为零向量与任何向量都垂直. 因此, 上述结论可叙述为: 向量 $a \perp b$ 的充分必要条件是 $a \cdot b = 0$.

数量积符合下列运算规律:

$$(1) \text{交换律 } a \cdot b = b \cdot a.$$

① 如果向量 a 与 b 的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 就称向量 a 与 b 互相垂直, 记作 $a \perp b$.

因根据定义有

$$a \cdot b = |a| |b| \cos(\widehat{a, b}), \quad b \cdot a = |b| |a| \cos(\widehat{b, a}),$$

而 $|a| |b| = |b| |a|$, 且 $\cos(\widehat{a, b}) = \cos(\widehat{b, a})$,

所以 $a \cdot b = b \cdot a$.

(2) 分配律 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

因为当 $c = 0$ 时, 上式显然成立; 当 $c \neq 0$ 时, 有

$$(a + b) \cdot c = |c| \operatorname{Prj}_c(a + b),$$

由投影性质 2, 可知

$$\operatorname{Prj}_c(a + b) = \operatorname{Prj}_c a + \operatorname{Prj}_c b,$$

所以

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= |c| (\operatorname{Prj}_c a + \operatorname{Prj}_c b) \\ &= |c| |\operatorname{Prj}_c a| + |c| |\operatorname{Prj}_c b| \\ &= a \cdot c + b \cdot c. \end{aligned}$$

(3) 数量积还符合如下的结合律:

$$(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b), \quad \lambda \text{ 为数.}$$

这是因为当 $b = 0$ 时, 上式显然成立; 当 $b \neq 0$ 时, 按投影性质 3, 可得

$$(\lambda a) \cdot b = |b| |\operatorname{Prj}_b(\lambda a)| = |b| \lambda |\operatorname{Prj}_b a| = \lambda |b| |\operatorname{Prj}_b a| = \lambda(a \cdot b).$$

由上述结合律, 利用交换律, 容易推得

$$a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b) \text{ 及 } (\lambda a) \cdot (\mu b) = \lambda \mu(a \cdot b).$$

这是因为

$$\begin{aligned} a \cdot (\lambda b) &= (\lambda b) \cdot a = \lambda(b \cdot a) = \lambda(a \cdot b); \\ (\lambda a) \cdot (\mu b) &= \lambda[a \cdot (\mu b)] = \lambda[\mu(a \cdot b)] = \lambda \mu(a \cdot b). \end{aligned}$$

例 1 试用向量证明三角形的余弦定理.

证 设在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BCA = \theta$ (图 7-20),

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. 要证

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

记 $\vec{CB} = a$, $\vec{CA} = b$, $\vec{AB} = c$, 则有

$$c = a - b,$$

从而

$$|c|^2 = c \cdot c = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a + b \cdot b - 2a \cdot b$$

$$= |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\widehat{a, b})$$

由 $|a| = a$, $|b| = b$, $|c| = c$ 及 $(\widehat{a, b}) = \theta$, 即得

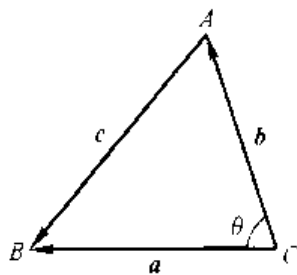


图 7-20

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

下面我们来推导数量积的坐标表示式.

设 $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$. 按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= a_x i \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) + a_y j \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) + \\ &\quad a_z k \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= a_x b_x i \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_x b_z i \cdot k + \\ &\quad a_y b_x j \cdot i + a_y b_y j \cdot j + a_y b_z j \cdot k + \\ &\quad a_z b_x k \cdot i + a_z b_y k \cdot j + a_z b_z k \cdot k. \end{aligned}$$

由于 i, j, k 互相垂直, 所以 $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$, $j \cdot i = k \cdot j = i \cdot k = 0$. 又由于 i, j, k 的模均为 1, 所以 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$. 因而得

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

这就是两个向量的数量积的坐标表示式.

由于 $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$, 所以当 a, b 都不是零向量时, 有

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}.$$

以数量积的坐标表示式及向量的模的坐标表示式代入上式, 就得

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

例 2 已知三点 $M(1, 1, 1)$, $A(2, 2, 1)$ 和 $B(2, 1, 2)$, 求 $\angle AMB$.

解 作向量 \overrightarrow{MA} 及 \overrightarrow{MB} , $\angle AMB$ 就是向量 \overrightarrow{MA} 与 \overrightarrow{MB} 的夹角. 这里, $\overrightarrow{MA} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{MB} = (1, 0, 1)$, 从而

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1;$$

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2};$$

$$|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

代入两向量夹角余弦的表达式, 得

$$\begin{aligned} \cos \angle AMB &= \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

由此得

$$\angle AMB = \frac{\pi}{3}.$$

例 3 设液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域, 液体在这区域上各点处

的流速均为(常向量) \boldsymbol{v} . 设 \boldsymbol{n} 为垂直于 S 的单位向量(图 7-21(a)), 计算单位时间内经过这区域流向 \boldsymbol{n} 所指一侧的液体的质量 P (液体的密度为 ρ).

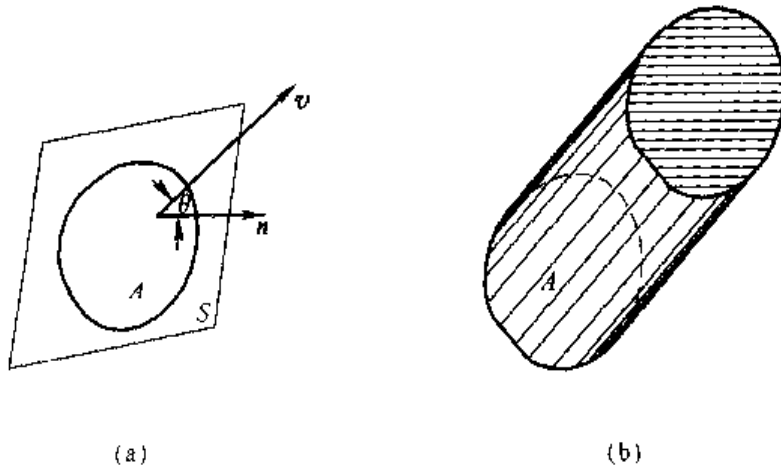


图 7-21

解 单位时间内流过这区域的液体组成一个底面积为 A 、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体(图 7-21(b)). 这柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是 \boldsymbol{v} 与 \boldsymbol{n} 的夹角 θ , 所以这柱体的高为 $|\boldsymbol{v}| \cos \theta$, 体积为

$$A |\boldsymbol{v}| \cos \theta = A \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}.$$

从而, 单位时间内经过这区域流向 \boldsymbol{n} 所指一侧的液体的质量为

$$P = \rho A \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}.$$

二、两向量的向量积

在研究物体转动问题时, 不但要考虑这物体所受的力, 还要分析这些力所产生的力矩. 下面就举一个简单的例子来说明表达力矩的方法.

设 O 为一根杠杆 L 的支点. 有一个力 \boldsymbol{F} 作用于这杠杆上 P 点处. \boldsymbol{F} 与 \overrightarrow{OP} 的夹角为 θ (图 7-22). 由力学规定, 力 \boldsymbol{F} 对支点 O 的力矩是一向量 \boldsymbol{M} , 它的模

$$|\boldsymbol{M}| = |\overrightarrow{OQ}| |\boldsymbol{F}| = |\overrightarrow{OP}| |\boldsymbol{F}| \sin \theta,$$

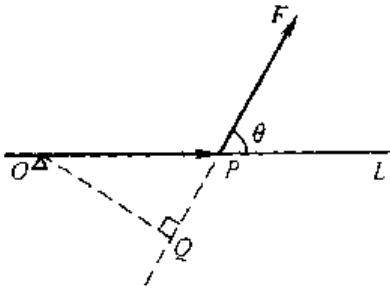


图 7-22

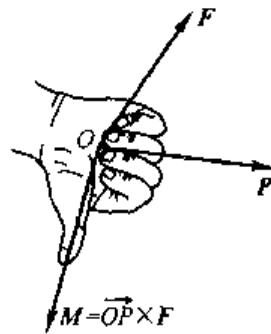


图 7-23

而 \mathbf{M} 的方向垂直于 \overrightarrow{OP} 与 \mathbf{F} 所决定的平面, \mathbf{M} 的指向是按右手规则从 \overrightarrow{OP} 以不超过 π 的角转向 \mathbf{F} 来确定的. 即当右手的四个手指从 \overrightarrow{OP} 以不超过 π 的角转向 \mathbf{F} 握拳时, 大拇指的指向就是 \mathbf{M} 的指向(图 7-23).

这种由两个已知向量按上面的规则来确定另一个向量的情况, 在其他力学和物理问题中也会遇到. 从而可以抽象出两个向量的向量积概念.

设向量 \mathbf{c} 由两个向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 按下列方式定出:

\mathbf{c} 的模, $c = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, 其中 θ 为 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 间的夹角;

\mathbf{c} 的方向垂直于 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 所决定的平面(即 \mathbf{c} 既垂直于 \mathbf{a} , 又垂直于 \mathbf{b}), \mathbf{c} 的指向按右手规则从 \mathbf{a} 转向 \mathbf{b} 来确定(图 7-24)

那么, 向量 \mathbf{c} 叫做向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的向量积, 记作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

因此, 上面的力矩 \mathbf{M} 等于 \overrightarrow{OP} 与 \mathbf{F} 的向量积, 即

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{F}.$$

由向量积的定义可以推得:

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

这是因为夹角 $\theta = 0$, 所以 $|\mathbf{a} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2 \sin 0 = 0$.

(2) 对于两个非零向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} , 如果 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 那么 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$;

反之, 如果 $\mathbf{a} \not// \mathbf{b}$, 那么 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

这是因为如果 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 由于 $|\mathbf{a}| \neq 0$, $|\mathbf{b}| \neq 0$, 故必有 $\sin \theta = 0$. 于是 $\theta = 0$ 或 π , 即 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$; 反之, 如果 $\mathbf{a} \not// \mathbf{b}$, 那么 $\theta = 0$ 或 π , 于是 $\sin \theta \neq 0$. 从而 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$, 即 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

由于可以认为零向量与任何向量都平行, 因此, 上述结论可叙述为: 向量 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 的充分必要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

向量积符合下列运算规律:

(1) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

这是因为按右手规则从 \mathbf{b} 转向 \mathbf{a} 定出的方向恰好与按右手规则从 \mathbf{a} 转向 \mathbf{b} 定出的方向相反. 它表明交换律对向量积不成立.

(2) 分配律 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

(3) 向量积还符合如下的结合律:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\lambda \text{ 为数}).$$

这两个规律的证明这里从略了.

下面来推导向量积的坐标表示式.

设 $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$. 那么, 按上述运算规律, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= a_1 \mathbf{i} \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) + \end{aligned}$$

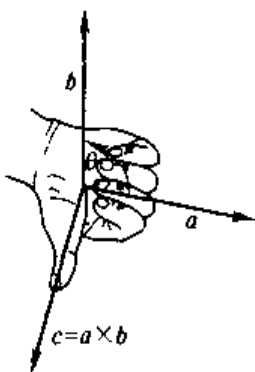


图 7-24

$$\begin{aligned}
& a_1 j \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) + a_2 k \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\
& = a_1 b_1 (i \times i) + a_1 b_2 (i \times j) + a_1 b_3 (i \times k) + \\
& \quad a_2 b_1 (j \times i) + a_2 b_2 (j \times j) + a_2 b_3 (j \times k) + \\
& \quad a_3 b_1 (k \times i) + a_3 b_2 (k \times j) + a_3 b_3 (k \times k),
\end{aligned}$$

由于 $i \times i = j \times j = k \times k = 0, i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j, j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j$, 所以

$$a \times b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) i + (a_2 b_3 - a_3 b_2) j + (a_3 b_1 - a_1 b_3) k.$$

为了帮助记忆, 利用三阶行列式, 上式可写成

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 4 设 $a = (2, 1, -1), b = (1, -1, 2)$, 计算 $a \times b$.

解
$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i - 5j - 3k.$$

例 5 已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1, 2, 3), B(3, 4, 5)$ 和 $C(2, 4, 7)$, 求三角形 ABC 的面积.

解 根据向量积的定义, 可知三角形 ABC 的面积

$$\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \angle A \\
&= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.
\end{aligned}$$

由于 $\vec{AB} = (2, 2, 2), \vec{AC} = (1, 2, 4)$, 因此

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4i - 6j + 2k,$$

于是

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |4i - 6j + 2k| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

例 6 设刚体以等角速度 ω 绕 l 轴旋转, 计算刚体上一点 M 的线速度.

解 刚体绕 l 轴旋转时, 我们可以用在 l 轴上的一个向量 ω 表示角速度, 它的大小等于角速度的大小, 它的方向由右手规则定出: 即以右手握住 l 轴, 当右手的四个手指的转向与刚体的旋转方向一致时, 大拇指的指向就是 ω 的方向 (图 7-25).

设点 M 到旋转轴 l 的距离为 a , 再在 l 轴上任取一点 O 作向量 $r = \overrightarrow{OM}$, 并以 θ 表示 ω 与 r 的夹角, 那么

$$a = |r| \sin \theta.$$

设线速度为 v , 那么由物理学上线速度与角速度间的关系可知, v 的大小为

$$|v| = |\omega| a = |\omega| |r| \sin \theta;$$

v 的方向垂直于通过 M 点与 l 轴的平面, 即 v 垂直于 ω 与 r ; 又 v 的指向是使 ω, r, v 符合右手规则. 因此有

$$v = \omega \times r.$$

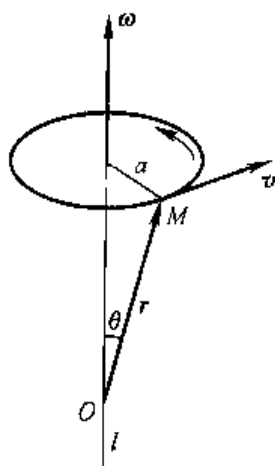


图 7-25

三、向量的混合积

设已知三个向量 a, b 和 c . 如果先作两向量 a 和 b 的向量积 $a \times b$, 把所得到的向量与第三个向量 c 再作数量积 $(a \times b) \cdot c$, 这样得到的数量叫做三向量 a, b, c 的混合积, 记作 $[abc]$.

下面我们来推出三向量的混合积的坐标表示式.

设 $a = (a_x, a_y, a_z), b = (b_x, b_y, b_z),$

$c = (c_x, c_y, c_z),$

$$\begin{aligned} \text{因为 } a \times b &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k, \end{aligned}$$

再按两向量的数量积的坐标表示式, 便得

$$\begin{aligned} [abc] &= (a \times b) \cdot c \\ &= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

或

$$[abc] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

向量的混合积有下述几何意义:

向量的混合积 $[abc] = (a \times b) \cdot c$ 是这样一个数, 它的绝对值表示以向量 a, b, c 为棱的平行六面体的体积. 如果向量 a, b, c 组成右手系 (即 c 的指向按右手规则从 a 转向 b 来确定), 那么混合积的符号是正的; 如果 a, b, c 组成左手

系(即 c 的指向按左手规则从 a 转向 b 来确定),那么混合积的符号是负的.

事实上,设 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \overrightarrow{OC} = c$. 按向量积的定义,向量积 $a \times b = f$ 是一个向量,它的模在数值上等于以向量 a 和 b 为边所作平行四边形 $OADB$ 的面积,它的方向垂直于这平行四边形的平面,且当 a, b, c 组成右手系时,向量 f 与向量 c 朝着这平面的同侧(图 7-26);当 a, b, c 组成左手系时,向量 f 与向量 c 朝着这平面的异侧. 所以,如设 f 与 c 的夹角为 α ,那么当 a, b, c 组成右手系时, α 为锐角;当 a, b, c 组成左手系时, α 为钝角. 由于

$$[abc] = (a \times b) \cdot c = |a \times b| |c| \cos \alpha,$$

所以当 a, b, c 组成右手系时, $[abc]$ 为正;当 a, b, c 组成左手系时, $[abc]$ 为负.

因为以向量 a, b, c 为棱的平行六面体的底(平行四边形 $OADB$)的面积 A 在数值上等于 $|a \times b|$, 它的高 h 等于向量 c 在向量 f 上的投影的绝对值,即

$$h = |\text{Prj}_f c| = |c| |\cos \alpha|,$$

所以平行六面体的体积

$$V = Ah = |a \times b| |c| |\cos \alpha| = |[abc]|.$$

图 7-26

例 7 已知不在一平面上的四点: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$. 求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 由立体几何知道,四面体的体积 V_T 等于以向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 和 \overrightarrow{AD} 为棱的平行六面体的体积的六分之一. 因而

$$V_T = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC} \ \overrightarrow{AD}]|.$$

由于

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1),$$

所以

$$V_T = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix},$$

上式中符号的选择必须和行列式的符号一致.

习 题 7-2

1. 设 $a = 3i - j - 2k, b = i + 2j - k$, 求

- (1) $a \cdot b$ 及 $a \times b$; (2) $(-2a) \cdot 3b$ 及 $a \times 2b$; (3) a, b 的夹角的余弦.
2. 设 a, b, c 为单位向量, 且满足 $a + b + c = 0$, 求 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.
3. 已知 $M_1(1, -1, 2), M_2(3, 3, 1)$ 和 $M_3(3, 1, 3)$, 求与 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.
4. 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3, 1, 8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1, 4, 2)$, 计算重力所作的功(长度单位为 m, 重力方向为 z 轴负方向).
5. 在杠杆上支点 O 的一侧与点 O 的距离为 x_1 的点 P_1 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_1}$ 成角 θ_1 的力 F_1 作用着; 在 O 的另一侧与点 O 的距离为 x_2 的点 P_2 处, 有一与 $\overrightarrow{OP_2}$ 成角 θ_2 的力 F_2 作用着(图 7-27). 问 $\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, F_1, F_2$ 符合怎样的条件才能使杠杆保持平衡?

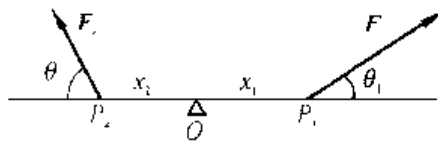


图 7-27

6. 求向量 $a = (4, -3, 4)$ 在向量 $b = (2, 2, 1)$ 上的投影.
7. 设 $a = (3, 5, -2), b = (2, 1, 4)$, 问 λ 与 μ 有怎样的关系, 能使得 $\lambda a + \mu b$ 与 z 轴垂直?
8. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.
9. 已知向量 $a = 2i - 3j + k, b = i - j + 3k$ 和 $c = i - 2j$, 计算:
- (1) $(a \cdot b)c - (a \cdot c)b$; (2) $(a + b) \times (b + c)$; (3) $(a \times b) \cdot c$.
10. 已知 $\overrightarrow{OA} = i + 3k, \overrightarrow{OB} = j - 3k$, 求 $\triangle OAB$ 的面积.
11. 已知 $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$.
- (1) 试利用行列式的性质证明

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$$

- (2) 试利用混合积的几何意义证明三向量 a, b, c 共面的充分必要条件是:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

12. 试用向量证明不等式:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + a_3 \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为任意实数, 并指出等号成立的条件.

第三节 曲面及其方程

一、曲面方程的概念

在日常生活中, 我们经常会遇到各种曲面, 例如反光镜的镜面、管道的外表

面以及锥面等等.

像在平面解析几何中把平面曲线当作动点的轨迹一样,在空间解析几何中,任何曲面都看作点的几何轨迹.在这样的意义下,如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

有下述关系:

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(1);

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程(1),

那么,方程(1)就叫做曲面 S 的方程,而曲面 S 就叫做方程(1)的图形(图 7-28).

现在我们来建立几个常见曲面的方程.

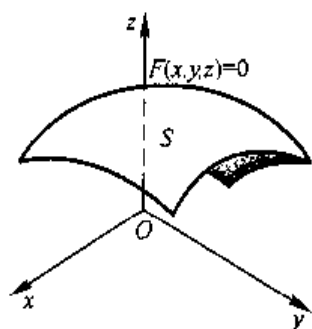


图 7-28

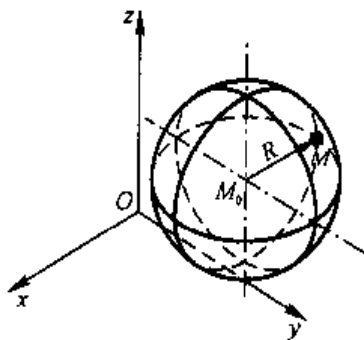


图 7-29

例 1 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面的方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上的任一点(图 7-29),那么

$$|M_0M| = R.$$

由于 $|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$

所以 $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R,$

或

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \quad (2)$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程. 而不在球面上的点的坐标都不满足这方程. 所以方程(2)就是以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心、 R 为半径的球面方程.

如果球心在原点,那么 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,从而球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

例 2 设有点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(2, -1, 4)$, 求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解 由题意知道,所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹. 设 $M(x, y, z)$ 为所求平面上的任一点,由于

$$|AM| = |BM|,$$

所以 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$

$$= \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}.$$

等式两边平方,然后化简便得

$$2x - 6y + 2z - 7 = 0.$$

这就是所求平面上的点的坐标所满足的方程,而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程,所以这个方程就是所求平面的方程.

以上表明作为点的几何轨迹的曲面可以用它的点的坐标间的方程来表示.反之,变量 x 、 y 和 z 间的方程通常表示一个曲面.因此在空间解析几何中关于曲面的研究,有下列两个基本问题:

- (1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时,建立这曲面的方程;
- (2) 已知坐标 x 、 y 和 z 间的一个方程时,研究这方程所表示的曲面的形状.

上述例 1、例 2 是从已知曲面建立其方程的例子.下面举一个由已知方程研究它所表示的曲面的例子.

例 3 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$ 表示怎样的曲面?

解 通过配方,原方程可以改写成

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5.$$

与(2)式比较,就知道原方程表示球心在点 $M_0(1, -2, 0)$ 、半径为 $R = \sqrt{5}$ 的球面.

一般地,设有三元二次方程

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0,$$

这个方程的特点是缺 xy 、 yz 、 zx 各项,而且平方项系数相同,只要将方程经过配方可以化成方程(2)的形式,那么它的图形就是一个球面.

下面,作为基本问题(1)的例子,我们讨论旋转曲面;作为基本问题(2)的例子,我们讨论柱面.第四目中对二次曲面的讨论,也可看作基本问题(2)的例子.

二、旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面,旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C ,它的方程为

$$f(y, z) = 0,$$

把这曲线绕 z 轴旋转一周,就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面(图 7-30).它的方程可以求得如下:

设 $M_1(0, y_1, z_1)$ 为曲线 C 上的任一点,那么有

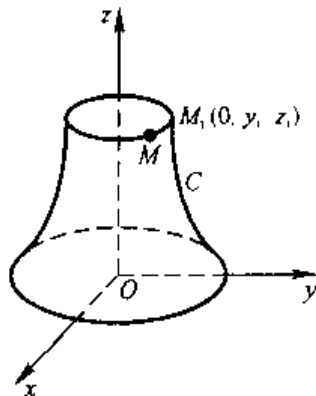


图 7-30

$$f(y_1, z_1) = 0. \quad (3)$$

当曲线 C 绕 z 轴旋转时, 点 M_1 绕 z 轴转到另一点 $M(x, y, z)$, 这时 $z = z_1$ 保持不变, 且点 M 到 z 轴的距离

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|.$$

将 $z_1 = z, y_1 = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ 代入(3)式, 就有

$$f(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \quad (4)$$

这就是所求旋转曲面的方程.

由此可知, 在曲线 C 的方程 $f(y, z) = 0$ 中将 y 改成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, 便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程.

同理, 曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y, \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \quad (5)$$

例 4 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周, 所得旋转曲面叫做圆锥面. 两直线的交点叫做圆锥面的顶点, 两直线的夹角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 叫做圆锥面的半顶角. 试建立顶点在坐标原点 O , 旋转轴为 z 轴, 半顶角为 α 的圆锥面(图 7-31)的方程.

解 在 yOz 坐标面上, 直线 L 的方程为

$$z = y \cot \alpha, \quad (6)$$

因为旋转轴为 z 轴, 所以只要将方程(6)中的 y 改成 $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$, 便得到这圆锥面的方程

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$$

或

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad (7)$$

其中 $a = \cot \alpha$.

显然, 圆锥面上任一点 M 的坐标一定满足方程(7). 如果点 M 不在圆锥面上, 那么直线 OM 与 z 轴的夹角就不等于 α , 于是点 M 的坐标就不满足方程(7).

例 5 将 xOz 坐标面上的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

解 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面叫做旋转单叶双曲面(图 7-32), 它的方程为

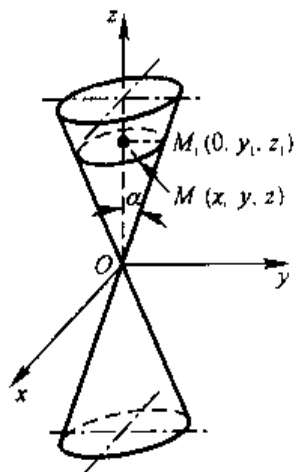


图 7-31

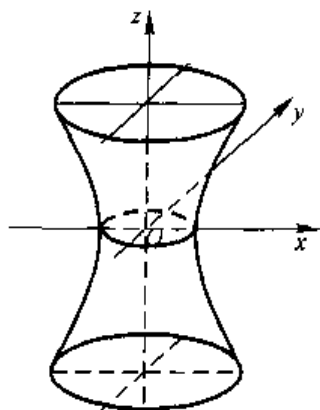


图 7-32

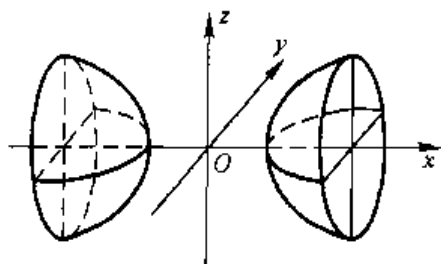


图 7-33

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

绕 x 轴旋转所成的旋转曲面叫做旋转双叶双曲面(图 7-33), 它的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

三、柱面

我们先分析一个具体的例子.

例 6 方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 表示怎样的曲面?

解 方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 在 xOy 面上表示圆心在原点 O 、半径为 R 的圆. 在空间直角坐标系中, 这方程不含竖坐标 z , 即不论空间点的竖坐标 z 怎样, 只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 能满足这方程, 那么这些点就在这曲面上. 这就是说, 凡是通过 xOy 面内圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上一点 $M(x, y, 0)$, 且平行于 z 轴的直线 l 都在这曲面上, 因此, 这曲面可以看作是由平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 移动而形成的. 这曲面叫做圆柱面(图 7-34), xOy 面上的圆

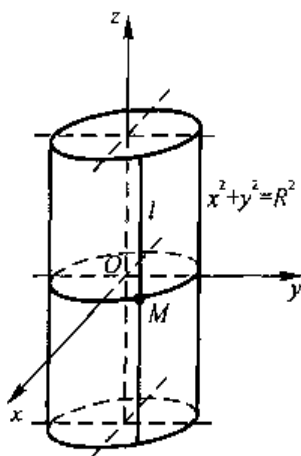


图 7-34

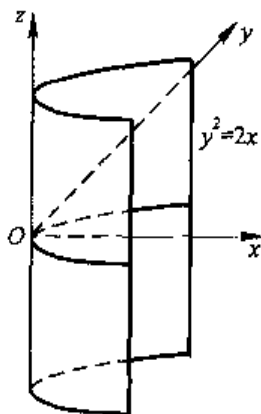


图 7-35

$x^2 + y^2 = R^2$ 叫做它的准线, 这平行于 z 轴的直线 l 叫做它的母线.

一般地, 平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面, 定曲线 C 叫做柱面的准线, 动直线 L 叫做柱面的母线.

上面我们看到, 不含 z 的方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 在空间直角坐标系中表示圆柱面, 它的母线平行于 z 轴, 它的准线是 xOy 面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$.

类似地, 方程 $y^2 = 2x$ 表示母线平行于 z 轴的柱面, 它的准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2 = 2x$, 该柱面叫做抛物柱面(图 7-35).

又如, 方程 $x - y = 0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面, 其准线是 xOy 面上的直线 $x - y = 0$, 所以它是过 z 轴的平面(图 7-36).

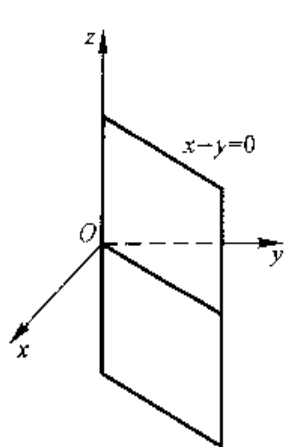


图 7-36

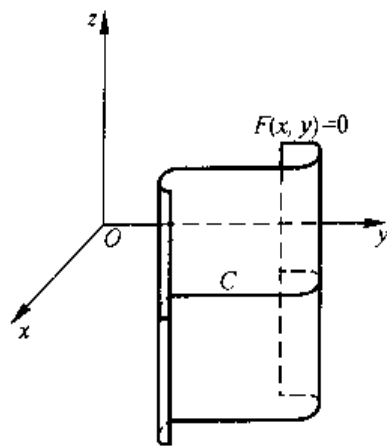


图 7-37

一般地, 只含 x, y 而缺 z 的方程 $F(x, y) = 0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面, 其准线是 xOy 面上的曲线 $C: F(x, y) = 0$ (图 7-37).

类似可知, 只含 x, z 而缺 y 的方程 $G(x, z) = 0$ 和只含 y, z 而缺 x 的方程 $H(y, z) = 0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

例如, 方程 $x - z = 0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面, 其准线是 xOz 面上的直线 $x - z = 0$. 所以它是过 y 轴的平面(图 7-38).

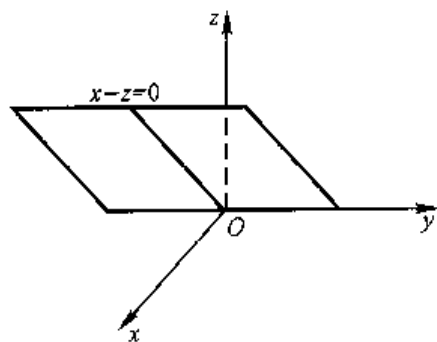


图 7-38

四、二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似, 我们把三元二次方程 $F(x, y, z) = 0$ 所表示的曲面称为二次曲面, 而把平面称为一次曲面.

二次曲面有九种, 适当选取空间直角坐标系, 可得它们的标准方程. 下面就

九种二次曲面的标准方程来讨论二次曲面的形状.

(1) 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$

以垂直于 z 轴的平面 $z = t$ 截此曲面, 当 $t = 0$ 时得一点 $(0, 0, 0)$; 当 $t \neq 0$ 时, 得平面 $z = t$ 上的椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1.$$

当 t 变化时, 上式表示一族长短轴比例不变的椭圆, 当 $|t|$ 从大到小并变为 0 时, 这族椭圆从大到小并缩为一点. 综合上述讨论, 可得椭圆锥面 (1) 的形状如图 7-39 所示.

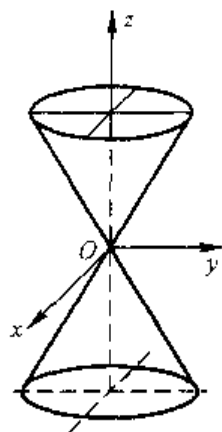


图 7-39

平面 $z = t$ 与曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的交线称为截痕. 通过综合截痕的变化来了解曲面形状的方法称为截痕法.

我们还可以用伸缩变形的方法来得出椭圆锥面 (1) 的形状.

先说明 xOy 平面上的图形伸缩变形的方法. 在 xOy 平面上, 把点 $M(x, y)$ 变为点 $M'(x, \lambda y)$, 从而把点 M 的轨迹 C 变为点 M' 的轨迹 C' , 称为把图形 C 沿 y 轴方向伸缩 λ 倍变成图形 C' . 假如 C 为曲线 $F(x, y) = 0$, 点 $M(x_1, y_1) \in C$, 点 M 变为点 $M'(x_2, y_2)$, 其中 $x_2 = x_1, y_2 = \lambda y_1$, 即 $x_1 = x_2, y_1 = \frac{1}{\lambda} y_2$, 因点 $M \in C$, 有 $F(x_1, y_1) = 0$, 故 $F\left(x_2, \frac{1}{\lambda} y_2\right) = 0$, 因此点 $M'(x_2, y_2)$ 的轨迹 C' 的方程为 $F\left(x, \frac{1}{\lambda} y\right) = 0$. 例如把圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍, 就变为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (图 7-40).

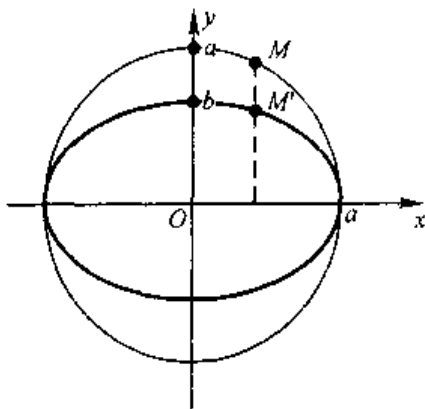


图 7-40

类似地, 把空间图形沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍, 那么圆锥面 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = z^2$ (图 7-31) 即变为椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$ (图 7-39).

利用圆锥面 (旋转曲面) 的伸缩变形来得出椭圆锥面的形状, 这种方法是研究曲面形状的一种较方便的方法.

(2) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

把 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转, 所得曲面称为旋转椭球面, 其方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

再把旋转椭球面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍, 便得椭球面(2)的形状如图 7-41 所示.

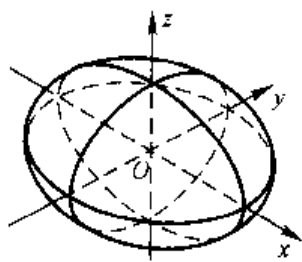


图 7-41

当 $a = b = c$ 时, 方程(2)成为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 这是球心在原点、半径为 a 的球面. 显然, 球面是旋转椭球面的特殊情形, 旋转椭球面是椭球面的特殊情形. 把球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 沿 z 轴方向伸缩 $\frac{c}{a}$ 倍, 即得旋转椭球面 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; 再沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍, 即得椭球面(2).

(3) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

把 xOz 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转, 得旋转单叶双曲面 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (图 7-32). 把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍, 即得单叶双曲面(3).

(4) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

把 xOz 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 x 轴旋转, 得旋转双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$ (图 7-33), 把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{c}$ 倍, 即得双叶双曲面(4).

(5) 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

把 xOz 面上的抛物线 $\frac{x^2}{a^2} = z$ 绕 z 轴旋转, 所得曲面叫做旋转抛物面, 如图 7-42 所示. 把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍, 即得椭圆抛物面(5).

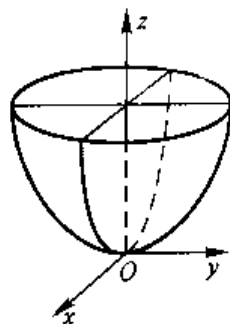


图 7-42

(6) 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$

双曲抛物面又称马鞍面, 我们用截痕法来讨论它的形状.

用平面 $x = t$ 截此曲面, 所得截痕 l 为平面 $x = t$ 上的抛物线

$$-\frac{y^2}{b^2} = z - \frac{t^2}{a^2},$$

此抛物线开口朝下, 其顶点坐标为

$$x = t, y = 0, z = \frac{t^2}{a^2}.$$

当 t 变化时, l 的形状不变, 位置只作平移, 而 l 的顶点的轨迹 L 为平面 $y = 0$ 上的抛物线

$$z = \frac{x^2}{a^2}.$$

因此, 以 l 为母线, L 为准线, 母线 l 的顶点在准线 L 上滑动, 且母线作平行移动, 这样得到的曲面便是双曲抛物面(6), 如

图 7-43 所示.

还有三种二次曲面是以三种二次曲线为准线的柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x^2 = ay,$$

依次称为椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面. 柱面的形状在第三目中已经讨论过, 这里不再赘述.

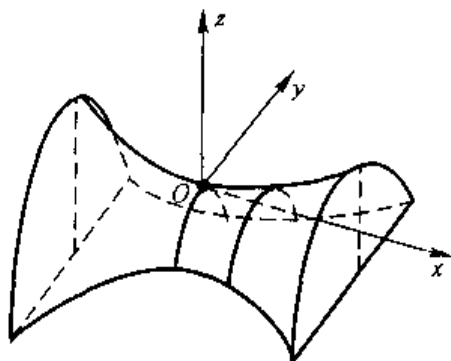


图 7-43

习 题 7-3

1. 一动点与两定点(2,3,1)和(4,5,6)等距离, 求这动点的轨迹方程.
2. 建立以点(1,3,-2)为球心, 且通过坐标原点的球面方程.
3. 方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z = 0$ 表示什么曲面?
4. 求与坐标原点 O 及点(2,3,4)的距离之比为 1:2 的点的全体所组成的曲面的方程, 它表示怎样的曲面?
5. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.
6. 将 xOz 坐标面上的圆 $x^2 + z^2 = 9$ 绕 z 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.
7. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周, 求所生成的旋转曲面的方程.

8. 画出下列各方程所表示的曲面:

$$(1) \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2; \quad (2) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$(3) \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1; \quad (4) y^2 - z = 0;$$

$$(5) z = 2 - r^2.$$

9. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形:

$$(1) x = 2; \quad (2) y = x + 1;$$

$$(3) x^2 + y^2 = 4; \quad (4) x^2 - y^2 = 1.$$

10. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1; \quad (2) x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1;$$

$$(3) x^2 - y^2 - z^2 = 1; \quad (4) (z - a)^2 = r^2 + y^2.$$

11. 画出下列方程所表示的曲面:

$$(1) 4x^2 + y^2 - z^2 = 4; \quad (2) x^2 - y^2 - 4z^2 = 4;$$

$$(3) \frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

第四节 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{和} \quad G(x, y, z) = 0$$

是两个曲面的方程, 它们的交线为 C (图 7-44). 因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程, 所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

反过来, 如果点 M 不在曲线 C 上, 那么它不可能同时在两个曲面上, 所以它的坐标不满足方程组 (1). 因此, 曲线 C 可以用方程组 (1) 来表示. 方程组 (1) 叫做 空间曲线 C 的一般方程.

例 1 方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面, 其准线是 xOy 面上的圆, 圆心在原点 O , 半径为 1. 方程组中第二个方程表示一个母线平行于 y 轴的柱面, 由于它的准线是 zOx 面上的直线, 因此它是一个平面. 方程组就表示上述平面与圆柱面的交线, 如图 7-45 所示.

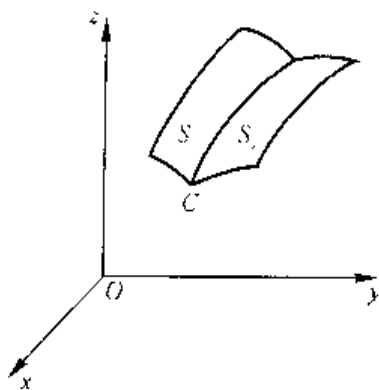


图 7-44

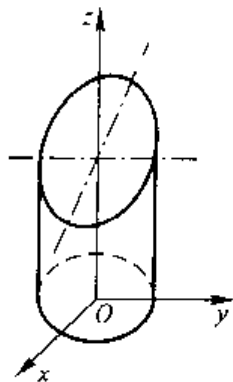


图 7-45

例 2 方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \\ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

表示怎样的曲线?

解 方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 O , 半径为 a 的上半球面. 第二个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面, 它的准线是 xOy 面上的圆, 这圆的圆心在点 $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, 半径为 $\frac{a}{2}$. 方程组就表示上述半球面与圆柱面的交线, 如图 7-46 所示.

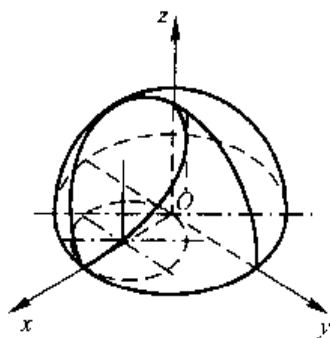


图 7-46

二、空间曲线的参数方程

空间曲线 C 的方程除了一般方程之外, 也可以用参数形式表示, 只要将 C 上动点的坐标 x, y, z 表示为参数 t 的函数:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (2)$$

当给定 $t = t_1$ 时, 就得到 C 上的一个点 (x_1, y_1, z_1) ; 随着 t 的变动便可得曲线 C 上的全部点. 方程组 (2) 叫做空间曲线的参数方程.

例 3 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升 (其中 ω, v 都是常数), 那么点 M 构成的图形叫做螺旋线. 试建立其参数方程.

解 取时间 t 为参数. 设当 $t = 0$ 时, 动点位于 x 轴上的一点 $A(a, 0, 0)$ 处. 经过时间 t , 动点由 A 运动到 $M(x, y, z)$ (图 7-47). 记 M 在 xOy 面上的投影

为 M' , M' 的坐标为 $x, y, 0$. 由于动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 所以经过时间 t , $\angle AOM' = \omega t$. 从而

$$x = |OM'| \cos \angle AOM' = a \cos \omega t,$$

$$y = |OM'| \sin \angle AOM' = a \sin \omega t.$$

由于动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升, 所以

$$z = MM' = vt.$$

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

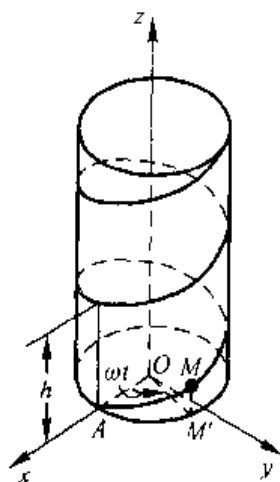


图 7-47

也可以用其他变量作参数; 例如令 $\theta = \omega t$, 则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

这里 $b = \frac{v}{\omega}$, 而参数为 θ .

螺旋线是实践中常用的曲线. 例如, 平头螺丝钉的外缘曲线就是螺旋线. 当我们拧紧平头螺丝钉时, 它的外缘曲线上的任一点 M , 一方面绕螺丝钉的轴旋转, 另一方面又沿平行于轴线的方向前进, 点 M 就走出一段螺旋线.

螺旋线有一个重要性质: 当 θ 从 θ_0 变到 $\theta_0 + \alpha$ 时, z 由 $b\theta_0$ 变到 $b\theta_0 + b\alpha$. 这说明当 OM' 转过角 α 时, M 点沿螺旋线上升了高度 $b\alpha$, 即上升的高度与 OM' 转过的角度成正比. 特别是当 OM' 转过一周, 即 $\alpha = 2\pi$ 时, M 点就上升固定的高度 $h = 2\pi b$. 这个高度 $h = 2\pi b$ 在工程技术上叫做螺距.

* 曲面的参数方程

下面顺便介绍一下曲面的参数方程. 曲面的参数方程通常是含两个参数的方程, 形如

$$\begin{cases} x = x(s, t), \\ y = y(s, t), \\ z = z(s, t). \end{cases} \quad (3)$$

例如空间曲线 Γ

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

绕 z 轴旋转, 所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2} \sin \theta, \\ z = \omega(t). \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \leq t \leq \beta \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (4)$$

这是因为, 固定一个 t , 得 Γ 上一点 $M_1(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$, 点 M_1 绕 z 轴旋转, 得空间的一个圆, 该圆在平面 $z = \omega(t)$ 上, 其半径为点 M_1 到 z 轴的距离 $\sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}$, 因此, 固定 t 的方程(4)就是该圆的参数方程. 再令 t 在 $[\alpha, \beta]$ 内变动, 方程(4)便是旋转曲面的方程.

例如直线

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = 2t \end{cases}$$

绕 z 轴旋转所得旋转曲面(图 7-48)的方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \cos \theta, \\ y = \sqrt{1+t^2} \sin \theta, \\ z = 2t. \end{cases}$$

(上式消去 t 和 θ , 得曲面的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 1 + \frac{z^2}{4}$)

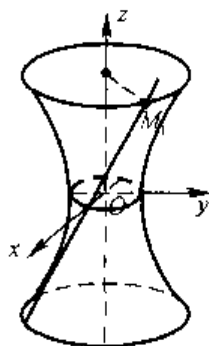


图 7-48

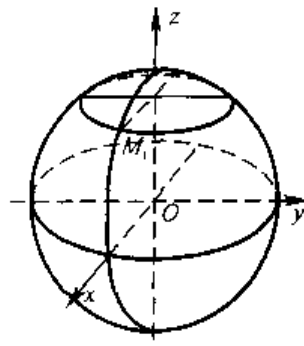


图 7-49

又如球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 可看成 xOz 面上的半圆周

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi, \\ y = 0, \\ z = a \cos \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

绕 z 轴旋转所得(图 7-49), 故球面方程为

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \cos \theta, \\ y = a \sin \varphi \sin \theta, \\ z = a \cos \varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

三、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

现在我们来研究由方程组(5)消去变量 z 后所得的方程

$$H(x, y) = 0. \quad (6)$$

由于方程(6)是由方程组(5)消去 z 后所得的结果,因此当 x, y 和 z 满足方程组(5)时,前两个数 x, y 必定满足方程(6),这说明曲线 C 上的所有点都在由方程(6)所表示的曲面上.

由上节知道,方程(6)表示一个母线平行于 z 轴的柱面.由上面的讨论可知,这柱面必定包含曲线 C .以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴(即垂直于 xOy 面)的柱面叫做曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面,投影柱面与 xOy 面的交线叫做空间曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线,或简称投影.因此,方程(6)所表示的柱面必定包含投影柱面,而方程

$$\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

所表示的曲线必定包含空间曲线 C 在 xOy 面上的投影.

同理,消去方程组(5)中的变量 x 或变量 y ,再分别和 $x=0$ 或 $y=0$ 联立,我们就可得到包含曲线 C 在 yOz 面或 xOz 面上的投影的曲线方程:

$$\begin{cases} R(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} T(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

例 4 已知两球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (7)$$

和

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1, \quad (8)$$

求它们的交线 C 在 xOy 面上的投影方程.

解 先求包含交线 C 而母线平行于 z 轴的柱面方程.因此要由方程(7)、(8)消去 z ,为此可先从(7)式减去(8)式并化简,得到

$$y + z = 1.$$

再以 $z = 1 - y$ 代入方程(7)或(8)即得所求的柱面方程为

$$x^2 + 2y^2 - 2y = 0.$$

容易看出,这就是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面方程,于是两球面的交线在 xOy 面上的投影方程是

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2z = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

在重积分和曲面积分的计算中,往往需要确定一个立体或曲面在坐标面上的投影,这时要利用投影柱面和投影曲线.

例 5 设一个立体由上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成(图 7-50),求它在 xOy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为

$$C: \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}. \end{cases}$$

由上列方程组消去 z , 得到 $x^2 + y^2 = 1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面, 容易看出, 这恰好是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面, 因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

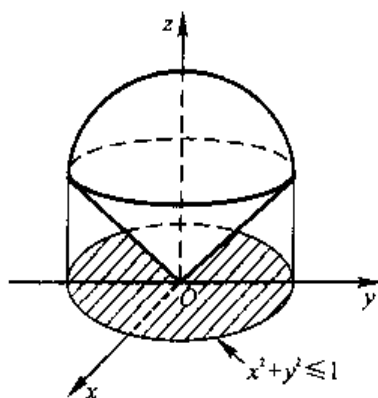


图 7-50

这是 xOy 面上的一个圆, 于是所求立体在 xOy 面上的投影, 就是该圆在 xOy 面上所围的部分: $x^2 + y^2 \leq 1$.

习 题 7-4

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

$$(1) \begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ x = y = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

2. 指出下列方程组在平面解析几何中与在空间解析几何中分别表示什么图形:

$$(1) \begin{cases} y = 5x + 1, \\ y = 2x - 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程.

4. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与平面 $x + z = 1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

5. 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = x; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} ((x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$x = a \cos \theta,$$

$$6. \text{ 求螺旋线 } \begin{cases} y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$$

在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

7. 求上半球 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与圆柱体 $x^2 + y^2 \leq ax (a > 0)$ 的公共部分在 xOy 面和 xOz 面上的投影.

8. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 4)$ 在三坐标面上的投影.

第五节 平面及其方程

在本节和下一节里,我们将以向量为工具,在空间直角坐标系中讨论最简单的曲面和曲线——平面和直线.

一、平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面,这向量就叫做该平面的法线向量.容易知道,平面上的任一向量均与该平面的法线向量垂直.

因为过空间一点可以作而且只能作一平面垂直于一已知直线,所以当平面 Π 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一个法线向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为已知时,平面 Π 的位置就完全确定了.下面我们来建立平面 Π 的方程.

设 $M(x, y, z)$ 是平面 Π 上的任一点(图 7-51).那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面 Π 的法线向量 \mathbf{n} 垂直,即它们的数量积等于零:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

由于 $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 所以有

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

这就是平面 Π 上任一点 M 的坐标 x, y, z 所满足的方程.

反过来,如果 $M(x, y, z)$ 不在平面 Π 上,那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与法线向量 \mathbf{n} 不垂直,从而 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} \neq 0$, 即不在平面 Π 上的点 M 的坐标 x, y, z 不满足方程(1).

由此可知,平面 Π 上的任一点的坐标 x, y, z 都满足方程(1);不在平面 Π 上的点的坐标都不满足方程(1).这样,方程(1)就是平面 Π 的方程,而平面 Π 就是方程(1)的图形.由于方程(1)是由平面 Π 上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及它的一个法线向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 确定的,所以方程(1)叫做平面的点法式方程.

例 1 求过点 $(2, -3, 0)$ 且以 $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ 为法线向量的平面的方程.

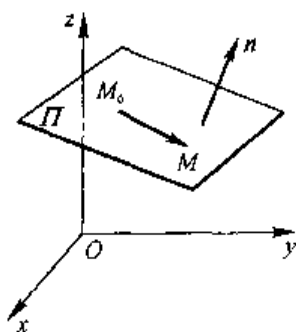


图 7-51

解 根据平面的点法式方程(1),得所求平面的方程为

$$(x-2)-2(y+3)+3z=0,$$

即

$$x-2y+3z-8=0.$$

例2 求过三点 $M_1(2, -1, 4)$ 、 $M_2(-1, 3, -2)$ 和 $M_3(0, 2, 3)$ 的平面的方程.

解 先找出这平面的法线向量 n . 由于向量 n 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 、 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直, 而 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3, 4, -6)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2, 3, -1)$, 所以可取它们的向量积为 n :

$$\begin{aligned} n = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 14i + 9j - k, \end{aligned}$$

根据平面的点法式方程(1),得所求平面的方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

即

$$14x+9y-z-15=0.$$

二、平面的一般方程

由于平面的点法式方程(1)是 x 、 y 、 z 的一次方程, 而任一平面都可以用它上面的一点及它的法线向量来确定, 所以任一平面都可以用三元一次方程来表示.

反过来, 设有三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2)$$

我们任取满足该方程的一组数 x_0, y_0, z_0 , 即

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3)$$

把上述两等式相减, 得

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \quad (4)$$

把它和平面的点法式方程(1)作比较, 可以知道方程(4)是通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $n=(A, B, C)$ 为法线向量的平面方程. 但方程(2)与方程(4)同解, 这是因为由(2)减去(3)即得(4), 又由(4)加上(3)就得(2). 由此可知, 任一三元一次方程(2)的图形总是一个平面. 方程(2)称为平面的一般方程, 其中 x 、 y 、 z 的系数就是该平面的一个法线向量 n 的坐标, 即 $n=(A, B, C)$.

例如, 方程

$$3x - 4y + z - 9 = 0.$$

表示一个平面, $n=(3, -4, 1)$ 是这平面的一个法线向量.

对于一些特殊的三元一次方程,应该熟悉它们的图形的特点.

当 $D=0$ 时,方程(2)成为 $Ax + By + Cz = 0$,它表示一个通过原点的平面.

当 $A=0$ 时,方程(2)成为 $By + Cz + D = 0$,法线向量 $\mathbf{n} = (0, B, C)$ 垂直于 x 轴,方程表示一个平行于 x 轴的平面.

同样,方程 $Ax + Cz + D = 0$ 和 $Ax + By + D = 0$,分别表示一个平行于 y 轴和 z 轴的平面.

当 $A=B=0$ 时,方程(2)成为 $Cz + D = 0$ 或 $z = -\frac{D}{C}$,法线向量 $\mathbf{n} = (0, 0, C)$ 同时垂直 x 轴和 y 轴,方程表示一个平行于 xOy 面的平面.

同样,方程 $Ax + D = 0$ 和 $By + D = 0$ 分别表示一个平行于 yOz 面和 xOz 面的平面.

例 3 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面的方程.

解 由于平面通过 x 轴,从而它的法线向量垂直于 x 轴,于是法线向量在 x 轴上的投影为零,即 $A=0$;又由平面通过 x 轴,它必通过原点,于是 $D=0$.因此可设这平面的方程为

$$By + Cz = 0.$$

又因这平面通过点 $(4, -3, -1)$,所以有

$$-3B - C = 0,$$

或

$$C = -3B.$$

以此代入所设方程并除以 $B(B \neq 0)$,便得所求的平面方程为

$$y - 3z = 0.$$

例 4 设一平面与 x, y, z 轴的交点依次为 $P(a, 0, 0)$ 、 $Q(0, b, 0)$ 、 $R(0, 0, c)$ 三点(图 7-52),求这平面的方程(其中 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$).

解 设所求平面的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

因 $P(a, 0, 0)$ 、 $Q(0, b, 0)$ 、 $R(0, 0, c)$ 三点都在这平面上,所以点 P, Q, R 的坐标都满足方程(2);即有

$$\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

$$\text{得 } A = -\frac{D}{a}, B = -\frac{D}{b}, C = -\frac{D}{c}.$$

以此代入(2)并除以 $D(D \neq 0)$,便得所求的平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (5)$$

方程(5)叫做平面的截距式方程,面 a, b, c 依次叫做平面在 x, y, z 轴上的截距.

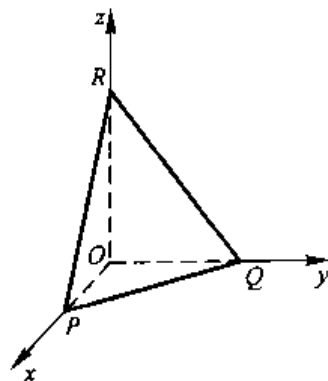


图 7-52

三、两平面的夹角

两平面的法线向量的夹角(通常指锐角)称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量依次为 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ 和 $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$,

那么平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ (图 7-53) 应是 $(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})$ 和 $(-\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}) = \pi - (\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})$ 两者中的锐角, 因此, $\cos \theta = |\cos (\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式, 平面 Π_1 和平面 Π_2 的夹角 θ 可由

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (6)$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论:

Π_1, Π_2 互相垂直相当于 $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$;

Π_1, Π_2 互相平行或重合相当于 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

例 5 求两平面 $x - y + 2z - 6 = 0$ 和 $2x + y + z - 5 = 0$ 的夹角.

解 由公式(6)有

$$\cos \theta = \frac{|1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2},$$

因此, 所求夹角 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

例 6 一平面通过两点 $M_1(1, 1, 1)$ 和 $M_2(0, 1, -1)$ 且垂直于平面 $x + y + z = 0$, 求它的方程.

解 设所求平面的一个法线向量为

$$\mathbf{n} = (A, B, C).$$

因 $\overrightarrow{M_1 M_2} = (-1, 0, -2)$ 在所求平面上, 它必与 \mathbf{n} 垂直, 所以有

$$-A - 2C = 0. \quad (7)$$

又因所求的平面垂直于已知平面 $x + y + z = 0$, 所以又有

$$A + B + C = 0. \quad (8)$$

由(7)、(8)得到

$$A = -2C,$$

$$B = C.$$

由平面的点法式方程可知, 所求平面方程为

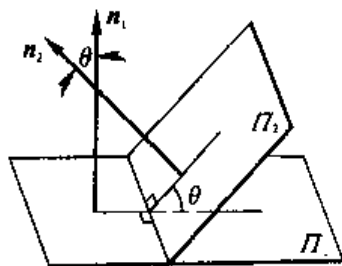


图 7-53

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

将 $A = -2C$ 及 $B = C$ 代入上式,并约去 $C(C \neq 0)$, 便得

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0.$$

或

$$2x-y-z=0.$$

这就是所求的平面方程.

例 7 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点, 求 P_0 到这平面的距离(图 7-54).

解 在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 并作一法线向量 \boldsymbol{n} , 由图 7-54, 并考虑到 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与 \boldsymbol{n} 的夹角也可能是钝角, 得所求的距离

$$d = |\text{Prj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{P_1P_0}|$$

设 \boldsymbol{e}_n 为与向量 \boldsymbol{n} 方向一致的单位向量, 那么有

$$\text{Prj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{P_1P_0} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \boldsymbol{e}_n,$$

而

$$\boldsymbol{e}_n = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right),$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1),$$

所以

$$\begin{aligned} \text{Prj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{P_1P_0} &= \frac{A(x_0 - x_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ &= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}$$

由于

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

所以

$$\text{Prj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

由此得点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (9)$$

例如, 求点 $(2, 1, 1)$ 到平面 $x + y - z + 1 = 0$ 的距离, 可利用公式(9), 便得

$$d = \frac{|1 \times 2 + 1 \times 1 - 1 \times 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

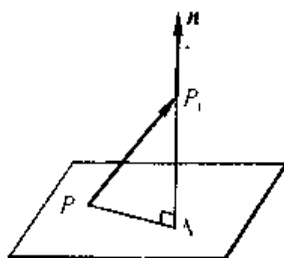


图 7-54

习 题 7-5

1. 求过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程

2. 求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.
3. 求过 $(1, 1, -1)$ 、 $(-2, 2, 2)$ 和 $(1, -1, 2)$ 三点的平面方程.
4. 指出下列各平面的特殊位置, 并画出各平面:
 - (1) $x=0$; (2) $3y-1=0$;
 - (3) $2x-3y-6=0$; (4) $x-\sqrt{3}y=0$;
 - (5) $y+z-1$; (6) $x-2z=0$;
 - (7) $6x+5y-z=0$.
5. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.
6. 一平面过点 $(1, 0, -1)$ 且平行于向量 $a=(2, 1, 1)$ 和 $b=(1, -1, 0)$, 试求这平面方程.
7. 求三平面 $x+3y+z-1$, $2x-y-z-0$, $-x+2y+2z=3$ 的交点.
8. 分别按下列条件求平面方程:
 - (1) 平行于 xOz 面且经过点 $(2, 5, 3)$;
 - (2) 通过 z 轴和点 $(-3, 1, -2)$;
 - (3) 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, 2)$ 和 $(5, 1, 7)$.
9. 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

第六节 空间直线及其方程

一、空间直线的一般方程

空间直线 L 可以看作是两个平面 Π_1 和 Π_2 的交线(图 7-55). 如果两个相交的平面 Π_1 和 Π_2 的方程分别为 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, 那么直线 L 上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程, 即应满足方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

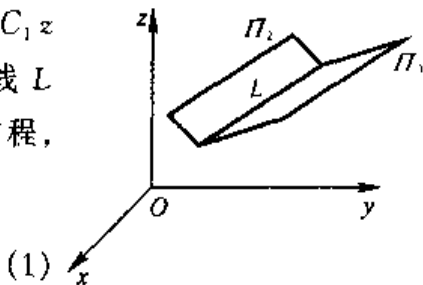


图 7-55

反过来, 如果点 M 不在直线 L 上, 那么它不可能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上, 所以它的坐标不满足方程组(1). 因此, 直线 L 可以用方程组(1)来表示. 方程组(1)叫做空间直线的一般方程.

通过空间一直线 L 的平面有无限多个, 只要在这无限多个平面中任意选取两个, 把它们的方程联立起来, 所得的方程组就表示空间直线 L .

二、空间直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量平行于一条已知直线, 这个向量就叫做这条直线的方向向量. 容易知道, 直线上任一向量都平行于该直线的方向向量.

由于过空间一点可作而且只能作一条直线平行于--已知直线,所以当直线 L 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一方向向量 $s = (m, n, p)$ 为已知时,直线 L 的位置就完全确定了.下面我们来建立这直线的方程.

设点 $M(x, y, z)$ 是直线 L 上的任一点,那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 L 的方向向量 s 平行(图 7-56).所以两向量的对应坐标成比例,由于 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $s = (m, n, p)$,从而有

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (2)$$

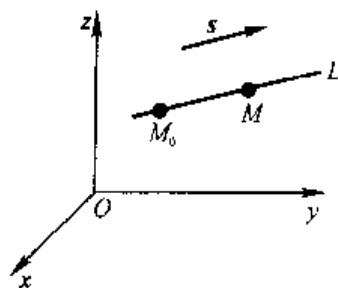


图 7-56

反过来,如果点 M 不在直线 L 上,那么由于 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 s 不平行,这两向量的对应坐标就不成比例.因此方程组(2)就是直线 L 的方程,叫做直线的对称式方程或点向式方程.

直线的任一方向向量 s 的坐标 m, n, p 叫做这直线的一组方向数,而向量 s 的方向余弦叫做该直线的方向余弦.

由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程.如设

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t,$$

那么

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \quad (3)$$

方程组(3)就是直线的参数方程.

例 1 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z + 4 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

解 先找出这直线上的一点 (x_0, y_0, z_0) . 例如,可以取 $x_0 = 1$,代入方程组(4),得

$$\begin{cases} y + z = -2, \\ y - 3z = 6. \end{cases}$$

① 当 m, n, p 中有一个为零,例如 $m = 0$,而 $n, p \neq 0$ 时,这方程组应理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \end{cases}$$

当 m, n, p 中有两个为零,例如 $m = n = 0$,而 $p \neq 0$ 时,这方程组应理解为

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ y - y_0 = 0. \end{cases}$$

解这个二元一次方程组,得

$$y_0 = 0, z_0 = -2,$$

即 $(1, 0, -2)$ 是这直线上的一点.

下面再找出这直线的方向向量 s . 由于两平面的交线与这两平面的法线向量 $n_1 = (1, 1, 1), n_2 = (2, -1, 3)$ 都垂直, 所以可取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4i - j - 3k.$$

因此, 所给直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3}.$$

令

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3} = t,$$

得所给直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -t, \\ z = -2 - 3t. \end{cases}$$

三、两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)叫做两直线的夹角.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $s_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 和 $s_2 = (m_2, n_2, p_2)$,

那么 L_1 和 L_2 的夹角 φ 应是 $(\widehat{s_1, s_2})$ 和 $(-\widehat{s_1, s_2}) = \pi - (\widehat{s_1, s_2})$ 两者中的锐角.

因此 $\cos \varphi = |\cos (\widehat{s_1, s_2})|$. 按两向量的夹角的余弦公式, 直线 L_1 和直线 L_2 的夹角 φ 可由

$$\cos \varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (5)$$

来确定.

从两向量垂直、平行的充分必要条件立即推得下列结论:

两直线 L_1, L_2 互相垂直相当于 $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$;

两直线 L_1, L_2 互相平行或重合相当于 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

例 2 求直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ 和 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$ 的夹角.

解 直线 L_1 的方向向量为 $s_1 = (1, -4, 1)$; 直线 L_2 的方向向量为 $s_2 =$

$(2, -2, -1)$. 设直线 L_1 和 L_2 的夹角为 φ , 那么由公式(5)有

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{1 \times 2 + (-4) \times (-2) + 1 \times (-1)}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

所以

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

四、直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ ($0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) 称为直线与平面的夹角(图 7-57), 当直线与平面垂直时, 规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线的方向向量为 $s = (m, n, p)$, 平面的法线向量为 $n = (A, B, C)$, 直线与平面的夹角为 φ , 那么 $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} - (\widehat{s, n}) \right|$, 因此 $\sin \varphi = |\cos(\widehat{s, n})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表示式, 有

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (6)$$

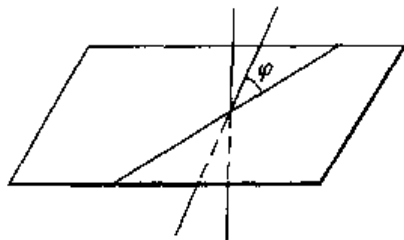


图 7-57

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法线向量平行, 所以, 直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (7)$$

因为直线与平面平行或直线在平面上相当于直线的方向向量与平面的法线向量垂直, 所以, 直线与平面平行或直线在平面上相当于

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (8)$$

例 3 求过点 $(1, -2, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + z - 4 = 0$ 垂直的直线的方程.

解 因为所求直线垂直于已知平面, 所以可以取已知平面的法线向量 $(2, -3, 1)$ 作为所求直线的方向向量. 由此可得所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{1}.$$

五、杂例

例 4 求与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行且过点 $(-3, 2, 5)$

的直线的方程.

解 因为所求直线与两平面的交线平行,也就是直线的方向向量 s 一定同时与两平面的法线向量 n_1, n_2 垂直,所以可以取

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -(4i + 3j + k),$$

因此所求直线的方程为

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}.$$

例 5 求直线 $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x + y + z - 6 = 0$ 的交点.

解 所给直线的参数方程为

$$x = 2 + t, \quad y = 3 + t, \quad z = 4 + 2t,$$

代入平面方程中,得

$$2(2+t) + (3+t) + (4+2t) - 6 = 0.$$

解上列方程,得 $t = -1$. 把求得的 t 值代入直线的参数方程中,即得所求交点的坐标为

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 2.$$

例 6 求过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

解 先作一平面过点 $(2, 1, 3)$ 且垂直于已知直线,那么这平面的方程应为

$$3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0. \quad (9)$$

再求已知直线与这平面的交点. 已知直线的参数方程为

$$x = -1 + 3t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -t. \quad (10)$$

把(10)代入(9)中,求得 $t = \frac{3}{7}$, 从而求得交点为 $\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$.

以点 $(2, 1, 3)$ 为起点, 点 $\left(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7}\right)$ 为终点的向量

$$\left(\frac{2}{7} - 2, \frac{13}{7} - 1, -\frac{3}{7} - 3\right) = -\frac{6}{7}(2, -1, 4)$$

是所求直线的一个方向向量, 故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}.$$

有时用平面束的方程解题比较方便, 现在我们来介绍它的方程.

设直线 L 由方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (12) \end{cases}$$

所确定,其中系数 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例.我们建立三元一次方程:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (13)$$

其中 λ 为任意常数.因为 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例,所以对于任何一个 λ 值,方程(13)的系数: $A_1 + \lambda A_2, B_1 + \lambda B_2, C_1 + \lambda C_2$ 不全为零,从而方程(13)表示一个平面,若一点在直线 L 上,则点的坐标必同时满足方程(11)和(12),因而也满足方程(13),故方程(13)表示通过直线 L 的平面,且对应于不同的 λ 值,方程(13)表示通过直线 L 的不同的平面.反之,通过直线 L 的任何平面(除平面(12)外)都包含在方程(13)所表示的一族平面内.通过定直线的所有平面的全体称为平面束,而方程(13)就作为通过直线 L 的平面束的方程(实际上,方程(13)表示缺少平面(12)的平面束).

例7 求直线 $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $x + y + z = 0$ 上的投影直线的方程.

解 过直线 $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 的平面束的方程为

$$(x + y - z - 1) + \lambda(x - y + z + 1) = 0,$$

$$\text{即} \quad (1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y + (-1 + \lambda)z + (-1 + \lambda) = 0, \quad (14)$$

其中 λ 为待定常数.这平面与平面 $x + y + z = 0$ 垂直的条件是

$$(1 + \lambda) \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot 1 + (-1 + \lambda) \cdot 1 = 0,$$

$$\text{即} \quad \lambda + 1 = 0,$$

$$\text{由此得} \quad \lambda = -1.$$

代入(14)式,得投影平面的方程为

$$2y - 2z - 2 = 0,$$

$$\text{即} \quad y - z - 1 = 0.$$

所以投影直线的方程为

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

习 题 7-6

1. 求过点 $(4, -1, 3)$ 且平行于直线 $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$ 的直线方程.
2. 求过两点 $M_1(3, -2, 1)$ 和 $M_2(-1, 0, 2)$ 的直线方程.
3. 用对称式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

4. 求过点(2,0,-3)且与直线

$$\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$$

垂直的平面方程.

5. 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0, \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$

的夹角的余弦.

6. 证明直线 $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 3x+6y-3z=8, \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

7. 求过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

8. 求过点(3,1,-2)且通过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程.

9. 求直线 $\begin{cases} x+y+3z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 的夹角.

10. 试确定下列各组中的直线和平面间的关系:

(1) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{7} = \frac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z-3$;

(2) $\frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z=8$;

(3) $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z-3$.

11. 求过点(1,2,1)而与两直线

$$\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

平行的平面的方程.

12. 求点(-1,2,0)在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

13. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离.

14. 设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任意一点, 且直线的方向向量为 s , 试证: 点 M_0 到直线 L 的距离

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times s|}{|s|}.$$

15. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在平面 $4x-y+z-1$ 上的投影直线的方程.

16. 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

(1) $x=0, y=0, z=0, x=2, y=1, 3x+4y+2z-12=0$;

(2) $x=0, z=0, x=1, y=2, z=\frac{y}{4}$;

(3) $z=0, z=3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$ (在第一卦限内);

(4) $x=0, y=0, z=0, x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$ (在第一卦限内).

总习题七

1. 填空

(1) 设在坐标系 $[O; i, j, k]$ 中点 A 和点 M 的坐标依次为 (x_0, y_0, z_0) 和 (x, y, z) , 则在 $[A; i, j, k]$ 坐标系中, 点 M 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 向量 \overrightarrow{OM} 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为 0, 使 $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三个向量是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的.

(3) 设 $\mathbf{a} = (2, 1, 2), \mathbf{b} = (4, -1, 10), \mathbf{c} = \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 都是单位向量, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4, |\mathbf{c}| = 5$, 且满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 在 y 轴上求与点 $A(1, -3, 7)$ 和点 $B(5, 7, -5)$ 等距离的点.

3. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(3, 2, -1), B(5, -4, 7)$ 和 $C(-1, 1, 2)$, 求从顶点 C 所引中线的长度.

4. 设 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}, \overrightarrow{CA} = \mathbf{b}, \overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, 三边中点依次为 D, E, F , 试用向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$, 并证明

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}.$$

5. 试用向量证明三角形两边中点的连线平行于第三边, 且其长度等于第三边长度的一半.

6. 设 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|, \mathbf{a} = (3, -5, 8), \mathbf{b} = (-1, 1, z)$, 求 z .

7. 设 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}, |\mathbf{b}| = 1, (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$, 求向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角.

8. 设 $\mathbf{a} + 3\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}, \mathbf{a} - 4\mathbf{b} \perp 7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, 求 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$.

9. 设 $\mathbf{a} = (2, -1, -2), \mathbf{b} = (1, 1, z)$, 问 z 为何值时 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ 最小? 并求出此最小值.

10. 设 $|\mathbf{a}| = 4, |\mathbf{b}| = 3, (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{6}$, 求以 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积.

11. 设 $\mathbf{a} = (2, -3, 1), \mathbf{b} = (1, -2, 3), \mathbf{c} = (2, 1, 2)$, 向量 \mathbf{r} 满足 $\mathbf{r} \perp \mathbf{a}, \mathbf{r} \perp \mathbf{b}, \text{Prj}_{\mathbf{c}} \mathbf{r} = 14$, 求 \mathbf{r} .

12. 设 $\mathbf{a} = (-1, 3, 2), \mathbf{b} = (2, -3, -4), \mathbf{c} = (-3, 12, 6)$, 证明三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面, 并用 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 表示 \mathbf{c} .

13. 已知动点 $M(x, y, z)$ 到 xOy 平面的距离与点 M 到点 $(1, -1, 2)$ 的距离相等, 求点 M 的轨迹的方程.

14. 指出下列旋转曲面的一条母线和旋转轴:

$$(1) z = 2(x^2 + y^2); \quad (2) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1;$$

$$(3) z^2 = 3(x^2 + y^2); \quad (4) x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

15. 求通过点 $A(3,0,0)$ 和 $B(0,0,1)$ 且与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

16. 设一平面垂直于平面 $x=0$, 并通过对点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} y+z+1=0 \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线, 求此平面的方程.

17. 求过点 $(-1, 0, 4)$, 且平行于平面 $3x - 4y + z - 10 = 0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 相交的直线的方程.

18. 已知点 $A(1, 0, 0)$ 及点 $B(0, 2, 1)$, 试在 z 轴上求一点 C , 使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

19. 求曲线 $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的方程.

20. 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

21. 画出下列各曲面所围立体的图形:

(1) 抛物柱面 $2y^2 = x$, 平面 $z=0$ 及 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$;

(2) 抛物柱面 $x^2 = 1 - z$, 平面 $y=0$, $z=0$ 及 $x+y=1$;

(3) 圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及旋转抛物面 $z = 2 - x^2 - y^2$;

(4) 旋转抛物面 $x^2 + y^2 = z$, 柱面 $y^2 = x$, 平面 $z=0$ 及 $x=1$.

附录 I 二阶和三阶行列式简介

给出二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

求这方程组的解.

用大家熟知的消元法, 分别消去方程组(1)中的 x_2 及 x_1 , 得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases} \quad (2)$$

下面引入二阶行列式, 然后利用二阶行列式来进一步讨论上述问题.

设已知四个数排成正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

则数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为对应于这个表的二阶行列式, 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

表示, 因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式(3)的元素, 横排叫做行, 竖排叫做列. 元素 a_{ij} 中的第一个指标 i 和第二个指标 j , 依次表示行数和列数. 例如, 元素 a_{21} 在行列式(3)中位于第二行和第一列.

现在, 方程组(2)可利用行列式来表示. 设

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ D_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \end{aligned}$$

则方程组(2)可写成

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1, \\ Dx_2 = D_2. \end{cases} \quad (2')$$

我们注意到, D 就是方程组(1)中 x_1 及 x_2 的系数构成的行列式, 因此称为系数行列式, 而 D_1 和 D_2 分别是用方程组(1)右端的常数项代替 D 的第一列和第二列而形成的.

若 $D \neq 0$, 则方程组(2)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (4)$$

把(4)中 x_1 及 x_2 的值代入方程组(1), 便可证实 x_1 及 x_2 的这对值也是方程组(1)的解. 另一方面, (2)是由(1)导出的, 因此(1)的解一定是(2)的解. 现在(2)只有一组解(4), 所以(4)是方程组(1)的唯一解. 由此得出结论:

在 $D \neq 0$ 的条件下, 方程组(1)有唯一的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

$$\text{解} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \times (-2) - 3 \times (-3) = -7,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 8 \times 1 = -14.$$

因 $D = -7 \neq 0$, 故所给方程组有唯一解

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

下面介绍三阶行列式概念.

设已知九个数排成正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则数 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ 称为对应于这个表的三阶行列式, 用记号

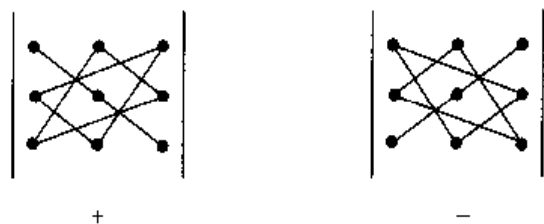
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示,因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (5)$$

关于三阶行列式的元素、行、列等概念,与二阶行列式的相应概念类似,不再重复.

(5)式右端相当复杂,我们可以借助下列图形得出它的计算法则(通常称为对角线法则):



行列式中从左上角到右下角的直线称为主对角线,从右上角到左下角的直线称为次对角线.主对角线上元素的乘积,以及位于主对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积,前面都取正号.次对角线上元素的乘积,以及位于次对角的平行线上的元素与对角上的元素的乘积,前面都取负号.

例 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 5 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times (-4) \times 3 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times (-4) \times 5 - 2 \times 1 \times 3 \\ = 30 + 2 - 24 - 12 + 20 - 6 = 10.$$

利用交换律及结合律,可把(5)式改写如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

把上式右端三个括号中的式子表示为二阶行列式,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

上式称为三阶行列式按第一行的展开式.

例3 将例2中的行列式按第一行展开并计算它的值.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \times 12 - (-22) + 2 \times (-18) \\
 &= 24 + 22 - 36 = 10.
 \end{aligned}$$

习 题

1. 利用二阶行列式解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 5x - y = 2, \\ 3x + 2y = 9; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

2. 利用对角线法则, 计算下列各行列式:

$$\begin{aligned}
 (1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}; & \quad (2) \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \\
 (3) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}; & \quad (4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. 将下列行列式按第一行展开并计算它们的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. 证明下列等式:

$$\begin{aligned}
 (1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &\quad - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \\
 (2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
 &\quad + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};
 \end{aligned}$$

[注: 上面这两个等式分别称为三阶行列式按第二行和按第三行的展开式.]

答 案

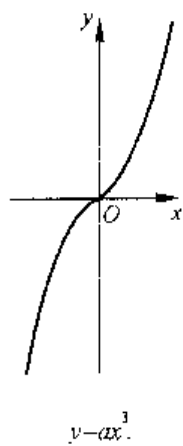
1. (1) $x = 1, y = 3$; (2) $x = -22, y = 17$.

2. (1) -4 ; (2) 8 ; (3) -48 ; (4) ab .

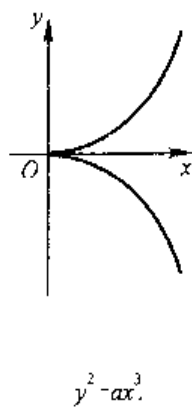
3. (1) 18 ; (2) 27 .

附录 II 几种常用的曲线

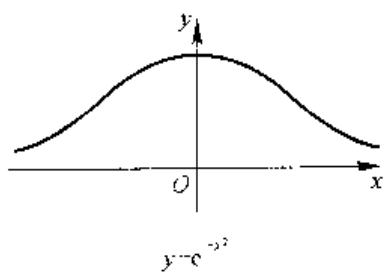
(1) 三次抛物线



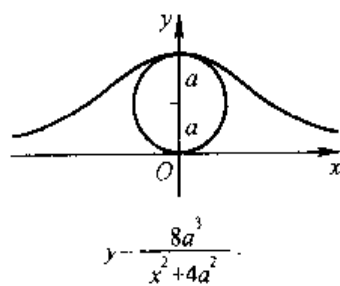
(2) 半立方抛物线



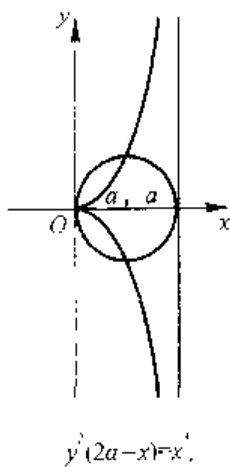
(3) 概率曲线



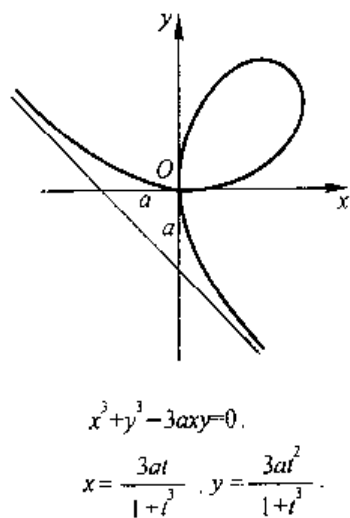
(4) 箕舌线



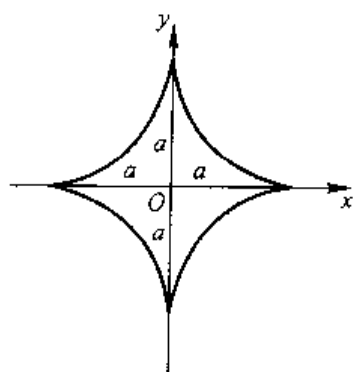
(5) 蔓叶线



(6) 笛卡儿叶形线



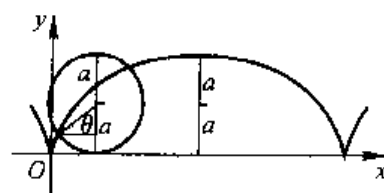
(7) 星形线(内摆线的一种)



$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

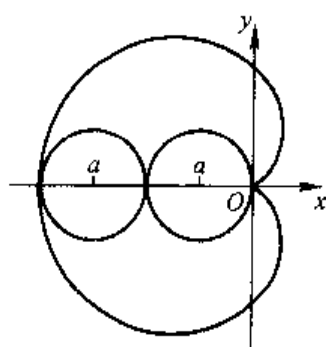
$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta. \end{cases}$$

(8) 摆线



$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

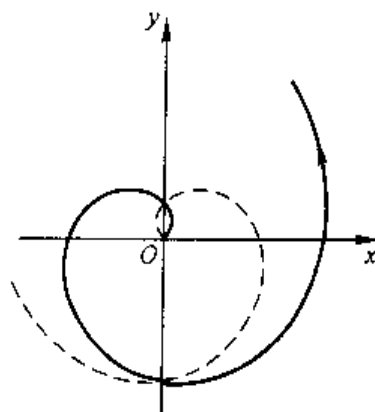
(9) 心形线(外摆线的一种)



$$x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

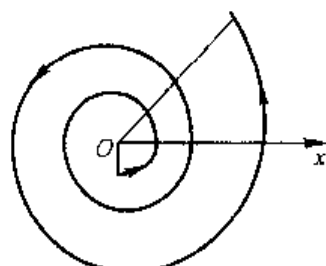
$$\rho = a(1 - \cos \theta).$$

(10) 阿基米德螺线



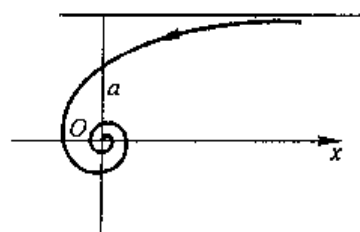
$$\rho = a\theta.$$

(11) 对数螺线



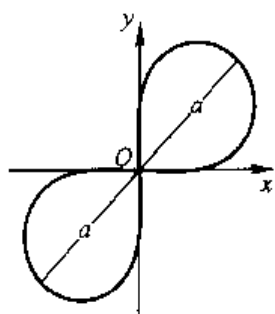
$$\rho = e^{\theta}.$$

(12) 双曲螺线



$$\rho\theta = a.$$

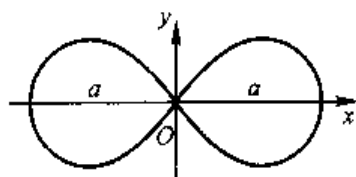
(13) 伯努利双纽线



$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy,$$

$$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta.$$

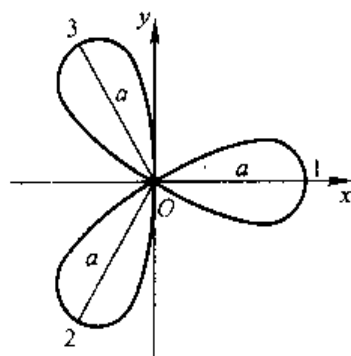
(14) 伯努利双纽线



$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$$

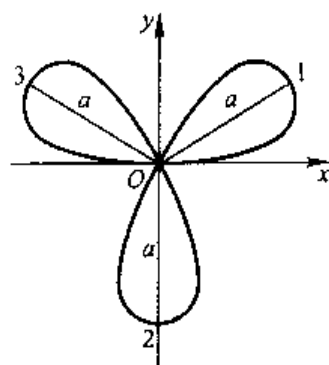
$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

(15) 三叶玫瑰线



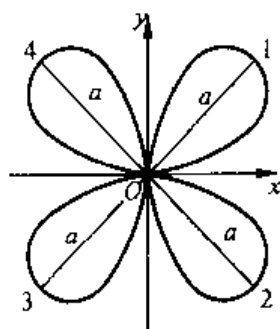
$$\rho = a \cos 3\theta$$

(16) 三叶玫瑰线



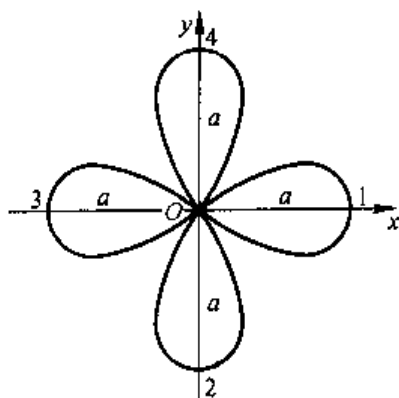
$$\rho = a \sin 3\theta.$$

(17) 四叶玫瑰线



$$\rho = a \sin 2\theta.$$

(18) 四叶玫瑰线



$$\rho = a \cos 2\theta.$$

附录Ⅲ 积 分 表

(一) 含有 $ax+b$ 的积分

1. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$
2. $\int (ax+b)^\mu dx = \frac{1}{a(\mu+1)} (ax+b)^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$
3. $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{1}{a^2} (ax+b - b \ln|ax+b|) + C$
4. $\int \frac{x^2}{ax+b} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2} (ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2 \ln|ax+b| \right] + C$
5. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C$
6. $\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = \frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C$
7. $\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a} \left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b} \right) + C$
8. $\int \frac{x^2}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^3} \left(ax+b - 2b \ln|ax+b| - \frac{b^2}{ax+b} \right) + C$
9. $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C$

(二) 含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

10. $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C$
11. $\int x \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^{\frac{5}{2}}} (3ax-2b) \sqrt{(ax+b)^3} + C$
12. $\int x^2 \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{105a^{\frac{7}{2}}} (15a^2x^2 - 12abx + 8b^2) \sqrt{(ax+b)^3} + C$
13. $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{3a^{\frac{3}{2}}} (ax-2b) \sqrt{ax+b} + C$
14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{15a^{\frac{5}{2}}} (3a^2x^2 - 4abx + 8b^2) \sqrt{ax+b} + C$
15. $\int \frac{dx}{x \sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}} \right| + C & (b > 0) \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \arctan \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C & (b < 0) \end{cases}$
16. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x \sqrt{ax+b}}$

$$17. \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

$$18. \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$

(三) 含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

$$19. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$20. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$21. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

(四) 含有 $ax^2+b(a>0)$ 的积分

$$22. \int \frac{dx}{ax^2+b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \sqrt{\frac{a}{b}} x + C & (b>0) \\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax}-\sqrt{-b}}{\sqrt{ax}+\sqrt{-b}} \right| + C & (b<0) \end{cases}$$

$$23. \int \frac{x}{ax^2+b} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+b| + C$$

$$24. \int \frac{x^2}{ax^2+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{ax^2+b}$$

$$25. \int \frac{dx}{x(ax^2+b)} = \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{x^2}{ax^2+b} \right| + C$$

$$26. \int \frac{dx}{x^3(ax^2+b)} = -\frac{1}{bx^2} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{ax^2+b}$$

$$27. \int \frac{dx}{x^3(ax^2+b)} = \frac{a}{2b^2} \ln \left| \frac{ax^2+b}{x^2} \right| - \frac{1}{2bx^2} + C$$

$$28. \int \frac{dx}{(ax^2+b)^2} = \frac{x}{2b(ax^2+b)} + \frac{1}{2b} \int \frac{dx}{ax^2+b}$$

(五) 含有 $ax^2+bx+c(a>0)$ 的积分

$$29. \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & (b^2<4ac) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C & (b^2>4ac) \end{cases}$$

$$30. \int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

(六) 含有 $\sqrt{x^2+a^2}(a>0)$ 的积分

$$31. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C_1 = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$33. \int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \sqrt{x^2+a^2} + C$$

$$34. \int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$35. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$36. \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$37. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{|x|} - \frac{a}{x} + C$$

$$38. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C$$

$$39. \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$40. \int \sqrt{(x^2+a^2)^3} dx = \frac{x}{8} (2x^2+5a^2) \sqrt{x^2+a^2} + \frac{3}{8} a^4 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$41. \int x \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+a^2)^3} + C$$

$$42. \int x^2 \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2+a^2) \sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$43. \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2+a^2} + a \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C$$

$$44. \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

(七) 含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ ($a>0$) 的积分

$$45. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{|x|}{a} + C_1 = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$46. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2-a^2}} + C$$

$$47. \int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \sqrt{x^2-a^2} + C$$

$$48. \int \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} + C$$

$$49. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$50. \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$51. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arccos} \frac{a}{x} + C$$

$$52. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C$$

$$53. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$54. \int \sqrt{(x^2 - a^2)^3} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - 5a^2) \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{3}{8} a^4 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$55. \int x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3} + C$$

$$56. \int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$57. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{|x|} + C$$

$$58. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

(八) 含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$) 的积分

$$59. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$60. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$61. \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$62. \int \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$63. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$64. \int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} dx = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$65. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C$$

$$66. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

$$67. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$68. \int \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$69. \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + C$$

$$70. \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$71. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C$$

$$72. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C$$

(九) 含有 $\sqrt{\pm ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$) 的积分

$$73. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C$$

$$74. \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8\sqrt{a^3}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C$$

$$75. \int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2\sqrt{a^3}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C$$

$$76. \int \frac{dx}{\sqrt{c + bx - ax^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C$$

$$77. \int \sqrt{c + bx - ax^2} dx = \frac{2ax - b}{4a} \sqrt{c + bx - ax^2} + \frac{b^2 + 4ac}{8\sqrt{a^3}} \arcsin \frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C$$

$$78. \int \frac{x}{\sqrt{c + bx - ax^2}} dx = -\frac{1}{a} \sqrt{c + bx - ax^2} + \frac{b}{2\sqrt{a^3}} \arcsin \frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 + 4ac}} + C$$

(十) 含有 $\sqrt{\pm \frac{x-a}{x-b}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分

$$79. \int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} dx = (x-b) \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + (b-a) \ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x-b|}) + C$$

$$80. \int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = (x-b) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + (b-a) \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

$$81. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C \quad (a < b)$$

$$82. \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{2x-a-b}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C \quad (a < b)$$

(十一) 含有三角函数的积分

$$83. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$84. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$85. \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$86. \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$87. \int \sec x dx = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$88. \int \csc x \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$89. \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$90. \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$91. \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

$$92. \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$93. \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$94. \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$95. \int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

$$96. \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$97. \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

$$98. \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\begin{aligned} 99. \int \cos^m x \sin^n x \, dx &= \frac{1}{m+n} \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m}{m+n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x \, dx \\ &= -\frac{1}{m+n} \cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x \, dx \end{aligned}$$

$$100. \int \sin ax \cos bx \, dx = -\frac{1}{2(a+b)} \cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)} \cos(a-b)x + C$$

$$101. \int \sin ax \sin bx \, dx = -\frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + C$$

$$102. \int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + C$$

$$103. \int \frac{dx}{a+b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \frac{a \tan \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2 > b^2)$$

$$104. \int \frac{dx}{a+b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{a \tan \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a \tan \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} \right| + C \quad (a^2 < b^2)$$

$$105. \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \quad (a^2 > b^2)$$

$$106. \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{b-a}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}} \right| + C \quad (a^2 < b^2)$$

$$107. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right) + C$$

$$108. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{b \tan x + a}{b \tan x - a} \right| + C$$

$$109. \int x \sin ax dx = \frac{1}{a} \sin ax - \frac{1}{a^2} x \cos ax + C$$

$$110. \int x^2 \sin ax dx = -\frac{1}{a^3} x^2 \cos ax + \frac{2}{a^2} x \sin ax + \frac{2}{a^3} \cos ax + C$$

$$111. \int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax + C$$

$$112. \int x^2 \cos ax dx = \frac{1}{a^3} x^2 \sin ax + \frac{2}{a^2} x \cos ax - \frac{2}{a^3} \sin ax + C$$

(十二) 含有反三角函数的积分 (其中 $a > 0$)

$$113. \int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$114. \int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$115. \int x^2 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$116. \int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$117. \int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$118. \int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$119. \int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$120. \int x \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (a^2 + x^2) \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} x + C$$

$$121. \int x^2 \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{6} x^2 + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2) + C$$

(十三) 含有指数函数的积分

$$122. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$123. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$124. \int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} (ax + 1) e^{ax} + C$$

$$125. \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$126. \int x a^x dx = \frac{x}{\ln a} a^x - \frac{1}{(\ln a)^2} a^x + C$$

$$127. \int x^n a^x dx = \frac{1}{\ln a} x^n a^x - \frac{n}{\ln a} \int x^{n-1} a^x dx$$

$$128. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$129. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx) + C$$

$$130. \int e^{ax} \sin^n bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2 n^2} e^{ax} \sin^{n-1} bx (a \sin bx - nb \cos bx) + \\ \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + b^2 n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx dx$$

$$131. \int e^{ax} \cos^n bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2 n^2} e^{ax} \cos^{n-1} bx (a \cos bx + nb \sin bx) + \\ \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + b^2 n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx dx$$

(十四) 含有对数函数的积分

$$132. \int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$133. \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C$$

$$134. \int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$$

$$135. \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

$$136. \int x^m (\ln x)^n dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx$$

(十五) 含有双曲函数的积分

$$137. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$138. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$139. \int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + C$$

$$140. \int \operatorname{sh}^2 x dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C$$

$$141. \int \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C$$

(十六) 定积分

$$142. \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$$

$$143. \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

$$144. \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$145. \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$146. \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{cases}$$

$$147. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\begin{cases} I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \quad (n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的正奇数}), I_1 = 1 \\ I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ 为正偶数}), I_0 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

习题答案与提示

第一章

习题 1-1 (第 20 页)

1. $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$, $A \cap B = [-10, -5)$,
 $A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$, $A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5)$.
6. (1) $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$; (2) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$;
(3) $[-1, 0) \cup (0, 1]$; (4) $(-2, 2)$;
(5) $[0, +\infty)$; (6) $\mathbf{R} \setminus \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - 1 \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$;
(7) $[2, 4]$; (8) $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$;
(9) $(-1, +\infty)$; (10) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
8. $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-2) = 0$.
12. (1) 偶函数; (2) 既非奇函数又非偶函数;
(3) 偶函数; (4) 奇函数;
(5) 既非奇函数又非偶函数; (6) 偶函数.
13. (1) 是周期函数, 周期 $T = 2\pi$; (2) 是周期函数, 周期 $T = \frac{\pi}{2}$;
(3) 是周期函数, 周期 $T = 2$; (4) 不是周期函数;
(5) 是周期函数, 周期 $T = \pi$.
14. (1) $y = x^3 - 1$; (2) $y = \frac{1-x}{1+x}$;
(3) $y = \frac{a}{c} \frac{dx+b}{x-a}$; (4) $y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}$;
(5) $y = e^{x-1} - 2$; (6) $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.
16. (1) $y = \sin^2 x$, $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{3}{4}$;
(2) $y = \sin 2x$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = 1$;
(3) $y = \sqrt{1+x^2}$, $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = \sqrt{5}$;
(4) $y = e^{t^3}$, $y_1 = 1$, $y_2 = e$;
(5) $y = e^{2t}$, $y_1 = e^2$, $y_2 = e^{-2}$.
17. (1) $[-1, 1]$; (2) $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [2n\pi, (2n+1)\pi]$;
(3) $[-a, 1-a]$;

(4) 若 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 则 $D = [a, 1-a]$;

若 $a > \frac{1}{2}$, 则 $D = \emptyset$.

$$18. f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0; \end{cases} \quad g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$19. L = \frac{S_0}{h} + \frac{2 \cdot \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} h, h \in (0, \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}).$$

$$20. (1) p = \begin{cases} 90, & 0 \leq x \leq 100, \\ 90 - (x - 100) \cdot 0.01, & 100 < x < 1600, \\ 75, & x \geq 1600; \end{cases}$$

$$(2) P = (p - 60)x = \begin{cases} 30x, & 0 \leq x \leq 100, \\ 31x - 0.01x^2, & 100 < x < 1600, \\ 15x, & x \geq 1600. \end{cases}$$

$$(3) P = 21\,000 (\text{元}).$$

习题 1-2 (第 30 页)

1. (1) 0; (2) 0; (3) 2; (4) 1; (5) 没有极限.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil.$$

习题 1-3 (第 37 页)

3. $\delta = 0.0002$. 提示: 因为 $x \rightarrow 2$, 所以不妨设 $1 < x < 3$.

$$4. x \geq \sqrt{397}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) \text{ 不存在}.$$

习题 1-4 (第 41 页)

1. 两个无穷小的商不一定是无穷小, 例如: $\alpha = 4x, \beta = 2x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时都是无穷小, 但 $\frac{\alpha}{\beta}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时不是无穷小.

$$3. 0 < |x| < \frac{1}{10^4 + 2}$$

4. (1) 2, 提示: 应用本节定理 1;

(2) 1, 提示: 应用本节定理 1.

6. $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界, 但当 $x \rightarrow \infty$ 时, 此函数不是无穷大.

习题 1-5 (第 48 页)

$$1. (1) -9; (2) 0; (3) 0; (4) \frac{1}{2}; (5) 2x; (6) 2; (7) \frac{1}{2};$$

$$(8) 0; (9) \frac{2}{3}; (10) 2; (11) 2; (12) \frac{1}{2}; (13) \frac{1}{5}; (14) -1.$$

2. (1) ∞ ; (2) ∞ ; (3) ∞ .

3. (1) 0; (2) 0.

习题 1-6(第 55 页)

1. (1) ω ; (2) 3; (3) $\frac{2}{5}$; (4) 1; (5) 2; (6) x .

2. (1) $\frac{1}{e}$; (2) e^2 ; (3) e^2 ; (4) e^{-k} .

4. (1) 提示: $1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$;

(2) 提示: $\frac{n}{n^2 + \pi} \leq n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) \leq \frac{n^2}{n^2 + \pi}$;

(3) 提示: $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, 数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有界;

(4) 提示: 当 $x > 0$ 时, $1 < \sqrt[3]{1+x} < 1+x$,

当 $-1 < x < 0$ 时, $1+x < \sqrt[3]{1+x} < 1$;

(5) 提示: 当 $x > 0$ 时, $1 - x < e^{-x} \leq \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$.

习题 1-7(第 59 页)

1. $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 - x^3$ 是比 $2x - x^2$ 高阶的无穷小.

2. (1) 同阶, 不等价; (2) 等价无穷小.

4. (1) $\frac{3}{2}$;

(2) 0 ($m < n$ 时), 1 ($m = n$ 时), ∞ ($m > n$ 时);

(3) $\frac{1}{2}$; (4) 3.

习题 1-8(第 64 页)

1. (1) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续;

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$ 内连续, $x = -1$ 为跳跃间断点.

2. (1) $x = 1$ 为可去间断点, $x = 2$ 为第二类间断点;

(2) $x = 0$ 和 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为可去间断点, $x = k\pi (k \neq 0)$ 为第二类间断点;

(3) $x = 0$ 为第二类间断点;

(4) $x = 1$ 为第一类间断点.

3. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -x, & |x| > 1. \end{cases}$ $x = 1$ 和 $x = -1$ 为第一类间断点.

5. (1) $f(x) = \cot(\pi x) + \cot \frac{\pi}{x}$;

(2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & x \in \mathbf{Q}^c; \end{cases}$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{Q}^c. \end{cases}$$

习题 1-9(第 68 页)

1. 连续区间: $(-\infty, -3), (-3, 2), (2, +\infty)$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\frac{8}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty.$$

3. (1) $\sqrt{5}$; (2) 1; (3) 0; (4) $\frac{1}{2}$; (5) 2; (6) $\cos \alpha$; (7) 1.

4. (1) 1; (2) 0; (3) \sqrt{e} ; (4) e^3 .

5. $a-1$.

习题 1-10(第 73 页)

3. 提示: 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

4. 提示: $m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M$, 其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上的

最小值及最大值.

6. 若 $f(a^+)$ 及 $f(b^-)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

总习题一(第 73 页)

1. (1) 必要, 充分; (2) 必要, 充分;

(3) 必要, 充分; (4) 充分必要.

2. (B).

3. (1) $(-\infty, 0]$; (2) $[1, e]$; (3) $[0, \tan 1]$;

$$(4) \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2} \right].$$

4. $f[f(x)] = f(x), g[g(x)] = 0, f[g(x)] = 0, g[f(x)] = g(x).$

$$6. V = \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - \alpha)^2 \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}, (0 < \alpha < 2\pi)$$

8. (1) ∞ ; (2) $\frac{1}{2}$; (3) e ; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $\sqrt[3]{abc}$; (6) 1.

9. $a=0$.

10. $x=1$ 是第二类间断点, $x=0$ 是第一类间断点.

13. (2) $y=2x+1$.

第二章

习题 2-1(第 85 页)

$$1. \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=t_0}$$

$$2. \frac{dT}{dt}.$$

4. -20 .

6. (1) $-f'(x_0)$; (2) $f'(0)$; (3) $2f'(x_0)$.

7. (1) $4x^3$; (2) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; (3) $1.6x^{0.6}$; (4) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;

(5) $-\frac{2}{x^3}$; (6) $\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$; (7) $\frac{1}{6}x^{\frac{5}{6}}$.

8. $12(\text{m/s})$.

10. $k_1 = y'|_{x=\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}$; $k_2 = y'|_{x=\pi} = -1$.

11. 切线方程为 $\frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right) = 0$;

法线方程为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = 0$.

12. $x - y + 1 = 0$.

13. $(2, 4)$.

14. (1) 在 $x=0$ 处连续, 不可导;

(2) 在 $x=0$ 处连续且可导.

15. $a=2, b=-1$.

16. $f'_+(0)=0, f'_-(0)=-1, f'(0)$ 不存在.

17. $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

习题 2-2 (第 96 页)

2. (1) $3x^2 - \frac{28}{x^3} + \frac{2}{x^2}$;

(2) $15x^2 - 2^x \ln 2 + 3e^x$;

(3) $\sec x (2\sec x + \tan x)$;

(4) $\cos 2x$;

(5) $x(2\ln x + 1)$;

(6) $3e^x (\cos x - \sin x)$;

(7) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$;

(8) $\frac{e^x(x-2)}{x^3}$;

(9) $2x \ln x \cos x + x \cos x - x^2 \ln x \sin x$;

(10) $\frac{1 + \sin t + \cos t}{(1 + \cos t)^2}$.

3. (1) $y'|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$;

(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $f'(0) = \frac{3}{25}, f'(2) = \frac{17}{15}$.

4. (1) $v(t) = v_0 - gt$;

(2) $t = \frac{v_0}{g}$.

5. 切线方程为 $2x - y = 0$, 法线方程为 $x + 2y = 0$.

6. (1) $8(2x+5)^3$;

(2) $3\sin(4-3x)$;

(3) $-6xe^{-3x^2}$;

(4) $\frac{2x}{1+x^2}$;

- (5) $\sin 2x$;
- (7) $2x \sec^2(x^2)$;
- (9) $\frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. (1) $-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$;
- (3) $-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x + 6\sin 3x)$;
- (4) $\frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$;
- (5) $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$;
- (7) $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;
- (9) $\sec x$;
8. (1) $\frac{2 \arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$;
- (3) $\frac{\ln x}{x \sqrt{1+\ln^2 x}}$;
- (5) $n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$;
- (7) $\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$;
- (9) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$;
9. $\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$;
10. (1) $2xf'(x^2)$;
11. (1) $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{ch} x$;
- (3) $\frac{1}{x \operatorname{ch}^2(\ln x)}$;
- (5) $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$;
- (7) $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$;
- (9) $\operatorname{th}^3 x$;
12. (1) $e^{-x}(-x^2+4x-5)$;
- (6) $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;
- (8) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$;
- (10) $-\tan x$;
- (2) $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;
- (6) $\frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2}$;
- (8) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$;
- (10) $\csc x$;
- (2) $\csc x$;
- (4) $\frac{e^{\arcsin \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$;
- (6) $-\frac{1}{1+x^2}$;
- (8) $\frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$;
- (10) $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$;
- (2) $\sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$;
- (2) $e^{\operatorname{ch} x}(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x)$;
- (4) $(3\operatorname{sh} x + 2)\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$;
- (6) $\frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$;
- (8) $\frac{1}{1+2\operatorname{sh}^2 x}$;
- (10) $\frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{sh}\left(2 \cdot \frac{x-1}{x+1}\right)$;
- (2) $\sin 2x \sin(x^2) + 2x \sin^2 x \cos(x^2)$;

$$(3) \frac{4}{4+x^2} \arctan \frac{x}{2};$$

$$(4) \frac{1}{x^{n+1}} n \ln x;$$

$$(5) \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t};$$

$$(6) \frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x};$$

$$(7) \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} \cdot e^{-\sin^2 \frac{1}{x}};$$

$$(8) \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}};$$

$$(9) \arcsin \frac{x}{2};$$

$$(10) y' = \begin{cases} \frac{2}{1+t^2}, & t^2 < 1, \\ -\frac{2}{1+t^2}, & t^2 > 1. \end{cases}$$

习题 2-3 (第 101 页)

$$1. (1) 4 - \frac{1}{x^2};$$

$$(2) 4e^{2x-1};$$

$$(3) -2\sin x - x\cos x;$$

$$(4) -2e^{-t} \cos t;$$

$$(5) -\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}};$$

$$(6) -\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2};$$

$$(7) 2\sec^2 x \tan x;$$

$$(8) \frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3};$$

$$(9) 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2};$$

$$(10) \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3};$$

$$(11) 2xe^{x^2}(3+2x^2);$$

$$(12) -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

$$2. f'''(2) = 207360.$$

$$3. (1) 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2);$$

$$(2) \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}.$$

$$5. \frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

$$8. (1) n!;$$

$$(2) 2^{n-1} \sin \left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2} \right];$$

$$(3) (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} (n \geq 2);$$

$$(4) e^x(x+n).$$

$$9. (1) -4e^x \cos x;$$

$$(2) x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x;$$

$$(3) 2^{30}(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1}{2} \frac{225}{2} \sin 2x).$$

习题 2-4 (第 110 页)

$$1. (1) \frac{y}{y-x};$$

$$(2) \frac{ay-x^2}{y^2-ax};$$

$$(3) \frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}};$$

$$(4) -\frac{e^y}{1+xe^y}.$$

$$2. \text{切线方程为 } x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0, \text{法线方程为 } x-y=0.$$

$$3. (1) -\frac{1}{y^3}; \quad (2) -\frac{b^4}{a^2 y^3};$$

$$(3) -2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y); \quad (4) \frac{e^{2x}(3-y)}{(2-y)^3}.$$

$$4. (1) \left(\frac{x}{1+x}\right)' \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right);$$

$$(2) \frac{1}{5} \sqrt{\frac{x-5}{x^2+2}} \left[\frac{1}{x-5} - \frac{2x}{5(x^2+2)} \right];$$

$$(3) \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} \left[\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1} \right];$$

$$(4) \frac{1}{2} \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x} \left[\frac{1}{x} + \cot x - \frac{e^x}{2(1-e^x)} \right].$$

$$5. (1) \frac{3b}{2a} t;$$

$$(2) \frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{1 - \sin \theta - \theta \cos \theta}.$$

$$6. \sqrt{3} - 2.$$

$$7. (1) \text{切线方程为 } 2\sqrt{2}x + y - 2 = 0, \text{法线方程为 } \sqrt{2}x - 4y - 1 = 0;$$

$$(2) \text{切线方程为 } 4x + 3y - 12a = 0, \text{法线方程为 } 3x - 4y + 6a = 0.$$

$$8. (1) \frac{1}{t^3};$$

$$(2) -\frac{b}{a^2 \sin^3 t};$$

$$(3) \frac{4}{9} e^{3t};$$

$$(4) \frac{1}{f'(t)}.$$

$$9. (1) -\frac{3}{8t^3}(1+t^2);$$

$$(2) \frac{t^4-1}{8t^3}.$$

$$10. 144\pi(\text{m}^2/\text{s}).$$

$$11. \frac{16}{25\pi} \approx 0.204(\text{m}/\text{min}).$$

$$12. 0.64(\text{cm}/\text{min}).$$

习题 2-5(第 122 页)

1. 当 $\Delta x = 1$ 时, $\Delta y = 18, dy = 11$; 当 $\Delta x = 0.1$ 时, $\Delta y = 1.161, dy = 1.1$; 当 $\Delta x = 0.01$ 时, $\Delta y = 0.110601, dy = 0.11$.

$$2. (a) \Delta y > 0, dy > 0, \Delta y - dy > 0;$$

$$(b) \Delta y > 0, dy > 0, \Delta y - dy < 0;$$

$$(c) \Delta y < 0, dy < 0, \Delta y - dy < 0;$$

$$(d) \Delta y < 0, dy < 0, \Delta y - dy > 0.$$

$$3. (1) \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx;$$

$$(2) (\sin 2x + 2x \cos 2x) dx;$$

$$(3) (x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} dx;$$

$$(4) \frac{2 \ln(1-x)}{x-1} dx;$$

$$(5) 2x(1+x)e^{2x} dx;$$

$$(6) e^{-x} [\sin(3-x) - \cos(3-x)] dx;$$

$$(7) \, dy = \begin{cases} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 0, \\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1; \end{cases}$$

$$(8) \, 8x \tan(1+2x^2) \sec^2(1+2x^2) dx;$$

$$(9) \, -\frac{2x}{1+x^4} dx;$$

$$(10) \, A\omega \cos(\omega t + \varphi) dt.$$

$$4. (1) \, 2x + C;$$

$$(2) \, \frac{3}{2}x^2 + C;$$

$$(3) \, \sin t + C;$$

$$(4) \, -\frac{1}{\omega} \cos \omega x + C;$$

$$(5) \, \ln(1+x) + C;$$

$$(6) \, -\frac{1}{2}e^{-2x} + C;$$

$$(7) \, 2\sqrt{x} + C;$$

$$(8) \, \frac{1}{3} \tan 3x + C;$$

$$5. \text{ 约为 } \frac{8f}{3l} \Delta f.$$

$$6. \text{ 约减少 } 43.63 \text{ cm}^2; \text{ 约增加 } 104.72 \text{ cm}^2.$$

$$7. (1) \, 0.874 \, 76;$$

$$(2) \, -0.965 \, 09.$$

$$8. (1) \, 30^\circ 47';$$

$$(2) \, 60^\circ 2'.$$

$$9. \, \tan 45' \approx 0.013 \, 09; \ln 1.002 \approx 0.002.$$

$$10. (1) \, 9.986 \, 7;$$

$$(2) \, 2.005 \, 2.$$

$$11. \, \frac{2}{3} \%$$

$$12. \, \delta_p = 0.000 \, 56(\text{rad}) = 1'55''.$$

提示:先求出中心角 α 与弦长 l 的函数关系式.

总习题二(第 124 页)

$$1. (1) \text{ 充分,必要};$$

$$(2) \text{ 充分必要};$$

$$(3) \text{ 充分必要};$$

$$2. (D).$$

$$3. \, \left. \frac{dm}{dx} \right|_{x=r_0}.$$

$$4. \, -\frac{1}{x^2}.$$

$$5. (1) \, f'_-(0) = f'_+(0) = f'(0) = 1;$$

$$(2) \, f'_-(0) = 1, f'_+(0) = 0, f'(0) \text{ 不存在}.$$

$$6. \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续,不可导}.$$

$$7. (1) \, \frac{\cos x}{|\cos x|};$$

$$(2) \, \frac{1}{1+x^2};$$

$$(3) \, \sin x \cdot \ln \tan x;$$

$$(4) \, \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}};$$

$$(5) x^{\frac{1}{1-2}}(1 - \ln x).$$

$$8. (1) -2\cos 2x \cdot \ln x - \frac{2\sin 2x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2};$$

$$(2) \frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}.$$

$$9. (1) \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{m} - n + 1 \right) (1+x)^{\frac{1}{m}-n};$$

$$(2) (-1)^n \frac{2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

$$10. y''(0) = \frac{1}{e^2}.$$

$$11. (1) \frac{dy}{dx} = \tan \theta, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a} \sec^4 \theta \csc \theta;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{t^3}.$$

$$12. \text{切线方程为 } x+2y-4=0, \text{法线方程为 } 2x-y-3=0.$$

$$13. -2.8(\text{km/h}).$$

$$14. 1.007.$$

$$15. \text{约需加长 } 2.23 \text{ cm}.$$

第三章

习题 3-1(第 132 页)

5. 有分别位于区间(1,2), (2,3)及(3,4)内的三个根.

14. 提示:令 $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$, 先证明 $\varphi(x)$ 为常数.

习题 3-2(第 137 页)

- | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------------|
| 1. (1) 1; | (2) 2; | (3) $\cos \alpha$; |
| (4) $-\frac{3}{5}$; | (5) $-\frac{1}{8}$; | (6) $\frac{m}{n}a^{m-n}$; |
| (7) 1; | (8) 3; | (9) 1; |
| (10) 1; | (11) $\frac{1}{2}$; | (12) ∞ ; |
| (13) $-\frac{1}{2}$; | (14) e^e ; | (15) 1; |
| (16) 1. | | |

4. 连续.

习题 3-3(第 143 页)

$$1. f(x) = -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4.$$

$$2. f(x) = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1.$$

$$3. \sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{15(x-4)^4}{4! \cdot 16[4 + \theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}},$$

$$(0 < \theta < 1).$$

$$4. \ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(x-2)^3 - \cdots +$$

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} (x-2)^n + o((x-2)^n).$$

$$5. \frac{1}{x} = [1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^n] +$$

$$(-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{[-1 + \theta(x+1)]^{n+2}}, (0 < \theta < 1).$$

$$6. \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\sin(\theta x)[\sin^2(\theta x) + 2]}{3\cos^5(\theta x)}x^5, (0 < \theta < 1).$$

$$7. xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n), (0 < \theta < 1).$$

$$8. \sqrt{e} \approx 1.645.$$

$$9. (1) \sqrt[3]{30} \approx 3.10724; |R_3| < 1.88 \times 10^{-6};$$

$$(2) \sin 18^\circ \approx 0.3090, |R_3| < 1.3 \times 10^{-4}.$$

$$10. (1) \frac{3}{2}; (2) \frac{1}{6}; (3) -\frac{1}{12}.$$

习题 3~4(第 151 页)

1. 单调减少.

2. 单调增加.

3. (1) 在 $(-\infty, -1]$, $[3, +\infty)$ 内单调增加, 在 $[-1, 3]$ 上单调减少;

(2) 在 $(0, 2]$ 内单调减少, 在 $[2, +\infty)$ 内单调增加;

(3) 在 $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{2}]$, $[1, +\infty)$ 内单调减少, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调增加;

(4) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加;

(5) 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 内单调减少, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内单调增加;

(6) 在 $(-\infty, \frac{2}{3}a]$, $[a, +\infty)$ 内单调增加, 在 $[\frac{2}{3}a, a]$ 上单调减少;

(7) 在 $[0, n]$ 上单调增加, 在 $[n, +\infty)$ 内单调减少;

(8) 在 $[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}]$ 上单调增加, 在 $[\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$ 上单调减少,

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

5. (I) $a > \frac{1}{e}$ 时没有实根, (II) $0 < a < \frac{1}{e}$ 时有两个实根,

(III) $a = \frac{1}{e}$ 时只有 $x=e$ 一个实根.

6. 不一定, $f(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, 但 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不单调.

7. (1) 是凸的;

(2) 在 $(-\infty, 0]$ 内是凸的, 在 $[0, +\infty)$ 内是凹的;

(3) 是凹的; (4) 是凹的.

8. (1) 拐点 $\left(\frac{5}{3}, \frac{20}{27}\right)$, 在 $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$ 内是凸的, 在 $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$ 内是凹的;

(2) 拐点 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$, 在 $(-\infty, 2]$ 内是凸的, 在 $[2, +\infty)$ 内是凹的;

(3) 没有拐点, 处处是凹的;

(4) 拐点 $(-1, \ln 2), (1, \ln 2)$, 在 $(-\infty, -1], [1, +\infty)$ 内是凸的, 在 $[-1, 1]$ 上是凹的;

(5) 拐点 $\left(\frac{1}{2}, e^{\arctan \frac{1}{2}}\right)$, 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 内是凹的, 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 内是凸的;

(6) 拐点 $(1, -7)$, 在 $(0, 1]$ 内是凸的, 在 $[1, +\infty)$ 内是凹的.

10. 拐点: $(-1, -1), \left(2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right), \left(2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$.

11. $a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}$.

12. $a = 1, b = -3, c = -24, d = 16$.

13. $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$.

14. $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

习题 3-5 (第 160 页)

1. (1) 极大值 $y(-1) = 17$, 极小值 $y(3) = -47$;

(2) 极小值 $y(0) = 0$;

(3) 极大值 $y(\pm 1) = 1$, 极小值 $y(0) = 0$;

(4) 极大值 $y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$;

(5) 极大值 $y\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{1}{10}\sqrt{205}$;

(6) 极大值 $y(0) = 4$, 极小值 $y(-2) = \frac{8}{3}$;

(7) 极大值 $y\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$, 极小值 $y\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi}$,

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$;

(8) 极大值 $y(e) = e^{\frac{1}{e}}$;

(9) 没有极值;

(10) 没有极值.

3. $a = 2, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ 为极大值.

4. (1) 最大值 $y(4) = 80$, 最小值 $y(-1) = -5$;

(2) 最大值 $y(3) = 11$, 最小值 $y(2) = -14$;

(3) 最大值 $y\left(\frac{3}{4}\right) = 1.25$, 最小值 $y(-5) = -5 + \sqrt{6}$

5. $x = 1$ 时函数有最大值 -29 .

6. $x = -3$ 时函数有最小值 27.

7. $x = 1$ 时函数有最大值 $\frac{1}{2}$.

8. 长为 10 m, 宽为 5 m.

9. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; d:h = 1:1$.

10. 底宽为 $\sqrt{\frac{40}{4+\pi}} = 2.366(\text{m})$.

11. 当 $\alpha = \arctan \mu = \arctan 0.25 \approx 14^\circ 2'$ 时, 可使力 F 最小.

12. 杆长为 1.4 m.

13. $\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

14. 当 $\varphi = 54^\circ 13'$ 时, 屋架可吊到最大高度 7.506 m, 而柱子高只有 6 m, 所以能吊得上去.

提示: 设吊臂对地面的倾角为 φ 时, 屋架吊起的高度为 h , 建立 h 与 φ 间的函数关系式, 然后求出 h 的最大值.

15. 1 800 元.

习题 3-6 (第 166 页)

1. 在 $(-\infty, -2]$ 内单调减少, 在 $[-2, +\infty)$ 内单调增加; 在 $(-\infty, -1], [1, +\infty)$ 内是凹的, 在 $[-1, 1]$ 上是凸的; 拐点 $(-1, -\frac{6}{5}), (1, 2)$; 极小值 $y(-2) = -\frac{17}{5}$.

2. 对称于原点; 在 $(-\infty, -1], [1, +\infty)$ 内单调减少, 在 $[-1, 1]$ 上单调增加; 在 $(-\infty, -\sqrt{3}], [0, \sqrt{3}]$ 上是凸的, 在 $[\sqrt{3}, 0], [\sqrt{3}, +\infty)$ 内是凹的; 拐点 $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}), (0, 0), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$; 极小值 $y(-1) = -\frac{1}{2}$, 极大值 $y(1) = \frac{1}{2}$; 水平渐近线 $y = 0$.

3. 在 $(-\infty, 1]$ 内单调增加, 在 $[1, +\infty)$ 内单调减少; 在 $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 内是凹的, 在 $[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$ 上是凸的; 拐点 $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}), (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$; 极大值 $y(1) = 1$; 水平渐近线 $y = 0$.

4. 在 $(-\infty, 0), (0, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}]$ 内单调减少, 在 $[\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, +\infty)$ 内单调增加; 在 $(-\infty, -1], (0, +\infty)$ 内是凹的, 在 $[-1, 0]$ 内是凸的; 拐点 $(-1, 0)$; 极小值 $y(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$; 铅直渐近线 $x = 0$.

5. 定义域为 $x \neq (\frac{k}{2} + \frac{1}{4})\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$; 周期为 2π ; 图形对称于 y 轴; 在 $[0, \pi]$ 部分: 在 $[0, \frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), (\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 内单调增加; 在 $[0, \frac{\pi}{4})$ 内是凹的, 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 内是凸的, 在 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 内是凹的, 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ 内是凸的; 拐点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$; 极小值 $y(0) = 1$, 极大值

$$y(\pi) = -1; \text{铅直渐近线 } x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}.$$

习题 3-7(第 175 页)

1. $K=2$.

2. $K = |\cos x|, \rho = |\sec x|$.

3. $K=2, \rho = \frac{1}{2}$.

4. $K = \left| \frac{2}{3a \sin 2t_0} \right|$.

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\ln 2}{2} \right)$ 处曲率半径有最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

7. 约 1 246(N).

提示:沿曲线运动的物体所受的向心力为 $F = \frac{mv^2}{\rho}$, 这里 m 为物体的质量, v 为它的速度, ρ 为运动轨迹的曲率半径.

8. 约 45 400(N).

参看上题提示.

* 9. $(\xi-3)^2 + (\eta+2)^2 = 8$.

* 10. $\left(\xi - \frac{\pi-10}{4} \right)^2 + \left(\eta - \frac{9}{4} \right)^2 = \frac{125}{16}$.

* 11. $\begin{cases} \alpha = \frac{3y^2}{2\rho} + \rho, \\ \beta = -\frac{y^3}{\rho^2} \end{cases} \quad \text{或} \quad 27\rho\beta^2 = 8(\alpha-\rho)^3.$

习题 3-8(第 180 页)

1. $0.18 < \xi < 0.19$.

2. $-0.20 < \xi < -0.19$.

3. $0.32 < \xi < 0.33$.

4. $2.50 < \xi < 2.51$.

总习题三(第 180 页)

1. 2.

2. (B).

3. $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$.

4. ka .

10. (1) 2; (2) $\frac{1}{2}$;

(3) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; (4) $a_1 a_2 \cdots a_n$.

12. 极大值 $f(0)=2$, 极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$.

13. (1, 2) 和 (-1, -2).

14. $\sqrt[3]{3}$.

15. $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 处曲率半径有最小值 1.

16. $2.414 < x_0 < 2.415$.

17. 提示: 可以先用一次洛必达法则.

18. 提示: 先对 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n}$ 接连 $n-1$ 次使用洛必达法则.

19. 提示: 记 $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$, 先证

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

然后在上式中分别令 $x = x_1$ 及 $x = x_2$, 可得两个不等式, 由此推出结论.

20. $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$.

第四章

习题 4-1 (第 190 页)

1. (1) $\frac{1}{x} + C$; (2) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$;
- (3) $2\sqrt{x} + C$; (4) $\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + C$;
- (5) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$; (6) $\frac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}} + C$;
- (7) $\frac{5}{4}x^4 + C$; (8) $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$;
- (9) $\sqrt{\frac{2h}{g}} + C$; (10) $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + C$;
- (11) $\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + C$; (12) $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C$;
- (13) $2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$;
- (14) $x^3 + \arctan x + C$; (15) $x + \arctan x + C$;
- (16) $2e^x + 3\ln|x| + C$; (17) $3\arctan x - 2\arcsin x + C$;
- (18) $e^x - 2\sqrt{x} + C$; (19) $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$;
- (20) $2x \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2 - \ln 3} + C$; (21) $\tan x - \sec x + C$;
- (22) $\frac{x + \sin x}{2} + C$; (23) $\frac{1}{2}\tan x + C$;
- (24) $\sin x - \cos x + C$; (25) $-(\cot x + \tan x) + C$;
- (26) $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}} + C$.

2. $y = \ln x + 1$.

3. (1) 27(m)

(2) $\sqrt[3]{360} \approx 7.11(\text{s})$.

习题 4-2 (第 204 页)

1. (1) $\frac{1}{a}$; (2) $\frac{1}{7}$; (3) $\frac{1}{2}$; (4) $\frac{1}{10}$;

(5) $-\frac{1}{2}$; (6) $\frac{1}{12}$; (7) $\frac{1}{2}$; (8) -2 ;

(9) $-\frac{2}{3}$; (10) $\frac{1}{5}$; (11) $-\frac{1}{5}$; (12) $\frac{1}{3}$;

(13) -1 ; (14) -1 .

2. (1) $\frac{1}{5}e^{5x} + C$; (2) $-\frac{1}{8}(3-2x)^4 + C$;

(3) $-\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$; (4) $-\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + C$;

(5) $-\frac{1}{a}\cos ax - be^{\frac{x}{b}} + C$; (6) $-2\cos\sqrt{t} + C$;

(7) $\frac{1}{11}\tan^{11}x + C$; (8) $\ln|\ln x| + C$;

(9) $-\ln|\cos\sqrt{1+x^2}| + C$; (10) $\ln|\tan x| + C$;

(11) $\arctan e^x + C$; (12) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$;

(13) $\frac{1}{2}\sin(x^2) + C$; (14) $-\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}} + C$;

(15) $-\frac{3}{4}\ln|1-x^4| + C$; (16) $-\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t + \varphi) + C$;

(17) $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$; (18) $\frac{3}{2}\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + C$;

(19) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2} + C$;

(20) $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\ln(x^2+9) + C$; (21) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1}\right| + C$;

(22) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$; (23) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$;

(24) $\frac{t}{2} + \frac{1}{4\omega}\sin 2(\omega t + \varphi) + C$;

(25) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C$;

(26) $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2} + \sin\frac{x}{2} + C$; (27) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$;

(28) $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$; (29) $-\frac{10^{2\arctan x}}{2\ln 10} + C$;

(30) $(\arctan\sqrt{x})^2 + C$; (31) $-\frac{1}{\arcsin x} + C$;

(32) $-\frac{1}{x\ln x} + C$; (33) $\frac{1}{2}(\ln\tan x)^2 + C$;

$$(34) \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C;$$

$$(35) \arccos \frac{1}{|x|} + C;$$

$$(36) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C;$$

$$(37) \sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{|x|} + C;$$

$$(38) \sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) + C;$$

$$(39) \arcsin x - \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} + C;$$

$$(40) \frac{1}{2} (\arcsin x + \ln|x + \sqrt{1-x^2}|) + C.$$

习题 4-3 (第 210 页)

$$1. -x \cos x + \sin x + C.$$

$$2. x(\ln x - 1) + C.$$

$$3. x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$4. -e^{-x}(x+1) + C.$$

$$5. \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

$$6. \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

$$7. -\frac{2}{17}e^{-2x} \left(\cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$8. 2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} + C.$$

$$9. \frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C.$$

$$10. -\frac{1}{2}x^2 + x \tan x + \ln|\cos x| + C.$$

$$11. x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

$$12. -\frac{e^{-2x}}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) + C.$$

$$13. x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C.$$

$$14. -\frac{1}{4}x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C.$$

$$15. \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 \sin x + x \cos x - \sin x + C.$$

$$16. \frac{1}{2}(x^2-1) \ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + C.$$

$$17. -\frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{3}{2} \right) \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + C.$$

$$18. -\frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6) + C.$$

$$19. 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C.$$

$$20. \frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$$

$$21. x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

$$22. \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{5}e^x \sin 2x - \frac{1}{10}e^x \cos 2x + C.$$

习题 4-4 (第 218 页)

$$1. \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C.$$

$$2. \ln|x-2| + \ln|x+5| + C.$$

$$3. \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 8\ln|x| - 4\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + C$$

$$4. \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$5. 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

$$6. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

$$7. \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

$$8. \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

$$9. -\frac{1}{2}\ln \frac{x^2+1}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$10. \frac{\sqrt{2}}{8}\ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1) + C.$$

$$11. -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$12. \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan \frac{2\tan x}{\sqrt{3}} + C.$$

$$13. \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

$$14. \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2\tan \frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$15. \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$16. \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan \frac{3\tan \frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}} + C.$$

$$17. \frac{3}{2} \sqrt[3]{(1+x)^2} - 3 \sqrt[3]{x+1} + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{1+x}| + C.$$

$$18. \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + x + C.$$

$$19. x - 4 \sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{1+x} + 1) + C.$$

$$20. 2 \sqrt{x} - 4 \sqrt[3]{x} + 4 \ln(\sqrt[3]{x} + 1) + C.$$

$$21. \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right| + 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

$$\text{或 } \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{|x|} - \arcsin x + C.$$

$$22. -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

习题 4-5 (第 221 页)

$$1. \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2 - 9}| + C.$$

$$2. \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

$$3. \ln[(x-2) + \sqrt{5-4x+x^2}] + C.$$

$$4. \frac{x}{2} \sqrt{2x^2+9} + \frac{9\sqrt{2}}{4} \ln(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+9}) + C$$

$$5. \frac{x}{2} \sqrt{3x^2-2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \ln |\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2-2}| + C.$$

$$6. \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

$$7. \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4} \sqrt{4-x^2} + C.$$

$$8. \frac{x}{18(9+x^2)} + \frac{1}{54} \arctan \frac{x}{3} + C$$

$$9. -\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$10. -\frac{e^{-2x}}{13} (2 \sin 3x + 3 \cos 3x) + C.$$

$$11. -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$12. x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x + C$$

$$13. \frac{1}{x} - \ln \left| \frac{1-x}{x} \right| + C.$$

$$14. 2 \sqrt{x-1} - 2 \arctan \sqrt{x-1} + C.$$

$$15. \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

$$16. \arccos \frac{1}{|x|} + C.$$

17. $\frac{1}{9} \left(\ln|2+3x| + \frac{2}{2+3x} \right) + C.$
18. $\frac{\cos^5 x \sin x}{6} + \frac{5\cos^3 x \sin x}{24} + \frac{15}{24} \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) + C.$
19. $\frac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4} - \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + C.$
20. $\frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - \sqrt{7}} \right| + C.$
21. $\frac{\sqrt{2x-1}}{x} + 2 \arctan \sqrt{2x-1} + C.$
22. $\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$
23. $\frac{1}{2} \ln|x^2-2x-1| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-(\sqrt{2}+1)}{x+(\sqrt{2}-1)} \right| + C.$
24. $-\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$
25. $\frac{1}{12} x^3 - \frac{25}{16} x + \frac{125}{32} \arctan \frac{2x}{5} + C.$

总习题四(第 221 页)

1. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x-1}{e^x+1} \right| + C.$
2. $\frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} + C.$
3. $\frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{a^3+x^3}{a^3-x^3} \right| + C.$
4. $\ln|x + \sin x| + C.$
5. $\ln x (\ln \ln x - 1) + C.$
6. $\frac{1}{2} \arctan \sin^2 x + C.$
7. $\frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C.$
8. $\frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} \cos 6x - \frac{1}{2} \cos 4x - \cos 2x \right) + C.$
9. $\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{24} \ln(x^6+4) + C.$
10. $a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$
11. $\ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(x+1)} \right| + C.$
12. $\frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C.$
13. $\frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$
14. $\ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.$
15. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$

16. $\frac{1}{3a^4} \left[\frac{3x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x^3}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} \right] + C.$
17. $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$
18. $(4-2x)\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + C.$
19. $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C.$
20. $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + C.$
21. $(x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$
22. $\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc\frac{x}{2}\right| - \left|\cot\frac{x}{2}\right|\right) + C.$
23. $\frac{x^4}{8(1+x^8)} + \frac{1}{8}\arctan x^4 + C.$
24. $\frac{x^4}{4} + \ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2} + C.$
25. $\frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + C.$
26. $\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + x + C$ 或 $\sec x + x - \tan x + C.$
27. $x\tan\frac{x}{2} + C.$
28. $e^{\sec x}(x - \sec x) + C.$
29. $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C.$
30. $\frac{1}{1+e^x} + \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C.$
31. $\arctan(2\operatorname{sh} x) + C.$
32. $\frac{xe^x}{e^x+1} - \ln(1+e^x) + C.$
33. $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$
34. $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$
35. $\frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{x^2}{4} + C.$
36. $-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}(x^2+2)\arccos x - \frac{1}{9}x(x^2+6) + C.$
37. $-\ln|\csc x + 1| + C.$
38. $\ln|\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$
39. $\frac{1}{3}\ln(2+\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) + \frac{1}{6}\ln(1-\cos x) + C.$
40. $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan(x/2)-1+\sqrt{2}}{\tan(x/2)-1-\sqrt{2}}\right| + C.$

第五章

习题 5-1 (第 233 页)

1. $\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a$.
2. (1) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$; (2) $e - 1$.
4. 88.2(kN).
6. (1) $6 \leq \int_1^4 (x^2 + 1)dx \leq 51$;
 (2) $\pi \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x)dx \leq 2\pi$;
 (3) $\frac{\pi}{9} \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{2}{3}\pi$;
 (4) $-2e^2 \leq \int_2^0 e^{x^2-1} dx \leq -2e^{-\frac{1}{4}}$.
8. (1) $\int_0^1 x^2 dx$ 较大; (2) $\int_1^2 x^3 dx$ 较大;
 (3) $\int_1^2 \ln x dx$ 较大; (4) $\int_0^1 x dx$ 较大;
 (5) $\int_0^1 e^x dx$ 较大.

习题 5-2 (第 240 页)

1. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. $\cot t$.
3. $\frac{\cos x}{\sin x - 1}$. 4. 当 $x=0$ 时.
5. (1) $2x\sqrt{1+x^4}$; (2) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$;
 (3) $(\sin x - \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x)$.
6. (1) $a\left(a^2 - \frac{a}{2} + 1\right)$; (2) $2\frac{5}{8}$; (3) $45\frac{1}{6}$;
 (4) $\frac{\pi}{6}$; (5) $\frac{\pi}{3}$; (6) $\frac{\pi}{3a}$;
 (7) $\frac{\pi}{6}$; (8) $\frac{\pi}{4} + 1$; (9) -1 ;
 (10) $1 - \frac{\pi}{4}$; (11) 4; (12) $\frac{8}{3}$.

8. 提示:应用三角学中的积化和差公式.

9. (1) 1; (2) 2.

$$10. \Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}, & x \in [1, 2]. \end{cases} \quad \Phi(x) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 内连续.}$$

$$11. \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

习题 5-3 (第 249 页)

1. (1) 0; (2) $\frac{51}{512}$; (3) $\frac{1}{4}$;
 (4) $\pi - \frac{4}{3}$; (5) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$; (6) $\frac{\pi}{2}$;
 (7) $\sqrt{2}(\pi + 2)$; (8) $1 - \frac{\pi}{4}$; (9) $\frac{a^4}{16}\pi$;
 (10) $\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$; (11) $\frac{1}{6}$; (12) $2 + 2\ln \frac{2}{3}$;
 (13) $1 - 2\ln 2$; (14) $(\sqrt{3} - 1)a$; (15) $1 - e^{-\frac{1}{2}}$;
 (16) $2(\sqrt{3} - 1)$; (17) $\frac{\pi}{2}$; (18) $\frac{2}{3}$;
 (19) $\frac{4}{3}$; (20) $2\sqrt{2}$.

2. (1) 0; (2) $\frac{3}{2}\pi$; (3) $\frac{\pi^3}{324}$;
 (4) 0.

11. (1) $1 - \frac{2}{e}$; (2) $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$.
 (3) $-\frac{2\pi}{\omega^2}$; (4) $\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}$.
 (5) $4(2\ln 2 - 1)$; (6) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
 (7) $\frac{1}{5}(e^x - 2)$; (8) $2 - \frac{3}{4\ln 2}$.
 (9) $\frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}$; (10) $\frac{1}{2}(e\sin 1 - e\cos 1 + 1)$.
 (11) $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

$$(12) \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m+1)} \cdot \frac{\pi}{2}, & m \text{ 为奇数,} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m+1)}, & m \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$(13) J_m = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m} \cdot \frac{\pi^2}{2}, & m \text{ 为偶数,} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots m} \pi, & m \text{ 为大于 1 的奇数,} \end{cases}$$

$$J_1 = \pi.$$

习题 5-4(第 256 页)

1. (1) $\frac{1}{3}$; (2) 发散; (3) $\frac{1}{a}$;
 (4) $\frac{p}{p^2+1}$; (5) $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$; (6) π ;
 (7) 1; (8) 发散; (9) $2\frac{2}{3}$;
 (10) $\frac{\pi}{2}$.
2. 当 $k > 1$ 时收敛于 $\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$; 当 $k \leq 1$ 时发散; 当 $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 时取得最小值.
3. $n!$.

* 习题 5-5(第 263 页)

1. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛;
 (4) 发散; (5) 收敛; (6) 发散;
 (7) 收敛; (8) 收敛.
3. (1) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right), n > 0$; (2) $\Gamma(p+1), p > -1$;
 (3) $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right), \frac{m+1}{n} > 0$.

总习题五(第 264 页)

1. (1) 必要, 充分; (2) 充分必要; (3) 收敛; (4) 不一定.
2. (1) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; (2) $\frac{1}{p+1}$; (3) -1;
 (4) $af(a)$; (5) $\frac{\pi^2}{4}$.
4. 提示: $1-x^p < \frac{1}{1+x^p} < 1$.
5. 提示: (1) 对任意实数 t ,

$$\int_a^b f^2(x)dx + 2t \int_a^b f(x)g(x)dx + t^2 \int_a^b g^2(x)dx \geq 0;$$
 (2) 利用柯西-施瓦茨不等式.
6. 提示: 利用柯西-施瓦茨不等式.
7. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{\pi}{8}\ln 2$; 提示: 令 $x = \frac{\pi}{4} - u$.
 (3) $\frac{\pi}{4}$; (4) $2(\sqrt{2}-1)$;
 (5) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
10. $1 + \ln(1 + e^{-1})$.
13. (1) 收敛; (2) 收敛;

(3) 收敛;提示:先分部积分,再判别.

(4) 收敛.

14. (1) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$;提示: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$.

(2) $\frac{\pi}{4}$.提示:令 $x = \frac{1}{t}$.

第六章

习题 6-2(第 279 页)

1. (1) $\frac{1}{6}$;

(2) 1;

(3) $\frac{32}{3}$;

(4) $\frac{32}{3}$.

2. (1) $2\pi + \frac{4}{3}, 6\pi + \frac{4}{3}$;

(2) $\frac{3}{2} - \ln 2$;

(3) $e + \frac{1}{e} - 2$;

(4) $b - a$.

3. $\frac{9}{4}$.

4. $\frac{16}{3}p^2$.

5. (1) πa^2 ; (2) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (3) $18\pi a^2$.

6. $3\pi a^2$.

7. $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi} - e^{-2\pi})$.

8. (1) $\frac{5}{4}\pi$;

(2) $\frac{\pi}{6} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{e}{2}$.

10. $\frac{8}{3}a^3$.

11. $2\pi ax_a^2$.

12. $\frac{128}{7}\pi, \frac{64}{5}\pi$.

13. $\frac{32}{105}\pi a^3$.

15. (1) $\frac{3}{10}\pi$;

(2) $\frac{\pi a^2}{4}\left[2a + \frac{a}{2}(e^2 - e^{-2})\right]$;

(3) $160\pi^2$;

(4) $7\pi^2 a^3$.

16. $2\pi^2 a^2 b$.

17. $\frac{1}{6}\pi h[2(ab + AB) + aB + bA]$.

18. $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$.

20. $2\pi^2$.

21. $1 + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}$.

22. $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$.

23. $\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

$$24. \frac{y}{2p} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}.$$

$$25. 6a. \quad 26. \frac{a}{2} \pi^2. \quad 27. \left(\left(\frac{2}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a, \frac{3}{2} a \right).$$

$$28. \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} (e^{a^2} - 1).$$

$$29. \ln \frac{3}{2} + \frac{5}{12}. \quad 30. 8a.$$

习题 6-3 (第 287 页)

$$1. 0.18 \text{ k(J)}.$$

$$2. 800\pi \ln 2 \text{ (J)}.$$

$$3. (2) 9.72 \times 10^5 \text{ (kJ)}.$$

$$4. \frac{27}{7} k c^{\frac{2}{3}} a^{\frac{7}{3}} \text{ (其中 } k \text{ 为比例常数)}.$$

$$5. \sqrt{2} - 1 \text{ (cm)}.$$

$$6. 57\,697.5 \text{ (kJ)}.$$

$$7. 205.8 \text{ (kN)}.$$

$$8. 17.3 \text{ (kN)}.$$

$$9. 14\,373 \text{ (kN)}.$$

$$10. 1.65 \text{ (N)}.$$

11. 取 y 轴通过细直棒,

$$F_x = Gm\mu \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right), F_y = - \frac{Gm\mu l}{a \sqrt{a^2 + l^2}}.$$

12. 引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R} \sin \frac{\varphi}{2}$, 方向为 M 指向圆弧的中点.

总习题六 (第 288 页)

$$1. \frac{5}{4} \text{ m}.$$

$$2. \frac{\pi - 1}{4} a^2.$$

$$3. a = -\frac{5}{3}, b = 2, c = 0.$$

$$4. \frac{512}{7} \pi.$$

$$5. 4\pi^2.$$

$$6. \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

$$7. \frac{4}{3} \pi r^2 g.$$

$$8. \frac{1}{2} \rho g a b (2h + b \sin \alpha).$$

$$9. F = \left(\frac{3}{5} G a^2, \frac{3}{5} G a^2 \right).$$

第七章

习题 7-1 (第 300 页)

$$1. 5a - 11b + 7c.$$

$$3. \overrightarrow{D_1 A} = \left(c + \frac{1}{5} a \right), \quad \overrightarrow{D_2 A} = - \left(c + \frac{2}{5} a \right),$$

$$\overrightarrow{D_3 A} = - \left(c + \frac{3}{5} a \right), \quad \overrightarrow{D_4 A} = - \left(c + \frac{4}{5} a \right).$$

$$4. (1, -2, -2), (-2, 4, 4).$$

5. $\left(\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11}\right)$ 或 $\left(-\frac{6}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right)$.

6. $A: \text{IV}, B: \text{V}, C: \text{VI}, D: \text{III}$.

7. A 在 xOy 面上, B 在 yOz 面上, C 在 x 轴上, D 在 y 轴上.

8. (1) $(a, b, -c), (-a, b, c), (a, -b, c)$;

(2) $(a, -b, -c), (-a, b, -c), (-a, -b, c)$;

(3) $(-a, -b, -c)$.

9. xOy 面: $(x_0, y_0, 0)$, yOz 面: $(0, y_0, z_0)$, xOz 面: $(x_0, 0, z_0)$;

x 轴: $(x_0, 0, 0)$, y 轴: $(0, y_0, 0)$, z 轴: $(0, 0, z_0)$.

11. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0\right),$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0, a\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, a\right).$

12. x 轴: $\sqrt{34}$, y 轴: $\sqrt{41}$, z 轴: 5.

13. $(0, 1, -2)$.

15. 模: 2; 方向余弦: $-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$; 方向角: $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

16. (1) 垂直于 x 轴, 平行于 yOz 平面;

(2) 指向与 y 轴正向一致, 垂直于 xOz 平面;

(3) 平行于 z 轴, 垂直于 xOy 平面.

17. 2.

18. $A(-2, 3, 0)$.

19. $13, 7j$.

习题 7-2(第 309 页)

1. (1) $3, 5i + j + 7k$; (2) $-18, 10i + 2j + 14k$;

(3) $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{3}{2\sqrt{21}}$.

2. $-\frac{3}{2}$.

3. $\pm \frac{1}{\sqrt{17}}(3i - 2j - 2k)$.

4. 5 880 J.

5. $|\mathbf{F}_1| x_1 \sin \theta_1 = |\mathbf{F}_2| x_2 \sin \theta_2$.

6. 2.

7. $\lambda = 2\mu$.

9. (1) $-8j - 24k$; (2) $-j - k$; (3) 2.

10. $\frac{1}{2}\sqrt{19}$.

习题 7-3(第 318 页)

1. $4x + 4y + 10z - 63 = 0$.

$$2. x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z = 0.$$

3. 以点 $(1, -2, -1)$ 为球心, 半径等于 $\sqrt{6}$ 的球面.

$$4. \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 + \left(z + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{116}{9}; \text{它表示一球面, 球心为点}\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right).$$

半径等于 $\frac{2}{3}\sqrt{29}$.

$$5. y^2 + z^2 - 5x \qquad 6. x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

$$7. \text{绕 } x \text{ 轴: } 4x^2 - 9(y^2 + z^2) = 36; \text{绕 } y \text{ 轴: } 4(x^2 + z^2) - 9y^2 = 36.$$

$$10. (1) xOy \text{ 平面上的椭圆 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ 绕 } x \text{ 轴旋转一周};$$

$$(2) xOy \text{ 平面上的双曲线 } x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ 绕 } y \text{ 轴旋转一周};$$

$$(3) xOy \text{ 平面上的双曲线 } x^2 - y^2 = 1 \text{ 绕 } x \text{ 轴旋转一周};$$

$$(4) xOz \text{ 平面上的直线 } z = y + a \text{ 绕 } z \text{ 轴旋转一周}.$$

习题 7-4 (第 324 页)

$$3. \text{母线平行于 } x \text{ 轴的柱面方程: } 3y^2 - z^2 = 16;$$

$$\text{母线平行于 } y \text{ 轴的柱面方程: } 3x^2 + 2z^2 = 16.$$

$$4. x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 9, z=0.$$

$$5. (1) \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, (0 \leq t \leq 2\pi). \\ z = 3 \sin t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \cos \theta, \\ y = \sqrt{3} \sin \theta, (0 \leq \theta \leq 2\pi). \\ z = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = a \sin \frac{z}{b}, \\ x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \cos \frac{z}{b}, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$7. x^2 + y^2 \leq ax; x^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, z \geq 0.$$

$$8. x^2 + y^2 \leq 4; x^2 \leq z \leq 4; y^2 \leq z \leq 4.$$

习题 7-5 (第 329 页)

$$1. 3x - 7y + 5z - 4 = 0.$$

$$2. 2x + 9y - 6z - 121 = 0.$$

$$3. x - 3y - 2z = 0.$$

$$4. (1) \text{即 } yOz \text{ 面}; \qquad (2) \text{平行于 } xOz \text{ 面的平面};$$

$$(3) \text{平行于 } z \text{ 轴的平面}; \qquad (4) \text{通过 } z \text{ 轴的平面};$$

$$(5) \text{平行于 } x \text{ 轴的平面}; \qquad (6) \text{通过 } y \text{ 轴的平面};$$

$$(7) \text{通过原点的平面}.$$

$$5. \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}.$$

$$6. x + y - 3z - 4 = 0.$$

$$7. (1, -1, 3).$$

$$8. (1) y + 5 = 0; \quad (2) x + 3y = 0; \quad (3) 9y - z - 2 = 0.$$

$$9. 1.$$

习题 7-6 (第 335 页)

$$1. \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}.$$

$$2. \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

$$3. \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}; \quad \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

$$4. 16x - 14y - 11z - 65 = 0. \quad 5. \cos \varphi = 0.$$

$$7. \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}. \quad 8. 8x - 9y - 22z - 59 = 0.$$

$$9. \varphi = 0.$$

$$10. (1) \text{平行}; \quad (2) \text{垂直}; \quad (3) \text{直线在平面上}.$$

$$11. x - y + z = 0. \quad 12. \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$13. \frac{3\sqrt{2}}{2}. \quad 15. \begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0, \\ 4x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

总习题七 (第 337 页)

$$1. (1) M(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \overrightarrow{OM} = (x, y, z).$$

$$(2) \text{共面}. \quad (3) 3.$$

$$(4) -\frac{3}{2}. \quad (5) 36.$$

$$2. (0, 2, 0). \quad 3. \sqrt{30}.$$

$$4. \overrightarrow{AD} = c + \frac{1}{2}a, \overrightarrow{BE} = a + \frac{1}{2}b, \overrightarrow{CF} = b + \frac{1}{2}c.$$

$$6. 1. \quad 7. \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

$$8. \frac{\pi}{3}. \quad 9. z = -4, \theta_{\min} = \frac{\pi}{4}.$$

$$10. 30. \quad 11. (14, 10, 2).$$

$$12. c = 5a + b. \quad 13. 4(z-1) = (x-1)^2 + (y+1)^2.$$

$$14. (1) \begin{cases} x=0, \\ z=2y^2, \end{cases} z \text{ 轴}; \quad (2) \begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \end{cases} y \text{ 轴};$$

$$(3) \begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases} \quad z \text{ 轴}; \quad (4) \begin{cases} z=0, \\ x^2-\frac{y^2}{4}=1, \end{cases} \quad x \text{ 轴}.$$

$$15. \quad x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \text{ 或 } x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0.$$

$$16. \quad x + 2y + 1 = 0. \quad 17. \quad \frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

$$18. \quad \left(0, 0, \frac{1}{5}\right).$$

$$19. \quad z=0, x^2+y^2=x+y;$$

$$x=0, 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0;$$

$$y=0, 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0.$$

$$20. \quad z=0, (x-1)^2+y^2 \leq 1;$$

$$x=0, \left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2 \leq 1, z \geq 0;$$

$$y=0, x \leq z \leq \sqrt{2x}.$$

$$(3) \begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases} \quad z \text{ 轴}; \quad (4) \begin{cases} z=0, \\ x^2-\frac{y^2}{4}=1, \end{cases} \quad x \text{ 轴}.$$

$$15. \quad x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \text{ 或 } x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0.$$

$$16. \quad x + 2y + 1 = 0. \quad 17. \quad \frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

$$18. \quad \left(0, 0, \frac{1}{5}\right).$$

$$19. \quad z=0, x^2+y^2=x+y;$$

$$x=0, 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0;$$

$$y=0, 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0.$$

$$20. \quad z=0, (x-1)^2+y^2 \leq 1;$$

$$x=0, \left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2 \leq 1, z \geq 0;$$

$$y=0, x \leq z \leq \sqrt{2x}.$$

$$(3) \begin{cases} x=0, \\ z=\sqrt{3}y, \end{cases} \quad z \text{ 轴}; \quad (4) \begin{cases} z=0, \\ x^2-\frac{y^2}{4}=1, \end{cases} \quad x \text{ 轴}.$$

$$15. \quad x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \text{ 或 } x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0.$$

$$16. \quad x + 2y + 1 = 0. \quad 17. \quad \frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

$$18. \quad \left(0, 0, \frac{1}{5}\right).$$

$$19. \quad z=0, x^2+y^2=x+y;$$

$$x=0, 2y^2+2yz+z^2-4y-3z+2=0;$$

$$y=0, 2x^2+2xz+z^2-4x-3z+2=0.$$

$$20. \quad z=0, (x-1)^2+y^2 \leq 1;$$

$$x=0, \left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2 \leq 1, z \geq 0;$$

$$y=0, x \leq z \leq \sqrt{2x}.$$