第一章 误差

1. 试举例,说明什么是模型误差,什么是方法误差.

解: 例如,把地球近似看为一个标准球体,利用公式 $A=4\pi r^2$ 计算其表面积,这个近似看为球体的过程产生的误差即为模型误差.

在计算过程中,要用到 π ,我们利用无穷乘积公式计算 π 的值:

$$\pi = 2\cdot\frac{2}{q_1}\cdot\frac{2}{q_2}\cdot\ldots$$

其中

$$\begin{cases} q_1=\sqrt{2}, \\ q_{n+1}=\sqrt{2+q_n}, n=2,3,\ldots \end{cases}$$

我们取前 9 项的乘积作为 π 的近似值,得

$$\pi \approx 3.141587725\ldots$$

这个去掉 π 的无穷乘积公式中第 9 项后的部分产生的误差就是方法误差,也成为截断误差.

2. 按照四舍五入的原则,将下列各数舍成五位有效数字:

816.956 7　6.000 015　17.322 50　1.235 651　93.182 13　0.015 236 23

解: 816.96　6.000 0　17.323　1.235 7　93.182　0.015 236

3. 下列各数是按照四舍五入原则得到的近似数,它们各有几位有效数字?

81.897　0.008 13　6.320 05　0.180 0

解: 五位　三位　六位　四位

4. 若 **1/4** 用 **0.25** 表示,问有多少位有效数字?

解: 两位

5. 若 $a=1.1062, b=0.947$,是经过舍入后得到的近似值,问: $a+b, a\times b$ 各有几位有效数字?

解: 已知 $|\mathrm{d}a|<\frac{1}{2}\times10^{-4}, |\mathrm{d}b|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$,

又 $a+b=0.20532\times10$,

$$\left|d\left(a+b\right)\right|=|da+db|\le|da|+|db|=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}=0.55\times10^{-3}<\frac{1}{2}\times10^{-2},$$

所以 $a+b$ 有三位有效数字;

因为 $a\times b=0.10475714\times10$,

$$\left|d\left(a\times b\right)\right|=b|da|+a|db|=0.947\cdot\frac{1}{2}\times10^{-4}+1.1062\cdot\frac{1}{2}\times10^{-3}=0.60045\times10^{-3}<\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

所以 $a\times b$ 有三位有效数字.

6. 设 $y_1 = 0.9863, y_2 = 0.0062$,是经过舍入后作为 x_1, x_2 的近似值.求 $\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}$ 的计算值与真值的相对误差限及 $y_1 \cdot y_2$ 与真值的相对误差限.

解: 已知 $x_1 = y_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 = y_2 + \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}\times 10^{-4}, \mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2}\times 10^{-4}$,

$$\mathrm{dr}\left(\frac{1}{x_1}\right) = \mathrm{dr}\left(x_1\right) = \left|\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}x_1}{y_1}\right| = \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{0.9863} \approx 0.50\times 10^{-4};$$

$$\mathrm{dr}\left(\frac{1}{x_2}\right) = \mathrm{dr}\left(x_2\right) = \left|\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}x_2}{y_2}\right| = \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{0.0062} \approx 0.81\times 10^{-2};$$

$$\mathrm{dr}\left(x_1 \cdot x_2\right) = \mathrm{dr}\left(x_1\right) + \mathrm{dr}\left(x_2\right) \approx 0.50\times 10^{-4} + 0.81\times 10^{-2} \approx 0.82\times 10^{-2}.$$

7. 正方形的边长约为 **100cm**,应该怎样测量,才能使其面积的误差不超过 **1cm²**.

解: 设正方形面积为 S, 边长为 a, 则 S=a². 所以要使: $\mathrm{d}s = \mathrm{d}a^2 = 2a\mathrm{d}a \le 1$, 则要求 $\mathrm{d}a \le \frac{1}{2a} = \frac{1}{200} = 0.5\times 10^{-2}$.所以边长的误差不能超过 0.5×10^{-2} cm.

8. 用观测恒星的方法求得某地维度为 $45^\circ 0' 2''$(读到秒),试问:计算 $\sin\varphi$ 将有多大误差?

解: $\mathrm{d}\left(\sin\varphi\right) = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \cos\left(45^\circ 0' 2''\right)\left(\frac{1}{2}\right)''$.

9 . 真空中自由落体运动距离 **s** 与时间的关系由公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 确定,**g** 是重力加速度.现在假设 **g** 是准确的,而对 **t** 的测量有 $\pm 0.1s$ 的误差,证明 **t** 增加时,距离的绝对误差增加而相对误差却减小.

证明: 因为: $\mathrm{d}s = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = gt\mathrm{d}t; \frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{gt\mathrm{d}t}{s} = \frac{gt\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}gt^2} = 2\frac{\mathrm{d}t}{t}$. $\mathrm{d}s$ 与 t 成正比, $\frac{\mathrm{d}s}{s}$ 与 t 成反比,

所以当 $\mathrm{d}t$ 固定的时候, t 增加时,距离的绝对误差增加而相对误差却减小.

10. 设 $x > 0$, x 的相对误差为 δ,求 $\ln x$ 的绝对误差.

解: 已知 $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \delta$,所以 $\ln x$ 的绝对误差 $\mathrm{d}\left(\ln x\right) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \delta$.

11. 设 x 的相对误差为 $\alpha\%$，求 x^n 的相对误差.

解: $\dfrac{\mathrm{d}x^n}{x^n}=\dfrac{nx^{n-1}\mathrm{d}x}{x^n}=\dfrac{n\mathrm{d}x}{x}=n\alpha\%$.

12. 计算球的体积,为了使相对误差限为 **1%**,问度量半径 **R** 时允许的相对误差限如何?

解: 已知 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$,设 $\mathrm{dr}(R)=\left|\dfrac{\mathrm{d}R}{R}\right|=a$,则要使得

$$\mathrm{dr}(V)=\left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right|=\left|\mathrm{d}\ln V\right|=\left|\mathrm{d}\ln R^3\right|=3\left|\mathrm{d}\ln R\right|=3\left|\mathrm{d}\ln R\right|=3\mathrm{dr}(R)=3a=1\%,\text{则 } a=\frac{1}{3}\cdot 1\%.$$

第二章 插值法与数值微分

1. 设 $y=\sqrt{x}$,在 $x=100,121,144$ 三处的值是很容易求得的,试以这三个点建立 $y=\sqrt{x}$ 的二次插值多项式,并用此多项式计算 $\sqrt{115}$ 的近似值,且给出误差估计.用其中的任意两点,构造线性插值函数,用得到的三个线性插值函数,计算 $\sqrt{115}$ 的近似值,并分析其结果不同的原因.

解: 已知 $x_0=100, x_1=121, x_2=144; y_0=10, y_1=11, y_2=12$,

建立二次 Lagrange 插值函数可得:

$$
\begin{aligned}
L_2(x)=&\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}10+\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}11\\
&+\frac{(x-121)(x-100)}{(144-121)(144-100)}12
\end{aligned}
$$

所以 $\sqrt{115}\approx L_2(115)=10.7228$.

误差 $R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \xi\in(x_0,x_1,x_2,\xi)$,所以

$$0.0006555<R_2\left(\sqrt{115}\right)<0.001631$$

利用前两个节点建立线性插值函数可得:

$$L_1(x)=\frac{(x-121)}{(100-121)}10+\frac{(x-100)}{(121-100)}11$$

所以 $\sqrt{115}\approx L_1(115)=10.7143$.

利用后两个节点建立线性插值可得:

$$L_1(x)=\frac{(x-144)}{(121-144)}11+\frac{(x-121)}{(144-121)}12$$

所以 $\sqrt{115}\approx L_1(115)=10.7391$.

利用前后两个节点建立线性插值可得:

$$L_2(x)=\frac{(x-144)}{(100-144)}10+\frac{(x-100)}{(144-100)}12$$

所以 $\sqrt{115}\approx L_1(115)=10.6818$.

与 $\sqrt{115}$ 的真实值比较,二次插值比线性插值效果好,利用前两个节点的线性插值比其他两个线性插值

效果好.此说明,二次插值比线性插值效果好,内插比外插效果好.

2. 利用**(2.9)**式证明

$$\left|R(x)\right| \le \max_{x_0 \le x \le x_1}\left|f''(x)\right|\frac{(x_1-x_0)^2}{8}, x_0 \le x \le x_1$$

证明: 由(2.9)式

$$R(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1), x_0<\xi<x_1$$

当 $x_0<x<x_1$ 时,

$$\left|f''(\xi)\right| \le \max_{x_0 \le x \le x_1}\left|f''(x)\right|, \max_{x_0 \le x \le x_1}\left|(x-x_0)(x-x_1)\right| \le \frac{1}{4}(x_1-x_0)^2$$

所以

$$\left|R(x)\right| \le \max_{x_0 \le x \le x_1}\left|f''(x)\right|\frac{(x_1-x_0)^2}{8}, x_0 \le x \le x_1$$

3. 若 $x_j(0,1,...,n)$ 为互异节点**,**且有

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$$

证明

$$\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x) \equiv x^k, k=0,1,...,n$$

证明: 由于

$$l_j(x_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j;\\ 0 & i\ne j.\end{cases}$$

且 $\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)$ 和 x^k 都为 k 次多项式,而且在 k+1 个不同的节点处的函数值都相同 $k=0,1,...,n$, 所以马上有

$$\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x) \equiv x^k, k=0,1,...,n.$$

4. 设给出 $\sin x$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上的数值表,用二次插值进行计算,若希望截断误差小于 10^{-5},问函数表的步长最大能取多少?

解:记插值函数为 p(x),则

$$\sin x - p\left(x\right) = \frac{\left(\sin\xi\right)'''}{3!}\left(x-x_{i-1}\right)\left(x-x_i\right)\left(x-x_{i+1}\right)$$

所以 $$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\sin x - p\right| = \frac{\left|-\cos\left(\xi\right)\right|}{3!}\left|\left(x-x_{i-1}\right)\left(x-x_i\right)\left(x-x_{i+1}\right)\right|$$

$\left|-\cos\left(\xi\right)\right|\le 1$;令 $g\left(x\right)=\left(x-x_{i-1}\right)\left(x-x_i\right)\left(x-x_{i+1}\right)$,设 $x = x_{i-1}+th$,得

$$g\left(x_{i-1}+th\right)=h^3 t\left(t-1\right)\left(t-2\right), t\in\left[0,2\right]$$

又 $\varphi\left(t\right)=t\left(t-1\right)\left(t-2\right), t\in\left[0,2\right]$ 的最大值为 $\varphi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0.3849$,所以有

$$\max_{-\pi\le x\le\pi}\left|\sin x - p\right| \le \frac{0.3849}{6}h^3 < 10^{-5}$$

所以 $$h\le 0.053.$$

5. 用拉格朗日插值和牛顿插值找经过点 $\left(-3,-1\right),\left(0,2\right),\left(3,-2\right),\left(6,10\right)$ 的三次插值公式.

解: Lagrange 插值函数:

$$\begin{aligned}L_3\left(x\right) &= \frac{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)}{\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)\left(x_0-x_3\right)}y_0 + \frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)}{\left(x_1-x_0\right)\left(x_1-x_2\right)\left(x_1-x_3\right)}y_1 \\ &\quad + \frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)}{\left(x_2-x_0\right)\left(x_2-x_1\right)\left(x_2-x_3\right)}y_2 + \frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}{\left(x_3-x_0\right)\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)}y_3 \\ &= \frac{x\left(x-3\right)\left(x-10\right)}{162} + \frac{\left(x+3\right)\left(x-3\right)\left(x-10\right)}{27} \\ &\quad + \frac{\left(x+3\right)x\left(x-10\right)}{27} + \frac{\left(x+3\right)x\left(x-3\right)}{81/5}.\end{aligned}$$

牛顿插值:

首先计算差商

$$\begin{array}{lllll} -3 & -1 & & & \\ 0 & 2 & 1 & & \\ 3 & -2 & -1.333 & -0.3889 & \\ 6 & 10 & 4 & 0.8889 & 0.1420 \end{array}$$

$$N_3\left(x\right)=-1+\left(x+3\right)-0.3889\left(x+3\right)x+1.1420\left(x+3\right)x\left(x-3\right).$$

也可以利用等距节点构造,首先计算差分

$$\begin{array}{lllll} -3 & -1 & & & \\ 0 & 2 & 3 & & \\ 3 & -2 & -4 & -7 & \\ 6 & 10 & 12 & 16 & 23 \end{array}$$

可得前插公式

$$N_3\left(x_0+th\right)=-1+3t+\frac{-7}{2}t\left(t-1\right)+\frac{23}{6}t\left(t-1\right)\left(t-2\right);$$

和后插公式

$$N_3\left(x_3+th\right)=10+12t+\frac{16}{2}t\left(t-1\right)+\frac{23}{6}t\left(t-1\right)\left(t-2\right).$$

6. 确定一次数不高于 **4** 的多项式 $\varphi\left(x\right)$,使 $\varphi\left(0\right)=0,\varphi'\left(0\right)=0,\varphi\left(1\right)=\varphi'\left(1\right)=1,\varphi\left(2\right)=1$.

解:利用重节点计算差商

$$\begin{array}{llllll} 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & 1/4 \end{array}$$

则可构造 Hermite 插值函数满足题设条件:

$$\begin{aligned} H_4\left(x\right)&=0+0\left(x-0\right)+1\left(x-0\right)\left(x-0\right)-1\left(x-0\right)\left(x-0\right)\left(x-1\right)\\ &\quad+\frac{1}{4}\left(x-0\right)\left(x-0\right)\left(x-1\right)\left(x-1\right)\\ &=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2. \end{aligned}$$

7. 寻找过 $n+1$ 个点 $x_0,x_1,...,x_n$ 的 $2n+1$ 次多项式 $H_{2n+1}\left(x\right)$,满足条件**:**

$$\begin{aligned} &H_{2n+1}\left(x_0\right)=f\left(x_0\right),H_{2n+1}\left(x_1\right)=f\left(x_1\right),...,H_{2n+1}\left(x_n\right)=f\left(x_n\right),\\ &H'_{2n+1}\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right),H'_{2n+1}\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right),..,H'_{2n+1}\left(x_n\right)=f'\left(x_n\right). \end{aligned}$$

解:和 Lagrange 插值函数的构造类似,可将插值函数写成

$$H_{2n+1}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(h_{n,i}\left(x\right)y_i+h_{n,i}\left(x\right)y_i'\right)$$

其中,基函数满足条件

(1) $h_{n,i}\left(x\right),h_{n,i}\left(x\right)\in P\left(2n+1\right);$

(2) $h_{n,i}\left(x_j\right)=\delta_{ij},h'_{n,i}\left(x_j\right)=0;h'_{n,i}\left(x_j\right)=\delta_{ij},h_{n,i}\left(x_j\right)=0$

则可由已知条件,可得

$$h_{n,i}(x)=\left[1-2l'_{n,i}(x_i)(x-x_i)\right]l_{n,i}^2(x);$$

$$h'_{n,i}(x)=(x-x_i)l_{n,i}^2(x).$$

所以可得

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(\left[1-2l'_{n,i}(x_i)(x-x_i)\right]l_{n,i}^2(x)\,y_i+(x-x_i)l_{n,i}^2(x)\,y'_i\right)$$

8. 过 **0,1** 两点构造一个三次 **Hermite** 插值多项式**,**满足条件**:**

$$f(0)=1,f'(0)=\frac{1}{2},f(1)=2,f'(1)=\frac{1}{2}$$

解: 计算重节点的差商

0	1			
0	1	1/2		
1	2	1	1/2	
1	2	1/2	-1/2	-1

马上可得

$$H_3(x)=1+\frac{1}{2}(x-0)+\frac{1}{2}(x-0)(x-0)-1(x-0)(x-0)(x-1)$$
$$=-x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$$

9. 过给定数组

x	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
y	**2.768**	**2.833**	**2.903**	**2.979**	**3.062**	**3.153**

(1) 作一分段线性插值函数**.**

(2) 取第二类边界条件**,**作三次样条插值多项式**.**

(3) 用两种插值函数分别计算 $x=75.5,x=78.3$ 的函数值**.**

解: (1)做分段线性插值函数可得:

$$I_5(x)=2.768l_0(x)+2.833l_1(x)+2.903l_2(x)+2.979l_3(x)+3.062l_4(x)+3.153l_5(x)$$

其中,

$$l_0(x)=\begin{cases}76-x & x\in[\ 75,]7\\ 0 & x\notin[\quad 7]5\end{cases}\quad l_1(x)=\begin{cases}x-75 & x\in[\ 75,]7\\ 77-x & x\in[\ 76,]7\\ 0 & x\notin[\quad 7]5\end{cases}$$

$$l_2(x)=\begin{cases}x-76 & x\in[76,77]\\ 78-x & x\in[77,78]\\ 0 & x\notin[76,78].\end{cases};\ l_3(x)=\begin{cases}x-77 & x\in[77,78]\\ 79-x & x\in[78,79]\\ 0 & x\notin[77,79].\end{cases};$$

$$l_4(x)=\begin{cases}x-78 & x\in[78,79]\\80-x & x\in[79,80];\\0 & x\notin[78,80].\end{cases}\quad l_5(x)=\begin{cases}80-x & x\in[79,80];\\0 & x\notin[79,80].\end{cases}$$

(2)把已知节点值带入 M 关系式可得:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}M_0+2M_1+\frac{1}{2}M_2=0.015\\ \qquad\frac{1}{2}M_1+2M_2+\frac{1}{2}M_3=0.018\\ \qquad\qquad\frac{1}{2}M_2+2M_3+\frac{1}{2}M_4=0.014\\ \qquad\qquad\qquad\frac{1}{2}M_3+2M_4+\frac{1}{2}M_5=0.016\end{cases}$$

由边界条件可得 $M_0=M_5=0$,所以上面方程组变为可求解方程组

$$\begin{cases}2M_1+\frac{1}{2}M_2=0.015\\ \frac{1}{2}M_1+2M_2+\frac{1}{2}M_3=0.018\\ \qquad\frac{1}{2}M_2+2M_3+\frac{1}{2}M_4=0.014\\ \qquad\qquad\frac{1}{2}M_3+2M_4=0.016\end{cases}$$

解得 $M_1=0.0058,M_2=0.0067,M_3=0.0036,M_4=0.0071$.

所以可得在每个区间上的三次样条函数的表达式:

$$s(x)=\frac{M_{j-1}}{6}(x_j-x)^3+\frac{M_j}{6}(x-x_{j-1})^3+\left(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}}{6}\right)(x_j-x)+\left(y_j-\frac{M_j}{6}\right)(x-x_{j-1})$$

(3)当 $x=75.5$ 时, $I_5(75.5)=2.768l_0(75.5)+2.833l_1(75.5)=2.8005$;

$$s(75.5)=\frac{0.0058}{6}(75.5-76)^3+(2.768)(76-75.5)+\left(2.833-\frac{0.0058}{6}\right)(75.5-75)=2.799$$

当 $x=78.3$ 时, $I_5(75.5)=2.979l_3(78.3)+3.062l_4(78.3)=3.0039$;

$$s(78.3)=\frac{0.0036}{6}(79-78.3)^3+\frac{0.0071}{6}(78.3-78)^3$$
$$+\left(2.979-\frac{0.0036}{6}\right)(79-78.3)+\left(3.062-\frac{0.0071}{6}\right)(78.3-78)=3.0034.$$

10. 若给出 $\sin x, \cos x, \tan x$ 的函数表:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
1.567	0.999 992 8	0.003 796 3	263.411 25
1.568	0.999 996 1	0.002 796 3	357.611 06
1.569	0.999 998 4	0.001 796 3	556.690 98
1.570	0.999 999 7	0.000 796 3	1 255.765 59

用表上的数据和任一插值公式求:

(1) 用 $\tan x$ 表格直接计算 $\tan 1.5695$.

(2) 用 $\sin 1.5695$ 和 $\cos 1.5695$ 来计算 $\tan 1.5695$.并讨论这两个结果中误差变化的原因.

解:利用 Lagrange 插值直接用 tan 表计算得

$$\tan 1.5695 \approx 819.0342874999274;$$

利用 Lagrange 插值计算 sin 得

$$\sin 1.5695 \approx 0.99999917500000;$$

利用 Lagrange 插值计算 cos 得

$$\cos 1.5695 \approx 0.00129630000000;$$

最后利用 sin/cos 计算 tan 得

$$\tan 1.5695 \approx 771.4257309264500.$$

出现小除数,误差被放大.

11. 求三次样条函数 $s(x)$,已知

x_i	**0.25**	**0.30**	**0.39**	**0.45**	**0.53**
y_i	**0.500 0**	**0.547 7**	**0.624 5**	**0.670 8**	**0.728 0**

和边界条件

$$s'(0.25) = 1.0000, s'(0.53) = 0.6868$$

解:把表中数据带入 M 关系式可得

$$\begin{cases} \frac{5}{14}M_0 + 2M_1 + \frac{9}{14}M_2 = -4.3143 \\ \frac{3}{5}M_1 + 2M_2 + \frac{2}{5}M_3 = -3.2643 \\ \frac{3}{7}M_2 + 2M_3 + \frac{4}{7}M_4 = -2.4286 \end{cases}$$

由边界条件还可得到两个方程:

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = -5.5200 \\ M_3 + 2M_4 = -2.1150 \end{cases}$$

联立两个方程组可解得:

$$M_0 = -2.0284, M_1 = -1.4632, M_2 = -1.0319, M_3 = -0.8062, M_4 = -0.6544$$

带入 M 表达式便可得所求三次样条函数.

12. 称 **n** 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)$具有严格对角优势**,**若

$$\left|a_{ij}\right|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\left|a_{ij}\right|,i=1,2,\ldots,n$$

(1) 试证明**:**具有严格对角优势的方阵必可逆**.**

(2) 证明**:**方程组**(2.62)**解存在唯一**.**

证明: (1)设矩阵 A 按行严格对角占优,如果 A 奇异,则存在非零向量 x 使得 Ax=0,写成分量形式为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0,i=1,2,\ldots,n$$

令指标 i_0 使得 $\left|x_{i_0}\right|=\|x\|_\infty\neq0$,则

$$\left|a_{i_0i_0}x_{i_0}\right|=\left|-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}a_{i_0j}x_j\right|\leq\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}\left|a_{i_0j}\right|\left|x_j\right|\leq\|x\|_\infty\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}\left|a_{i_0j}\right|=\left|x_{i_0}\right|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}\left|a_{i_0j}\right|$$

因此

$$\left|x_{i_0}\right|\left(\left|a_{i_0i_0}\right|-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}\left|a_{i_0j}\right|\right)\leq0$$

即

$$\left|a_{i_0i_0}\right|-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i_0}}^{n}\left|a_{i_0j}\right|\leq0$$

上式与矩阵按行严格对角占优矛盾,因此矩阵非奇异.

(2)方程组(2.62)

$$\begin{cases}2M_0+\alpha_0M_1=\beta_0\\\left(1-\alpha_1\right)M_0+2M_1+\alpha_1M_2=\beta_1\\\left(1-\alpha_2\right)M_1+2M_2+\alpha_2M_3=\beta_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\left(1-\alpha_{n-1}\right)M_{n-2}+2M_{n-1}+\alpha_{n-1}M_n=\beta_{n-1}\\\left(1-\alpha_n\right)M_{n-1}+2M_n=\beta_n\end{cases}$$

由于该方程组系数矩阵为严格对角占优的方阵,所以由克拉默法则可知方程组存在唯一解.