世纪云图 理工社

[张宇考研数学系列丛书]

张宇

考研数学题源探析经典1000题

（习题分册·数学一）

CLASSIC

1000 EXERCISES ON MATHS

Mr. Zhang

主编 张宇

2017

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Contents 目录

第一篇 高等数学

第 1 章 函数、极限、连续 …… (3)
一、选择题 …… (3)
二、填空题 …… (5)
三、解答题 …… (5)
第 2 章 一元函数微分学 …… (9)
一、选择题 …… (9)
二、填空题 …… (13)
三、解答题 …… (14)
第 3 章 一元函数积分学 …… (19)
一、选择题 …… (19)
二、填空题 …… (21)
三、解答题 …… (23)
第 4 章 向量代数与空间解析几何 …… (29)
一、选择题 …… (29)
二、填空题 …… (32)
三、解答题 …… (33)
第 5 章 多元函数微分学 …… (35)
一、选择题 …… (35)
二、填空题 …… (37)

三、解答题 …… (37)

第 6 章 多元函数积分学 …… (41)

一、选择题 …… (41)
二、填空题 …… (45)
三、解答题 …… (46)

第 7 章 无穷级数 …… (53)

一、选择题 …… (53)
二、填空题 …… (55)
三、解答题 …… (56)

第 8 章 常微分方程 …… (59)

一、选择题 …… (59)
二、填空题 …… (60)
三、解答题 …… (61)

第二篇 线性代数

一、选择题 …… (67)
二、填空题 …… (75)
三、解答题 …… (79)

第三篇 概率论与数理统计

一、选择题 …… (93)
二、填空题 …… (97)
三、解答题 …… (101)

01

高等数学

GAO DENG SHU XUE

高等数学是硕士研究生招生考试的内容之一，主要考查考生对高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决问题的能力.在数学一试卷中占56%，即84分.

第 1 章　函数、极限、连续

一、选择题(在目前的考研中，选择题是 4 分 / 题，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

1.1. 设数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$，则当$n\to\infty$时，$\{y_n\}$必为无穷小的充分条件是　(　　)

(A)$\{x_n\}$是无穷小　　(B)$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小

(C)$\{x_n\}$有界　　(D)$\{x_n\}$单调递减

1.2. 以下 3 个命题，

① 若数列$\{u_n\}$收敛于A，则其任意子数列$\{u_{n_i}\}$必定收敛于A；

② 若单调数列$\{x_n\}$的某一子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于A，则该数列必定收敛于A；

③ 若数列$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n+1}\}$都收敛于A，则数列$\{x_n\}$必定收敛于A.

正确的个数为　(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

1.3. 设$f(x)$是偶函数，$\varphi(x)$是奇函数，则下列函数(假设都有意义)中，是奇函数的是　(　　)

(A)$f[\varphi(x)]$　　(B)$f[f(x)]$　　(C)$\varphi[f(x)]$　　(D)$\varphi[\varphi(x)]$

1.4. 设$f(x)=\sin(\cos x)$，$\varphi(x)=\cos(\sin x)$，则在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内　(　　)

(A)$f(x)$是增函数，$\varphi(x)$是减函数　　(B)$f(x)$，$\varphi(x)$都是减函数

(C)$f(x)$是减函数，$\varphi(x)$是增函数　　(D)$f(x)$，$\varphi(x)$都是增函数

1.5. 设$f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_2(x)=f_1[f_1(x)]$，$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]$，$k=1,2,\cdots$，则当$n>1$时，$f_n(x)=$　(　　)

(A)$\dfrac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$　　(B)$\dfrac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$　　(C)$\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$　　(D)$\dfrac{x}{\sqrt{n+x^2}}$

1.6. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$则$f(-x)=$　(　　)

(A)$\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　(B)$\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C)$\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

1.7. 设$f(x)=u(x)+v(x)$，$g(x)=u(x)-v(x)$，并设$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$都不存在，下列论断正确的是　(　　)

(A)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在　　(B)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必不存在

(C)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必不存在　　(D)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必存在

1.8. 两个无穷小比较的结果是 （　　）

(A) 同阶　　(B) 高阶　　(C) 低阶　　(D) 不确定

1.9. 函数 $f(x)=x\sin x$ （　　）

(A) 在$(-\infty,+\infty)$内无界　　(B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界

(C) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大　　(D) 当 $x\to\infty$ 时极限存在

1.10. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=A\neq 0$ 的充要条件是 （　　）

(A) $\alpha>1$　　(B) $\alpha\neq 1$　　(C) $\alpha>0$　　(D) 与 α 无关

1.11. 设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不是无穷大，则下述结论正确的是 （　　）

(A) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必是无穷小

(B) 设当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 不是无穷小，则 $f(x)g(x)$ 必不是无穷小

(C) 设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 无界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必是无穷大

(D) 设在 $x=x_0$ 的某邻域 $g(x)$ 有界，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)g(x)$ 必不是无穷大

1.12. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，则在点 x_0 处必定间断的函数为 （　　）

(A) $f(x)\sin x$　　(B) $f(x)+\sin x$　　(C) $f^2(x)$　　(D) $|f(x)|$

1.13. 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$（$\beta(x)\neq 0$）都是无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，下列表达式中不一定为无穷小的是 （　　）

(A) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta^2(x)}$　　(B) $\alpha^2(x)+\beta^3(x)\cdot\cos\dfrac{1}{x}$

(C) $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta^2(x)]$　　(D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

1.14. 设当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为 （　　）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

1.15. 若 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\lambda-e^{-kx}}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则 （　　）

(A) $\lambda<0,k<0$　　(B) $\lambda<0,k>0$　　(C) $\lambda\geqslant 0,k<0$　　(D) $\lambda\leqslant 0,k>0$

1.16. 设 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则 （　　）

(A) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

1.17. 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有 （　　）

(A) 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　　(B) 1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点

(C) 2 个可去间断点　　(D) 2 个无穷间断点

1.18. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内间断点的类型只能是 （　　）

(A) 第一类间断点　　(B) 第二类间断点

(C) 既有第一类间断点也有第二类间断点　　(D) 结论不确定

二、填空题(在目前的考研中,填空题是 4 分 / 题,请将答案填在题中的横线上.)

1.19. 设 $f(x)$ 是奇函数,且对一切 x 有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$,又 $f(1)=a$,a 为常数,n 为整数,则 $f(n)=$ ________.

1.20. 对充分大的一切 x,以下 5 个函数:100^x,$\log_{10}x^{100}$,e^{10x},$x^{10^{10}}$,$e^{\frac{1}{100}x^2}$,最大的是________.

1.21. $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$ ________.

1.22. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$ ________.

1.23. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(4x-1)^{\alpha}}=\beta>0$,则 α,β 的值为________.

1.24. 若当 $x\to0$ 时,有 $\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}\sim\dfrac{1}{10\,000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)$,则 $a=$ ________.

1.25. 当 $x\to0$ 时,若有 $\ln\left(\cos\dfrac{2x}{3}\right)\sim Ax^k$,则 $A=$ ________,$k=$ ________.

1.26. 当 $x\to\pi$ 时,若有 $\sqrt[4]{\sin\dfrac{x}{2}}-1\sim A(x-\pi)^k$,则 $A=$ ________,$k=$ ________.

1.27. 若 $f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x), & x>0,\\ 2x+a, & x\leqslant0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数,则 $a=$ ________.

1.28. 已知数列 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=$ ________.

三、解答题(在目前的考研中,解答题包括计算题、应用题和证明题,平均 10 分 / 题.)

1.29. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2e^x-1, & x\leqslant0,\\ x^2-1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

1.30. (1) 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(2x)^n+x^{2n}}$ 的表达式,$x\geqslant0$;(2) 讨论 $f(x)$ 的连续性.

1.31. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

1.32. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\tan x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n\left(a\neq\dfrac{1}{2}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x\sin^2x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$;

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$;

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq0)$;

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$;

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}$;

(14) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\tan x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)\,dt}{(\sqrt[3]{1+x^3}-1)\sin x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x(1-\cos x)}$;

(17) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$；　(18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

(19) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；　(20) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$；

(21) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$；　(22) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

1.33. 设 $f(x)=x^2+ax+b$，证明：$|f(1)|$，$|f(3)|$，$|f(5)|$ 中至少有一个不小于 2.

1.34. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$.

1.35. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

1.36. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

1.37. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

1.38. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

1.39. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}$.

1.40. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1.41. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i>0$，且 $a_i\neq1$，$i=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant2$.

1.42. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$，$a>0$.

1.43. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A(a>0,a\neq1)$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

1.44. 已知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\dfrac{x-\arctan(x-1)-1}{(x-1)^3}+2x^2e^{x-1}\lim\limits_{x\to1}f(x)$，求 $f(x)$.

1.45. 设 $f(x)$ 是三次多项式，且有 $\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq0)$，求 $\lim\limits_{x\to3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

1.46. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\beta-(n-1)^\beta}=10$，试求 α,β 的值.

1.47. 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$，证明：存在常数 A,B，使得当 $x\to0^+$ 时，恒有 $f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$，并求常数 A,B.

1.48. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

1.49. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

1.50. 数列 $\{x_n\}$ 通项 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.51. 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并求其极限值.

1.52. 设 $x_1=1,x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.53. 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,$\{y_n\}$ 发散,那么 $\{x_ny_n\}$ 是否一定发散?如果 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散,那么 $\{x_ny_n\}$ 的敛散性又将如何?

1.54. 分段函数一定不是初等函数,若正确,试证之;若不正确,试说明它们之间的关系?

1.55. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

1.56. 已知数列 $\{x_n\}$ 的通项 $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n},n=1,2,3\cdots$.

(1) 证明 $S_{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\right]$.

1.57. 利用夹逼定理证明:$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\cdots-\dfrac{1}{n+k}\right)=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

1.58. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶导数连续,且 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+x^2+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$. 试求 $f(0),f'(0)$,$f''(0)$ 以及极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

1.59. 设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right),n=1,2,\cdots$,试求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

1.60. 试讨论函数 $g(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ \mathrm{e}^x+\beta, & x\leqslant0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

1.61. 求函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\pi+2x)}{2\cos x}, & x\leqslant0,\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\end{cases}$ 的间断点,并判断它们的类型.

1.62. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{1}{1+x}}{x^2+\mathrm{e}^{nx}}$,求 $f(x)$ 的间断点并判定其类型.

1.63. 设函数 $f(x)$ 连续可导,且 $f(0)=0,F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

1.64. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+(x^2-1)\sin ax}{x^n+x^2-1}$,为了使 $f(x)$ 对一切 x 都连续,求常数 a 的最小正值.

1.65. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & -1<x<0.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点,并说明间断点的类型,如是可去间断点,则补充或改变定义使它连续.

1.66. 设 $f(x;t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}((x-1)(t-1)>0,x\neq t)$,函数 $f(x)$ 由下列表达式确定,

$$f(x)=\lim_{t\to x}f(x;t),$$

求出 $f(x)$ 的连续区间和间断点,并研究 $f(x)$ 在间断点处的左右极限.

1.67. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 是 $[a,b]$ 上一个点列，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}}$.

1.68. 设函数 $f(x)$ 在 $0<x\leqslant 1$ 时 $f(x)=x^{\sin x}$，其他的 x 满足关系式 $f(x)+k=2f(x+1)$，试求常数 k 使极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

1.69. 设 $f(x)$ 对一切 x_1,x_2 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，并且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 证明：函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

第 2 章　一元函数微分学

一、选择题(在目前的考研中,选择题是 4 分 / 题,下列每小题给出四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.)

2.1. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 内的奇函数,且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为　　(　　)

(A) a　　(B) $-a$　　(C) 0　　(D) 不存在

2.2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处　　(　　)

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在,但不连续

(C) 连续,但不可导　　(D) 可导

2.3. 设函数 $f(x)$ 可导,且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $y=2-x$ 垂直,则当 $\Delta x\to0$ 时,该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 　　(　　)

(A) 与 Δx 同阶但非等价的无穷小　　(B) 与 Δx 等价的无穷小

(C) 比 Δx 高阶的无穷小　　(D) 比 Δx 低阶的无穷小

2.4. 已知函数 $f(x)=\ln|x-1|$,则　　(　　)

(A) $f'(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$　　(B) $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$

(C) $f'(x)=\dfrac{1}{1-x}$　　(D) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x>1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & x<1\end{cases}$

2.5. 函数 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点 $(0,1)$ 处的切线与 x 轴交点的坐标是　(　　)

(A) $(-1,0)$　　(B) $\left(-\dfrac{1}{6},0\right)$　　(C) $(1,0)$　　(D) $\left(\dfrac{1}{6},0\right)$

2.6. 函数 $f(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ 在 $x=\pi$ 处的　　(　　)

(A) 右导数 $f'_+(\pi)=-\dfrac{1}{\pi}$　　(B) 导数 $f'(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$

(C) 左导数 $f'_-(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$　　(D) 右导数 $f'_+(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$

2.7. 函数 $y=x^x$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上　　(　　)

(A) 不存在最大值和最小值　　(B) 最大值是 $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

(C) 最大值是 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$　　(D) 最小值是 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$

2.8. 函数 $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ （　）

(A) 只有极大值，没有极小值

(B) 只有极小值，没有极大值

(C) 在 $x=-1$ 处取极大值，$x=0$ 处取极小值

(D) 在 $x=-1$ 处取极小值，$x=0$ 处取极大值

2.9. 若 $f(x)$ 在 x_0 点至少二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 （　）

(A) 取得极大值　(B) 取得极小值　(C) 无极值　(D) 不一定有极值

2.10. 设函数 $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$，则 （　）

(A) 在其有定义的任何区间 (x_1,x_2) 内，$f(x)$ 必是单调减少的

(B) 在点 x_1 及 x_2 处有定义，且 $x_1<x_2$ 时，必有 $f(x_1)>f(x_2)$

(C) 在其有定义的任何区间 (x_1,x_2) 内，$f(x)$ 必是单调增加的

(D) 在点 x_1 及 x_2 处有定义，且 $x_1<x_2$ 时，必有 $f(x_1)<f(x_2)$

2.11. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}=1$，则 （　）

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

2.12. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 （　）

(A) 对任意 x，$f'(x)>0$　(B) 对任意 x，$f'(-x)\leqslant 0$

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加　(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加

2.13. 设 a 为常数，$f(x)=ae^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的零点个数情况为 （　）

(A) 当 $a>0$ 时 $f(x)$ 无零点，当 $a\leqslant 0$ 时 $f(x)$ 恰有一个零点

(B) 当 $a>0$ 时 $f(x)$ 恰有两个零点，当 $a\leqslant 0$ 时 $f(x)$ 无零点

(C) 当 $a>0$ 时 $f(x)$ 恰有两个零点，当 $a\leqslant 0$ 时 $f(x)$ 恰有一个零点

(D) 当 $a>0$ 时 $f(x)$ 恰有一个零点，当 $a\leqslant 0$ 时 $f(x)$ 无零点

2.14. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 内连续，且当 $x>a$ 时，$f'(x)>l>0$，其中 l 为常数．若 $f(a)<0$，则在区间 $\left(a,a+\dfrac{|f(a)|}{l}\right)$ 内方程 $f(x)=0$ 的实根个数为 （　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

2.15. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为 （　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 0　(C) -1　(D) -2

2.16. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 上可导，考虑下列叙述：

(1) 若 $f(x)>g(x)$，则 $f'(x)>g'(x)$；(2) 若 $f'(x)>g'(x)$，则 $f(x)>g(x)$．

则 （　）

(A) (1)，(2) 都正确　(B) (1)，(2) 都不正确

(C) (1) 正确，但 (2) 不正确　(D) (2) 正确，但 (1) 不正确

2.17. 两曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与 $y=ax^2+b$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 处相切，则 ( )

(A) $a=-\dfrac{1}{16},b=\dfrac{3}{4}$　　(B) $a=\dfrac{1}{16},b=\dfrac{1}{4}$

(C) $a=-1,b=\dfrac{9}{2}$　　(D) $a=1,b=-\dfrac{7}{2}$

2.18. 若 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 点 ( )

(A) 必可导　　(B) 连续，但不一定可导

(C) 一定不可导　　(D) 不连续

2.19. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 ( )

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导　　(D) 可导

2.20. 关于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的以下结论正确的是 ( )

(A) 若 $f'(x_0)=0$，则 $f(x_0)$ 必是一极值

(B) 若 $f''(x_0)=0$，则点 $(x_0,f(x_0))$ 必是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$ 存在（n 为正整数），则 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且有

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=f'(x_0)$$

(D) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界

2.21. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的 ( )

(A) 连续点　　(B) 第一类间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点或间断点不能由此确定

2.22. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{5}{3}}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 $f(x)$ ( )

(A) 不连续　　(B) 连续，但不可导

(C) 可导，但导数不连续　　(D) 可导，且导数连续

2.23. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有 ( )

(A) $f(0)=0$　　(B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)+f'(0)=0$　　(D) $f(0)-f'(0)=0$

2.24. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的 ( )

(A) 间断点　　(B) 连续，但不可导的点

(C) 可导的点，且 $f'(0)=0$　　(D) 可导的点，且 $f'(0)\neq 0$

2.25. 设 $f(x)=f(-x)$，且在 $(0,+\infty)$ 内二阶可导，又 $f'(x)>0$，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内的单调性和图形的凹凸性是 ( )

(A) 单调增，凸　(B) 单调减，凸　(C) 单调增，凹　(D) 单调减，凹

2.26. 设 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0,f'(0)\neq 0,F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于　　（　　）

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

2.27. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $g(0)=g'(0)=0$，设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处　　（　　）

(A) 不连续　　(B) 连续，但不可导

(C) 可导，但导函数不连续　　(D) 可导且导函数连续

2.28. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$　　（　　）

(A) 有且仅有水平渐近线　　(B) 有且仅有铅直渐近线

(C) 既有水平渐近线，也有铅直渐近线　　(D) 既无水平渐近线，也无铅直渐近线

2.29. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有　　（　　）

(A)1 条　　(B)2 条　　(C)3 条　　(D) 4 条

2.30. 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$　　（　　）

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B)$(-1)^n(n-1)!$

(C)$(-1)^{n-1}n!$　　(D)$(-1)^n n!$

2.31. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1,f(1)=0$，则在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使　　（　　）

(A)$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$　　(B)$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

(C)$f(\xi)=-\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$　　(D)$f(\xi)=\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$

2.32. $f(x)=xe^x$ 的 n 阶麦克劳林公式为　　（　　）

(A)$x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{(n-1)!}+\dfrac{e^{\theta x}(n+\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1$

(B)$x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{(n-1)!}+\dfrac{e^{\theta x}(n+1+\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1$

(C)$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{e^{\theta x}(n+\theta x)}{n!}x^{n+1},0<\theta<1$

(D)$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}(n+1+\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1$

2.33. 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 x_1,x_2 是 (a,b) 内任意两点，则至少存在一点 ξ，使下列诸式中成立的是　　（　　）

(A)$f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)f'(\xi),\xi\in(a,b)$

(B)$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)f'(\xi)$，$\xi$ 在 x_1,x_2 之间

(C)$f(x_1)-f(x_2)=(x_2-x_1)f'(\xi),x_1<\xi<x_2$

(D)$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),x_1<\xi<x_2$

2.34. 在区间 $[0,8]$ 内，对函数 $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$，罗尔定理　　（　　）

(A) 不成立　　(B) 成立，并且 $f'(2)=0$

(C) 成立，并且 $f'(4)=0$　　(D) 成立，并且 $f'(8)=0$

2.35. 给出如下5个命题：

(1) 若不恒为常数的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $x_0\neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，则 $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极大值点；

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零，则 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加；

(3) 若函数 $f(x)$ 对一切 x 都满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，且 $f'(x_0)=0,x_0\neq 0$，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，则 $y=y(x)$ 的驻点必定是它的极小值点；

(5) 设函数 $f(x)=xe^x$，则它的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x_0=-(n+1)$ 处取得极小值.

正确命题的个数为 (　　)

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

二、填空题(在目前的考研中，填空是4分/题，请将答案填在题中的横线处.)

2.36. 曲线 $\begin{cases}x=3t^2,\\ y=3t-t^3\end{cases}$ 在 $t=1$ 处的曲率 $k=$ ________.

2.37. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，无零点，但有使 $f(x)$ 取正值的点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的符号为 ________.

2.38. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+bx)}{x}, & x\neq 0,\\ -1, & x=0,\end{cases}$ 且 $1+bx>0$，则当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$f'(0)=$ ________.

2.39. 曲线 $y=x+x^{\frac{5}{3}}$ 的凹区间是________.

2.40. 设曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 经过 $(-2,44)$，$x=-2$ 为驻点，$(1,-10)$ 为拐点，则 a,b,c,d 分别为________.

2.41. 若函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 $a=$ ________.

2.42. 曲线 $y=\sqrt{1+x^2}$ 的曲率及曲率的最大值分别为________.

2.43. 曲线 $y=\ln\left(e-\dfrac{1}{x}\right)$ 的全部渐近线为________.

2.44. $p(x)$ 为二次三项式，要使得 $e^x=p(x)+o(x^2)(x\to 0)$，则 $p(x)=$ ________.

2.45. 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$ 则 $f'(t)=$ ________.

2.46. 设 $\begin{cases}x=e^{-t},\\ y=\displaystyle\int_0^t\ln(1+u^2)\,du,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$ ________.

2.47. 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x}$ 则 $y'=$ ________.

2.48. 设 $y=\ln(1+3^{-x})$，则 $dy=$ ________.

2.49. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos xy=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

2.50. 设 $y=\cos x^2\sin^2\dfrac{1}{x}$，则 $y'=$ ________.

2.51. 设 $y=(x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$，则 $y'\Big|_{x=0}=$ ________.

2.52. 曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin 2t, \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$ 在点(0,1)处的法线方程为________.

2.53. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，则 $y^{(n)}=$ ________ $(n\geqslant 1)$.

2.54. 落在平静水面的石头，产生同心波纹，若最外一圈波半径的增大率总是 6 m/s，问在 2 s 末扰动水面面积的增大率为________ m^2/s.

三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.）

2.55. 求 $y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+\ln\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}}$ 的反函数的导数.

2.56. 设 $y=\dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$，$a,b,c$ 是三个互不相等的常数，求 $y^{(n)}$.

2.57. 设函数 $f(y)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及 $f'[f^{-1}(x)]$ 与 $f''[f^{-1}(x)]$ 都存在，且 $f^{-1}[f^{-1}(x)]\neq 0$. 证明：$\dfrac{\mathrm{d}^2 f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}$.

2.58. 求函数 $y=(\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}}$ 的导数.

2.59. $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$，求 y'.

2.60. 设 $y=y(x)$ 是由 $\sin xy=\ln\dfrac{x+\mathrm{e}}{y}+1$ 确定的隐函数，求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$ 的值.

2.61. 设 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$，其中 f 可微，计算 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2.62. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且

$$f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)},\quad f(2)=1,$$

计算 $f^{(n)}(2)$.

2.63. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为 $(x_n,0)$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$.

2.64. 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形，记切点的横坐标为 a，求切线方程和这个图形的面积. 当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？

2.65. 设 $\varphi(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 又函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，求 $F(x)=f[\varphi(x)]$ 的导数.

2.66. 证明：不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$.

2.67. 讨论方程 $2x^3-9x^2+12x-a=0$ 实根的情况.

2.68. 讨论方程 $ax\mathrm{e}^x+b=0\,(a>0)$ 实根的情况.

2.69. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$，$n=2,3,\cdots$.

(1) 证明：方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 有唯一实根 x_n；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.70. 设 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$，求证：

(1) 对于任意正整数 n，$f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 中仅有一根；

(2) 设有 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，满足 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.

2.71. 在数 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$ 中求出最大值.

2.72. 证明:方程 $x^{a}=\ln x(\alpha<0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个实根.

2.73. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$,且 $f(x)$ 的最小值 $f(x_0)<x_0$,证明: $f[f(x)]$ 至少在两点处取得最小值.

2.74. 设 $T=\cos n\theta,\theta=\arccos x$,求 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$.

2.75. 已知 $y=x^2\sin 2x$,求 $y^{(50)}$.

2.76. 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2+\tan x)^{10}-(2-\sin x)^{10}}{\sin x}$.

2.77. 已知 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+100)}$,求 $f'(1)$.

2.78. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数,它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式:

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to0$ 时比 x 高阶的无穷小,且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,求 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

2.79. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数,且 $g(0)=1,g'(0)=-1$,求 $f'(x)$,并讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性.

2.80. 求下列函数的导数:

(1) $y=a^{a^x}+a^{x^x}+a^{x^a}+a^{a^a}\ (a>0)$;

(2) $y=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f(\mathrm{e}^x)$;

(3) $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right),f'(x)=\arctan x^2$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$;

(4) 设 $f(t)$ 具有二阶导数, $f\left(\dfrac{1}{2}x\right)=x^2$,求 $f[f'(x)],\{f[f(x)]\}'$.

002306154357

2.81. 设 $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\cdot\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\ (a>0,b>0)$,求 y'.

2.82. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\varphi(t)\end{cases}(t>-1)$ 所确定,其中 $\varphi(t)$ 具有二阶导数,且已知 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$,证明:函数 $\varphi(t)$ 满足方程 $\varphi''(t)-\dfrac{1}{1+t}\varphi'(t)=3(1+t)$.

2.83. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试问当 α 取何值时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处,① 连续,② 可导,③ 一阶导数连续,④ 二阶导数存在.

2.84. 设 $y=\dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$,求 $y^{(n)}(n>1)$.

2.85. 设 $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $y^{(n)}(0)$.

2.86. 设 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}$,求 $f'(x)$.

2.87. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(\sqrt{1+x}-1)}{x}, & -1\leqslant x<0,\\ b(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+2)+c\ln(1+x), & x>0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 试确定常数 a,b,c，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续且可导.

2.88. 顶角为 60°，底圆半径为 a 的正圆锥形漏斗内盛满水，下接底圆半径为 $b(b<a)$ 的圆柱形水桶（假设水桶的体积大于漏斗的体积），水由漏斗注入水桶，问当漏斗水平面下降速度与水桶水平面上升速度相等时，漏斗中水平面高度是多少？

2.89. 防空洞的截面拟建成矩形加半圆（如图 1.2-1），截面的面积为 5 平方米，问底宽 x 为多少时才能使建造时所用的材料最省？

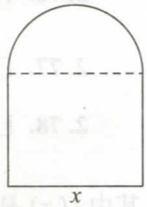

图 1.2-1

2.90. 试证明：曲线 $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 恰有三个拐点，且位于同一条直线上.

2.91. 作函数的图形 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$.

2.92. 求函数 $y=\mathrm{e}^x\cos x$ 的极值.

2.93. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$. 证明：$f(x)=\mathrm{e}^x$.

2.94. 设 $f(x)$ 可导，证明：$f(x)$ 的两个零点之间一定有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

2.95. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，求证：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$；

(2) 存在 $\eta\in(a,b)$，使 $\eta f(\eta)+f'(\eta)=0$.

2.96. 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$. 试证：在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

2.97. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=f'(1)=0$，$f(1)=1$. 求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $|f''(\xi)|\geqslant 4$.

2.98. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导且 $f(a)\neq f(b)$. 证明：存在 $\eta,\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{f'(\eta)}{b+a}$.

2.99. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续 $(a,b>0)$，在 (a,b) 内可导. 证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使等式 $\dfrac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$ 成立.

2.100. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f'(0)=0$. 证明：存在 $\xi,\eta,\omega\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\sin 2\xi f''(\omega)$.

2.101. 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的曲率半径.

2.102. 设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$，证明：

(1) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值；

(2) 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值.

2.103. 设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n>2)$. 证明：当 n 为奇数时，$(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

2.104. 求函数 $f(x)=nx(1-x)^n$ 在$[0,1]$上的最大值 $M(n)$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

2.105. 求曲线 $y=e^x$ 上的最大曲率及其曲率圆方程.

2.106. 设一质点在单位时间内由点 A 从静止开始作直线运动至点 B 停止,两点 A,B 间距离为1,证明:该质点在$(0,1)$内总有一时刻的加速度的绝对值不小于4.

2.107. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,试证:在$[a,b]$内存在 ξ,使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

2.108. 设 $f(x)$ 在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数,且 $f(-1)=0$,$f(1)=1$,$f'(0)=0$.证明:在$[-1,1]$内存在 ξ,使得 $f'''(\xi)=3$.

2.109. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导,$g''(x)\neq 0$,$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$.证明:

(1) 在(a,b)内,$g(x)\neq 0$;

(2) 在(a,b)内至少存在一点 ξ,使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

2.110. 在区间$[0,a]$上 $|f''(x)|\leqslant M$,且 $f(x)$ 在$(0,a)$内取得极大值.
求证:$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$.

2.111. 设 $f(x)$ 在闭区间$[1,2]$上可导,证明:$\exists\,\xi\in(1,2)$,使

$$f(2)-2f(1)=\xi f'(\xi)-f(\xi).$$

2.112. $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f'(x)\neq 0$.
证明:$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$,使得$\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

2.113. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,且 $f''(x)>0$.证明:$f(x)>x$.

2.114. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导,且 $f(a)=f(b)=g(a)=0$,证明:$\exists\,\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)g(\xi)+2f'(\xi)g'(\xi)+f(\xi)g''(\xi)=0$.

2.115. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导,且 $f'(a)=f'(b)=0$,则 $\exists\,\xi\in(a,b)$,使

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

2.116. 设 $f(x)=\arcsin x$,ξ 为 $f(x)$ 在$[0,t]$上拉格朗日中值定理的中值点,$0<t<1$,求极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\xi}{t}$.

2.117. 若函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 是 n 阶可微的,且 $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$,$k=0,1,2,\cdots,n-1$.又 $x>x_0$ 时,$\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$.试证:当 $x>x_0$ 时,$\varphi(x)>\psi(x)$.

2.118. 设函数 $f(x)$ 在(a,b)内存在二阶导数,且 $f''(x)<0$.试证:

(1) 若 $x_0\in(a,b)$,则对于(a,b)内的任何 x,有

$$f(x_0)\geqslant f(x)-f'(x_0)(x-x_0),$$

当且仅当 $x=x_0$ 时等号成立;

(2) 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$,且 $x_i<x_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$,则

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}k_ix_i\Big)>\sum_{i=1}^{n}k_if(x_i),$$

其中常数 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=1$.

2.119. 若 $x>-1$,证明:
当 $0<\alpha<1$ 时,有 $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$;当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时,有 $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$.

2.120. 设 $x\in(0,1)$，证明下面不等式：

(1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$；(2) $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

2.121. 证明：$\cos\sqrt{2}x\leqslant -x^2+\sqrt{1+x^4}$，其中 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)$.

2.122. 求使不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant \mathrm{e}\leqslant\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\beta}$ 对所有的自然数 n 都成立的最大的数 α 和最小的数 β.

2.123. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 证明：$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

2.124. 设 n 为自然数，试证：

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

2.125. 已知 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)>0$，$f(x)f''(x)-[f'(x)]^2\geqslant 0\ (x\in\mathbf{R})$.

(1) 证明：$f(x_1)f(x_2)\geqslant f^2\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\quad(\forall x_1,x_2\in\mathbf{R})$；

(2) 若 $f(0)=1$，证明：$f(x)\geqslant \mathrm{e}^{f'(0)x}\quad(x\in\mathbf{R})$.

2.126. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续，其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少，$f(0)=0$. 试应用拉格朗日中值定理证明：

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b),$$

其中常数 a,b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

2.127. 证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

2.128. 设 $b>a>\mathrm{e}$，证明：$a^b>b^a$.

2.129. 证明：当 $x>0$ 时，不等式 $\mathrm{e}^{\frac{x}{1+x}}<1+x$ 成立.

2.130. 证明：当 $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 时，不等式 $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}>\cos x$ 成立.

第 3 章 一元函数积分学

一、选择题(在目前的考研中,选择题是 4 分 / 题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

3.1. 设 $f(x)=\ln x - x\int_1^{e}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$,则 $f(x)=$ ( )

(A) $\ln x-\frac{x}{2e}$ (B) $\ln x+\frac{x}{2e}$

(C) $\ln x-2ex$ (D) $\ln x+2ex$

3.2. 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$,则有 ( )

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_3<I_2<I_1$ (C) $I_2<I_3<I_1$ (D) $I_2<I_1<I_3$

3.3. 积分 $\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ ( )

(A) $-\frac{e^x}{1+x}+C$ (B) $-\frac{e^x}{(1+x)^2}+C$ (C) $\frac{e^x}{1+x}+C$ (D) $\frac{e^x}{(1+x)^2}+C$

3.4. 积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=$ ( )

(A) $\sqrt[3]{x}+\ln|\sqrt[3]{x}+1|+C$ (B) $6\sqrt[3]{x}+6\ln|\sqrt[3]{x}+1|+C$

(C) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C$ (D) $3\sqrt[6]{x}\arctan\sqrt[6]{x}+C$

3.5. 积分 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=$ ( )

(A) $-\frac{1}{x}(\ln^2x+2\ln x+1)+C$ (B) $\frac{1}{x}\ln^2x-\frac{2}{x}\ln x+\frac{1}{x}+C$

(C) $\frac{1}{x}\ln^2x+2\ln x-\frac{2}{x}+C$ (D) $-\frac{1}{x}(\ln^2x+2\ln x+2)+C$

3.6. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4x+\cos^4x}\mathrm{d}x=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C$ (B) $-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)+C$

(C) $\arctan(-\cos 2x)+C$ (D) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1}\right|+C$

3.7. 积分 $\int\frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x=$ ( )

(A) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}\right|+C$ (B) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

(C) $\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$ (D) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

3.8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负，在 (a,b) 内 $f''(x)>0, f'(x)<0$. $I_1=\dfrac{b-a}{2}[f(b)+f(a)]$，$I_2=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$I_3=(b-a)f(b)$，则 I_1、I_2、I_3 的大小关系为 （　　）

(A) $I_1\leqslant I_2\leqslant I_3$　(B) $I_2\leqslant I_3\leqslant I_1$　(C) $I_1\leqslant I_3\leqslant I_2$　(D) $I_3\leqslant I_2\leqslant I_1$

3.9. 设 $N=\displaystyle\int_{-a}^{a}x^2\sin^3 x\mathrm{d}x$，$P=\displaystyle\int_{-a}^{a}(x^3e^{x^2}-1)\mathrm{d}x$，$Q=\displaystyle\int_{-a}^{a}\cos^2 x^3\mathrm{d}x$，$a\geqslant 0$，则 （　　）

(A) $N\leqslant P\leqslant Q$　(B) $N\leqslant Q\leqslant P$　(C) $Q\leqslant P\leqslant N$　(D) $P\leqslant N\leqslant Q$

3.10. 设 $f(x)$ 连续，则在下列变上限积分中，必为偶函数的是 （　　）

(A) $\displaystyle\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$　(B) $\displaystyle\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$

(C) $\displaystyle\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　(D) $\displaystyle\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

3.11. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$. 则方程 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在 (a,b) 内的根有 （　　）

(A) 0 个　(B) 1 个　(C) 2 个　(D) 无穷多个

3.12. 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=1, f'(0)=2$. 下列曲线与曲线 $y=f(x)$ 必有公共切线的是 （　　）

(A) $y=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$　(B) $y=1+\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

(C) $y=\displaystyle\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t$　(D) $y=1+\displaystyle\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t$

3.13. 设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\varphi(x)>0$，则函数 $y=\Phi(x)=\displaystyle\int_a^b|x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t$ （　　）

(A) 在 (a,b) 内的图形为凸　(B) 在 (a,b) 内的图形为凹

(C) 在 (a,b) 内有拐点　(D) 在 (a,b) 内有间断点

DD22061547573

3.14. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0,\\ \cos x+\dfrac{\pi}{4}, & x>0,\end{cases}$ $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，则 （　　）

(A) $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数

(B) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，但不是 $f(x)$ 的原函数

(C) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不连续

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，但不是 $f(x)$ 的原函数

3.15. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则在 $(-\infty,+\infty)$ 内，下列正确的是 （　　）

(A) $f(x)$ 不连续且不可微，$F(x)$ 可微，且为 $f(x)$ 的原函数

(B) $f(x)$ 不连续，不存在原函数，因而 $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数

(C) $f(x)$ 和 $F(x)$ 均为可微函数，且 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数

(D) $f(x)$ 连续，且 $F'(x)=f(x)$

3.16. 设 $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ （　　）

(A) 为正常数　(B) 为负常数　(C) 恒为零　(D) 不为常数

3.17. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数，则 $\int_{a+kl}^{a+(k+1)l} f(x)\mathrm{d}x$ 之值 ( )

(A) 仅与 a 有关　　(B) 仅与 a 无关

(C) 与 a 及 k 都无关　　(D) 与 a 及 k 都有关

3.18. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可微函数，则下列函数中以 T 为周期的函数是 ( )

(A) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$　　(B) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(C) $\int_0^x f'(t^2)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t$

3.19. 下列反常积分收敛的是 ( )

(A) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$　　(C) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$　　(D) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$

3.20. 以下 4 个命题

① 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的奇函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0$；

② 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x$；

③ 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 都发散，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$ 未必发散；

④ 若 $\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 都发散，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 未必发散.

正确的个数为 ( )

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

3.21. 由曲线 $y=\sin^{\frac{3}{2}}x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为 ( )

(A) $\frac{4}{3}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{4}{3}\pi$　　(D) $\frac{2}{3}\pi$

3.22. 抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积为 ( )

(A) $\frac{8}{5}$　　(B)18　　(C) $\frac{18}{5}$　　(D)8

3.23. 曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 x 从 3 到 8 的一段弧的长度为 ( )

(A) $\frac{38}{3}$　　(B) $\frac{28}{3}$　　(C)9　　(D)6

二、填空题(在目前的考研中，填空题是 4 分 / 题，请将答案填在题中的横线上.)

3.24. $\int\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$ ________.

3.25. $x^x(1+\ln x)$ 的全体原函数为________.

3.26. $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=$ ________.

3.27. $\int\frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x=$ ________.

3.28. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 且 $x=at+b(a\neq0)$，则 $\int f(t)\mathrm{d}t=$ ________.

3.29. 积分 $\int\frac{2^x\cdot3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x=$ ________.

3.30. 设 $f'(e^x)=1+x$，则 $f(x)=$________.

3.31. 积分 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=$________.

3.32. 将 $\frac{1}{x(x+2)^2}$ 分解为部分分式的形式为________.

3.33. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，则 $f'(x)=$________.

3.34. 已知函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$，且 $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，则 $F(x)=$________.

3.35. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx=$________.

3.36. 积分 $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=$________.

3.37. $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}dx=$________.

3.38. 若 $f'(x^2)=\frac{1}{x}(x>0)$，则 $f(x)=$________.

3.39. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}dx=$________.

3.40. 函数 $F(x)=\int_1^x(1-\ln\sqrt{t})dt(x>0)$ 的递减区间为________.

3.41. 已知 $\int_0^1 f(x)dx=1, f(1)=0$，则 $\int_0^1 xf'(x)dx=$________.

3.42. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，$a$ 为常数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}f(t)dt=$________.

3.43. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2(\sin x+1)dx=$________.

3.44. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2, & x>0,\end{cases}$ 则 $\int_{-2}^{0}f(x+1)dx=$________.

3.45. $\int_{-2}^{2}x^3e^{\sqrt{1+x^2}}\cos x dx=$________.

3.46. 设两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处有相同的切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=$________.

3.47. $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}\frac{\ln^n t}{2+t}dt=$________($a$ 为常数，n 为自然数).

3.48. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$，则 $f(7)=$________.

3.49. 设 $f(3x+1)=xe^{\frac{x}{2}}$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$________.

3.50. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax+1}=\int_{-\infty}^{a}te^t dt$，则 $a=$________.

3.51. 设 $\frac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_1^e xf'(x)dx=$________.

3.52. $\int_{-2}^{2}\frac{x+\sin x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=$ ______.

3.53. $\int x^3 e^{x^2}\mathrm{d}x=$ ______.

3.54. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x(0<x<1)$，则 $f(x)=$ ______.

3.55. 设 $y=y(x)$，若 $\int y\mathrm{d}x\cdot\int\frac{1}{y}\mathrm{d}x=-1$，$y(0)=1$，且 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0$，则 $y=$ ______.

3.56. 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t\right]=$ ______.

3.57. 设 n 是正整数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}\mathrm{d}x=$ ______.

3.58. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=$ ______.

3.59. 定积分中值定理的条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，结论是______.

3.60. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=$ ______.

3.61. $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$ ______.

3.62. 反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+2x^4+2x^8}}=$ ______.

3.63. 反常积分 $\int_{-1}^{0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{1+x}}\mathrm{d}x=$ ______.

3.64. 曲线 $9y^2=4x^3$ 上从 $x=0$ 到 $x=1$ 的一段弧的长度为______.

3.65. 由曲线 $y=x^3$，$y=0$ 及 $x=1$ 所围图形绕 x 轴旋转一周得到的旋转体的体积为______.

3.66. 函数 $y=\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上的平均值为______.

三、解答题(在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.)

3.67. 设 $f(x)=\begin{cases}2, & x>1,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \sin x, & x<0,\end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

3.68. 求不定积分 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$.

3.69. 求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

3.70. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

3.71. 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)}$.

3.72. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

3.73. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

3.74. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

3.75. 求 $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

QQ2306154353

3.76. 求$\int \dfrac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$.

3.77. 求$\int (x^5+3x^2-2x+5)\cos x\mathrm{d}x$.

3.78. 求$\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

3.79. 计算$\int \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{a+x}}\mathrm{d}x$　($a>0$是常数).

3.80. 设$f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算$\int f(x)\mathrm{d}x$.

3.81. 求$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

3.82. 求下列积分：

(1)$\int \dfrac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(2)$\int \dfrac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$；

(3)$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$；

(4)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x$；

(5)$\int \dfrac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(6)$\int \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$；

(7)$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$.

3.83. 计算下列积分：

(1)$\int_{-1}^{2}[x]\max\{1,\mathrm{e}^{-x}\}\mathrm{d}x$,其中,$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

(2)$\int_0^3(|x-1|+|x-2|)\mathrm{d}x$.

(3)已知$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$求$\int_{2n}^{2n+2}f(x-2n)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$,$n=2,3,\cdots$.

3.84. 求$\int \dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

3.85. 设$f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$,求$\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

3.86. 计算定积分$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

3.87. 计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$.

3.88. 设函数$x=x(y)$由方程$x(y-x)^2=y$所确定,试求不定积分$\int \dfrac{1}{y-x}\mathrm{d}y$.

3.89. 计算$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$,其中,当$x\geqslant 0$时,$f(x)=x$,而

$$g(x)=\begin{cases}\sin x, 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \quad x\geqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

3.90. 已知 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = 1-\cos x$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

3.91. 计算$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

3.92. 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}x(n>1)$，证明：

(1)$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$，并由此计算 I_n；(2) $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$.

3.93. 计算 $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

3.94. 对于实数 $x>0$，定义对数函数 $\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. 依此定义试证：

(1)$\ln\frac{1}{x} = -\ln x\ (x>0)$；

(2)$\ln(xy) = \ln x + \ln y\ (x>0, y>0)$.

3.95. 计算 $I_n = \int_{-1}^1 (x^2-1)^n\mathrm{d}x$.

3.96. 计算$\int_0^1 x^x\mathrm{d}x$.

3.97. (1) 若 $f(x) = \int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，试证：$f'(0)=0$；

(2) 若 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，试证：

$$f(x)\equiv 0 \quad (-\infty < x < +\infty).$$

3.98. 计算$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$($k$ 为常数).

3.99. 已知 $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$，求积分$\int_{-3}^2 I(\alpha)\mathrm{d}\alpha$.

3.100. 求不定积分$\int \frac{x}{x^4+2x^2+5}\mathrm{d}x$.

3.101. 求不定积分$\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$.

3.102. 设函数 $f(x)$ 连续，且$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan x^2$. 已知 $f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

3.103. 设 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f''(x)>0$. 又设 $u(t)$ 在区间$[0,a]$(或$[a,0]$) 上连续. 证明：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t \geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

3.104. (1) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数. 证明：$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可以表示为一个以 T 为周期的函数 $\varphi(x)$ 与 kx 之和，并求出此常数 k；

(2) 求(1) 中的$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$；

(3) 以$[x]$表示不超过 x 的最大整数，$g(x) = x-[x]$，求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

3.105. 设在区间$[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$上，数 p,q 满足条件 $px+q \geqslant \ln x$，求使得积分 $I(p,q) =$

$\int_{e}^{e^2}(px+q-\ln x)\mathrm{d}x$ 取得最小值的 p,q 的值.

3.106. 设 $f(x)$ 在区间$[1,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_{1}^{n}f(x)\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；

(2) 证明：反常积分$\int_{1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 同敛散.

3.107. 设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及直线 $l:x+y=t(t\geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求$\int_{0}^{x}S(t)\mathrm{d}t(x\geqslant 0)$.

3.108. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续，$0<a<b$，且$\int_{A}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，其中常数 $A>0$. 证明：

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

3.109. 求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l，使该曲线与切线 l 及直线 $x=0,x=2$ 所围成图形的面积最小.

3.110. 设 D 是由曲线 $y=\sin x+1$ 与三条直线 $x=0,x=\pi,y=0$ 所围成的曲边梯形，求 D 绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体的体积.

3.111. 如图 1.3-1 所示，设曲线方程为 $y=x^2+\frac{1}{2}$，梯形 $OABC$ 的面积为 D，曲边梯形 $OABC$ 的面积为 D_1，点 A 的坐标为$(a,0)$，$a>0$，证明：$\frac{D}{D_1}<\frac{3}{2}$.

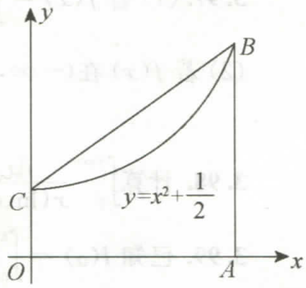

图 1.3-1

3.112. 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$ 上连续，在开区间$(0,1)$ 内大于零，并且满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1$，$y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2. 求函数 $y=f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

3.113. 设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间$[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

3.114. 设有一正椭圆柱体，其底面的长、短轴分别为 $2a,2b$，用过此柱体底面的短轴且与底面成 α 角 $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$的平面截此柱体，得一楔形体（如图 1.3-2），求此楔形体的体积 V.

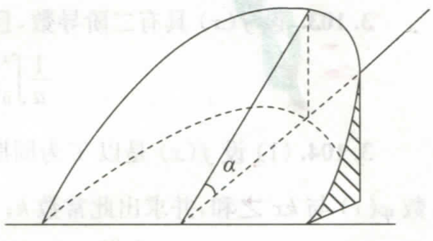

图 1.3-2

3.115. 计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 的一端弧的长度.

3.116. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长，其中 $a>0$ 是常数.

3.117. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1^{\alpha}+3^{\alpha}+\cdots+(2n+1)^{\alpha}]^{\beta+1}}{[2^{\beta}+4^{\beta}+\cdots+(2n)^{\beta}]^{\alpha+1}}\quad(\alpha,\beta\neq-1)$.

3.118. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,以 T 为周期,则

(1) $\displaystyle\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$($a$ 为任意实数);

(2) $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow\displaystyle\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$;

(3) $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$(即 $f(x)$ 的全体原函数)周期为 $T\Leftrightarrow\displaystyle\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

3.119. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

3.120. 计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^2)}$.

3.121. 求定积分的值 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$.

3.122. 设常数 $0<a<1$,求 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}$.

3.123. 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

3.124. 设 a,b 均为常数,$a>-2,a\neq0$,求 a,b 为何值时,使

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1-x^2)\mathrm{d}x.$$

3.125. 直线 $y=x$ 将椭圆 $x^2+3y^2=6y$ 分为两块,设小块面积为 A,大块面积为 B,求 $\dfrac{A}{B}$ 的值.

3.126. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{-nx}-(x^2+1)}$,求曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-\dfrac{x}{2}$ 所围成平面图形绕 Ox 轴所旋转成旋转体的体积.

3.127. 设 $g(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{xt+1}{xt+2}\right)^{x^3t}$,$f(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$.

(1) 证明:$y=f(x)$ 为奇函数,并求其曲线的水平渐近线;

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 与它所有水平渐近线及 Oy 轴围成图形的面积.

3.128. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明:至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x.$$

3.129. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且满足

$$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

3.130. 设函数 $f(x)$ 有连续导数,$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)f'(2a-t)\mathrm{d}t$,证明:

$$F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a).$$

3.131. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数,且 $f(0)=0$,证明:存在 $\xi\in[0,1]$,使得

$$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

3.132. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调增加，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

3.133. 设函数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

3.134. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0, f'(x)\geqslant 0, g'(x)\geqslant 0$. 证明：对任何 $a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1).$$

3.135. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，且 $\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x = 0$.

求证：存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$.

3.136. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

(1) 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$；

(2) 在 (a,b) 内至少存在一点 $\eta, \eta\neq\xi$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

3.137. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$，证明：存在一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

3.138. 设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]\,(a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明：在 $[-a,a]$ 上存在 η，使 $a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x$.

3.139. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)\cdot f(1)>0, f(1)+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，试证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=\xi f(\xi)$.

3.140. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x \quad (k>1).$$

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

3.141. 设 $a<b$，证明：不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

3.142. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b), \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

第 4 章 向量代数与空间解析几何

一、选择题(在目前的考研中,选择题是4分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

4.1. 直线 $L:\begin{cases} z=2y, \\ x=1 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面方程为 ( )

(A) $4x^2+4y^2+z^2=4$ (B) $4x^2+4y^2-z^2=4$

(C) $x^2+y^2+4z^2=4$ (D) $x^2+y^2-4z^2=4$

4.2. 已知曲面 $z=x^2+y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$,则点 P 的坐标是 ( )

(A) $(1,-1,2)$ (B) $(-1,1,2)$

(C) $(1,1,2)$ (D) $(-1,-1,2)$

4.3. 设平面方程为 $Ax+Cz+D=0$,其中 A,C,D 均不为零,则平面 ( )

(A) 平行于 x 轴 (B) 平行于 y 轴 (C) 经过 x 轴 (D) 经过 y 轴

4.4. 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 $A(4,0,5)$,$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{14}$,$\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}}$,$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}}$,$\cos\gamma=-\frac{2}{\sqrt{14}}$,则 B 的坐标为 ( )

(A) $(10,-2,1)$ (B) $(-10,-2,1)$ (C) $(10,2,1)$ (D) $(10,-2,-1)$

4.5. 已知等边三角形 $\triangle ABC$ 的边长为1,且 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ ( )

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

4.6. 过点 $P(2,0,3)$ 且与直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 垂直的平面的方程是 ( )

(A) $(x-2)-2(y-0)+4(z-3)=0$

(B) $3(x-2)+5(y-0)-2(z-3)=0$

(C) $-16(x-2)+14(y-0)+11(z-3)=0$

(D) $-16(x+2)+14(y-0)+11(z-3)=0$

4.7. 已知 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,则以 OA、OB 为邻边的平行四边形 $\square OACB$ 的对角线 OC 上的一个单位向量为 ( )

(A) $\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}$ (B) $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$

(C) $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right)\Big/|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ (D) $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right)\Big/\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right|$

4.8. 已知 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, 且 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{4}$, 则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ （　　）

(A) 1　　(B) $1+\sqrt{2}$　　(C) 2　　(D) $\sqrt{5}$

4.9. 曲线 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x^2+y^2=2az\,(a>0)$ 的交线是 （　　）

(A) 抛物线　　(B) 双曲线　　(C) 圆　　(D) 椭圆

4.10. 设直线 L 为 $\begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0, \end{cases}$ 平面 π 为 $4x-2y+z-2=0$, 则 （　　）

(A) L 平行于 π　　(B) L 在 π 上　　(C) L 垂直于 π　　(D) L 与 π 相交但不垂直

4.11. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 是 （　　）

(A) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充要条件　　(B) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件

(C) $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 的充要条件　　(D) $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 的必要但不充分条件

4.12. 若非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足关系式 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$, 则必有 （　　）

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　(B) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　　(D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

4.13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$, 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，则 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 角平分线上的一个单位向量为 （　　）

(A) $\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}$　　(B) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$

(C) $\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right)\Big/|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$　　(D) $\dfrac{|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{\big|\,|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\,\big|}$

4.14. 两条平行直线 $L_1:\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$, $L_2:\dfrac{x-x_2}{l}=\dfrac{y-y_2}{m}=\dfrac{z-z_2}{n}$ 之间的距离为 （　　）

(A) $\sqrt{(x_1-x^2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$　　(B) $\sqrt{\dfrac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}{l^2+m^2+n^2}}$

(C) $\dfrac{|(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)\cdot(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$　　(D) $\dfrac{|(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)\times(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

4.15. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，x 是非零实数，则有 （　　）

(A) $|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|+|x||\boldsymbol{b}|$　　(B) $|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|-|x||\boldsymbol{b}|$

(C) $|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|$　　(D) $|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|$

4.16. 已知 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$, 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 互相垂直，则向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ 的模为 （　　）

(A) $|\boldsymbol{r}|=x|\boldsymbol{a}|+y|\boldsymbol{b}|+z|\boldsymbol{c}|$　　(B) $|\boldsymbol{r}|=|x\boldsymbol{a}|+|y\boldsymbol{b}|+|z\boldsymbol{c}|$

(C) $|\boldsymbol{r}|=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$　　(D) $|\boldsymbol{r}|=(x^2|\boldsymbol{a}|^2+y^2|\boldsymbol{b}|^2+z^2|\boldsymbol{c}|^2)^{\frac{1}{2}}$

4.17. 设 $\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行. 若这些向量起点相同，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的终点在同一直线上，则必有 （　　）

(A) $\alpha\beta\geqslant 0$　　(B) $\alpha\beta\leqslant 0$　　(C) $\alpha+\beta=1$　　(D) $\alpha^2+\beta^2=1$

4.18. 直线 $L:\begin{cases} x+y-z-2=0, \\ -x+3y-z-2=0 \end{cases}$ 关于坐标面 $z=0$ 的对称直线的方程为 （　　）

(A) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$　　(B) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$

(C) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$　　(D) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$

4.19. 两张平行平面 $\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ 与 $\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$ 之间的距离为 (   )

(A) $|D_1-D_2|$　(B) $|D_1+D_2|$　(C) $\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$　(D) $\dfrac{|D_1+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

4.20. 设有直线 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为 (   )

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) $\dfrac{\pi}{6}$　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

4.21. 曲面 $x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $x+z=a$ 的交线在 yOz 平面上的投影方程是 (   )

(A) $\begin{cases} (a-z)^2+4y^2+z^2=4, \\ x=0 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} x^2+4y^2+(a-x)^2=4, \\ z=0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x^2+4y^2+(a-x)^2=4, \\ x=0 \end{cases}$　(D) $(a-z)^2+4y^2+z^2=4$

4.22. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线 (   )

(A) 只有1条　(B) 只有2条　(C) 至少有3条　(D) 不存在

4.23. 直线 $L_1: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} x=1+t, \\ y=-2+t, \\ z=2+2t \end{cases}$ 之间的关系是 (   )

(A) 垂直　(B) 平行　(C) 相交但不垂直　(D) 为异面直线

4.24. 两条平行直线 $L_1: \begin{cases} x=1+t, \\ y=-1+2t, \\ z=t, \end{cases}$ $L_2: \begin{cases} x=2+t, \\ y=-1+2t, \\ z=1+t \end{cases}$ 之间的距离为 (   )

(A) $\dfrac{2}{3}$　(B) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$　(C) 1　(D) 2

4.25. 曲线 $S: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的切线方程为 (   )

(A) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$　(B) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{3}$

(C) $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$　(D) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-2}$

4.26. 曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=4$ 上任一点的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和为 (   )

(A) 48　(B) 64　(C) 36　(D) 16

4.27. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为非零向量，则与 $\boldsymbol{a}$ 不垂直的向量是 (   )

(A) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$　(B) $\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}$　(C) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　(D) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$

4.28. 与直线 $L_1: \begin{cases} x=1, \\ y=-2+t, \\ z=1+t \end{cases}$ 及直线 $L_2: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面 π 的方程为 (   )

(A) $x+y+z=0$　(B) $x-y+z=0$

(C) $x+y-z=0$　(D) $x-y+z+2=0$

4.29. 直线 $L:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与平面 $\pi:x-y+2z+4=0$ 的夹角为 ( )

(A)π (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{6}$ (D) $\dfrac{\pi}{2}$

4.30. 曲线 $L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1,\\ x-2z+3=0\end{cases}$ 在平面 xOy 上的投影柱面方程是 ( )

(A)$x^2+20y^2-24x-116=0$ (B)$4y^2+4z^2-12z-7=0$

(C)$\begin{cases}x^2+20y^2-24x-116=0,\\ z=0\end{cases}$ (D)$\begin{cases}4y^2+4z^2-12z-7=0,\\ x=0\end{cases}$

4.31. 曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上任意一点处的切平面在三个坐标轴上的截距之和为 ( )

(A)a (B) $\sqrt{a}$ (C)0 (D)$2\sqrt{a}$

二、填空题(在目前的考研中,填空题是 4 分 / 题,请将答案填在题中的横线上.)

4.32. 设 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,其中 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$,则 $k=$________.

4.33. 点$(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为________.

4.34. 点$(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-13=0$ 的距离是________.

4.35. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=2,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$,则 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{u}|=$________.

4.36. 过三点 $A(1,1,-1),B(-2,-2,2)$ 和 $C(1,-1,2)$ 的平面方程是________.

4.37. 三平面 $x+3y+z=1,2x-y-z=0,-x+2y+2z=3$ 的交点是________.

4.38. xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=x-2$ 绕 x 轴旋转而成的旋转抛物面的方程是________.

4.39. 设 $\boldsymbol{a}=(3,-5,8),\boldsymbol{b}=(-1,1,z),|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $z=$________.

4.40. 向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影为________.

4.41. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2),\boldsymbol{b}=(1,1,z)$,则使 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 达到最小的 z 为________.

4.42. 已知直线 $l_1:\begin{cases}x+y=0,\\ 2y+z+1=0\end{cases}$ 和 $l_2:\begin{cases}x=1-t,\\ y=-1+2t,\\ z=1+t,\end{cases}$ 则过直线 l_1 和 l_2 的平面是________.

4.43. 设 $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}=k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,其中 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 若以 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为邻边的平行四边形面积为 6,则 k 的值为________.

4.44. 若直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $L_2:x+1=y-1=z$ 相交,则 $\lambda=$________.

4.45. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量,且 $|\boldsymbol{b}|=1$ 及$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{4}$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=$________.

4.46. 已知$\triangle ABC$ 的顶点坐标为$A(1,2,1),B(1,0,1),C(0,1,z)$,则当 $z=$________时,$\triangle ABC$ 的面积最小.

4.47. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的模 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$,且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$________.

4.48. 过直线$\begin{cases}x=1+t,\\ y=1+2t,\\ z=1+3t\end{cases}$且和点$(2,2,2)$ 的距离为$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的平面方程是________.

4.49. 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点$(1,2,0)$ 处的切平面方程为________.

4.50. 两平面 $x-2y+2z-4=0$ 与 $2x-y-2z-5=0$ 的交角 $\varphi=$ ________，它们的二面角的平分面方程为________.

4.51. 经过点 $M_0(1,-1,1)$ 并且与两直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ 都相交的直线 L 的方程为________.

4.52. 经过点 $A(1,0,0)$ 与点 $B(0,1,1)$ 的直线绕 z 轴旋转一周生成的曲面方程是________.

4.53. 函数 $u=e^z-z+xy$ 在点 $(2,1,0)$ 处沿曲面 $e^z-z+xy=3$ 的法线方向的方向导数为________.

4.54. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-4,2)$，轴 u 的正向与三个坐标轴的正向构成相等的锐角，则

(1) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在轴 u 上的投影为________；(2) 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与轴 u 正向的夹角 $(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{u}})=$ ________.

4.55. 点 $(1,2,3)$ 到直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的距离为________.

三、解答题(在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.)

4.56. 求直线 $L:\begin{cases}2y+3z-5=0,\\ x-2y-z+7=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:x-y+3z+8=0$ 的投影方程.

4.57. 求直线 $L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$ 绕直线 $L_1:\begin{cases}x=2,\\ y=3\end{cases}$ 旋转一周所产生的曲面方程.

4.58. 设曲线 L 是抛物柱面 $x=2y^2$ 与平面 $x+z=1$ 的交线.

(1) 求曲线 L 在各个坐标平面上的投影曲线；

(2) 求曲线 L 分别绕各个坐标轴旋转一周的曲面方程.

4.59. 设有曲面 $S:2x^2+4y^2+z^2=4$ 与平面 $\pi:2x+2y+z+5=0$，试求

(1) 曲面 S 上的点及其上的切平面与法线方程，使该切平面与平面 π 平行；

(2) 曲面 S 与平面 π 的最短距离.

4.60. 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{1}{z}(6x^2+8y^2)^{\frac{1}{2}}$ 在此处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

4.61. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，求与向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 均垂直的单位向量.

4.62. 求到平面 $2x-3y+6z-4=0$ 和平面 $12x-15y+16z-1=0$ 距离相等的点的轨迹方程.

4.63. 确定下列直线与平面的垂直、平行和直线在平面上的位置关系：

(1) $L:\begin{cases}x-y+2z-3=0,\\ x=y,\end{cases}$ $\quad\pi:x+y-6=0$；

(2) $L:\begin{cases}x+2y-3z-4=0,\\ -2x+6y-3=0,\end{cases}$ $\quad\pi:2x-y-3z+7=0$；

(3) $L:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+2}{2}$，$\quad\pi:2x-y+z+1=0$.

4.64. 求过两点 $A(0,1,0)$，$B(-1,2,1)$ 且与直线 $x=-2+t,y=1-4t,z=2+3t$ 平行的平面方程.

4.65. 求下列曲面的方程：

(1) 以曲线 $\begin{cases}1-z=y^2,\\ x=0\end{cases}$ 为母线，绕 z 轴旋转一周而生成的曲面；

(2) 以曲线 $\begin{cases}x^2-z^2=3,\\ y=0\end{cases}$ 为母线，绕 x 轴旋转一周而生成的曲面和绕 z 轴旋转一周生成的曲面；

(3) 以$\begin{cases} x^2-2y+xy-x-2=0, \\ z=0 \end{cases}$为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程；

(4) 以$\begin{cases} z^2+y^2=4, \\ x=1 \end{cases}$为准线，顶点在原点的锥面方程.

4.66. 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $M(1,1)$ 沿与 x 轴的正向组成 α 角的方向 l 上的方向导数，在怎样的方向上此导数有：(1) 最大的值；(2) 最小的值；(3) 等于 0.

4.67. 设有方程

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1, \quad ①$$

试证：$|\mathbf{grad}\, u|^2=2\mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}\, u$，其中 $\mathbf{A}=(x,y,z)$.

4.68. 记曲面 $z=x^2+y^2-2x-y$ 在区域 $D:x\geqslant 0,y\geqslant 0,2x+y\leqslant 4$ 上的最低点 P 处的切平面为 π，曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点 $Q(1,1,-2)$ 处的切线为 l，求点 P 到直线 l 在平面 π 上的投影 l' 的距离 d.

4.69. 设在平面区域 D 上数量场 $u(x,y)=50-x^2-4y^2$，试问在点 $P_0(1,-2)\in D$ 处沿什么方向时 $u(x,y)$ 升高最快，并求一条路径，使从点 $P_0(1,-2)$ 处出发沿这条路径 $u(x,y)$ 升高最快.

第 5 章　多元函数微分学

一、选择题（在目前的考研中，选择题是 4 分 / 题，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选选项前的字母填在题后的括号里.）

5.1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处　（　　）

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可微　　(D) 可微

5.2. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|^m+|y|^n}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 其中 m,n 为正整数，函数在 $(0,0)$ 处不连续，但偏导数存在，则 m,n 需满足　（　　）

(A) $m\geqslant 2,n<2$　　(B) $m\geqslant 2,n\geqslant 2$　　(C) $m<2,n\geqslant 2$　　(D) $m<2,n<2$

5.3. 函数 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 点　（　　）

(A) 连续，但偏导数不存在　　(B) 偏导数存在，但不可微

(C) 可微　　(D) 偏导数存在且连续

5.4. 函数 $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极小值点是　（　　）

(A) $(0,0)$　　(B) $(2,2)$　　(C) $(0,2)$　　(D) $(2,0)$

5.5. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}0, & xy=0,\\ x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq 0,\end{cases}$ 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$　（　　）

(A) 等于 1　　(B) 等于 2　　(C) 等于 0　　(D) 不存在

5.6. $z'_x(x_0,y_0)=0$ 和 $z'_y(x_0,y_0)=0$ 是函数 $z=z(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处取得极值的　（　　）

(A) 必要条件但非充分条件　　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非必要也非充分条件

5.7. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{y}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 不连续的点集为　（　　）

(A) y 轴上的所有点　　(B) $x=0,y\geqslant 0$ 的点集

(C) 空集　　(D) $x=0,y\leqslant 0$ 的点集

5.8. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3x-y}{x+y}$　（　　）

(A) 等于 0　　(B) 不存在

(C) 等于 $\dfrac{1}{2}$　　(D) 存在，但不等于 $\dfrac{1}{2}$ 也不等于 0

5.9. 设 $u=f(r)$，而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f(r)$ 具有二阶连续导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$（　　）

(A) $f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)$　　(B) $f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)$

(C) $\dfrac{1}{r^2}f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)$　　(D) $\dfrac{1}{r^2}f''(r)+\dfrac{2}{r}f'(r)$

5.10. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

①$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处连续；

②$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续；

③$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处可微；

④$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有（　　）

(A) ②⇒③⇒①　　(B) ③⇒②⇒①　　(C) ③⇒④⇒①　　(D) ③⇒①⇒④

5.11. 设函数 $u=u(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 及 $u(x,2x)=x$，$u_1'(x,2x)=x^2$，u 有二阶连续偏导数，则 $u_{11}''(x,2x)=$（　　）

(A) $\dfrac{4}{3}x$　　(B) $-\dfrac{4}{3}x$　　(C) $\dfrac{3}{4}x$　　(D) $-\dfrac{3}{4}x$

5.12. 利用变量替换 $u=x,v=\dfrac{y}{x}$，可将方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 化成新方程（　　）

(A) $u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$　　(B) $v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　(C) $u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$　　(D) $v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

5.13. 若函数 $u=xyf\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$，其中 f 是可微函数，且 $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=G(x,y)u$，则函数 $G(x,y)=$（　　）

(A) $x+y$　　(B) $x-y$　　(C) x^2-y^2　　(D) $(x+y)^2$

5.14. 已知 $\mathrm{d}u(x,y)=[axy^3+\cos(x+2y)]\mathrm{d}x+[3x^2y^2+b\cos(x+2y)]\mathrm{d}y$，则（　　）

(A) $a=2,b=-2$　　(B) $a=3,b=2$　　(C) $a=2,b=2$　　(D) $a=-2,b=2$

5.15. 设 $u(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则 $u(x,y)$ 的（　　）

(A) 最大值点和最小值点必定都在 D 的内部

(B) 最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上

(C) 最大值点在 D 的内部，最小值点在 D 的边界上

(D) 最小值点在 D 的内部，最大值点在 D 的边界上

5.16. 函数 $f(x,y)=e^{xy}$ 在点$(0,1)$处带皮亚诺余项的二阶泰勒公式是（　　）

(A) $1+x+\dfrac{1}{2!}[x^2+2x(y-1)]$

(B) $1+x+\dfrac{1}{2!}[x^2+2x(y-1)]+o(x^2+(y-1)^2)$

(C) $1+x+\dfrac{1}{2!}(x^2+2xy)+o(x^2+y^2)$

(D) $1+(x-1)+\dfrac{1}{2!}[(x-1)^2+2(x-1)y]+o((x-1)^2+y^2)$

022306154353

5.17. 函数 $f(x,y)=x^4-3x^2y^2+x-2$ 在点(1,1)处的二阶泰勒多项式是 ( )

(A) $-3+(4x^3-6xy^2+1)x-6x^2\cdot y\cdot y+\frac{1}{2!}[(12x^2-6y^2)x^2-24xy\cdot xy-6x^2\cdot y^2]$

(B) $-3+(4x^2-6xy^2+1)(x-1)-6x^2y(y-1)+\frac{1}{2!}[(12x^2-6y^2)(x-1)^2-24xy(x-1)\cdot(y-1)-6x^2(y-1)^2]$

(C) $-3-(x-1)-6(y-1)+\frac{1}{2!}[6(x-1)^2-24(x-1)(y-1)-6(y-1)^2]$

(D) $-3-x-6y+\frac{1}{2!}(6x^2-24xy-6y^2)$

5.18. 设函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$，则函数 $z=f(x,y)$ ( )

(A) 无极值点 (B) 有有限个极值点

(C) 有无穷多个极大值点 (D) 有无穷多个极小值点

二、填空题(在目前的考研中，填空题是4分/题，请将答案填在题中的横线上.)

5.19. 函数 $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$ 的连续区域是________.

5.20. 设 $u=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=$________.

5.21. 若函数 $z=2x^2+2y^2+3xy+ax+by+c$ 在点$(-2,3)$处取得极小值-3，则常数 a、b、c 之积 $abc=$________.

5.22. 曲面 $z=e^{yz}+x\sin(x+y)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},0,1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的法线方程为________.

5.23. 设 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则在极坐标 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 下，$\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=$________.

5.24. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{xy}\sin(x^2y), & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f'_x(0,1)=$________.

5.25. 设 f 可微，则由方程 $f(cx-az,cy-bz)=0$ 确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足 $az'_x+bz'_y=$____.

5.26. 设 $f(z)$，$g(y)$ 都是可微函数，则曲线 $\begin{cases}z=g(y),\\ x=f(z)\end{cases}$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法平面方程为________.

5.27. 函数 $u=\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$ 的定义域为________.

5.28. 设 $z=e^{\sin xy}$，则 $dz=$________.

5.29. 设函数 $f(x,y)=e^x\ln(1+y)$ 的二阶麦克劳林多项式为 $y+\dfrac{1}{2}(2xy-y^2)$，则其拉格朗日型余项 $R_2=$________.

三、解答题(在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均10分/题.)

5.30. 设 $f(x)$ 可导，$F(x,y)=\dfrac{\int_{-y}^{y}f(x+t)dt}{2y}$，$-\infty<x<+\infty$，$y>0$.

(1) 求 $\lim\limits_{y\to 0^+}F(x,y)$；(2) $\forall y>0$，求 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$；(3) 求 $\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{\partial F}{\partial x}$.

5.31. 试分析下列各个结论是函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微的充分条件还是必要条件.

(1) 二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在；

(2) 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有界；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$；

(4) $F(x)=f(x,y_0)$ 在点 x_0 处可微，$G(y)=f(x_0,y)$ 在点 y_0 处可微；

(5) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处存在切平面；

(6) $\lim\limits_{x\to x_0}[f'_x(x,y_0)-f'_x(x_0,y_0)]=0$，$\lim\limits_{y\to y_0}[f'_y(x_0,y)-f'_y(x_0,y_0)]=0$；

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$.

5.32. 设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-a-bx-cy}{\ln(1+x^2+y^2)}=1,$$

其中 a,b,c 为常数.

(1) 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微，若可微则求出 $\mathrm{d}f(x,y)\big|_{(0,0)}$；

(2) 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否取极值，说明理由.

5.33. 设函数 $f(x,y)$ 可微，又 $f(0,0)=0$，$f'_x(0,0)=a$，$f'_y(0,0)=b$，且 $\varphi(t)=f[t,f(t,t^2)]$，求 $\varphi'(0)$.

5.34. 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中 f 及 φ 二阶可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5.35. 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f,g 均可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

5.36. 设 $u=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中函数 f,g 具有二阶连续偏导数，求 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

5.37. 设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\,\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u)$，$\varphi(u)$ 可微，$P(t)$，$\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$. 求 $P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5.38. 设 $f(x,y)=\int_0^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

5.39. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 和 $\mathrm{e}^z-xz=0$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

5.40. 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；(2) 若 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

5.41. 已知函数 $u=u(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0$. 试选择参数 a,b，利用变换 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 将原方程变形，使新方程中不出现一阶偏导数项.

5.42. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区

域 D 上的极值、最大值与最小值.

5.43. 某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R(万元) 与电台广告费 x_1(万元) 及报纸广告费用 x_2(万元) 之间的关系有如下经验公式：

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

(1) 在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

(2) 若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

5.44. 求 $f(x,y) = x + xy - x^2 - y^2$ 在闭区域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ 上的最大值和最小值.

5.45. 设 $f(x,y) = kx^2 + 2kxy + y^2$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值，求 k 的取值范围.

5.46. 设 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数. 证明：由方程 $f(x,y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 在 $x = a$ 处取得极值 $b = \varphi(a)$ 的必要条件是

$$f(a,b) = 0, f'_x(a,b) = 0, f'_y(a,b) \neq 0.$$

且当 $r(a,b) > 0$ 时，$b = \varphi(a)$ 是极大值；当 $r(a,b) < 0$ 时，$b = \varphi(a)$ 是极小值，其中

$$r(a,b) = \frac{f''_{xx}(a,b)}{f'_y(a,b)}.$$

5.47. 求函数 $z = x^2 + y^2 + 2x + y$ 在区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上的最大值与最小值.

5.48. 求内接于椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的长方体的最大体积.

5.49. 在第一象限的椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上求一点，使过该点的法线与原点的距离最大.

5.50. 设函数 $f(x,y)$ 及它的二阶偏导数在全平面连续，且 $f(0,0) = 0$，$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant 2|x-y|$，$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant 2|x-y|$. 求证：$|f(5,4)| \leqslant 1$.

5.51. 设

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{当}(x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{当}(x,y) = (0,0); \end{cases}$

(2) $g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{当}(x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{当}(x,y) = (0,0). \end{cases}$

讨论它们在点 $(0,0)$ 处的

① 偏导数的存在性；

② 函数的连续性；

③ 方向导数的存在性；

④ 函数的可微性.

5.52. 设 A,B,C 为常数，$B^2 - AC > 0$，$A \neq 0$. $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数. 证明：必存在非奇异线性变换

$$\xi = \lambda_1 x + y, \eta = \lambda_2 x + y \ (\lambda_1, \lambda_2 \text{ 为常数}),$$

将方程 $A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 化成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

5.53. 求经过直线 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$ 且与椭球面 $S:x^2+2y^2+3z^2=21$ 相切的切平面方程.

5.54. 设 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 的某邻域 U 内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=a$，常数 $a>\dfrac{1}{2}$. 试讨论 $f(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值？是极大值还是极小值？

5.55. 设 $h(t)$ 为三阶可导函数，$u=h(xyz)$，$h(1)=f''_{xy}(0,0)$，$h'(1)=f''_{yx}(0,0)$，且满足 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2h'''(xyz)$，求 u 的表达式，其中

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

5.56. 求证：$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 在约束条件 $g(x,y)=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ 下有最大值和最小值，且它们是方程 $k^2-(Aa^2+Cb^2)k+(AC-B^2)a^2b^2=0$ 的根.

第 6 章 多元函数积分学

一、选择题(在目前的考研中,选择题是 4 分 / 题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

6.1. 设平面区域 D 由曲线 $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$, $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $y=1$ 围成,则 $\iint\limits_D(xy^3-1)\mathrm{d}\sigma=$ ( )

(A)2　　(B)-2　　(C)π　　(D)$-\pi$

6.2. 已知 $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$,则 $I=$ ( )

(A)$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B)$\int_0^2\mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C)$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D)$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^1f(x,y)\mathrm{d}x$

6.3. Ω 由 $x=0,y=0,z=0,x+2y+z=1$ 所围成,则三重积分 $\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}v$ 等于 ( )

(A)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}x\mathrm{d}z$　　(B)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}x\mathrm{d}z$

(C)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1x\mathrm{d}z$　　(D)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-y}{2}}\mathrm{d}z\int_0^{1-x-2y}x\mathrm{d}y$

6.4. Ω 是由 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=a(a>0)$ 所围成的区域,则三重积分 $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v$ 在柱面坐标系下累次积分的形式为 ( )

(A)$\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_r^a r^2\mathrm{d}z$　　(B)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_0^a r^2\mathrm{d}z$

(C)$\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_0^a r^2\mathrm{d}z$　　(D)$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_r^a r^2\mathrm{d}z$

6.5. 设平面区域 D 由 $x=0,y=0,x+y=\dfrac{1}{4},x+y=1$ 围成,若 $I_1=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $I_3=\iint\limits_D[\sin(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则 I_1,I_2,I_3 的大小顺序为 ( )

(A)$I_1<I_2<I_3$　　(B)$I_3<I_2<I_1$　　(C)$I_1<I_3<I_2$　　(D)$I_3<I_1<I_2$

6.6. 球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所围成立体体积等于 ( )

(A)$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\mathrm{d}r$　　(B)$8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\sqrt{4a^2-r^2}\mathrm{d}r$

(C)$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\sqrt{4a^2-r^2}\mathrm{d}r$　　(D)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\sqrt{4a^2-r^2}\mathrm{d}r$

6.7. 设 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, z \geqslant 0$；$\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$，且 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$. 则有( )

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$ (B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$ (D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$

6.8. 设 $\Omega: z \geqslant \sqrt{3(x^2+y^2)}, x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}v$ 等于 ( )

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$ (B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$ (D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$

6.9. 两个半径为 R 的直交圆柱体所围成立体的表面积 S 等于 ( )

(A) $4\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$ (B) $8\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$

(C) $4\int_0^R\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$ (D) $16\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y$

6.10. 设 Ω 为 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$，则三重积分 $I = \iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$ 等于 ( )

(A) 0 (B) π (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) 2π

6.11. 设 m 和 n 为正整数，$a > 0$，且为常数，则下列说法不正确的是 ( )

(A) 当 m 为偶数，n 为奇数时，$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 一定为 0

(B) 当 m 为奇数，n 为偶数时，$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 一定为 0

(C) 当 m 为奇数，n 为奇数时，$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 一定为 0

(D) 当 m 为偶数，n 为偶数时，$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 一定为 0

6.12. $a = \iint\limits_{D}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma, b = \iint\limits_{D}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma, c = \iint\limits_{D}\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$，则 ( )

(A) $c > b > a$ (B) $a > b > c$ (C) $b > a > c$ (D) $c > a > b$

6.13. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标系中的累次积分为 ( )

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ (B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ (D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

6.14. 设 D 由直线 $x=0,y=0,x+y=1$ 围成,已知 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$,则 $\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

(A) 2　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

6.15. 曲线积分 $\oint_C (x^2+y^2)\mathrm{d}s$,其中 C 是圆心在原点,半径为 a 的圆周,则积分值为 ( )

(A) $2\pi a^2$　　(B) πa^3　　(C) $2\pi a^3$　　(D) $4\pi a^3$

6.16. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$,$\Sigma_1$ 为 Σ 在第一卦限的部分,则有 ( )

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S$　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} y\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} z\mathrm{d}S$　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}S$

6.17. 设 $L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,则曲线积分 $\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ ( )

(A) 与 L 的取向无关,与 a,b 的值有关　　(B) 与 L 的取向无关,与 a,b 的值无关

(C) 与 L 的取向有关,与 a,b 的值有关　　(D) 与 L 的取向有关,与 a,b 的值无关

6.18. 设 Σ 是 yOz 平面上的圆域 $y^2+z^2\leqslant 1$,则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$ 为 ( )

(A) 0　　(B) π　　(C) $\frac{1}{4}\pi$　　(D) $\frac{1}{2}\pi$

6.19. 设 Σ 为 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于 ( )

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+1-x-y)\mathrm{d}y$　　(B) $-\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+1-x-y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^1 (x^2+z)\mathrm{d}y$　　(D) $-\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^2+z)\mathrm{d}y$

6.20. 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内有一阶连续偏导数,L 为 D 内曲线,则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关的充要条件为 ( )

(A) $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某一函数的全微分

(B) $\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$,其中 $C:x^2+y^2=1$ 在 D 内

(C) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

(D) $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

6.21. 设 C 为从 $A(0,0)$ 到 $B(4,3)$ 的直线段,则 $\int_C (x-y)\mathrm{d}s$ 为 ( )

(A) $\int_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^3\left(\frac{4}{3}y-y\right)\mathrm{d}y$　　(D) $\int_0^4\left(\frac{4}{3}y-y\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\mathrm{d}y$

6.22. 设 Σ 是部分锥面：$x^2+y^2=z^2$，$0\leqslant z\leqslant 1$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$ 等于 （　　）

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$　　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$　　(C) $\sqrt{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$　　(D) $\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$

6.23. 曲线积分 $I=\int_{\widehat{AB}}(2x\cos y+y\sin x)\mathrm{d}x-(x^2\sin y+\cos x)\mathrm{d}y$，其中曲线 $\widehat{AB}$ 为位于第一象限中的圆弧 $x^2+y^2=1$，$A(1,0)$，$B(0,1)$，则 I 为 （　　）

(A) 0　　(B) -1　　(C) -2　　(D) 2

6.24. 设曲线 Γ 为 $x^2+y^2+z^2=1$，$z=z_0(|z_0|<1)$，由 z 轴正向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\int_{\Gamma}(x^2+yz)\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}y+(z^2+xy)\mathrm{d}z$ 的值为 （　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) $\frac{1}{2}$

6.25. 设 Σ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1$ 割下的有限部分，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}|yz|\mathrm{d}S$ 的值为 （　　）

(A) $-\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.26. 下列命题中不正确的是 （　　）

(A) 设 $f(u)$ 有连续导数，则 $\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$ 在全平面内与路径无关

(B) 设 $f(u)$ 连续，则 $\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$ 在全平面内与路径无关

(C) 设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在区域 D 内有连续的一阶偏导数，又 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，则 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在区域 D 内与路径无关

(D) $\int_L\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid(x,y)\neq(0,0)\}$ 上与路径有关

6.27. 设曲线 L 是区域 D 的正向边界，那么 D 的面积为 （　　）

(A) $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$　　(B) $\oint_L x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$　　(C) $\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$　　(D) $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$

6.28. 设力 $\boldsymbol{f}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 作用在一质点上，该质点从点 $M_1(1,1,1)$ 沿直线移动到点 $M_2(2,2,2)$，则此力所做的功为 （　　）

(A) 2　　(B) -1　　(C) 3　　(D) 4

6.29. 设曲线积分 $\int_L[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于 （　　）

(A) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x)$　　(B) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$　　(C) $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-1$　　(D) $1-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$

6.30. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，下面 4 个结论：

$$\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0;\quad \oiint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0;\quad \oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0;\quad \oiint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

其中正确的个数为 （　　）

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

6.31. 设 Σ 为球面 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$，则第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+3y+z)\mathrm{d}S=$ （　　）

(A) 4π　　(B) 2π　　(C) π　　(D) 0

6.32. 设 L 是摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t-\pi,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 的一段，则 $\int_L\dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=$ （　　）

(A) $-\pi$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) -2π

二、填空题(在目前的考研中，填空题是 4 分 / 题，请将答案填在题中的横线上.)

6.33. 若 $f(x,y)$ 为关于 x 的奇函数，且积分区域 D 关于 y 轴对称，则当 $f(x,y)$ 在 D 上连续时，必有 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

6.34. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $I=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{\pi t^2}\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$ ________，其中 $D:x^2+y^2\leqslant t^2$.

6.35. 由曲线 $y=x^2,y=x+2$ 所围成的平面薄片，其上各点处的面密度 $\mu=1+x^2$，则此薄片的质量 $M=$ ________.

6.36. 设 Ω 为曲线 $z=1-x^2-y^2,z=0$ 所围的立体，如果将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 化为先对 z 再对 y 最后对 x 积分，则 $I=$ ________.

6.37. 设 $f(x)$ 为连续函数，a 与 m 是常数且 $a>0$，将二次积分 $I=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x$ 化为定积分，则 $I=$ ________.

6.38. 设 $f(u)$ 为连续函数，D 是由 $y=1,x^2-y^2=1$ 及 $y=0$ 所围成的平面闭域，则 $I=\iint\limits_{D}xf(y^2)\mathrm{d}\sigma=$ ________.

6.39. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 的外侧，则 $\oiint\limits_{\Sigma}xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=$ ________.

6.40. 已知曲线积分 $\int_L[\mathrm{e}^x\cos y+yf(x)]\mathrm{d}x+(x^3-\mathrm{e}^x\sin y)\mathrm{d}y$ 与路径无关且 $f(x)$ 有连续的导数，则 $f(x)=$ ________.

6.41. 设 C 为闭域 D 的正向边界闭曲线，则 $\oint_C(\mathrm{e}^{x^2}-y)\mathrm{d}x+(x+\sin y^2)\mathrm{d}y$ 可通过 A (A 为 D 的面积) 表示为________.

6.42. 向量场 $\boldsymbol{A}(z,3x,2y)$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$ ________.

6.43. 空间曲线 $x=3t,y=3t^2,z=2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$ 的弧长为________.

6.44. 已知 $\boldsymbol{F}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$，则在点 $(1,0,-1)$ 处的 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ 为________.

6.45. 设 Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限部分的下侧，则 $I=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成对面积的曲面积分为 $I=$ ________.

6.46. 设光滑曲面 Σ 所围闭域 Ω 上，$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，且 Σ 为

Ω 的外侧边界曲面，由高斯公式可知$\oiint\limits_{\Sigma}\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值为________.

6.47. 设 $u=x^2+3y+yz$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=$ ________.

6.48. 设曲线 $\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则$\int_{\Gamma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$________.

6.49. 曲面积分$\oiint\limits_{S}z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

6.50. 设一个矢量场$\mathbf{A}(x,y,z)$，它在某点的矢量大小与该点到原点的距离平方成正比（比例常数为 k），方向指向原点，则 $\mathrm{div}\,\mathbf{A}=$ ________.

6.51. 设由平面图形 $a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 x 轴旋转所成旋转体 Ω 的密度为 1，则该旋转体 Ω 对 x 轴的转动惯量为________.

6.52. 设 L 为双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的全弧段，常数 $a>0$，则$\int_L|y|\,\mathrm{d}s=$________.

6.53. 设 $f(u)$ 具有连续的一阶导数，L_{AB} 为以$\overline{AB}$ 为直径的左上半个圆弧，从 A 到 B，其中点 $A(1,1)$，点 $B(3,3)$. 则第二型曲线积分$\int_{L_{AB}}\left[\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{x}{y}\right)+2y\right]\mathrm{d}x-\left[\dfrac{1}{y}f\left(\dfrac{x}{y}\right)+x\right]\mathrm{d}y=$ ________.

6.54. 设 S 为椭球面$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$，已知 S 的面积为 A，则第一型曲面积分$\iint\limits_{S}[(2x+3y)^2+(6z-1)^2]\mathrm{d}S=$________.

6.55. 设封闭曲面 $S: x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$，法向量向外，则$\oiint\limits_{S}\dfrac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=$ ________.

三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.）

6.56. 记平面区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，计算如下二重积分：

(1) $I_1=\iint\limits_{D}\dfrac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}\sigma$，其中 $f(t)$ 为定义在$(-\infty,+\infty)$上的连续正值函数，常数 $a>0, b>0$；

(2) $I_2=\iint\limits_{D}(\mathrm{e}^{\lambda x}-\mathrm{e}^{-\lambda y})\mathrm{d}\sigma$，常数 $\lambda>0$.

6.57. 设 $p(x)$ 在$[a,b]$上非负连续，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在$[a,b]$上连续且有相同的单调性，其中 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}$，比较

$$I_1=\iint\limits_{D}p(x)f(x)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ 与 } I_2=\iint\limits_{D}p(x)f(y)p(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的大小，并说明理由.

6.58. 设函数 $f(x,y)$ 连续，且

$$f(x,y)=x+\iint\limits_{D}yf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 D 由 $y=\dfrac{1}{x}, x=1, y=2$ 围成，求 $f(x,y)$.

6.59. (1) 计算$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；

(2) 当 $x \to 1^-$ 时,求与 $\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 等价的无穷大量.

6.60. 证明:$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 (xy)^{xy}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$.

6.61. 设 $F(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ 在 $D = [a,b] \times [c,d]$ 上连续,求

$$I = \iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

并证明:$I \leqslant 2(M-m)$,其中 M 和 m 分别是 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值.

6.62. (1) 设 $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$,若 f''_{xy} 与 f''_{yx} 在 D 上连续,证明:

$$\iint_D f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f''_{yx}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(2) 设 D 为 xOy 平面上的区域,若 f''_{xy} 与 f''_{yx} 都在 D 上连续,证明:f''_{xy} 与 f''_{yx} 在 D 上相等.

6.63. 一个半径为1,高为3的开口圆柱形水桶,在距底为1处有两个小孔(小孔的面积忽略不计),两小孔连线与水桶轴线相交,试问该水桶最多能装多少水?

6.64. 求下列曲面所围成的立体的体积:

(1) $z = 1 - x^2 - y^2, z = 0$;(2) $z = \dfrac{1}{4}(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 8x, z = 0$.

6.65. 求柱体 $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ 被 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所截得部分的体积.

6.66. 设平面薄片所占的区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成,它在 (x,y) 处的面密度 $\rho(x,y) = x^2 y$,求此薄片的重心.

6.67. 设平面区域 σ 由 σ_1 与 σ_2 组成,其中,$\sigma_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant a - x, 0 \leqslant x \leqslant a\}$,$\sigma_2 = \{(x,y) \mid a \leqslant x + y \leqslant b, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$,如图 1.6-1 所示,它的面密度

$$\mu(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & (x,y) \in \sigma_1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \in \sigma_2. \end{cases}$$

试求(1) 该薄片 σ 的质量 m;(2) 薄片 σ_1 关于 y 轴的转动惯量 J_1 与 σ_2 关于原点的转动惯量 J_0.

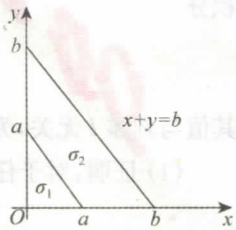

图 1.6-1

6.68. 变换下列二次积分的积分次序:

(1) $\int_{-6}^{2} \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;　　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^{1+y^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1+\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x \int_1^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(4) $\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

6.69. 求二重积分 $\iint_D \dfrac{y^2}{x^2}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由曲线 $y = \dfrac{1}{x}$,直线 $y = 2, y = x$ 所围成的平面区域.

6.70. 计算 $\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{e}^{\max\{b^2x^2, a^2y^2\}}\,\mathrm{d}y$,其中 $a, b > 0$.

6.71. 计算 $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$.

6.72. 计算$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dxdy$,其中$D$由$y=-x,x^2+y^2=4,y=\sqrt{2x-x^2}$所围成.

6.73. 计算$\int_0^e dy\int_1^2\frac{\ln x}{e^x}dx+\int_e^{e^2}dy\int_{\ln y}^2\frac{\ln x}{e^x}dx$.

6.74. 设$f(x,y)=\begin{cases}1-x-y, & x+y\leqslant 1,\\ 2, & x+y>1,\end{cases}$计算$\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$,其中$D$为正方形域$0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant 1$.

6.75. 设函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续且单调增,证明:

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

6.76. 设$f(x,y)$是$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$上的二阶连续可微函数,满足$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$,计算积分

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

6.77. 设D为xOy平面上由摆线$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t),0\leqslant t\leqslant 2\pi$,与$x$轴所围成的区域,求$D$的形心的坐标$(\overline{x},\overline{y})$.

6.78. 设$\Omega=\{(x,y,z)\mid z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{3}z,0\leqslant z\leqslant 4\}$,计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}z\,dv$.

6.79. 设$\varphi(y)$为连续函数.如果在围绕原点的任意一条逐段光滑的正向简单封闭曲线l上,曲线积分

$$\oint_l\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=k, \qquad ①$$

其值与具体l无关,为同一常数k.

(1) 证明:对于任意一条逐段光滑的简单封闭曲线L,它不围绕原点也不经过原点,则必有

$$\oint_L\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0, \qquad ②$$

且其逆亦成立,即若式②成立,则式①亦成立.

(2) 证明:在任意一个不含原点在其内的单连通区域D_0上,曲线积分

$$\int_{c_{AB}}\frac{\varphi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4} \qquad ③$$

与具体的c无关而仅与点A,B有关.

(3) 如果$\varphi(y)$具有连续的导数,求$\varphi(y)$的表达式.

6.80. 设L为圆周$x^2+y^2=4$正向一周,求$I=\oint_L y^3dx+|3y-x^2|dy$.

6.81. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dv$,其中$\Omega$由椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$围成.

6.82. 计算$I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y\frac{\sin z}{(1-z)^2}dz$.

6.83. 将$\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$化为先$y$,再$x$,后$z$的三次积分,其中$f$为连续函数.

6.84. 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$ 内的平均值.

6.85. 计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$,其中 L 圆周 $(x-1)^2+y^2=2$,其方向为逆时针方向.

6.86. 设 $f(x,y)$ 为具有二阶连续偏导数的二次齐次函数,即对任何 x,y,t 下式成立

$$f(tx,ty)=t^2f(x,y).$$

(1) 证明:$\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)=2f(x,y)$;

(2) 设 D 是由 $L:x^2+y^2=4$ 正向一周所围成的闭区域,证明:

$$\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s=\iint_D \mathrm{div}[\mathbf{grad}\, f(x,y)]\mathrm{d}\sigma.$$

6.87. 设 L 为曲线 $x^2+y^2=R^2$(常数 $R>0$)一周,$\boldsymbol{n}$ 为 L 的外法线方向向量,$u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$. 求 $\oint_L \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$.

6.88. 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,$L$ 为 D 的边界正向一周. 证明:

$$I=\oint_L \frac{x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x}{4x^2+5y^2}\geqslant \frac{2}{5}\pi.$$

6.89. 计算 $I=\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分的上侧.

6.90. 设 S 为平面 $x-y+z=1$ 介于三坐标平面间的有限部分,法向量与 z 轴交角为锐角,$f(x,y,z)$ 连续,计算

$$I=\iint_S [f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

6.91. 计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 z 轴正向看 L,L 是逆时针方向.

6.92. 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x\,(a>0)$ 中,求一条曲线 L,使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

6.93. 证明:对于曲线积分的估计式为

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant lM,$$

式中 l 为积分曲线段长度,$M=\max\limits_{(x,y)\in L}\{\sqrt{P^2+Q^2}\}$. 利用上式估计:

$$I_R=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明 $\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$.

6.94. 在下列区域 D 上,$\int_L \dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 是否与路径无关?$\dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 是否存在原函数?若存在,求出原函数.

(1)$D:x^2+y^2>0$; (2)$D:y>0$; (3)$D:x<0$.

6.95. 计算 $\iint_S x^2\mathrm{d}S$,其中 S 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于 $z=0$ 和 $z=h$ 之间的部分.

6.96. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

6.97. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

6.98. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{2\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x\cos^2x}+\dfrac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\cos^2y}-\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z\cos^2z}$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

6.99. 已知 $\Sigma:z=z(x,y),(x,y)\in D$，求证：

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D}(-P\cdot z_x'-Q\cdot z_y'+R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

6.100. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(ax^2+by^2+cz^2)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=1$.

6.101. 计算 $I=\int_{L^+}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L^+ 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+y+z=1,\end{cases}$ 其方向是从 y 轴正向看去为逆时针方向.

6.102. 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在全平面有连续偏导数，且对以任意点 (x_0,y_0) 为中心，以任意正数 r 为半径的上半圆 $L:x=x_0+r\cos\theta,y=y_0+r\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，恒有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

求证：$P(x,y)\equiv 0,\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0$.

6.103. 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az$（如图 1.6-2）中任一点的密度与该点到坐标原点的距离成正比，求此球体的重心.

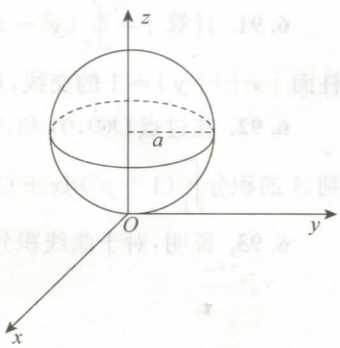

图 1.6-2

6.104. 设半径为 R 的球之球心位于以原点为中心、a 为半径的定球面上（$2a>R>0$，a 为常数）. 试确定 R 为何值时前者夹在定球面内部的表面积为最大，并求出此最大值.

6.105. 在密度为1的半球体 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的底面接上一个相同材料的柱体：$-h\leqslant z<0,x^2+y^2\leqslant R^2(h>0)$，试确定 h 值，使整个球柱体的重心恰好落在球心上.

6.106. 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算

(1) $\mathbf{grad}\ u$；　(2) $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ u)$；　(3) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ u)$.

6.107. 如果向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\left(\dfrac{ax+y}{x^2+y^2}+\mathrm{e}^x,-\dfrac{x-y+b}{x^2+y^2}+y,\dfrac{z+1}{z^2}\right)$ 是有势场，求常数 a,b 的值及 $\boldsymbol{A}$ 的势函数 u.

6.108. 求 $I=\int_L\dfrac{(x+y-z)\mathrm{d}x+(y+z-x)\mathrm{d}y+(z+x-y)\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中曲线为 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+y+z=1\end{cases}$ 自点 $A(1,0,0)$ 至点 $C(0,0,1)$ 的长弧段.

6.109. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{8k}{(n+i)(n^2+j^2)n\pi}$.

6.110. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$,求 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

6.111. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}|x^2+y^2+z^2-1|\,\mathrm{d}v$,其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 2\}$.

6.112. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,试证:

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3!}\left[\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right]^3.$$

6.113. 计算 $\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$,其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=1\end{cases}\quad(a>0)$.

6.114. 设某曲线 L 的线密度 $\mu=x^2+y^2+z^2$,其方程为

$$x=\mathrm{e}^t\cos t,\ y=\mathrm{e}^t\sin t,\ z=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t,\ -\infty<t\leqslant 0.$$

(1) 求曲线 L 的弧长 l;

(2) 求曲线 L 对 Oz 轴的转动惯量 J;

(3) 求曲线 L 对位于原点处质量为 m 的质点的引力(k 为引力常数).

6.115. 设有球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2x$,其面密度为 $\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,试求该球面的质量.

6.116. 设函数 $P(x,y)=\dfrac{x}{y}r^{\lambda}$,$Q(x,y)=-\dfrac{x^2}{y^2}r^{\lambda}$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,若曲线积分 $\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 上与路径无关,求参数 λ.

6.117. (1) 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(1)=1$,D 为不包含原点的单连通区域,在 D 内曲线积分 $\int_L\dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{2x^2+f(y)}$ 与路径无关,求 $f(y)$;

(2) 在(1)的条件下,求 $\oint_{L'}\dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{2x^2+f(y)}$,其中 L' 为曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$,$a>0$,且取逆时针方向.

6.118. 设曲线 $C: y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi$,证明:$\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2\leqslant\int_C x\,\mathrm{d}s\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi^2$.

6.119. 设 $f(x,y)$ 在全平面有连续偏导数,曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x+x\cos y\,\mathrm{d}y$ 在全平面与路径无关,且 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)\,\mathrm{d}x+x\cos y\,\mathrm{d}y=t^2$,求 $f(x,y)$.

6.120. 设曲线 $C: x^2+y^2+x+y=0$,取逆时针方向,证明:

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\oint_C -y\sin x^2\,\mathrm{d}x+x\cos y^2\,\mathrm{d}y\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

6.121. 设 L 是平面单连通有界区域 σ 的正向边界线,$\boldsymbol{n}_0$ 是 L 上任一点 (x,y) 处的单位外法向量. 设平面封闭曲线 L 上点 (x,y) 的矢径 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$,$r=|\boldsymbol{r}|$,$\theta$ 是 $\boldsymbol{n}_0$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角,试求 $\oint_L\dfrac{\cos\theta}{r}\,\mathrm{d}s$.

6.122. 求矢量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{k}$ 穿过曲面 Σ 的通量,其中 Σ 为曲线 $\begin{cases}z=y,\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成旋转曲面的外侧在 $1\leqslant z\leqslant 2$ 间部分.

6.123. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,若对任意的 $t\in(0,+\infty)$ 恒有

$$\iiint\limits_{\Omega(t)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}v+\oint_{L(t)} f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}s$$

$$= \iint\limits_{D(t)} \sqrt{x^2+y^2} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma + \oint\limits_{\Sigma(t)} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S,$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 xOy 平面上的投影区域，$\Sigma(t)$ 是球域 $\Omega(t)$ 的表面，$L(t)$ 是 $D(t)$ 的边界曲线. 证明：$f(x)$ 满足 $\int_0^t r^2 f(r)\mathrm{d}r + tf(r) = 2t^4$，且 $f(0)=0$.

6.124. 设 $f(r,t)=\oint_{x^2+xy+y^2=r^2} \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^t}$.

(1) 通过 $\begin{cases} x=\dfrac{r}{\sqrt{3}}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta), \\ y=\dfrac{r}{\sqrt{3}}(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta) \end{cases}$ 将 $f(r,t)$ 化为对 θ 的定积分，其中 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$；

(2) 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} f(r,t)$.

第7章 无穷级数

一、选择题(在目前的考研中,选择题是4分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

7.1. 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛,则在$x=2$处是 ( )

(A) 条件收敛 (B) 绝对收敛

(C) 发散 (D) 敛散性不确定

7.2. 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\sqrt{n}\tan\frac{1}{n^\alpha}$绝对收敛,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3-\alpha}}$条件收敛,则 ( )

(A)$0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ (B)$1<\alpha<\frac{5}{2}$ (C)$1<\alpha<3$ (D) $\frac{5}{2}<\alpha<3$

7.3 设$a_n=\cos n\pi\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(n=1,2,3,\cdots)$,则级数 ( )

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$都收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$都发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$发散 (D) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛

7.4. 下列命题中正确的是 ( )

(A) 若$u_n<v_n(n=1,2,3,\cdots)$,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

(B) 若$u_n<v_n(n=1,2,3,\cdots)$,且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$,且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

(D) 若$w_n<u_n<v_n(n=1,2,3,\cdots)$,且$\sum_{n=1}^{\infty}w_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

7.5. 下列命题中错误的是 ( )

(A) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$必定收敛

(B) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$必定发散

(C) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都发散,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$不一定发散

(D) 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$必定收敛

7.6. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，其中 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$，则下列命题正确的是 ( )

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，则必为条件收敛　(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为绝对收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 必发散　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛

7.7. 下列结论正确的是 ( )

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛域上必绝对收敛

(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，则 R 一定是正常数

(C) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内必可微

(D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 和 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x^n$ 都是幂级数

7.8. 设 $0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n}$，则下列级数中一定收敛的是 ( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n^2$

7.9. 设 $a>0$ 为常数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{a}{n}\right)$ ( )

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛　(C) 发散　(D) 敛散性与 a 有关

7.10. 设 $f(x)=x+1(0\leqslant x\leqslant1)$，则它以 2 为周期的余弦级数在 $x=0$ 处收敛于 ( )

(A)1　(B) -1　(C)0　(D) $\dfrac{1}{2}$

7.11. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ ( )

(A) 收敛　(B) 发散　(C) 条件收敛　(D) 绝对收敛

7.12. 当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$ 的和函数是 ( )

(A) $\ln(1-x)$　(B) $\ln\dfrac{1}{1-x}$　(C) $\ln(x-1)$　(D) $-\ln(x-1)$

7.13. 函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2},\\ 0, & \dfrac{l}{2}\leqslant x<l\end{cases}$ 展成余弦级数时，应对 $f(x)$ 进行 ( )

(A) 周期为 $2l$ 的延拓　(B) 偶延拓　(C) 周期为 l 的延拓　(D) 奇延拓

7.14. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域为 ( )

(A) $(-1,1)$　(B) $(-1,0)$　(C) $[-1,0]$　(D) $[-1,0)$

7.15. 设 $f(x)=x^2(0<x<1)$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,x\in(-\infty,+\infty)$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x,n=1,2,3,\cdots$. 则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$ ( )

(A) $-\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $-\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{1}{2}$

7.16. 已知级数(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ 和级数(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\right)$，则 ( )

(A) 级数(1) 收敛，级数(2) 发散　(B) 级数(1) 发散，级数(2) 收敛

(C) 两级数都收敛　(D) 两级数都发散

7.17. 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ ( )

(A) 一定条件收敛　(B) 一定绝对收敛

(C) 一定发散　(D) 可能收敛，也可能发散

7.18. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n n^a \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$（$a$ 为常数） ( )

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛　(C) 发散　(D) 敛散性与 a 有关

7.19. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则 ( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必收敛　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必发散　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 必收敛　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 必发散

7.20. 设数列$\{a_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 ( )

(A) $(-1,1]$　(B) $[-1,1)$　(C) $[0,2)$　(D) $(0,2]$

7.21. 设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ ( )

(A) 发散　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　(D) 敛散性由所给条件无法确定

二、填空题（在目前的考研中，填空题是 4 分 / 题，请将答案填在题中的横线上.）

7.22. 设 a 为正常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sin an}{n^2}\right)$ 的敛散性为________.

7.23. 设 a 为常数，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-a)$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$________.

7.24. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为________.

7.25. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域是________.

7.26. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成的$(x-1)$ 的幂级数为________.

7.27. 设 $f(x)=\pi x+x^2$，$-\pi\leqslant x<\pi$，且周期为 $T=2\pi$. 当 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi)$ 上的傅里叶级数为$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $b_3=$________.

7.28. 常数项级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\times 10}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n\cdot 10}+\cdots$ 的敛散性为________.

7.29. 幂级数$\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\cdots+\frac{n\cdot x^{n-1}}{a^n}+\cdots$ 在收敛区间$(-a,a)$ 内的和函数 $S(x)$ 为________.

7.30. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}(x-2)^n$ 的收敛域为________.

7.31. 若将 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 在$[0,2]$上展开成正弦级数，则该级数的和函数 $S(x)$ 为________.

7.32. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $v_n=\dfrac{1}{u_n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的敛散性为________.

7.33. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件为其部分和数列$\{S_n\}$ ________.

7.34. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛域为________.

7.35. e^x 展开成 $x-3$ 的幂级数为________.

7.36. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi\leqslant x<0,\\ -5, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pm\pi$ 处收敛于________.

7.37. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$，当________时绝对收敛；当________时条件收敛；当________时发散.

7.38. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-3$ 处为条件收敛，则其收敛半径 $R=$ ________.

7.39. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在收敛域$(-1,1)$内的和函数 $S(x)$ 为________.

7.40. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 在$[-\pi,\pi]$上展开傅里叶级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $a_n=$ ________，$b_n=$ ________，和函数 $S(x)=$ ________.

7.41. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于________.

7.42. 设 $f(x)$ 在区间$[-\pi,\pi]$上连续且满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2n}=$ ________.

三、解答题（在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 **10** 分／题.）

7.43. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!a^n}{n^n}$（$a$ 为常数，$0<|a|<\mathrm{e}$）.

7.44. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

7.45. 判别下列级数的敛散性（$k>1,a>1$）：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^k}{a^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$；　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

7.46. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ 的敛散性.

7.47. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\dfrac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

7.48. 判别级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$的敛散性.

7.49. 判别级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$的敛散性.

7.50. 证明:级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$条件收敛.

7.51. 已知$f_n(x)$满足$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$($n$为正整数),且$f_n(1)=\dfrac{e}{n}$,求函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$之和.

7.52. 将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$展开成x的幂级数,并指出其收敛区间.

7.53. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n}$的收敛域与和函数,并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$的和.

7.54. 设$a_n=\int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\,dx$,$n=1,2,\cdots$,试求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$的值.

7.55. 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$的和函数.

7.56. 设函数$f(x)$是以2π为周期的周期函数,且$f(x)=e^{\alpha x}(0\leqslant x<2\pi)$,其中$\alpha\neq 0$,试将$f(x)$展开成傅里叶级数,并求数值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}$的和.

7.57. 判断下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+2}\right)^n$;(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$;(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$.

7.58. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都是正项级数.试证:

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$收敛;

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$收敛,且$u_n$单调减少,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(3) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$都收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$都收敛;

(4) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$收敛.

7.59. 设$u_1=2$,$u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{1}{u_n}\right)(n=1,2,\cdots)$.证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$收敛.

7.60. 试判断级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$的敛散性.

7.61. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数,并设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=b$.

(1) 求证:若$b>1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛;若$b<1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散;

(2) 当$b=1$时,试举出可能收敛也可能发散的例子.

7.62. 根据阿贝尔定理，已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在某点 $x_1(x_1 \neq x_0)$ 的敛散性，证明该幂级数的收敛半径可分为以下三种情况：

(1) 若在 x_1 处收敛，则收敛半径 $R \geqslant |x_1 - x_0|$；

(2) 若在 x_1 处发散，则收敛半径 $R \leqslant |x_1 - x_0|$；

(3) 若在 x_1 处条件收敛，则收敛半径 $R = |x_1 - x_0|$.

7.63. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=2b$ 处发散，求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R 与收敛域，并分别求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ 的收敛半径.

7.64. 将 $y = \sin x$ 展开为 $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数.

7.65. 将 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 展开为 $x+1$ 的幂级数.

7.66. 设 $f(x) = \frac{1}{1-2x-x^2}$.

(1) 将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数；

(2) 分别判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)}$，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 的敛散性.

7.67. 设 $a_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) x^n (1-x)^n \mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，并求其和.

7.68. (1) 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} \mathrm{d}x$；

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2}$.

7.69. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{2n-1}(2n+1)!}$.

7.70. (1) 求函数项级数 $\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-2x} + \cdots + n\mathrm{e}^{-nx} + \cdots$ 收敛时 x 的取值范围；

(2) 当上述级数收敛时，求其和函数 $S(x)$，并求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x) \mathrm{d}x$.

7.71. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$，且 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n = 2,3,\cdots$. 证明：在 $|x| < \frac{1}{2}$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 收敛，并求其和函数与系数 a_n.

7.72. 设 $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} (|x| < 1)$.

(1) 求 $y(0), y'(0)$，并证明：$(1-x^2)y'' - xy' = 4$；

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} (|x| < 1)$ 的和函数及级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}$ 的值.

7.73. (1) 证明：等式 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4}|x| (-1 \leqslant x \leqslant 1)$；

(2) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

第8章 常微分方程

一、选择题(在目前的考研中,选择题是4分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选选项前的字母填在题后的括号里.)

8.1. 微分方程 $x\mathrm{d}y=(y-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x(x>0)$ 满足 $y(1)=0$ 的特解是 ( )

(A) $\sqrt{x^2+y^2}+y=x^2$ (B) $\sqrt{x^2+y^2}+y=1$

(C) $\sqrt{x^2+y^2}-y=x^2$ (D) $\sqrt{x^2+y^2}-y=1$

8.2. 设线性无关的函数 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 均是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解,C_1,C_2 是任意常数,则该方程的通解是 ( )

(A)$C_1y_1+C_2y_2+y_3$ (B)$C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C)$C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$ (D)$C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

8.3. 设二阶线性常系数齐次微分方程 $y''+by'+y=0$ 的每一个解 $y(x)$ 都在区间 $(0,+\infty)$ 上有界,则实数 b 的取值范围是 ( )

(A)$[0,+\infty)$ (B)$(-\infty,0]$

(C)$(-\infty,4]$ (D)$(-\infty,+\infty)$

8.4. 具有特解 $y_1=\mathrm{e}^{-x},y_2=2x\mathrm{e}^{-x},y_3=3\mathrm{e}^x$ 的三阶线性常系数齐次微分方程是 ( )

(A)$y'''-y''-y'+y=0$ (B)$y'''+y''-y'-y=0$

(C)$y'''-6y''+11y'-6y=0$ (D)$y'''-2y''-y'+2y=0$

8.5. 函数 $y=Cx+\dfrac{x^3}{6}$(其中 C 是任意常数)对微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x$ 而言, ( )

(A) 是通解 (B) 是特解

(C) 是解,但既非通解也非特解 (D) 不是解

8.6. 微分方程 $(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(y^3+2xy)\mathrm{d}y=0$ 是 ( )

(A) 可分离变量的微分方程 (B) 齐次方程

(C) 一阶线性方程 (D) 全微分方程

8.7. 微分方程 $y''-6y'+8y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解应具有形式(其中 a,b 为常数) ( )

(A)$a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{2x}$ (B)$a\mathrm{e}^x+bx\mathrm{e}^{2x}$

(C)$ax\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{2x}$ (D)$ax\mathrm{e}^x+bx\mathrm{e}^{2x}$

8.8. 微分方程 $y''+2y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的特解形式为 ( )

(A)$\mathrm{e}^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ (B)$\mathrm{e}^{-x}(A\cos x+Bx\sin x)$

(C)$x\mathrm{e}^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ (D)$\mathrm{e}^{-x}(Ax\cos x+B\sin x)$

8.9. 微分方程 $y'+\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{y^2+3x}=0$ 的通解是 ( )

(A)$2\mathrm{e}^{3x}+3\mathrm{e}^{y^2}=C$ (B)$2\mathrm{e}^{3x}+3\mathrm{e}^{-y^2}=C$

(C)$2\mathrm{e}^{3x}-3\mathrm{e}^{-y^2}=C$ (D)$\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-y^2}=C$

8.10. 微分方程 $y''-4y'+4y=x^2+8e^{2x}$ 的一个特解应具有形式(a,b,c,d 为常数) ( )

(A) $ax^2+bx+ce^{2x}$ (B) $ax^2+bx+c+dx^2e^{2x}$

(C) $ax^2+bx+cxe^{2x}$ (D) $ax^2+(bx^2+cx)e^{2x}$

8.11. 微分方程 $y''+y'+y=e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 的一个特解应具有形式(其中 a,b 为常数) ( )

(A) $e^{-\frac{1}{2}x}\left(a\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+bx\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ (B) $e^{-\frac{1}{2}x}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

(C) $xe^{-\frac{1}{2}x}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ (D) $e^{-\frac{1}{2}x}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+bx\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

8.12. 方程 $(3+2y)x\mathrm{d}x+(x^2-2)\mathrm{d}y=0$ 的类型是 ( )

(A) 只属于可分离变量型

(B) 属于齐次型方程

(C) 只属于全微分方程

(D) 兼属可分离变量型、一阶线性方程和全微分方程

8.13. 微分方程 $y''+2y'+y=\operatorname{sh}x$ 的一个特解应具有形式(其中 a,b 为常数) ( )

(A) $a\operatorname{sh}x$ (B) $a\operatorname{ch}x$ (C) $ax^2e^{-x}+be^x$ (D) $axe^{-x}+be^x$

8.14. 设 $f(x)$ 连续,且满足 $f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$,则 $f(x)=$ ( )

(A) $e^x\ln 2$ (B) $e^{2x}\ln 2$ (C) $e^x+\ln 2$ (D) $e^{2x}+\ln 2$

8.15. 设 $f(x),f'(x)$ 为已知的连续函数,则方程 $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$ 的通解是 ( )

(A) $y=f(x)+Ce^{-f(x)}$ (B) $y=f(x)+1+Ce^{-f(x)}$

(C) $y=f(x)-C+Ce^{-f(x)}$ (D) $y=f(x)-1+Ce^{-f(x)}$

8.16. 方程 $y^{(4)}-2y'''-3y''=e^{-3x}-2e^{-x}+x$ 的特解形式(其中 a,b,c,d 为常数)是 ( )

(A) $axe^{-3x}+bxe^{-x}+cx^3$ (B) $ae^{-3x}+bxe^{-x}+cx+d$

(C) $ae^{-3x}+bxe^{-x}+cx^3+dx^2$ (D) $axe^{-3x}+be^{-x}+cx^3+dx$

8.17. 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$ 和 $y_2=xe^x+e^{-x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程的两个解,则此方程为 ( )

(A) $y''-2y'+y=e^{2x}$ (B) $y''-y'-2y=xe^x$

(C) $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$ (D) $y''-y=e^{2x}$

二、填空题(在目前的考研中,填空题是 4 分 / 题,请将答案填在题中的横线上.)

8.18. 设 $y_1=e^x,y_2=x^2$ 为某二阶线性齐次微分方程的两个特解,则该微分方程为________.

8.19. 设 $p(x),q(x)$ 与 $f(x)$ 均为连续函数,$f(x)\neq 0$. 设 $y_1(x),y_2(x)$ 与 $y_3(x)$ 是二阶线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad ①$$

的 3 个解,且

$$\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}\neq \text{常数},$$

则式 ① 的通解为________.

8.20. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2xy}{x^2+y}$ 的通解为________.

8.21. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(x+\sin y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3=0$ 满足初值条件 $y(0)=0,y'(0)=\frac{2}{3}$ 的特解

是________.

8.22. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(-\infty,+\infty)$，成立 $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$，且 $f'(0)$ 存在等于 a，$a\neq 0$，则 $f(x)=$________.

8.23. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且其反函数存在为 $g(x)$. 若

$$\int_0^{f(x)} g(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt=xe^x-e^x+1,$$

则当 $-\infty<x<+\infty$ 时 $f(x)=$________.

8.24. 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$________.

8.25. 微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

8.26. 微分方程 $3e^x\tan y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$ 的通解是________.

8.27. 微分方程 $y'\tan x=y\ln y$ 的通解是________.

8.28. 微分方程 $(6x+y)dx+xdy=0$ 的通解是________.

8.29. 微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=1$ 的通解是________.

8.30. 微分方程的通解________包含了所有的解.

8.31. 微分方程 $(y^2+1)dx=y(y-2x)dy$ 的通解是________.

8.32. 设一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=Q(x)$ 有两个线性无关的解 y_1,y_2，若 $\alpha y_1+\beta y_2$ 也是该方程的解，则应有 $\alpha+\beta=$________.

8.33. 微分方程 $y''-7y'=(x-1)^2$ 的待定系数法确定的特解形式(系数的值不必求出)是________.

8.34. 以 $y=\cos 2x+\sin 2x$ 为一个特解的二阶常系数齐次线性微分方程是________.

8.35. 微分方程 $(1-x^2)y-xy'=0$ 满足初值条件 $y(1)=1$ 的特解是________.

8.36. 微分方程 $y''=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 的通解为________.

8.37. 微分方程 $y''-2y'=x^2+e^{2x}+1$ 的待定系数法确定的特解形式(不必求出系数)是________.

8.38. 特征根为 $r_1=0$，$r_{2,3}=\dfrac{1}{2}\pm i$ 的特征方程所对应的三阶常系数线性齐次微分方程为________.

8.39. 已知 $\displaystyle\int_0^1 f(tx)\,dt=\frac{1}{2}f(x)+1$，则 $f(x)=$________.

8.40. 微分方程 $\dfrac{d^5y}{dx^5}-\dfrac{1}{x}\dfrac{d^4y}{dx^4}=0$ 的通解是________.

8.41. 以 $y=7e^{3x}+2x$ 为一个特解的三阶常系数齐次线性微分方程是________.

三、解答题(在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分 / 题.)

8.42. 已知 $y=y(x)$ 是微分方程 $(x^2+y^2)dy=dx-dy$ 的任意解，并在 $y=y(x)$ 的定义域内取 x_0，记 $y_0=y(x_0)$.

(1) 证明：$y(x)<y_0+\dfrac{\pi}{2}-\arctan x_0$；

(2) 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)$ 均存在.

8.43. 设 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续有界，证明：微分方程 $y'+ay=f(x)$ 的解在 $[0,+\infty)$ 上有界.

8.44. 已知曲线 $y=y(x)$ 经过点 $(1,e^{-1})$，且在点 (x,y) 处的切线方程在 y 轴上的截距为 xy，求该曲线方程的表达式.

8.45. 求解 $(1+e^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$.

8.46. 设 $\varphi(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，且 $\Phi'(x)=\varphi(x)$，$\Phi(0)=0$.

(1) 求方程 $y'+y\sin x=\varphi(x)e^{\cos x}$ 的通解；

(2) 方程是否有以 2π 为周期的解？若有，请写出所需条件，若没有，请说明理由.

8.47. 设有方程 $y'+P(x)y=x^2$，其中 $P(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1.\end{cases}$ 试求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足方程，且满足初值条件 $y(0)=2$.

8.48. 设 $\begin{cases}x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(2x^2+1)y=x^2, x\geqslant 1,\\ y(1)=y_1.\end{cases}$

(1) 用变限积分表示满足上述初值问题的特解 $y(x)$；

(2) 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$ 是否存在，若存在，给出条件，若不存在，说明理由.

8.49. 求微分方程 $xy'+y=xe^x$ 满足 $y(1)=1$ 的特解.

8.50. 求 $(4-x+y)\mathrm{d}x-(2-x-y)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

8.51. 求 $xy''-y'\ln y'+y'\ln x=0$ 满足 $y(1)=2$ 和 $y'(1)=e^2$ 的特解.

8.52. 求 $y'^2-yy''=1$ 的通解.

8.53. 求 $(x+2)y''+xy'^2=y'$ 的通解.

8.54. 求微分方程 $\left(x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)\arctan\dfrac{y}{x}=x$ 的通解.

8.55. 求微分方程 $y'\cos y=(1+\cos x\sin y)\sin y$ 的通解.

8.56. 求微分方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的特解.

8.57. 求二阶常系数线性微分方程 $y''+\lambda y'=2x+1$ 的通解，其中 λ 为常数.

8.58. 求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

8.59. 求微分方程 $y''+5y'+6y=2e^{-x}$ 的通解.

8.60. 求微分方程 $(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

8.61. 设 $y(x)$ 是方程 $y^{(4)}-y''=0$ 的解，且当 $x\to 0$ 时，$y(x)$ 是 x 的 3 阶无穷小，求 $y(x)$.

8.62. 求一个以 $y_1=te^t$，$y_2=\sin 2t$ 为其两个特解的四阶常系数齐次线性微分方程，并求其通解.

8.63. 一链条悬挂在一钉子上，启动时一端离开钉子 8 m，另一端离开钉子 12 m，试分别在以下两种情况下求链条滑离钉子所需要的时间：

(1) 不计钉子对链条的摩擦力；

(2) 若摩擦力为常力且其大小等于 2 m 长的链条所受到的重力.

8.64. 求解 $y''=e^{2y}+e^y$，且 $y(0)=0,y'(0)=2$.

8.65. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-y^2)\tan x$ 的通解以及满足 $y(0)=2$ 的特解.

8.66. 求微分方程 $(y+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x=x\mathrm{d}y$ 的通解，并求满足 $y(1)=0$ 的特解.

8.67. 求方程 $2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=-x^2$ 的通解.

8.68. 求$(y^3-3xy^2-3x^2y)\mathrm{d}x+(3xy^2-3x^2y-x^3+y^2)\mathrm{d}y=0$的通解.

8.69. 求微分方程$y''(3y'^2-x)=y'$满足初值条件$y(1)=y'(1)=1$的特解.

8.70. 求微分方程$y\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=y^4$的通解.

8.71. 求微分方程$y''+2y'+2y=2\mathrm{e}^{-x}\cos^2\dfrac{x}{2}$的通解.

8.72. 求方程$x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2y=x^2$的通解.

8.73. 求$y''-y=\mathrm{e}^{|x|}$的通解.

8.74. 设函数$f(u)$有连续的一阶导数,$f(2)=1$,且函数$z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf\left(\dfrac{y}{x}\right)$满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^3,x>0,y>0, \qquad ①$$

求z的表达式.

8.75. 设$z=z(u,v)$具有二阶连续偏导数,且$z=z(x-2y,x+3y)$满足

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad ①$$

求$z=z(u,v)$的一般表达式.

8.76. 利用变换$y=f(\mathrm{e}^x)$求微分方程$y''-(2\mathrm{e}^x+1)y'+\mathrm{e}^{2x}y=\mathrm{e}^{3x}$的通解.

8.77. (1) 用$x=\mathrm{e}^t$化简微分方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=16x\ln x\text{ 为}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+5y=16t\mathrm{e}^t;$$

(2) 求解$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+5y=16t\mathrm{e}^t$.

8.78. 求解微分方程$(1+x)^3\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-3(1+x)^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+6(1+x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-6y=0$.

8.79. 设L是一条平面曲线,其上任意一点$P(x,y)(x>0)$到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在y轴上的截距,且L经过点$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

(1) 试求曲线L的方程;

(2) 求L位于第一象限部分的一条切线,使该切线与L以及两坐标轴所围图形的面积最小.

8.80. 设函数$y(x)(x\geqslant 0)$二阶可导且$y'(x)>0,y(0)=1$.过曲线$y=y(x)$上任意一点$P(x,y)$作该曲线的切线及到x轴的垂线,上述两直线与x轴所围成的三角形的面积记为S_1,区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形面积记为S_2,并设$2S_1-S_2$恒为1,求此曲线$y=y(x)$的方程.

8.81. 位于上半平面向上凹的曲线$y=y(x)$在点$(0,1)$处的切线斜率为0,在点$(2,2)$处的切线斜率为1.已知曲线上任一点处的曲率半径与$\sqrt{y}$及$(1+y'^2)$的乘积成正比,求该曲线方程.

02

线性代数

XIAN XING DAI SHU

线性代数是硕士研究生招生考试的内容之一，主要考查考生对线性代数的基本概念、基本理论、基本运算的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、综合运用能力和解决实际问题的能力.本部分在试卷的分值中占22%，即33分.

一、选择题(在目前的考研中,选择题 4 分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.)

1. $\begin{vmatrix} 2x & -x & 1 & 3 \\ 2 & 3x & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为 ( )

(A)2 (B)-2 (C)3 (D)-3

2. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = m, c \neq 0$,则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}c & a_{13}c^2 & a_{14}c^3 \\ a_{21}c^{-1} & a_{22} & a_{23}c & a_{24}c^2 \\ a_{31}c^{-2} & a_{32}c^{-1} & a_{33} & a_{34}c \\ a_{41}c^{-3} & a_{42}c^{-2} & a_{43}c^{-1} & a_{44} \end{vmatrix}$ 等于 ( )

(A)$c^{-2}m$ (B)m (C)cm (D)c^3m

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量,且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$,$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$,则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 等于 ( )

(A)$m+n$ (B)$-(m+n)$ (C)$n-m$ (D)$m-n$

4. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

则有 ( )

(A)若方程组无解,则必有系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$

(B)若方程组有解,则必有系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

(C)系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$,则方程组必无解

(D)系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 是方程组有唯一解的充分非必要条件

5. 线性方程组

$$\begin{cases} bx_1-ax_2=-2ab, \\ -2cx_2+3bx_3=bc, \\ cx_1+ax_3=0, \end{cases}$$

则 ( )

(A)当 a,b,c 为任意实数时,方程组均有解

(B)当 $a=0$ 时,方程组无解

(C)当 $b=0$ 时,方程组无解

(D)当 $c=0$ 时,方程组无解

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,则下列结论正确的是 ( )

(A)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ (B)$|\boldsymbol{A}|=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(C)$|\boldsymbol{AB}|=0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$ (D)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=1$

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{X}$ 是任意的 n 维列向量,$\boldsymbol{B}$ 是任意的 n 阶方阵,则下列说法错误的是 ( )

(A)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ (B)$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

(C)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ (D)$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=0 \Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

8. 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right]$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{AB}=$ （　　）

(A) $\boldsymbol{O}$　　(B) $-\boldsymbol{E}$　　(C) $\boldsymbol{E}$　　(D) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

9. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则下列公式正确的是 （　　）

(A) $(\boldsymbol{A}^2)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2$　　(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$　　(D) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k\boldsymbol{A}^{-1}(k\neq 0)$

10. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 等于 （　　）

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$　　(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$

11. 下列命题正确的是 （　　）

(A)若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 必可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$

(B)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 必可逆

(C)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶不可逆阵，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 必不可逆

(D)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶不可逆阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 必不可逆

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则 （　　）

(A) $\boldsymbol{A}$ 不可逆，且 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆　　(B) $\boldsymbol{A}$ 可逆，但 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

(C) $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 均可逆　　(D) $\boldsymbol{A}$ 不可逆，且必有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$

13. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则必有 （　　）

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$　　(B) $|\boldsymbol{B}|\neq 0$　　(C) $|\boldsymbol{B}^*|=0$　　(D) $|\boldsymbol{A}^*|=0$

14. $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=$ （　　）

(A) $|\boldsymbol{A}|$　　(B) $|\boldsymbol{A}^{-1}|$　　(C) $|\boldsymbol{A}^{n-1}|$　　(D) $|\boldsymbol{A}^n|$

15. $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=3$. 则 $|(\boldsymbol{A}^*)^*|=$ （　　）

(A) $3^{(n-1)^2}$　　(B) 3^{n^2-1}　　(C) 3^{n^2-n}　　(D) 3^{n-1}

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵 $(n\geqslant 2)$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*=$ （　　）

(A) $|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　　(B) $|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$　　(C) $|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$　　(D) $|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

17. 设 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 是正交矩阵，则 （　　）

(A) $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$　　(B) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{E}$

(C) $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$　　(D) $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{E}$

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则下列等式中，不一定成立的是 （　　）

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+(\boldsymbol{A}^{-1})^2$　　(B) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^2$

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*+(\boldsymbol{A}^*)^2$　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^2$

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，则下列结论：

①$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵；②$\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵；③$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵；④$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

其中正确的个数为 （　　）

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

20. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，则下列命题中：

①若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆；　　②若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}$ 可逆；

③若 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆；　　④$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 恒可逆.

正确的个数为 （　　）

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

21. 已知 $Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$P$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $PQ=O$，则 ( )

(A) $t=6$ 时 P 的秩必为 1　　(B) $t=6$ 时 P 的秩必为 2

(C) $t\neq 6$ 时 P 的秩必为 1　　(D) $t\neq 6$ 时 P 的秩必为 2

22. 设 n 阶矩阵 A,B 等价，则下列说法中，不一定成立的是 ( )

(A) 如果 $|A|>0$，则 $|B|>0$　　(B) 如果 A 可逆，则存在可逆矩阵 P，使得 $PB=E$

(C) 如果 $A\simeq E$，则 $|B|\neq 0$　　(D) 存在可逆矩阵 P 与 Q，使得 $PAQ=B$

23. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\2&3&a&4\\3&5&1&9\end{bmatrix}$，若 $r(A^*)=1$，则 $a=$ ( )

(A) 1　　(B) 3　　(C) 1 或 3　　(D) 无法确定

24. 设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

则必有 ( )

(A) $AP_1P_2=B$　　(B) $AP_2P_1=B$　　(C) $P_1P_2A=B$　　(D) $P_2P_1A=B$

25. 设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

其中 A 可逆，则 B^{-1} 等于 ( )

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$　　(C) $P_1P_2A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$

26. 设 A 是 n 阶矩阵，则 $\left|-2\begin{bmatrix}A^*&O\\A+A^*&A\end{bmatrix}\right|=$ ( )

(A) $(-2)^n|A|^n$　　(B) $(4|A|)^n$　　(C) $(-2)^{2n}|A^*|^n$　　(D) $|4A|^n$

27. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则 $(P^{-1})^{2\,016}A(Q^{2\,011})^{-1}=$ ( )

(A) $\begin{bmatrix} 8\,045 & 10\,057 & 12\,069 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 4\,023 & 2 & 3 \\ 10\,059 & 5 & 6 \\ 16\,095 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\,015 & 4\,027 & 6\,039 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 2\,013 & 3 \\ 4 & 8\,049 & 6 \\ 7 & 14\,085 & 9 \end{bmatrix}$

28. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 3 维非零列向量，则下列结论：

①如果 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

②如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性相关；

③如果 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

其中正确结论的个数为　（　　）

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

29. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，下列向量中

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \frac{1}{4}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3),\quad \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3,$$

是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的个数为　（　　）

(A)4　(B)3　(C)2　(D)1

30. 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解向量，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解必定是　（　　）

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　(B)$k\boldsymbol{\alpha}_1$　(C)$k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　(D)$k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

31. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，对于齐次线性方程组（Ⅰ）$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和（Ⅱ）$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，现有命题

①（Ⅰ）的解必是（Ⅱ）的解；　②（Ⅱ）的解必是（Ⅰ）的解；

③（Ⅰ）的解不一定是（Ⅱ）的解；　④（Ⅱ）的解不一定是（Ⅰ）的解.

其中，正确的是　（　　）

(A)①④　(B)①②　(C)②③　(D)③④

32. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充要条件是　（　　）

(A)存在一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能由其余向量线性表出

(D)存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$

33. 设有两个 n 维向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，若存在两组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，使 $(k_1+\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s+\lambda_s)\boldsymbol{\alpha}_s+(k_1-\lambda_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(k_s-\lambda_s)\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0}$，则　（　　）

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 均线性无关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 均线性相关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关

34. 已知向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则与（Ⅰ）等价的向量组是　（　　）

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$

35. 设向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$不能由(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,t)$不能由(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ (　　)

(A)必线性相关　　(B)必线性无关

(C)可能线性相关,也可能线性无关　　(D)以上都不对

36. 已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s'$ 可能线性相关的是 (　　)

(A)$\boldsymbol{\alpha}_i'(i=1,2,\cdots,s)$是 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$中第一个分量加到第 2 个分量得到的向量

(B)$\boldsymbol{\alpha}_i'(i=1,2,\cdots,s)$是 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$中第一个分量改变成其相反数的向量

(C)$\boldsymbol{\alpha}_i'(i=1,2,\cdots,s)$是 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$中第一个分量改为 0 的向量

(D)$\boldsymbol{\alpha}_i'(i=1,2,\cdots,s)$是 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$中第 n 个分量后再增添一个分量的向量

37. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}4\\1\\8\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix},$$

且 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+a_{13}\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+a_{23}\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\beta}_3=a_{31}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{32}\boldsymbol{\alpha}_2+a_{33}\boldsymbol{\alpha}_3,\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{12}\boldsymbol{\alpha}_3+b_{13}\boldsymbol{\alpha}_4,\\ \boldsymbol{\beta}_2=b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_3+b_{23}\boldsymbol{\alpha}_4,\\ \boldsymbol{\beta}_3=b_{31}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{32}\boldsymbol{\alpha}_3+b_{33}\boldsymbol{\alpha}_4,\end{cases}$

则 (　　)

(A)存在 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关

(B)不存在 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关

(C)存在 $b_{ij}(i,j=1,2,3)$使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关

(D)不存在 $b_{ij}(i,j=1,2,3)$使得 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关

38. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$r(\boldsymbol{A})=r<\min\{m,n\}$,则 $\boldsymbol{A}$ 中必 (　　)

(A)没有等于零的 $r-1$ 阶子式,至少有一个 r 阶子式不为零

(B)有不等于零的 r 阶子式,所有 $r+1$ 阶子式全为零

(C)有等于零的 r 阶子式,没有不等于零的 $r+1$ 阶子式

(D)任何 r 阶子式不等于零,任何 $r+1$ 阶子式全为零

39. 向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,其秩为 r_1,向量组(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$,其秩为 r_2,且 $\boldsymbol{\beta}_i,i=1,2,\cdots,s$ 均可由向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,则必有 (　　)

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1-r_2

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1

40. 已知 $r(\boldsymbol{A})=r_1$,且方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 有解,$r(\boldsymbol{B})=r_2$,且 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{\beta}$ 无解,设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$,且 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n,\boldsymbol{\beta})=r$,则 (　　)

(A)$r=r_1+r_2$　　(B)$r>r_1+r_2$

(C)$r=r_1+r_2+1$　　(D)$r\leqslant r_1+r_2+1$

41. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩是 (　　)

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

42. 设 n 阶 $(n\geqslant 3)$ 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a & \cdots & a\\ a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & 1\end{bmatrix}$，若矩阵 A 的秩为 $n-1$，则 a 必为 （　　）

(A)1　　(B)$\dfrac{1}{1-n}$　　(C)-1　　(D)$\dfrac{1}{n-1}$

43. 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为 （　　）

(A)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表出

(B)向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出

(C)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D)矩阵 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]$ 与矩阵 $B=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]$ 等价

44. 要使 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解，只要系数矩阵 A 为 （　　）

(A)$[-2,1,1]$　　(B)$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$　　(C)$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

45. 齐次线性方程组
$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$
的系数矩阵为 A，若存在 3 阶矩阵 $B\neq O$，使得 $AB=O$，则 （　　）

(A)$\lambda=-2$ 且 $|B|=0$　　(B)$\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$

(C)$\lambda=1$ 且 $|B|=0$　　(D)$\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$

46. 齐次线性方程组的系数矩阵 $A_{4\times 5}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5]$ 经过初等行变换化成阶梯形矩阵为
$$A=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$
则 （　　）

(A)$\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5$ 线性表出　　(B)$\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_5$ 线性表出

(C)$\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_5$ 线性表出　　(D)$\boldsymbol{\beta}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出

47. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 仅有零解的充分条件是 （　　）

(A)A 的列向量线性无关　　(B)A 的列向量线性相关

(C)A 的行向量线性无关　　(D)A 的行向量线性相关

48. 设 A 为 n 阶实矩阵，则对线性方程组(Ⅰ)$AX=\mathbf{0}$ 和(Ⅱ)$A^{\mathrm{T}}AX=\mathbf{0}$，必有 （　　）

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解

49. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是相应的齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1，k_2 是任意常数，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解是 ( )

(A)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(B)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　(D)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

50. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是 ( )

(A)$m=n$ 且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$

(B)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有唯一零解

(C)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 是等价向量组

(D)$r(\boldsymbol{A})=n$，$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出

51. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则下列说法错误的是 ( )

(A)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解　　(B)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 必有无穷多解

(C)对任意的 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解　　(D)对任意的 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

52. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组的一个充分条件是 ( )

(A)$r(\boldsymbol{A})=m$　　(B)$r(\boldsymbol{A})=s$　　(C)$r(\boldsymbol{B})=s$　　(D)$r(\boldsymbol{B})=n$

53. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{b}$ 是 $n\times 1$ 矩阵，则方程组

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix},$$

有解的充要条件是 ( )

(A)$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$，$r(\boldsymbol{B})$ 任意　　(B)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解，$\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

(C)$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性表出　　(D)$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出

54. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个解向量，且 $r(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$k$ 是任意常数，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解是 ( )

(A)$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$　　(B)$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$　　(C)$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$

55. 设 λ_1,λ_2 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_1,λ_2 的特征向量，则 ( )

(A)当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 对应分量必成比例　　(B)当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 对应分量不成比例

(C)当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 对应分量必成比例　　(D)当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 对应分量必不成比例

56. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,1,a,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,1,5,a]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[a,2,10,1]^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个不同特征值对应的特征向量，则 a 的取值为 ( )

(A)$a\neq 5$　　(B)$a\neq -4$　　(C)$a\neq -3$　　(D)$a\neq -3$ 且 $a\neq -4$

57. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则 ( )

(A)$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

(B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵

(D)对任意常数 t，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似

58. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，下列命题正确的是 （　　）

(A)若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量，那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征向量，那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}^{2}$ 的特征向量，那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

(D)若 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $2\boldsymbol{A}$ 的特征向量，那么 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量

59. 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，则 $2\boldsymbol{A}^{*}$ 的特征值是 （　　）

(A)1,2,3　　(B)4,6,12　　(C)2,4,6　　(D)8,16,24

60. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\lambda=0$ （　　）

(A)必是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值　　　　(B)至少是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值

(C)至多是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值　　(D)一重、二重、三重特征值都可能

61. 已知 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是方程 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解向量，则下列向量中必是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量的是 （　　）

(A)$\boldsymbol{\xi}_1$　　(B)$\boldsymbol{\xi}_2$　　(C)$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$　　(D)$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$

62. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix},$$

则下列选项中是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的是 （　　）

(A)$\boldsymbol{\xi}_1=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$　　(B)$\boldsymbol{\xi}_2=[1,-2,1]^{\mathrm{T}}$

(C)$\boldsymbol{\xi}_3=[2,1,2]^{\mathrm{T}}$　　(D)$\boldsymbol{\xi}_4=[2,1,-2]^{\mathrm{T}}$

63. 下列矩阵中能相似于对角阵的矩阵是 （　　）

(A)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$　　(B)$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　　(C)$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$　　(D)$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

64. 下列矩阵中不能相似于对角阵的矩阵是 （　　）

(A)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$　　(B)$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$　　(C)$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$　　(D)$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

65. $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵的充分必要条件是 （　　）

(A)$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值　　(B)$\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征向量

(C)$\boldsymbol{A}$ 的每个 r_i 重特征值 λ_i，$r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-r_i$　　(D)$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵

66. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}$，其中与对角矩阵相似的有 （　　）

(A)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$　　(B)$\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$　　(C)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$　　(D)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$

67. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则下列命题中：

①$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$；　　②$\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$；　　③$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；　　④$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

正确命题的个数为 （　　）

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

68. 已知 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=6$ 的线性无关的特征向量，那么矩阵 P 不能是 (　　)

(A) $[\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$　　(B) $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3]$

(C) $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]$　　(D) $[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$

69. 设 A 是 n 阶实矩阵，将 A 的第 i 列与 j 列对换，然后再将第 i 行和第 j 行对换，得到 B，则 A,B 有 (　　)

(A) $A\cong B$，但 $A\not\sim B$　　(B) $A\sim B$，但 $A\not\cong B$

(C) $A\sim B$，$A\simeq B$，但 $A\not\cong B$　　(D) $A\sim B$，$A\cong B$，且 $A\simeq B$

70. 下列矩阵中与 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 合同的矩阵是 (　　)

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

71. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩为 r，符号差为 s，且 f 和 $-f$ 合同，则必有 (　　)

(A) r 是偶数，$s=1$　(B) r 是奇数，$s=1$　(C) r 是偶数，$s=0$　(D) r 是奇数，$s=0$

72. 设 $A=E-2XX^{\mathrm{T}}$，其中 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，且 $X^{\mathrm{T}}X=1$，则 A 不是 (　　)

(A) 对称阵　(B) 可逆阵　(C) 正交阵　(D) 正定阵

二、填空题(在目前的考研中，填空题是 4 分/题，请将答案填在题中的横线上.)

73. $\begin{vmatrix}a&b&c&d\\x&0&0&y\\y&0&0&x\\d&c&b&a\end{vmatrix}=$________.

74. 设 $a,b,a+b$ 均非 0，则行列式 $\begin{vmatrix}a&b&a+b\\b&a+b&a\\a+b&a&b\end{vmatrix}=$________.

75. 已知 A,B 为 3 阶相似矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 为 A 的两个特征值，$|B|=2$，则行列式 $\begin{vmatrix}(A+E)^{-1}&O\\O&(2B)^*\end{vmatrix}=$________.

76. 设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{bmatrix}$，则 $|A|=$________.

77. 设 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 是 3 阶矩阵，$|A|=4$，若

$$B=[\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3],$$

则 $|B|=$________.

78. 设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$n$ 是正数，则 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=$________.

79. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$________.

80. 设 $\boldsymbol{A}$ 为奇数阶矩阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|>0$，则 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=$________.

81. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=$________.

82. 设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]$，$\boldsymbol{\beta}=\left[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

83. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$n\geqslant 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$________.

84. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

85. 已知 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$________.

86. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=5$，则 $|(2\boldsymbol{A})^*|=$________.

87. 设 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$________.

88. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$________.

89. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 中第 3 行的 -2 倍加到第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，将 $\boldsymbol{B}$ 中第 1 列和第 2 列对换得到 $\boldsymbol{B}_1$，又 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=$________.

90. 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & b_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1}\\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$________.

91. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶相似矩阵，且 $|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的两个特征值，则行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=$________.

92. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=3$，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$________.

93. 已知 $ABC=D$,其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,$D=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$,则 $B^*=$________.

94. 设 $\alpha_1=[1,0,-1,2]^T$,$\alpha_2=[2,-1,-2,6]^T$,$\alpha_3=[3,1,t,4]^T$,$\beta=[4,-1,-5,10]^T$,已知 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出,则 $t=$________.

95. 已知 3 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-k\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 也线性无关的充要条件是 k________.

96. 设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=0$,对于任意的 n 维向量 β,向量组 $l_1\beta+\alpha_1$,$l_2\beta+\alpha_2$,$l_3\beta+\alpha_3$ 都线性相关,则参数 l_1,l_2,l_3 应满足关系________.

97. 设 A 是 5 阶方阵,且 $A^2=O$,则 $r(A^*)=$________.

98. 设 $A_{m\times n}$,$B_{n\times n}$,$C_{n\times m}$,其中 $AB=A$,$BC=O$,$r(A)=n$,则 $|CA-B|=$________.

99. 已知向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}3\\0\\7\end{bmatrix}$$

与向量组

$$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}x\\3\\3\end{bmatrix}$$

等秩,则 $x=$________.

100. 已知 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零,且 $r(A)=n-1$,则线性方程组 $AX=0$ 的通解是________.

101. 设 n 阶($n\geqslant 3$)矩阵 A 的主对角元均为 1,其余元素均为 a,且方程组 $AX=0$ 只有一个非零解组成基础解系,则 $a=$________.

102. 设 A 是 n 阶矩阵,$|A|=0$,$A_{11}\neq 0$,则 $A^*X=0$ 的通解是________.

103. 方程组 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ 的基础解系是________.

104. 方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=0,\\x_2-x_3=0,\\x_3-x_4=0,\\x_4-x_1=0\end{cases}$$

的通解是________.

105. 方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\x_2-x_3=a_2,\\x_3-x_4=a_3,\\x_4-x_5=a_4,\\x_5-x_1=a_5\end{cases}$$

有解的充要条件是________.

106. 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=b_1,\\-2x_1+x_2-2x_3=b_2,\\-x_2-x_3=b_3,\\3x_1+5x_2+7x_3=b_4\end{cases}$$

有解，则方程组右端 $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}=$________.

107. 已知非齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}_{3\times 4}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b} \qquad ①$$

有通解 $k_1[1,2,0,-2]^{\mathrm{T}}+k_2[4,-1,-1,-1]^{\mathrm{T}}+[1,0,-1,1]^{\mathrm{T}}$，则满足方程组①且满足条件 $x_1=x_2$，$x_3=x_4$ 的解是________.

108. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，若

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4,$$

则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为________.

109. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\\2&a+1&a+3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解是________.

110. 已知 -2 是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-2&-2\\2&x&-2\\-2&2&b\end{bmatrix}$ 的特征值，其中 $b\neq 0$ 是任意常数，则 $x=$________.

111. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全是 1，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是________.

112. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，已知 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$，$|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}|=$________.

113. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，且满足 $|\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}|=0$，$|2\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值是________.

114. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个互不相同的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_1 的一个单位特征向量，则矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}$ 的特征值是________.

115. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ 的非零特征值是________.

116. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征根，$\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的线性无关的特征向量是 k 个，则 k 满足________.

117. 与 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,3,0]^{\mathrm{T}}$ 都正交的单位向量是________.

118. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[a,1,1]^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&a&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵的特征向量，那么 $a=$________.

119. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,3,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[1,-1,-2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值为________.

120. 已知 $\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=$ ________.

121. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三个线性无关的 3 维列向量，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{\xi}_i$，$i=1,2,3$，则 $\boldsymbol{A}=$ ________.

122. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是 ________.

00720154353

三、解答题(在目前的考研中，解答题包括计算题、应用题和证明题，平均 10 分/题.)

123. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

124. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}$.

125. 计算 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

126. 已知 $n(n\geqslant 3)$ 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足条件：(1) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式；(2) $a_{11}\neq 0$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

127. $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式，其中有一行(或一列)元素全是 1，证明：这个行列式的全部代数余子式的和等于该行列式的值.

128. 计算 $D_5=\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$.

129. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$.

130. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 & 3x+1 & 4x \\ e^{x-1} & 2^x & (x+1)^2 & x+3 \\ \sin x & \arctan(x+1) & \ln(1+x) & 2x+1 \\ \tan x & \arcsin x+\dfrac{\pi}{4} & e^x-1 & 3x+1 \end{vmatrix}$，试证明：$\exists\,\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

131. 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$，其中 $n>2$.

132. $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶非零实矩阵，A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，试证明：

(1) $a_{ij}=A_{ij}\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=1$；

(2) $a_{ij}=-A_{ij}\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

133. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$（$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵），$|\boldsymbol{A}|<0$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

134. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的实数，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解.

135. 设 $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，证明：$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

136. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$.

137. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) 证明：当 $n\geqslant 3$ 时，有 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-2}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$；

(2) 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

138. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(1) 计算 $\boldsymbol{A}^2$，并将 $\boldsymbol{A}^2$ 用 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 表出；

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是二阶方阵，当 $k>2$ 时，证明：$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

139. 证明：方阵 $\boldsymbol{A}$ 与所有同阶对角阵可交换的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 是对角阵.

140. 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*$.

141. 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则有 $|\boldsymbol{A}^*|=|(-\boldsymbol{A})^*|\ (n\geqslant 2)$.

142. 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆，并求出其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

143. 已知对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，存在自然数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 试证明：矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，并写出其逆矩阵的表达式（$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵）.

144. 设 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$ 可逆，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 皆为方阵，求证：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{D}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{M}^{-1}$.

145. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵. 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

146. 假设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的所有代数余子式之和.

147. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量，b 为常数. 记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*&|\boldsymbol{A}|\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&b\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

(1)计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$；(2)证明：矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

148. 设 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

149. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

150. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&&&\\&3&1&&\\&&3&&\\&&&3&-1\\&&&-9&3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

151. 设有两个非零矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$.

(1)计算 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$；

(2)求矩阵 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$ 的秩 $r(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})$；

(3)设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵. 证明：$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=1$.

152. 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times p$ 矩阵，则有 $r(\boldsymbol{AB})\geqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n$. 特别地，当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时，有 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

153. 证明：$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

154. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，证明：$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=0$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

155. 证明：方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，即 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 的充分必要条件是：(1)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组组成标准正交向量组，即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

(2)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组组成标准正交向量组，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

156. 证明：$n>3$ 的非零实方阵 $\boldsymbol{A}$，若它的每个元素等于自己的代数余子式，则 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

157. 证明：方阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$，且若 $|\boldsymbol{A}|=1$，则它的每一个元素等于自己的代数余子式，若 $|\boldsymbol{A}|=-1$，则它的每个元素等于自己的代数余子式乘 -1.

158. 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，试计算：

(1)$|\boldsymbol{A}|$；(2)$\boldsymbol{A}^n$；(3)$\boldsymbol{A}^{-1}$.

159. 设 $\boldsymbol{A}$ 是主对角元为 0 的四阶实对称阵，$\boldsymbol{E}$ 是四阶单位阵，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$ 是不可逆的对称阵，求 $\boldsymbol{A}$.

160. 设

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

161. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 证明：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

162. 设 $\boldsymbol{B}$ 是可逆阵，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 同阶，且满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都是可逆阵，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

163. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是三阶方阵，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{B}$ 不可逆.

164. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，且 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0, i=1,2,\cdots,n$，求 $r(\boldsymbol{A}^*)$ 及 $\boldsymbol{A}^*$.

165. 已知 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

求 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素的代数余子式之和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$，第 i 行元素的代数余子式之和 $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}, i=1,2,\cdots,n$ 及主对角元的代数余子式之和 $\sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

166. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$.

167. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行对换得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$. 证明：$\boldsymbol{B}$ 可逆，并推导 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的关系.

168. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆阵，每行元素之和都等于常数 a. 证明：(1)$a\neq 0$；(2)$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每行元素之和均

为$\dfrac{1}{a}$.

169. (1)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵，证明：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|.$$

(2)计算$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

170. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n\times m$矩阵，$\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{AB}$可逆.

(1)验证：$\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{BA}$也可逆，且$(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$；

(2)设

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{XY}^{\mathrm{T}},$$

其中$\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=1$，利用(1)证明：$\boldsymbol{P}$可逆，并求$\boldsymbol{P}^{-1}$.

171. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,t,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[t,1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[4,t^2,-4]^{\mathrm{T}}$，若$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法不唯一，求$t$及$\boldsymbol{\beta}$的表达式.

172. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$线性无关，且

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1.$$

讨论向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的线性相关性.

173. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，向量$\boldsymbol{\beta}$不是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，即$\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$. 证明：向量组$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关.

174. 设向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)，若(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示，且$r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=r$. 证明：(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

175. 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$的基础解系.

176. 问λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_3=\lambda, \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2, \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$$

有解，并求出解的一般形式.

177. λ为何值时，方程组

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1, \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$$

无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解.

178. 设四元齐次线性方程组（Ⅰ）为$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0,\end{cases}$又已知某齐次线性方程组（Ⅱ）的通解为$k_1[0,1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,2,2,1]^{\mathrm{T}}$.

(1)求线性方程组（Ⅰ）的基础解系；

(2)问线性方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解. 若没有，则说明理由.

179. 设$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$和$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2\cdots\boldsymbol{\eta}_s$分别是$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$和$\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$的基础解系. 证明：$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$和$\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$有非零公共解的充要条件是$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$线性相关.

180. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,-3,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[5,-5,a,11]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-3,6,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[2,-1,3,a]^{\mathrm{T}}$. 问：

(1)a为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关；

(2)a为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关；

(3)a为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_4$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，并写出它的表出式.

181. 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}.$$

问λ取何值时，

(1)$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，且表达式唯一；

(2)$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出，但表达式不唯一；

(3)$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

182. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s=[a_{1s},a_{2s},\cdots,a_{ns}]^{\mathrm{T}}$. 证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关（线性无关）的充要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\quad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

有非零解（有唯一零解）.

183. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表出，且表示式的系数全不为零. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$中任意$s$个向量线性无关.

184. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}(s>1)$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+t\boldsymbol{\alpha}_{i+1},i=1,2,\cdots,s$. 证明：向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关.

185. 设$\boldsymbol{A}$是3×3矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是三维列向量，且线性无关，已知

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2.$$

(1)证明：$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$线性无关；(2)求$|\boldsymbol{A}|$.

186. 已知$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是$n$维线性无关向量组，若$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关. 证明：$\boldsymbol{A}$不可逆.

187. 设$\boldsymbol{A}$是$n\times m$阶矩阵，$\boldsymbol{B}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{E}$是n阶单位阵，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$. 证明：$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关.

188. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，证明：存在非零的$n\times s$矩阵$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$的充要条件是$r(\boldsymbol{A})<n$.

189. 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为1，试证：

(1)$\boldsymbol{A}$ 可以表示成 $n\times1$ 矩阵和 $1\times n$ 矩阵的乘积；

(2)存在常数 μ，对任意正整数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\mu^{k-1}\boldsymbol{A}$.

190. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{X}$ 都有 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

191. 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，设表出关系为

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1t}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{s1}&c_{s2}&\cdots&c_{st}\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\boldsymbol{C}.$$

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. 证明：

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r(\boldsymbol{C}).$$

192. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 行构成的 $m\times n$ 矩阵，已知 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为 r. 证明：

$$r(\boldsymbol{B})\geqslant r+m-s.$$

193. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶实矩阵，证明：(1)$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$；(2)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 一定有解.

194. 设 $\mathbf{R}^3$ 中两个基

$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,1]^{\mathrm{T}};\boldsymbol{\beta}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$.

(1)求 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵；

(2)已知 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为$[1,0,2]^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标；

(3)求在上述两个基下有相同坐标的向量.

195. 求下面线性方程组的解空间的维数：

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+2x_4-x_5=0,\\x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5=0,\\2x_1+4x_2-7x_3+x_4+x_5=0.\end{cases}$$

并问 $\boldsymbol{\xi}_1=[9,-1,2,-1,1]^{\mathrm{T}}$ 是否属于该解空间.

196. 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3-x_4=\lambda x_1,\\-x_1+x_2-x_3-x_4=\lambda x_2,\\-x_1-x_2+x_3-x_4=\lambda x_3,\\-x_1-x_2-x_3+x_4=\lambda x_4.\end{cases}$$

λ 为何值时，方程组有解，有解时，求出所有的解.

197. 已知齐次线性方程组(Ⅰ)的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,0,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[2,1,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=[0,2,1,-1]^{\mathrm{T}}$，添加两个方程

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_1+2x_2+2x_4=0\end{cases}$$

后组成齐次线性方程组(Ⅱ)，求(Ⅱ)的基础解系.

198. 已知线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases}3x_1-x_2+8x_3+x_4=0,\\x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0\end{cases}$及线性方程组(Ⅱ)的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=[-3,7,2,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[-1,-2,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

求方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解.

199. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2. \end{cases}$$

(1)a,b为何值时，方程组有解；

(2)方程组有解时，求出方程组的导出组的基础解系；

(3)方程组有解时，求出方程组的全部解.

200. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1=[-3,2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,-2]^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3=2, \\ x_1+2x_2-x_3=1, \\ 2x_1+x_2+x_3=-4 \end{cases}$$

的两个解向量，试求方程组的通解，并确定参数 a,b,c.

201. 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=a_{15}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=a_{25}, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=a_{35}, \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=a_{45} \end{cases}$$

的通解为$[2,1,0,1]^{\mathrm{T}}+k[1,-1,2,0]^{\mathrm{T}}$. 记

$$\boldsymbol{\alpha}_j=[a_{1j},a_{2j},a_{3j},a_{4j}]^{\mathrm{T}},j=1,2,\cdots,5.$$

问：(1)$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表出，说明理由；

(2)$\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，说明理由.

202. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

203. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$r(\boldsymbol{A})=m$，$\boldsymbol{B}_{n\times(n-m)}$，$r(\boldsymbol{B})=n-m$，且满足关系 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 证明：若 $\boldsymbol{\eta}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则必存在唯一的 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\boldsymbol{B\xi}=\boldsymbol{\eta}$.

204. 设三元非齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=[2,-1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1=[0,2,0]^{\mathrm{T}}$，求该非齐次方程的通解.

205. 设三元线性方程组有通解

$$k_1\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix},$$

求原方程组.

206. 已知方程组(Ⅰ)$\begin{cases} x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$ 及方程组(Ⅱ)的通解为

$$k_1[-1,1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[2,-1,0,1]^{\mathrm{T}}+[-2,-3,0,0]^{\mathrm{T}}.$$

求方程组(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解.

207. 已知方程组

$$\begin{cases} x_1+x_4=1, \\ x_2-2x_4=2, \\ x_3+x_4=-1 \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

与方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+ax_3-5x_4=1,\\ x_1+x_2-x_3+bx_4=4,\\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4=c\end{cases}\qquad (\text{II})$$

是同解方程组，试确定参数 a,b,c.

208. 设有 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足条件 $|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位阵. 求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.

209. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，λ_1 和 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值. $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 证明：$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

210. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似.

(1)求 x 与 y；(2)求一个满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

211. 已知 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$(此时矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为对合矩阵). 求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值的取值范围.

212. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，证明：$\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

213. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 a，求 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，当 k 是自然数时，求 $\boldsymbol{A}^k$ 的每行元素之和.

214. $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是三个不同的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是相应的特征向量. 证明：向量组 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1)$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

215. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是三个对应的特征向量. 证明：当 $\lambda_2\lambda_3\neq0$ 时，向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2),\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)$ 线性无关.

216. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}=\mu\boldsymbol{\eta}$，其中 λ,μ 是实数，且 $\lambda\neq\mu$，$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 是 n 维非零向量. 证明：$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 正交.

217. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{bmatrix}$，问 k 为何值时，存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，求出 $\boldsymbol{P}$ 及相应的对角阵.

218. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-a\\2&a&-2\\-a&-1&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，a 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{\Lambda}$，a 为何值时，$\boldsymbol{A}$ 不能相似于 $\boldsymbol{\Lambda}$.

219. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,k,1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，求 k 及 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值.

220. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有三个线性无关特征向量，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，试求可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角阵.

221. 已知 $\boldsymbol{\xi}=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(1)确定参数 a,b 及 $\boldsymbol{\xi}$ 对应的特征值 λ;

(2)$\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角阵,说明理由.

222. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$,且 $|\boldsymbol{A}|=-1$,$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0,属于 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$,求 a,b,c 及 λ_0 的值.

223. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称阵,$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,对应于 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}$.

224. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$2,4,\cdots,2n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值,$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵. 计算行列式 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$ 的值.

225. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1)已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3,试求 y;(2)求矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

226. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同特征值,对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1)证明:$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

(2)若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$,求秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

227. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$,求实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

228. 证明:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & n-1 & \\ & & & & n \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} n & & & & \\ & n-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

并求可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

229. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,且 $r(\boldsymbol{A})=r(0<r\leqslant n)$. 证明:

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{E}_r$ 是 r 阶单位阵.

230. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 证明:$\boldsymbol{B}$ 相似于对角阵.

231. 设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$,求可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}$.

232. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$.

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}$.

233. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$ 都是非零向量,且满足条件 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$,记 n 阶

矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$,求:

(1)$\boldsymbol{A}^2$;

(2)$\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(3)$\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵,说明理由.

234. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 是 n 个实数,方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}.$$

(1)若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,证明:$\boldsymbol{\xi}=[1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1}]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量;

(2)若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,求可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

235. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&2&0\\-2&0&0\end{bmatrix},$$

问 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否相似,为什么?

236. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵,$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,对应的特征向量分别是

$$\boldsymbol{\xi}_1=[2,2,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[-1,2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=[2,-1,2]^{\mathrm{T}}.$$

又 $\boldsymbol{\beta}=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$. 计算:(1)$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1$;(2)$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

237. 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3.$$

(1)写出二次型 f 的矩阵表达式;

(2)用正交变换把二次型 f 化为标准形,并写出相应的正交矩阵.

238. 已知二次曲面方程

$$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$$

可以经过正交变换

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$,求 a,b 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

239. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2. 试确定参数 c 及二次型对应矩阵的特征值,并问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

240. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$m<n$. 证明:$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 是对称阵,并且 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 正定的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=m$.

241. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$,求对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似,并问 k 为何值时,$\boldsymbol{B}$ 为正定阵.

242. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称矩阵且正定,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵. 证明:$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $r(\boldsymbol{B})=n$.

243. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 已知矩阵 $B=\lambda E+A^{T}A$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵.

244. 证明：实对称矩阵 A 可逆的充分必要条件为存在实矩阵 B，使得 $AB+B^{T}A$ 正定.

245. 设 A 与 B 均为正交矩阵，并且 $|A|+|B|=0$. 证明：$A+B$ 不可逆.

246. 已知 $f(x,y)=x^2+4xy+y^2$，求正交变换 P，$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$，使得

$$f(x,y)=2u^2+2\sqrt{3}uv.$$

247. 已知三元二次型 $X^{T}AX$ 经正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$，又知矩阵 B 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^{*}\right]^{-1}BA^{-1}=2AB+4E, \text{且 } A^{*}\alpha=\alpha,$$

其中 $\alpha=[1,1,-1]^{T}$，A^{*} 为 A 的伴随矩阵，求二次型 $X^{T}BX$ 的表达式.

248. 设 A 为 n 阶正定矩阵，证明：存在唯一正定矩阵 H，使得 $A=H^2$.

249. 设方阵 A_1 与 B_1 合同，A_2 与 B_2 合同，证明：$\begin{bmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{bmatrix}$ 合同.

250. 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基分别为

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \text{与 } \beta_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix},$$

求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 P.

251. 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵，$\alpha_1=[1,1,2,3]^{T}$，$\alpha_2=[-1,1,4,-1]^{T}$，$\alpha_3=[5,-1,-8,9]^{T}$ 是齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解向量，求 $Bx=0$ 的解空间的一个标准正交基.

03

概率论与数理统计

GAI LV LUN YU SHU LI TONG JI

概率论与数理统计是工学门类数学一所考的科目之一，主要考查考生对研究随机规律性的基本概念、基本理论和基本方法的理解，以及运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力，在整个试卷的分值中大约占22%，即33分，一般3个客观题，2个解答题.

一、选择题(在目前的考研中,选择题是4分/题,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.)

1. 设10件产品中有4件不合格品,从中任取两件,已知所取两件产品中有一件是不合格品,则另一件也是不合格品的概率是 ( )

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

2. 以下结论,错误的是 ( )

(A) 若 $0<P(B)<1, P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$,则 A,B 相互独立

(B) 若 A,B 满足 $P(B\mid A)=1$,则 $P(A-B)=0$

(C) 设 A,B,C 是三个事件,则 $(A-B)\cup B=A\cup B$

(D) 若当事件 A,B 同时发生时,事件 C 必发生,则 $P(C)<P(A)+P(B)-1$

3. 设 A,B 是任意两个事件,且 $A\subset B, P(B)>0$,则必有 ( )

(A) $P(A)\leqslant P(A\mid B)$ (B) $P(A)<P(A\mid B)$

(C) $P(A)\geqslant P(A\mid B)$ (D) $P(A)>P(A\mid B)$

4. 设事件 A,B 满足 $AB=\varnothing$,则下列结论中一定正确的是 ( )

(A) $\overline{A},\overline{B}$ 互不相容 (B) $\overline{A},\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$ (D) $P(A-B)=P(A)$

5. 一种零件的加工由两道工序组成. 第一道工序的废品率为 p_1,第二道工序的废品率为 p_2,则该零件加工的成品率为 ( )

(A) $1-p_1-p_2$ (B) $1-p_1p_2$

(C) $1-p_1-p_2+p_1p_2$ (D) $(1-p_1)+(1-p_2)$

6. 以下4个结论:

(1) 教室中有 r 个学生,则他们的生日都不相同的概率是 $\frac{A_{365}^r}{365^r}$;

(2) 教室中有4个学生,则至少两个人的生日在同一个月的概率是 $\frac{41}{96}$;

(3) 将 C,C,E,E,I,N,S 共7个字母随机地排成一行,恰好排成英文单词 $SCIENCE$ 的概率是 $\frac{1}{315}$;

(4) 袋中有编号为1到10的10个球,今从袋中任取3个球,则3个球的最小号码为5的概率为 $\frac{1}{12}$.

正确的个数为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

7. 设 $0<P(B)<1, P(A_1)P(A_2)>0$ 且 $P(A_1\cup A_2\mid B)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$,则下列等式成立的是 ( )

(A) $P(A_1\cup A_2\mid\overline{B})=P(A_1\mid\overline{B})+P(A_2\mid\overline{B})$

(B) $P(A_1B\cup A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1\cup A_2)=P(A_1\mid B)+P(A_2\mid B)$

(D) $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$

8. 设 $P(B)>0, A_1, A_2$ 互不相容,则下列各式中不一定正确的是 ( )

(A) $P(A_1A_2\mid B)=0$

(B)$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$

(C)$P(\overline{A}_1\overline{A}_2 \mid B) = 1$

(D)$P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \mid B) = 1$

9. 设 X_1,X_2 为独立的连续型随机变量，分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x)$，则一定是某一随机变量的分布函数的为 (　　)

(A)$F_1(x)+F_2(x)$　　(B)$F_1(x)-F_2(x)$

(C)$F_1(x)F_2(x)$　　(D)$F_1(x)/F_2(x)$

10. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为 $f(x)=af_1(x)+bf_2(x)$，其中 $f_1(x)$ 是正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的密度函数，$f_2(x)$ 是参数为 λ 的指数分布的密度函数，已知 $F(0)=\frac{1}{8}$，则 (　　)

(A)$a=1,b=0$　　(B)$a=\frac{3}{4},b=\frac{1}{4}$

(C)$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$　　(D)$a=\frac{1}{4},b=\frac{3}{4}$

11. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}Ax(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 A 为常数，则 $F\left(\frac{1}{2}\right)=$ (　　)

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{5}$

12. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}Ae^{-x}, & x>\lambda,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $(\lambda>0)$，则概率 $P\{\lambda<X<\lambda+a\}$ $(a>0)$ 的值 (　　)

(A) 与 a 无关，随 λ 增大而增大　　(B) 与 a 无关，随 λ 增大而减小

(C) 与 λ 无关，随 a 增大而增大　　(D) 与 λ 无关，随 a 增大而减小

13. 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-4\}$，$p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}$，则 (　　)

(A) 对任意实数 μ，都有 $p_1=p_2$　　(B) 对任意实数 μ，都有 $p_1<p_2$

(C) 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$　　(D) 对任意实数 μ，都有 $p_1>p_2$

14. 设 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 $Y=2X$ 的概率密度为 (　　)

(A) $\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$　　(B) $\frac{1}{\pi(4+y)^2}$　　(C) $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$　　(D) $\frac{2}{\pi(1+y^2)}$

15. 已知随机向量 (X_1,X_2) 的概率密度为 $f_1(x_1,x_2)$，设 $Y_1=2X_1$，$Y_2=\frac{1}{3}X_2$，则随机向量 (Y_1,Y_2) 的概率密度为 $f_2(y_1,y_2)=$ (　　)

(A)$f_1\left(\frac{y_1}{2},3y_2\right)$　　(B)$\frac{3}{2}f_1\left(\frac{y_1}{2},3y_2\right)$

(C)$f_1\left(2y_1,\frac{y_2}{3}\right)$　　(D)$\frac{2}{3}f_1\left(2y_1,\frac{y_2}{3}\right)$

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，则 ( )

(A) (X,Y) 是服从均匀分布的二维随机变量

(B) $Z=X+Y$ 是服从均匀分布的随机变量

(C) $Z=X-Y$ 是服从均匀分布的随机变量

(D) $Z=X^2$ 是服从均匀分布的随机变量

17. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则随机变量 $Z=Y-X$ 的概率密度 $f_Z(z)=$ ( )

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)\mathrm{d}x$

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z+x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x,z+x)\mathrm{d}x$

18. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(0,\sigma_2^2)$，则概率 $P\{|X-Y|<1\}$ ( )

(A) 随 σ_1 与 σ_2 的减少而减少　　(B) 随 σ_1 与 σ_2 的增加而增加

(C) 随 σ_1 的增加而减少，随 σ_2 的减少而增加　　(D) 随 σ_1 的增加而增加，随 σ_2 的减少而减少

19. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim B(n,p)(0<p<1)$，则 $X+Y$ 的分布函数 ( )

(A) 为连续函数　　(B) 恰有 $n+1$ 个间断点

(C) 恰有 1 个间断点　　(D) 有无穷多个间断点

20. 现有 10 张奖券，其中 8 张为 2 元的，2 张为 5 元的. 今从中任取 3 张，则奖金的数学期望为 ( )

(A)6　　(B)7.8　　(C)9　　(D)11.2

21. 设随机变量 X 取非负整数值，$P\{X=n\}=a^n(n\geqslant 1)$，且 $EX=1$，则 a 的值为 ( )

(A) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$　　(B) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　　(C) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　　(D)1/5

22. 设 X_1,X_2,X_3 相互独立，且均服从参数为 λ 的泊松分布，令 $Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$，则 Y^2 的数学期望为 ( )

(A) $\frac{1}{3}\lambda$　　(B) λ^2　　(C) $\frac{1}{3}\lambda+\lambda^2$　　(D) $\frac{1}{3}\lambda^2+\lambda$

23. 设 X 为连续型随机变量，方差存在，则对任意常数 C 和 $\varepsilon>0$，必有 ( )

(A) $P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}=E(|X-C|)/\varepsilon$　　(B) $P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}\geqslant E(|X-C|)/\varepsilon$

(C) $P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}\leqslant E(|X-C|)/\varepsilon$　　(D) $P\{|X-C|\geqslant\varepsilon\}\leqslant DX/\varepsilon^2$

24. 设随机向量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=f(-x,y)$，且 ρ_{XY} 存在，则 $\rho_{XY}=$ ( )

(A)1　　(B)0　　(C) -1　　(D) -1 或 1

25. 设随机向量 (X,Y) 服从二维正态分布，其边缘分布为 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(2,4)$，X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，且概率 $P\{aX+bY\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$，则 ( )

(A) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{4}$　　(B) $a=\frac{1}{4},b=-\frac{1}{2}$

(C) $a=-\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}$　　(D) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}$

26. 设 X 是随机变量，$EX>0$ 且 $E(X^2)=0.7, DX=0.2$，则以下各式成立的是　（　）

(A) $P\left\{-\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right\}\geqslant 0.2$　　(B) $P\{X>\sqrt{2}\}\geqslant 0.6$

(C) $P\{0<X<\sqrt{2}\}\geqslant 0.6$　　(D) $P\{0<X<\sqrt{2}\}\leqslant 0.6$

27. 已知随机变量 $X_n(n=1,2,\cdots)$ 相互独立且都在 $(-1,1)$ 上服从均匀分布，根据独立同分布中心极限定理有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\leqslant\sqrt{n}\right\}=$　（　）

(结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示)

(A) $\Phi(0)$　　(B) $\Phi(1)$　　(C) $\Phi(\sqrt{3})$　　(D) $\Phi(2)$

28. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记 $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，$S_4^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是　（　）

(A) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　　(B) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$　　(C) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　　(D) $T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

29. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2，则服从 $\chi^2(n)$ 的随机变量为　（　）

(A) $\frac{\overline{X}^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$　　(B) $\frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

(C) $\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$　　(D) $\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

30. 设总体 X 与 Y 都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，已知 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是分别来自总体 X 与 Y 的两个相互独立的简单随机样本，统计量 $Y=\frac{2(X_1+\cdots+X_m)}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_n^2}}$ 服从 $t(n)$ 分布，则 $\frac{m}{n}=$　（　）

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{4}$

31. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 是取自总体的简单随机样本，样本均值为 $\overline{X}$，如果 $P\{|X-\mu|<a\}=P\{|\overline{X}-\mu|<b\}$，则比值 $\frac{a}{b}$　（　）

(A) 与 σ 及 n 都有关　　(B) 与 σ 及 n 都无关

(C) 与 σ 无关，与 n 有关　　(D) 与 σ 有关，与 n 无关

32. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，则　（　）

(A) $\overline{X}\sim N(0,1)$，$Q^2\sim\chi^2(n)$　　(B) $\overline{X}\sim N(0,n)$，$Q^2\sim\chi^2(n-1)$

(C) $\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$，$Q^2\sim\chi^2(n)$　　(D) $\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$，$Q^2\sim\chi^2(n-1)$

33. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 是来自总体 $N(2,1)$ 的简单随机样本，则统计量

$$Y=\frac{2(X_1+X_2+X_3-6)}{\sqrt{3(X_4+X_5-4)^2+2(X_6+X_7+X_8-6)^2}}$$

服从 ( )

(A)$\chi^2(2)$　　(B)$\chi^2(3)$　　(C)$t(2)$　　(D)$t(3)$

34. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，则统计量

$$Y=\frac{\sqrt{n-1}\,X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}},$$

服从 ( )

(A)$Y\sim\chi^2(n-1)$　　(B)$Y\sim t(n-1)$

(C)$Y\sim F(n,1)$　　(D)$Y\sim F(1,n-1)$

35. 设随机变量 $X\sim F(n,n)$，记 $p_1=P\{X\geqslant 1\}$，$p_2=P\{X\leqslant 1\}$，则 ( )

(A)$p_1<p_2$　　(B)$p_1>p_2$　　(C)$p_1=p_2$　　(D)p_1，p_2 大小无法比较

36. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{10}$ 分别是来自正态总体 $N(-1,4)$ 和 $N(2,5)$ 的简单随机样本，且相互独立，S_1^2，S_2^2 分别为这两个样本的方差，则服从 $F(7,9)$ 分布的统计量是 ( )

(A) $\dfrac{2S_1^2}{5S_2^2}$　　(B) $\dfrac{4S_2^2}{5S_1^2}$　　(C) $\dfrac{5S_1^2}{2S_2^2}$　　(D) $\dfrac{5S_1^2}{4S_2^2}$

37. 设总体 $X\sim N(a,\sigma^2)$，$Y\sim N(b,\sigma^2)$ 相互独立. 分别从 X 和 Y 中各抽取容量为 9 和 10 的简单随机样本，记它们的方差为 S_X^2 和 S_Y^2，并记 $S_{12}^2=\dfrac{1}{2}(S_X^2+S_Y^2)$ 和 $S_{XY}^2=\dfrac{1}{18}(8S_X^2+10S_Y^2)$，则这四个统计量 S_X^2，S_Y^2，S_{12}^2，S_{XY}^2 中，方差最小者是 ( )

(A)S_X^2　　(B)S_Y^2　　(C)S_{12}^2　　(D)S_{XY}^2

38. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（μ,σ^2 都未知）的简单随机样本的观察值，则 σ^2 的最大似然估计值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$　　(B) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

(C) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$　　(D) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

39. 设总体 $X\sim P(\lambda)$（λ 为未知参数），$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，其均值与方差分别为 $\overline{X}$ 与 S^2，则为使 $\hat{\lambda}=a\overline{X}+(2-3a)S^2$ 是 λ 的无偏估计量，常数 a 应为 ( )

(A)-1　　(B)0　　(C)$\dfrac{1}{2}$　　(D)1

二、填空题（在目前的考研中，填空 4 分 / 题，请将答案填在题中的横线处.）

40. 设两个相互独立的事件 A 与 B 至少有一个发生的概率为 $\dfrac{8}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$ ________.

41. 事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=a$，$P(B)=b$，如果事件 C 发生必然导致 A 与 B 同时发生，则 A,B,C 都不发生的概率为________.

42. 设事件 A,B,C 两两独立，三个事件不能同时发生，且它们的概率相等，则 $P(A\cup B\cup C)$ 的

最大值为________.

43. 设 A,B 是任意两个事件，则 $P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=$ ________.

44. 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为________.

45. 将一枚硬币重复掷五次，则正面、反面都至少出现两次的概率为________.

46. 已知每次试验“成功”的概率为 p，现进行 n 次独立试验，则在没有全部失败的条件下，“成功”不止一次的概率为________.

47. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布，对 X 作三次独立重复观察，至少有一次观测值大于 2 的概率为 $\dfrac{7}{8}$，则 $\lambda=$ ________.

48. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ A\sin x+B, & 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ 则 A,B 的值依次为________.

49. 设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P\{X\leqslant 1\}=4P\{X=2\}$，则 $P\{X=3\}=$ ________.

50. 设随机变量 X 服从正态分布，其概率密度为

$$f(x)=k\mathrm{e}^{-x^2+2x-1}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

则常数 $k=$ ________.

51. 设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的密度函数为 $f_Y(y)=$ ________.

52. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2,0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{x}\right\}$ 上服从均匀分布，则 (X,Y) 的关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 在点 $x=\mathrm{e}$ 处的值为________.

53. 设二维随机变量 (X,Y) 在 $G=\left\{(x,y)\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}<x<0,0<y<2x+1\right\}$ 上服从均匀分布，则条件概率 $P\left\{-\dfrac{1}{4}<X<0\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<Y\leqslant 1\right\}=$ ________.

54. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}4xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则对 $x>0$，$f_{Y|X}(y\mid x)=$ ________.

55. 设二维随机变量的分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

，

则随机变量 $Z=Y\cdot\min\{X,Y\}$ 的分布律为________.

56. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，则随机变量 $Z=\dfrac{Y}{X}$ 的概率密

度为________.

57. 一台设备由三个部件构成,在设备运转中各部件需要调整的概率分别为 0.10,0.20,0.30,设备部件状态相互独立,以 X 表示同时需要调整的部件数,则 X 的方差 DX 为________.

58. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $E\left(\dfrac{1}{X^2}\right)$ 为________.

59. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布,记

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\leqslant k,\\ 1, & Y>k,\end{cases}\quad k=1,2,$$

则 $E(X_1+X_2)$ 为________.

60. 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布,即 $P\{X=k\}=\dfrac{2^k e^{-2}}{k!}$, $k=0,1,2,\cdots$,则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $EZ=$________.

61. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 独立同分布,且 $EX_i=0$, $DX_i=10$, $i=1,2,\cdots,100$,令 $\overline{X}=\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$,则 $E\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}(X_i-\overline{X})^2\right\}=$________.

62. 设随机变量 X 和 Y 均服从 $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$,且 $D(X+Y)=1$,则 X 与 Y 的相关系数 $\rho=$________.

63. 设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant |y|\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$________.

64. 已知随机变量 $X\sim N(-3,1)$, $Y\sim N(2,1)$,且 X,Y 相互独立,设随机变量 $Z=X-2Y+7$,则 $Z\sim$________.

65. 若 X_1,X_2,X_3 两两不相关,且 $DX_i=1(i=1,2,3)$,则 $D(X_1+X_2+X_3)=$________.

66. 设相互独立的两个随机变量 X,Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为:

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为________.

67. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,且 $X_1\sim B\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$, $X_2\sim B\left(6,\dfrac{1}{3}\right)$, $X_3\sim B\left(6,\dfrac{1}{5}\right)$,则 $E[X_1(X_1+X_2-X_3)]$ 为________.

68. 设随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

与

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,且相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,则 (X,Y) 的分布律为________.

69. 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,且 $X\sim N(0,3)$, $Y\sim N(0,4)$,相关系数 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{4}$,则 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$ 为________.

70. 设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-5	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
-1	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0

则 X 与 Y 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 为________.

71. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则随机变量 $U=X+2Y, V=-X$ 的协方差 $\mathrm{Cov}(U,V)$ 为________.

72. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则随机变量 $Z=X-Y$ 的方差 DZ 为________.

73. 设随机变量 X 的数学期望 $EX=75$，方差 $DX=5$，由切比雪夫不等式估计得

$$P\{|X-75|\geqslant k\}\leqslant 0.05,$$

则 $k=$________.

74. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立的随机变量序列，且都服从参数为 λ 的泊松分布，则

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

75. 设总体 $X\sim P(\lambda)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的简单随机样本，它的均值和方差分别为 $\overline{X}$ 和 S^2，则 $E(\overline{X}^2)$ 和 $E(S^2)$ 分别为________.

76. 设总体 X 和 Y 相互独立，且分别服从正态分布 $N(0,4)$ 和 $N(0,7)$，$X_1, X_2, \cdots, X_8$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{14}$ 分别来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $|\overline{X}-\overline{Y}|$ 的数学期望和方差分别为________.

77. 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $U=X_1+X_2$ 与 $V=X_2+X_3$，则 (U,V) 的概率密度为________.

78. 设 X_1, X_2 是来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则查表得概率 $P\left\{\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}<40\right\}$ 等于________.

79. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad(\theta>-1),$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，则未知参数 θ 的最大似然估计值为________.

80. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,则统计量

$$Y=\frac{X_3-X_4}{\sqrt{(X_1-\mu)^2+(X_2-\mu)^2}}$$

服从的分布是________.

81. 设总体 $X\sim N(a,2)$,$Y\sim N(b,2)$,且独立,由分别来自总体 X 和 Y 的容量分别为 m 和 n 的简单随机样本得样本方差 S_X^2 和 S_Y^2,则统计量 $T=\frac{1}{2}[(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2]$ 服从的分布是________.

82. 设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数,又设 x_1, $x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本值,则参数 θ 的最大似然估计值为________.

83. 设总体 X 的方差为 1,根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本,测得样本均值为 5,则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为________.

84. 设总体 $X\sim N(\mu,8)$,$X_1,X_2,\cdots,X_{36}$ 是来自 X 的简单随机样本,$\overline{X}$ 是它的均值. 如果 $(\overline{X}-1,\overline{X}+1)$ 是未知参数 μ 的置信区间,则置信水平为________.

三、解答题(在目前的考研中,解答题包括计算题、应用题和证明题,平均 10 分/题.)

85. 设有大小相同、标号分别为 1,2,3,4,5 的五个球,同时有标号为 1,2,…,10 的十个空盒. 将五个球随机放入这十个空盒中,设每个球放入任何一个盒子的可能性都是一样的,并且每个空盒可以放五个以上的球,计算下列事件的概率:

(1)$A=\{$某指定的五个盒子中各有一个球$\}$;

(2)$B=\{$每个盒子中最多只有一个球$\}$;

(3)$C=\{$某个指定的盒子不空$\}$.

86. 设 10 件产品中有 4 件不合格品,从中任取两件,已知所取两件中有一件是不合格品,求另一件也是不合格品的概率.

87. 设 $AB\subset C$. 试证明:$P(A)+P(B)-P(C)\leqslant 1$.

88. 设 $P(A)>0$,$P(B)>0$. 证明:A,B 互不相容与 A,B 相互独立不能同时成立.

89. 证明:若三事件 A,B,C 相互独立,则 $A\cup B$ 及 $A-B$ 都与 C 独立.

90. 袋中有 5 只白球 6 只黑球,从袋中一次取出 3 个球,发现都是同一颜色,求这颜色是黑色的概率.

91. 甲袋中有 3 个白球 2 个黑球,乙袋中有 4 个白球 4 个黑球,今从甲袋中任取 2 球放入乙袋,再从乙袋中任取一球,求该球是白球的概率.

92. 有两名选手比赛射击,轮流对同一个目标进行射击,甲命中目标的概率为 α,乙命中目标的概率为 β. 甲先射,谁先命中谁得胜. 问甲、乙两人获胜的概率各为多少?

93. 某彩票每周开奖一次,每次提供十万分之一的中奖机会,且各周开奖是相互独立的. 某彩民每周买一次彩票,坚持十年(每年 52 周),那么他从未中奖的可能性是多少?

94. 设有甲、乙两名射击运动员,甲命中目标的概率是 0.6,乙命中目标的概率是 0.5,求下列事件的概率:

(1) 从甲、乙中任选一人去射击,若目标被命中,则是甲命中的概率;

(2) 甲、乙两人各自独立射击,若目标被命中,则是甲命中的概率.

95. 验收成箱包装的玻璃器皿,每箱 24 只装. 统计资料表明,每箱最多有 2 只残品,且含 0,1,2 件残品的箱各占 80%,15%,5%. 现在随意抽取一箱,随意检验其中 4 只;若未发现残品则通过验收,

否则要逐一检验并更换. 试求

（1）一次通过验收的概率；

（2）通过验收的箱中确实无残品的概率.

96. 甲、乙、丙三人向一架飞机进行射击，他们的命中率分别为 0.4，0.5，0.7. 设飞机中一弹而被击落的概率为 0.2，中两弹而被击落的概率为 0.6，中三弹必然被击落，今三人各射击一次，求飞机被击落的概率.

97. 某考生想借张宇编著的《张宇高等数学 18 讲》，决定到三个图书馆去借，对每一个图书馆而言，有无这本书的概率相等；若有，能否借到的概率也相等，假设这三个图书馆采购、出借图书相互独立，求该生能借到此书的概率.

98. 设昆虫产 k 个卵的概率为 $p_k=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，又设一个虫卵能孵化成昆虫的概率为 p，若卵的孵化是相互独立的，问此昆虫的下一代有 L 条的概率是多少？

99. 盒子中有 n 个球，其编号分别为 $1,2,\cdots,n$. 先从盒子中任取一个球，如果是 1 号球则放回盒子中去，否则就不放回盒子中；然后，再任取一个球，若第二次取到的是 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 号球，求第一次取到 1 号球的概率.

100. 甲、乙两人比赛射击，每个射击回合中取胜者得 1 分，假设每个射击回合中，甲胜的概率为 α，乙胜的概率为 $\beta(\alpha+\beta=1)$，比赛进行到一人比另一人多 2 分为止，多 2 分者最终获胜. 求甲、乙最终获胜的概率. 比赛是否有可能无限地一直进行下去？

101. 向半径为 r 的圆内随机抛一点，求此点到圆心之距离 X 的分布函数 $F(x)$，并求 $P\left\{X>\dfrac{2r}{3}\right\}$.

102. 随机地取两个正数 x 和 y，这两个数中的每一个都不超过 1，试求 x 与 y 之和不超过 1，积不小于 0.09 的概率.

103. 一汽车沿一街道行驶，需通过三个设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且每一信号灯红绿两种信号显示的概率均为 $\dfrac{1}{2}$，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数，求 X 的概率分布.

104. 一实习生用一台机器接连生产了三个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $p_i=\dfrac{1}{i+1}$ $(i=1,2,3)$，以 X 表示三个零件中合格品的个数，求 X 的分布律.

105. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x,\ -\infty<x<+\infty.$$

求：(1) 系数 A 与 B；(2) $P\{-1<X\leqslant 1\}$；(3) X 的概率密度.

106. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 X 的分布函数.

107. 设电子管寿命 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, x>100,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$$

若一台收音机上装有三个这种电子管,求:

(1) 使用的最初 150 小时内,至少有两个电子管被烧坏的概率;

(2) 在使用的最初 150 小时内烧坏的电子管数 Y 的分布律;

(3) Y 的分布函数.

108. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X(单位:分)服从参数为 $\frac{1}{5}$ 的指数分布. 若等待时间超过 10 分钟,他就离开. 设他一个月内要来银行 5 次,以 Y 表示一个月内他没有等到服务而离开窗口的次数,求 Y 的分布律及 $P\{Y\geqslant 1\}$.

109. 假设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,求随机变量 $Y=1-e^{-\lambda X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

110. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, x\in[1,8],\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 是 X 的分布函数,求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

111. 设随机变量 X 在 $[0,\pi]$ 上服从均匀分布,求 $Y=\sin X$ 的密度函数.

112. 已知随机变量 X_1 与 X_2 的概率分布,

$$X_1\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4}\end{pmatrix}, X_2\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

而且 $P\{X_1X_2=0\}=1$.

(1) 求 X_1 与 X_2 的联合分布;

(2) 问 X_1 与 X_2 是否独立?为什么?

113. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, 0<x<1,\\ 0, 其他,\end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, y>0,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

114. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

115. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$$

求二维随机变量 (X^2,Y^2) 的概率密度.

116. 设二次方程 $x^2-Xx+Y=0$ 的两个根相互独立,且都在 $(0,2)$ 上服从均匀分布,分别求 X 与 Y 的概率密度.

117. 设 X,Y 是相互独立的随机变量,它们都服从参数为 n,p 的二项分布,证明:$Z=X+Y$ 服从

参数为 $2n, p$ 的二项分布.

118. 设 ξ, η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知 ξ 的分布律为 $P\{\xi = i\} = \dfrac{1}{3}, i = 1,2,3$，又设 $X = \max\{\xi, \eta\}, Y = \min\{\xi, \eta\}$，试写出二维随机变量 (X,Y) 的分布律及边缘分布律，并求 $P\{\xi = \eta\}$.

119. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，都服从均匀分布 $U(0,1)$. 求 $Z = |X - Y|$ 的概率密度及 $P\left\{-\dfrac{1}{2} < X - Y < \dfrac{1}{2}\right\}$.

120. 设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

问 X, Y 是否独立？

121. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x, y < +\infty,$$

求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

122. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 X_i 服从参数为 λ_i 的指数分布，其密度为

$$f_i(x) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

求 $P\{X_1 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\}$.

123. 设 X 关于 Y 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{y^3}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $P\left\{X > \dfrac{1}{2}\right\}$.

124. 设 (X,Y) 服从 $G = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 上的均匀分布，试求给定 $Y = y$ 的条件下 X 的条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x \mid y)$.

125. 设试验成功的概率为 $\dfrac{3}{4}$，失败的概率为 $\dfrac{1}{4}$，独立重复试验直到成功两次为止，试求试验次数的数学期望.

126. 市场上有两种股票，股票 A 的价格为 60 元 / 股，每股年收益为 R_1 元，其均值为 7，方差为 50. 股票 B 的价格为 40 元 / 股，每股年收益为 R_2 元，其均值为 3.2，方差为 25，设 R_1 和 R_2 互相独立. 某投资者有 10 000 元，拟购买 s_1 股股票 A，s_2 股股票 B，剩下的 s_3 元存银行，设银行 1 年期定期存款利率为 5%，投资者希望该投资策略的年平均收益不少于 800 元，并使投资收益的方差最小，求这个投资策略 (s_1, s_2, s_3)，并计算该策略的收益的标准差.

127. 设随机变量服从几何分布，其分布律为

$$P\{X = k\} = (1-p)^{k-1} p, 0 < p < 1, k = 1,2,\cdots,$$

求 EX 与 DX.

128. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<2,\\ cx+b, & 2\leqslant x\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

已知 $EX=2, P\{1<X<3\}=\dfrac{3}{4}$,求

(1)a,b,c 的值;(2) 随机变量 $Y=\mathrm{e}^X$ 的数学期望和方差.

129. 设(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的数学期望.

130. 在长为 L 的线段上任取两点,求两点距离的期望和方差.

131. 设 X,Y 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 的随机变量,求 $E(|X-Y|)$ 与$D(|X-Y|)$.

132. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布,均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,求:

(1)$\max\{X,Y\}$ 的数学期望;(2)$\min\{X,Y\}$ 的数学期望.

133. 设 X,Y 相互独立同分布,均服从几何分布 $P\{X=k\}=q^{k-1}p,k=1,2,\cdots$,求$E(\max\{X,Y\})$.

134. 设连续型随机变量 X 的所有可能值在区间$[a,b]$之内,证明:

(1)$a\leqslant EX\leqslant b$;(2)$DX\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

135. 对三台仪器进行检验,各台仪器产生故障的概率分别为 p_1,p_2,p_3,求产生故障仪器的台数 X 的数学期望和方差.

136. 一商店经销某种商品,每周进货量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量,且都服从区间$[10,20]$上的均匀分布.商店每售出一单位商品可得利润 1 000 元;若需求量超过了进货量,商店可从其他商店调剂供应,这时每单位商品获利润 500 元,试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

137. 袋中有 n 张卡片,分别记有号码 $1,2,\cdots,n$,从中有放回地抽取 k 张,以 X 表示所得号码之和,求 EX,DX.

138. 设 X 与 Y 为具有二阶矩的随机变量,且设 $Q(a,b)=E[Y-(a+bX)]^2$,求 a,b 使$Q(a,b)$ 达到最小值 $Q_{\min}$,并证明:

$$Q_{\min}=DY(1-\rho_{XY}^2).$$

139. 设 X,Y,Z 是三个两两不相关的随机变量,数学期望全为零,方差都是 1,求$X-Y$ 和 $Y-Z$ 的相关系数.

140. 将数字 $1,2,\cdots,n$ 随机地排列成新次序,以 X 表示经重排后还在原位置上的数字的个数.

(1) 求 X 的分布律;(2) 计算 EX 和 DX.

141. 设二维随机变量(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求:(1) 方差 $D(XY)$;(2) 协方差 $\mathrm{Cov}(3X+Y,X-2Y)$.

142. 设随机变量 U 在$[-2,2]$上服从均匀分布,记随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\leqslant -1,\\ 1, & U>-1,\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1, & U\leqslant 1,\\ 1, & U>1,\end{cases}$$

求:(1)$\mathrm{Cov}(X,Y)$,并判定 X 与 Y 的独立性;(2)$D[X(1+Y)]$.

143. 设 X 为随机变量,$E|X|^r(r>0)$ 存在,试证明:对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$P\{|X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}.$$

144. 若 $DX=0.004$,利用切比雪夫不等式估计概率 $P\{|X-EX|<0.2\}$.

145. 用切比雪夫不等式确定,掷一均质硬币时,需掷多少次,才能保证'正面'出现的频率在 0.4 至 0.6 之间的概率不小于 0.9.

146. 若随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=0,$$

试证明:$\{X_n\}$ 服从大数定律.

147. 某计算机系统有 100 个终端,每个终端有 20% 的时间在使用,若各个终端使用与否相互独立,试求有 10 个或更多个终端在使用的概率.

148. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的一个样本,$EX=\mu,DX=\sigma^2<\infty$,求 $E\overline{X},D\overline{X}$ 和$E(S^2)$.

149. 从装有 1 个白球、2 个黑球的罐子里有放回地取球,记

$$X=\begin{cases}0, & \text{取到白球},\\ 1, & \text{取到黑球},\end{cases}$$

这样连续取 5 次得样本 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5. 记 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_5$,求:

(1)Y 的分布律,$EY,E(Y^2)$;

(2)$E\overline{X},E(S^2)$(其中$\overline{X},S^2$ 分别为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 的均值与方差).

150. 若 $X\sim\chi^2(n)$,证明:$EX=n,DX=2n$.

151. 已知 $X\sim t(n)$,求证:$X^2\sim F(1,n)$.

152. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 独立. $X_i\sim N(a,\sigma^2),i=1,2,\cdots,m,Y_i\sim N(b,\sigma^2),i=1,2,\cdots,n,\overline{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,S_1^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2,S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$,而 α,β 为常数. 试求 $\dfrac{\alpha(\overline{X}-a)+\beta(\overline{Y}-b)}{\sqrt{\dfrac{mS_1^2+nS_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{m}+\dfrac{\beta^2}{n}}}$ 的分布.

153. 一个罐子里装有黑球和白球,黑、白球数之比为 $a:1$. 现有放回的一个接一个地抽球,直至抽到黑球为止,记 X 为所抽到的白球个数. 这样做了 n 次以后,获得一组样本:$X_1,X_2,\cdots,X_n$. 基于此,求未知参数 a 的矩估计 $\hat{a}_M$ 和最大似然估计 $\hat{a}_L$.

154. 罐中有 N 个硬币,其中有 θ 个是普通硬币(掷出正面与反面的概率各为 0.5),其余 $N-\theta$ 个硬币两面都是正面,从罐中随机取出一个硬币,把它连掷两次,记下结果,但不去查看它属于哪种硬币,如此重复 n 次,若掷出 0 次、1 次、2 次正面的次数分别为 n_0,n_1,n_2,利用(1) 矩法;(2) 最大似然法,求参数 θ 的估计量.

155. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x),0<x<\theta,\\0, \qquad\qquad 其他,\end{cases}$$

又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的一个简单随机样本,求未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$,并求 $E(\hat{\theta})$ 和 $D(\hat{\theta})$.

156. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha},0<x<1,\\0, \qquad\qquad 其他,\end{cases}$$

试用样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 求参数 α 的矩估计和最大似然估计.

157. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自对数级数分布

$$P\{X=k\}=-\frac{1}{\ln(1-p)}\frac{p^k}{k}\quad(0<p<1,k=1,2,\cdots)$$

的一个样本,求 p 的矩估计.

158. 设总体 X 服从参数为 N 和 p 的二项分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自 X 的样本,试求参数 N 和 p 的矩估计.

159. 设总体 X 的分布列为截尾几何分布

$$P\{X=k\}=\theta^{k-1}(1-\theta),k=1,2,\cdots,r,$$

$$P\{X=r+1\}=\theta^r,$$

从中抽得样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,其中有 m 个取值为 $r+1$,求 θ 的极大似然估计.

160. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是其样本.

(1) 求 C 使得 $\hat{\sigma}^2=C\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量;

(2) 求 k 使得 $\hat{\sigma}=k\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|$ 为 σ 的无偏估计量.

161. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,$\hat{\theta}_n(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的一个估计量,若 $E\hat{\theta}_n=\theta+k_n$,$D\hat{\theta}_n=\sigma_n^2$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^2=0$. 试证:$\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合(一致)估计量.

162. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自均匀分布在 $[0,\theta]$ 上的一个样本,试证:$T_n=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 是 θ 的相合估计.

163. 已知 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2},x>0,\alpha>0,\\0, \qquad\qquad 其他,\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的简单随机样本.

(1) 求未知参数 α 的矩估计和最大似然估计;

(2) 验证所求得的矩估计是否为 α 的无偏估计.

164. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,X_1,X_2,X_3 是来自 X 的样本,试证:估计量

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3,\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3,\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$$

都是 μ 的无偏估计,并指出它们中哪一个最有效.

165. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的一个样本,设 $EX=\mu,DX=\sigma^2$,试确定常数 C,使 $\overline{X}^2-CS^2$ 为 μ^2 的无偏估计.

166. 设总体服从 $U[0,\theta]$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体的样本. 证明:$\hat{\theta}=2\overline{X}$ 为 θ 的一致估计.

167. 设从均值为 μ，方差为 $\sigma^2>0$ 的总体中分别抽取容量为 n_1,n_2 的两个独立样本，样本均值分别为 $\overline{X},\overline{Y}$. 证明：对于任何满足条件 $a+b=1$ 的常数 a,b，$T=a\overline{X}+b\overline{Y}$ 是 μ 的无偏估计量，并确定常数 a,b，使得方差 DT 达到最小.

168. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，X_1 的取值有四种可能，其概率分布分别为：

$$p_1=1-\theta,p_2=\theta-\theta^2,p_3=\theta^2-\theta^3,p_4=\theta^3,$$

记 N_j 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中出现各种可能的结果的次数，$N_1+N_2+N_3+N_4=n$. 确定 a_1,a_2,a_3,a_4 使 $T=\sum\limits_{i=1}^{4}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计.

169. 设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$. 从总体 X,Y 中独立地抽取两个容量为 m,n 的样本 $X_1,\cdots,X_m$ 和 $Y_1,\cdots,Y_n$. 记样本均值分别为 $\overline{X},\overline{Y}$. 若 $Z=C[(\overline{X}-\mu_1)^2+(\overline{Y}-\mu_2)^2]$ 是 σ^2 的无偏估计. 求：(1)C；(2)Z 的方差 DZ.

170. 设有 k 台仪器，已知用第 i 台仪器测量时，测定值总体的标准差为 σ_i，$i=1,2,\cdots,k$，用这些仪器独立地对某一物理量 θ 各观察一次，分别得到 $X_1,X_2,\cdots,X_k$，设仪器都没有系统误差，即 $E(X_i)=\theta$，$i=1,2,\cdots,k$，试求：$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 应取何值，使用 $\hat{\theta}=\sum\limits_{i=1}^{k}a_iX_i$ 估计 θ 时，$\hat{\theta}$ 是无偏的，并且 $D(\hat{\theta})$ 最小？

171. 某种零件的尺寸方差为 $\sigma^2=1.21$，对一批这类零件检查 6 件得尺寸数据(毫米)：

32.56，29.66，31.64，30.00，21.87，31.03.

设零件尺寸服从正态分布，问这批零件的平均尺寸能否认为是 32.50 毫米($\alpha=0.05$).

172. 某批矿砂的 5 个样品中镍含量经测定为 $X(\%)$：

3.25，3.27，3.24，3.26，3.24，

设测定值服从正态分布，问能否认为这批矿砂的镍含量为 3.25($\alpha=0.01$)？

173. 从一批轴料中取 15 件测量其椭圆度，计算得 $S=0.025$，问该批轴料椭圆度的总体方差与规定的 $\sigma^2=0.000\,4$ 有无显著差别？($\alpha=0.05$，椭圆度服从正态分布)

174. 设某产品的指标服从正态分布，它的标准差为 $\sigma=100$，今抽了一个容量为 26 的样本，计算平均值 1 580，问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，能否认为这批产品的指标的期望值 μ 不低于1 600.

175. 设 $\{X_n\}$ 是一随机变量序列，X_n 的密度函数为：

$$f_n(x)=\frac{n}{\pi(1+n^2x^2)},-\infty<x<+\infty,n=1,2,\cdots.$$

试证：$X_n\xrightarrow{P}0$.

176. 设 $X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots$，令 $Y_n=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n}iX_i$. 证明：随机变量序列 $\{Y_n\}$ 依概率收敛于 μ.

177. 一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的，假设每箱平均重量 50 千克，标准差为 5 千克，若用最大载重为 5 吨的汽车承运，试用中心极限定理说明每辆车最多可装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977($\Phi(2)=0.977$).

178. 用概率论方法证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n+\dfrac{n^2}{2!}+\cdots+\dfrac{n^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-n}=\dfrac{1}{2}$.

179. 截至2010年10月25日，上海世博会参观人数超过了 7 000 万人. 游园最大的痛苦就是人太

多. 假设游客到达中国馆有三条路径，沿第一条路径走 3 个小时可到达；沿第二条路径走 5 个小时又回到原处；沿第三条路径走 7 个小时也回到原处. 假定游客总是等可能地在三条路径中选择一个，试求他平均要用多少时间才能到达中国馆.

180. 设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为一列独立同分布的随机变量，随机变量 N 只取正整数且 N 与 $\{X_n\}$ 独立，求证：$E(\sum_{i=1}^{N} X_i) = E(X_1)E(N)$.

181. 假设你是参加某卫视"相亲节目"的男嘉宾，现有 n 位女嘉宾在你面前自左到右排在一条直线上，每两位相邻的女嘉宾的距离为 a(米). 假设每位女嘉宾举手时你必须和她去握手，每位女嘉宾举手的概率均为 $\frac{1}{n}$，且相互独立，若 Z 表示你和一位女嘉宾握手后到另一位举手的女嘉宾处所走的路程，求 EZ.

182. 对于任意二事件 A_1, A_2，考虑二随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{若事件 } A_i \text{ 出现}, \\ 0, \text{若事件 } A_i \text{ 不出现} \end{cases} \quad (i = 1;2).$$

试证明：随机变量 X_1 和 X_2 独立的充分必要条件是事件 A_1 和 A_2 相互独立.

183. 假设有四张同样的卡片，其中三张上分别只印有 a_1, a_2, a_3，而另一张上同时印有 a_1, a_2, a_3. 现在随意抽取一张卡片，令 $A_k = \{$卡片上印有 $a_k\}$. 证明：事件 A_1, A_2, A_3 两两独立但不相互独立.

184. 某商品一周的需求量 X 是随机变量，已知其概率密度为 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 假设各周的需求量相互独立，以 U_k 表示 k 周的总需求量，试求：

(1) U_2 和 U_3 的概率密度 $f_k(x)(k = 2,3)$；

(2) 接连三周中的周最大需求量的概率密度 $f_{(3)}(x)$.

185. 设 X 和 Y 相互独立都服从 0－1 分布：$P\{X = 1\} = P\{Y = 1\} = 0.6$. 试证明：$U = X + Y$，$V = X - Y$ 不相关，但是不独立.

186. 假设 $G = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ 是以原点为圆心，半径为 r 的圆形区域，而随机变量 X 和 Y 的联合分布是在圆 G 上的均匀分布. 试确定随机变量 X 和 Y 的独立性和相关性.

187. 假设某季节性商品，适时地售出 1 千克可以获利 s 元，季后销售每千克净亏损 t 元. 假设一家商店在季节内该商品的销售量 X 千克是一随机变量，并且在区间 (a,b) 内均匀分布. 问季初应安排多少这种商品，可以使期望销售利润最大?

188. 独立地重复进行某项试验，直到成功为止，每次试验成功的概率为 p. 假设前 5 次试验每次的试验费用为 10 元，从第 6 次起每次的试验费用为 5 元. 试求这项试验的总费用的期望值 a.

189. 利用列维－林德伯格定理，证明：棣莫弗－拉普拉斯定理.

190. 某保险公司接受了 10 000 辆电动自行车的保险，每辆车每年的保费为 12 元. 若车丢失，则赔偿车主 1 000 元. 假设车的丢失率为 0.006，对于此项业务，试利用中心极限定理，求保险公司：

(1) 亏损的概率 α；

(2) 一年获利润不少于 40 000 元的概率 β；

(3) 一年获利润不少于 60 000 元的概率 γ.

191. 将 n 个观测数据相加时，首先对小数部分按"四舍五入"舍去小数位后化为整数. 试利用中心极限定理估计：

(1) 试当 $n=1\,500$ 时求舍位误差之和的绝对值大于 15 的概率；

(2) 估计数据个数 n 满足何条件时，以不小于 90% 的概率，使舍位误差之和的绝对值小于10 的数据个数 n.

192. 设 X 是任一非负(离散型或连续型)随机变量，已知 $\sqrt{X}$ 的数学期望存在，而 $\varepsilon>0$ 是任意实数，证明：不等式

$$P\{X\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{E\sqrt{X}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

193. 设事件 A 出现的概率为 $p=0.5$，试利用切比雪夫不等式，估计在 1 000 次独立重复试验中事件 A 出现的次数在 450 到 550 次之间的概率 α.

194. 设来自总体 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，总体 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2\end{pmatrix},$$

其中 $0<\theta<1$. 分别以 v_1,v_2 表示 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中 1,2 出现的次数，试求

(1) 未知参数 θ 的最大似然估计量；

(2) 未知参数 θ 的矩估计量；

(3) 当样本值为 1,1,2,1,3,2 时的最大似然估计值和矩估计值.

195. 假设一批产品的不合格品数与合格品数之比为 R(未知常数). 现在按还原抽样方式随意抽取的 n 件中发现 k 件不合格品. 试求 R 的最大似然估计值.

196. 假设总体 X 在区间$[0,\theta]$上服从均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本，试求：(1) 端点 θ 的最大似然估计量；(2) 端点 θ 置信水平为 0.95 的置信区间.