

高等数学第六版上册课后习题答案

第一章

习题 1-1

1. 设 $A=(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$, $B=[-10, 3)$, 写出 $A \cup B$, $A \cap B$, AB 及 $A(A \cap B)$ 的表达式.

解 $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$,

$A \cap B = [-10, -5)$,

$AB = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$,

$A(A \cap B) = [-10, -5)$.

2. 设 A 、 B 是任意两个集合, 证明对偶律: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

证明 因为

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ 或 } x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \text{ 或 } x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c,$$

所以 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset X$. 证明

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

证明 因为

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B, \text{ 使 } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow (\text{因为 } x \in A \text{ 或 } x \in B) y \in f(A) \text{ 或 } y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B), \end{aligned}$$

所以 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) 因为

$$y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B, \text{ 使 } f(x) = y \Leftrightarrow (\text{因为 } x \in A \text{ 且 } x \in B) y \in f(A) \text{ 且 } y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B),$$

所以 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使 $g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$, 其中 I_X 、 I_Y 分别是 X 、 Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x \in X$, 有 $I_X x = x$; 对于每一个 $y \in Y$, 有 $I_Y y = y$. 证明: f 是双射, 且 g 是 f 的逆映射: $g = f^{-1}$.

证明 因为对于任意的 $y \in Y$, 有 $x = g(y) \in X$, 且 $f(x) = f(g(y)) = I_Y y = y$, 即 Y 中任意元

素都是 X 中某元素的像, 所以 f 为 X 到 Y 的满射.

又因为对于任意的 $x_1 \neq x_2$, 必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 否则若 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \Rightarrow x_1 = x_2$.

因此 f 既是单射, 又是满射, 即 f 是双射.

对于映射 $g: Y \rightarrow X$, 因为对每个 $y \in Y$, 有 $g(y) = x \in X$, 且满足 $f(x) = f[g(y)] = y, y = y$, 按逆映射的定义, g 是 f 的逆映射.

5. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X$. 证明:

$$(1) f^{-1}(f(A)) \supset A;$$

$$(2) \text{当 } f \text{ 是单射时, 有 } f^{-1}(f(A)) = A.$$

证明 (1) 因为 $x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A) \Rightarrow f^{-1}(y) = x \in f^{-1}(f(A))$,

所以 $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

$$(2) \text{由 (1) 知 } f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

另一方面, 对于任意的 $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow$ 存在 $y \in f(A)$, 使 $f^{-1}(y) = x \Rightarrow f(x) = y$. 因为 $y \in f(A)$ 且 f 是单射, 所以 $x \in A$. 这就证明了 $f^{-1}(f(A)) \subset A$. 因此 $f^{-1}(f(A)) = A$.

6. 求下列函数的自然定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2};$$

解 由 $3x+2 \geq 0$ 得 $x \geq -\frac{2}{3}$. 函数的定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

$$(2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

解 由 $1-x^2 \neq 0$ 得 $x \neq \pm 1$. 函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$(3) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

解 由 $x \neq 0$ 且 $1-x^2 \geq 0$ 得函数的定义域 $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

解 由 $4-x^2 > 0$ 得 $|x| < 2$. 函数的定义域为 $(-2, 2)$.

$$(5) y = \sin \sqrt{x};$$

解 由 $x \geq 0$ 得函数的定义 $D = [0, +\infty)$.

$$(6) y = \tan(x+1);$$

解 由 $x+1 \neq \frac{\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 得函数的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

·).

$$(7) y = \arcsin(x-3);$$

解 由 $|x-3| \leq 1$ 得函数的定义域 $D=[2, 4]$.

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

解 由 $3-x \geq 0$ 且 $x \neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0) \cup (0, 3)$.

$$(9) y = \ln(x+1);$$

解 由 $x+1 > 0$ 得函数的定义域 $D=(-1, +\infty)$.

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

解 由 $x \neq 0$ 得函数的定义域 $D=(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

7. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x;$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x^3 \sqrt{x-1}.$$

$$(4) f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

解 (1)不同. 因为定义域不同.

(2)不同. 因为对应法则不同, $x < 0$ 时, $g(x) = -x$.

(3)相同. 因为定义域、对应法则均相相同.

(4)不同. 因为定义域不同.

$$8. \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x| & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0 & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}, \text{ 求 } \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2), \text{ 并作出函数 } y = \varphi(x)$$

的图形.

$$\text{解 } \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = |\sin \frac{\pi}{6}| = \frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = |\sin \frac{\pi}{4}| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = |\sin(-\frac{\pi}{4})| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2) = 0.$$

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1);$$

$$(2) y = x + \ln x, (0, +\infty).$$

证明 (1)对于任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$, 有 $1-x_1 > 0, 1-x_2 > 0$. 因为当 $x_1 < x_2$ 时,

$$y_1 - y_2 = \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0,$$

所以函数 $y = \frac{x}{1-x}$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 内是单调增加的.

(2) 对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$y_1 - y_2 = (x_1 + \ln x_1) - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + \ln \frac{x_1}{x_2} < 0,$$

所以函数 $y = x + \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的.

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证明 对于 $\forall x_1, x_2 \in (-l, 0)$ 且 $x_1 < x_2$, 有 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$ 且 $-x_1 > -x_2$.

因为 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加且为奇函数, 所以

$$f(-x_2) < f(-x_1), -f(x_2) < -f(x_1), f(x_2) > f(x_1),$$

这就证明了对于 $\forall x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1) 设 $F(x) = f(x) + g(x)$. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数, 则

$$F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数, 即两个偶函数的和是偶函数.

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数, 则

$$F(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -F(x),$$

所以 $F(x)$ 为奇函数, 即两个奇函数的和是奇函数.

(2) 设 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. 如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶函数, 则

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数, 即两个偶函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数, 则

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x) \cdot g(x) = F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数, 即两个奇函数的积是偶函数.

如果 $f(x)$ 是偶函数, 而 $g(x)$ 是奇函数, 则

$$F(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x) \cdot g(x) = -F(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数, 即偶函数与奇函数的积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;

(2) $y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$;

(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) 因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 由 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$ 可见 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

(4) 因为 $f(-x)=(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

(5) 由 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$ 可见 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数.

(6) 因为 $f(-x)=\frac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$;

解 是周期函数, 周期为 $l=2\pi$.

(2) $y=\cos 4x$;

解 是周期函数, 周期为 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3) $y=1+\sin \pi x$;

解 是周期函数, 周期为 $l=2$.

(4) $y=x\cos x$;

解 不是周期函数.

(5) $y=\sin^2 x$.

解 是周期函数, 周期为 $l=\pi$.

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;

解 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 得 $x=y^3-1$, 所以 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

$$(2) y=\frac{1-x}{1+x};$$

解 由 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 得 $x=\frac{1-y}{1+y}$, 所以 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

$$(3) y=\frac{ax+b}{cx+d} (ad-bc \neq 0);$$

解 由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$, 所以 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

$$(4) y=2\sin 3x;$$

解 由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\frac{1}{3}\arcsin \frac{y}{2}$, 所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin \frac{x}{2}$.

$$(5) y=1+\ln(x+2);$$

解 由 $y=1+\ln(x+2)$ 得 $x=e^{y-1}-2$, 所以 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

$$(6) y=\frac{2^x}{2^x+1}.$$

解 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2 \frac{y}{1-y}$, 所以 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2 \frac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 先证必要性. 设函数 $f(x)$ 在 X 上有界, 则存在正数 M , 使 $|f(x)| \leq M$, 即 $-M \leq f(x) \leq M$. 这就证明了 $f(x)$ 在 X 上有下界 $-M$ 和上界 M .

再证充分性. 设函数 $f(x)$ 在 X 上有下界 K_1 和上界 K_2 , 即 $K_1 \leq f(x) \leq K_2$. 取 $M = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则 $-M \leq K_1 \leq f(x) \leq K_2 \leq M$,

即 $|f(x)| \leq M$.

这就证明了 $f(x)$ 在 X 上有界.

16. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

$$(1) y=u^2, u=\sin x, x_1=\frac{\pi}{6}, x_2=\frac{\pi}{3};$$

解 $y=\sin^2 x$, $y_1=\sin^2 \frac{\pi}{6} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, $y_2=\sin^2 \frac{\pi}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$.

$$(2) y=\sin u, u=2x, x_1=\frac{\pi}{8}, x_2=\frac{\pi}{4};$$

解 $y=\sin 2x$, $y_1=\sin(2\cdot\frac{\pi}{8})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=\sin(2\cdot\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2=2$;

解 $y=\sqrt{1+x^2}$, $y_1=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$, $y_2=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^u$, $u=x^2$, $x_1=0$, $x_2=1$;

解 $y=e^{x^2}$, $y_1=e^{0^2}=1$, $y_2=e^{1^2}=e$.

(5) $y=u^2$, $u=e^x$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

解 $y=e^{2x}$, $y_1=e^{2\cdot 1}=e^2$, $y_2=e^{2\cdot(-1)}=e^{-2}$.

17. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;

解 由 $0\leq x^2\leq 1$ 得 $|x|\leq 1$, 所以函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

(2) $f(\sin x)$;

解 由 $0\leq \sin x\leq 1$ 得 $2n\pi\leq x\leq (2n+1)\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 所以函数 $f(\sin x)$ 的定义域为

$[2n\pi, (2n+1)\pi]$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

(3) $f(x+a)$ ($a>0$);

解 由 $0\leq x+a\leq 1$ 得 $-a\leq x\leq 1-a$, 所以函数 $f(x+a)$ 的定义域为 $[-a, 1-a]$.

(4) $f(x+a)+f(x-a)$ ($a>0$).

解 由 $0\leq x+a\leq 1$ 且 $0\leq x-a\leq 1$ 得: 当 $0<a\leq \frac{1}{2}$ 时, $a\leq x\leq 1-a$; 当 $a>\frac{1}{2}$ 时, 无解. 因此当 $0<a\leq \frac{1}{2}$ 时函数的定义域为 $[a, 1-a]$, 当 $a>\frac{1}{2}$ 时函数无意义.

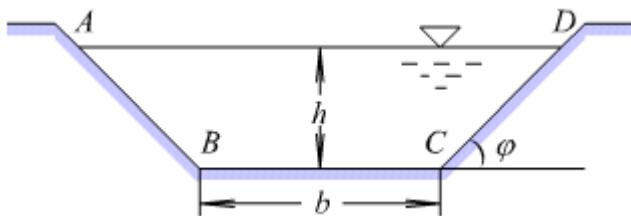
18. 设 $f(x)=\begin{cases} 1 & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -1 & |x|>1 \end{cases}$, $g(x)=e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=\begin{cases} 1 & |e^x|<1 \\ 0 & |e^x|=1 \\ -1 & |e^x|>1 \end{cases}$, 即 $f[g(x)]=\begin{cases} 1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x>0 \end{cases}$.

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e & |x|<1 \\ e^0 & |x|=1 \\ e^{-1} & |x|>1 \end{cases}$, 即 $g[f(x)]=\begin{cases} e & |x|<1 \\ 1 & |x|=1 \\ e^{-1} & |x|>1 \end{cases}$.

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角 $\varphi=40^\circ$ (图 1-37). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式, 并指明其定义域.

图 1-37



解 $AB=DC=\frac{h}{\sin 40^\circ}$, 又从

$$\frac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40^\circ \cdot h)]=S_0 \quad \text{得}$$

$$BC=\frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ \cdot h, \text{ 所以}$$

$$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h.$$

自变量 h 的取值范围应由不等式组

$$h>0, \quad \frac{S_0}{h}-\cot 40^\circ \cdot h>0$$

确定, 定义域为 $0<h<\sqrt{S_0 \cot 40^\circ}$.

20. 收音机每台售价为 90 元, 成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台以上的, 每多订购 1 台, 售价就降低 1 分, 但最低价为每台 75 元.

- (1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;
- (2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;
- (3) 某一商行订购了 1000 台, 厂方可获利润多少?

解 (1) 当 $0 \leq x \leq 100$ 时, $p=90$.

令 $0.01(x_0-100)=90-75$, 得 $x_0=1600$. 因此当 $x \geq 1600$ 时, $p=75$.

当 $100 < x < 1600$ 时,

$$p=90-(x-100) \times 0.01=91-0.01x.$$

综合上述结果得到

$$p=\begin{cases} 90 & 0 \leq x \leq 100 \\ 91-0.01x & 100 < x < 1600 \\ 75 & x \geq 1600 \end{cases}.$$

$$(2) P=(p-60)x=\begin{cases} 30x & 0 \leq x \leq 100 \\ 31x-0.01x^2 & 100 < x < 1600 \\ 15x & x \geq 1600 \end{cases}.$$

$$(3) P=31 \times 1000 - 0.01 \times 1000^2 = 21000 (\text{元}).$$

习题 1-2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 写出它们的极限:

$$(1) x_n = \frac{1}{2^n};$$

解 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

$$(2) x_n = (-1)^n \frac{1}{n};$$

解 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$.

$$(3) x_n = 2 + \frac{1}{n^2};$$

解 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = 2 + \frac{1}{n^2} \rightarrow 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n^2}) = 2$.

$$(4) x_n = \frac{n-1}{n+1};$$

解 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \rightarrow 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

$$(5) x_n = n(-1)^n.$$

解 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n = n(-1)^n$ 没有极限.

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n}$. 问 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$ 求出 N , 使当 $n > N$ 时, x_n 与其

极限之差的绝对值小于正数 ε , 当 $\varepsilon = 0.001$ 时, 求出数 N .

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$|x_n - 0| = \frac{|\cos \frac{n\pi}{2}|}{n} \leq \frac{1}{n}$. $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 也就是 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取

$$N = [\frac{1}{\varepsilon}],$$

则 $\forall n > N$, 有 $|x_n - 0| < \varepsilon$.

当 $\varepsilon = 0.001$ 时, $N = [\frac{1}{\varepsilon}] = 1000$.

3. 根据数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0;$$

分析 要使 $|\frac{1}{n^2} - 0| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, 只须 $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, 即 $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}]$, 当 $n > N$ 时, 有 $|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2};$$

分析 要使 $|\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2}| = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{4n} < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{4n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{4\varepsilon}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{4\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时, 有 $|\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2}| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1;$$

分析 要使 $|\frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1| = \frac{\sqrt{n^2 + a^2} - n}{n} = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2 + a^2} + n)} < \frac{a^2}{n} < \varepsilon$, 只须 $n > \frac{a^2}{\varepsilon}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{a^2}{\varepsilon}]$, 当 $\forall n > N$ 时, 有 $|\frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1| < \varepsilon$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \underset{n \uparrow}{0.999 \dots 439} = 1.$$

分析 要使 $|0.99 \dots 9 - 1| = \frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{10^{n-1}} < \varepsilon$, 即 $n > 1 + \lg \frac{1}{\varepsilon}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [1 + \lg \frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $\forall n > N$ 时, 有 $|0.99 \dots 9 - 1| < \varepsilon$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underset{n \uparrow}{0.999 \dots 439} = 1.$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明: 如果数列 $\{x_n\}$ 有极限, 但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

证明 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|u_n - a| < \varepsilon$, 从而

$$||u_n| - |a|| \leq |u_n - a| < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$.

数列 $\{x_n\}$ 有极限, 但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限. 例如 $\lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n| = 1$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

证明 因为数列 $\{x_n\}$ 有界, 所以存在 M , 使 $\forall n \in \mathbf{Z}$, 有 $|x_n| \leq M$.

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有 $|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. 从而当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| \leq M |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

6. 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $x_{2k-1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$,

证明: $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

证明 因为 $x_{2k-1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists K_1$, 当 $2k-1 > 2K_1-1$ 时, 有 $|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$;

$\exists K_2$, 当 $2k > 2K_2$ 时, 有 $|x_{2k} - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{2K_1-1, 2K_2\}$, 只要 $n > N$, 就有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

因此 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

习题 1-3

1. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8;$$

分析 因为

$$|(3x-1)-8| = |3x-9| = 3|x-3|,$$

所以要使 $|(3x-1)-8| < \varepsilon$, 只须 $|x-3| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{3}\varepsilon$, 当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 有

$$|(3x-1)-8| < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-1)=8$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} (5x+2)=12;$$

分析 因为

$$|(5x+2)-12|=|5x-10|=5|x-2|,$$

所以要使 $|(5x+2)-12|<\varepsilon$, 只须 $|x-2|<\frac{1}{5}\varepsilon$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{5}\varepsilon$, 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 有

$$|(5x+2)-12| < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 2} (5x+2)=12$.

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4;$$

分析 因为

$$\left| \frac{x^2-4}{x+2} - (-4) \right| = \left| \frac{x^2+4x+4}{x+2} \right| = |x+2| = |x-(-2)|,$$

所以要使 $\left| \frac{x^2-4}{x+2} - (-4) \right| < \varepsilon$, 只须 $|x-(-2)| < \varepsilon$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x-(-2)| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x^2-4}{x+2} - (-4) \right| < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = -4$.

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^3}{2x+1} = 2.$$

分析 因为

$$\left| \frac{1-4x^3}{2x+1} - 2 \right| = |1-2x-2| = 2|x-(-\frac{1}{2})|,$$

所以要使 $\left| \frac{1-4x^3}{2x+1} - 2 \right| < \varepsilon$, 只须 $|x-(-\frac{1}{2})| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, 当 $0 < |x-(-\frac{1}{2})| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{1-4x^3}{2x+1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^3}{2x+1} = 2$.

2. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2};$$

分析 因为

$$\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1+x^3-x^3}{2x^3} \right| = \frac{1}{2|x|^3},$$

所以要使 $\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{2|x|^3} < \varepsilon$, 即 $|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists X = \frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$, 当 $|x| > X$ 时, 有

$$\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

分析 因为

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

所以要使 $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$, 只须 $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$, 即 $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists X = \frac{1}{\varepsilon^2}$, 当 $x > X$ 时, 有

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

3. 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = x^2 \rightarrow 4$. 问 δ 等于多少, 使当 $|x-2| < \delta$ 时, $|y-4| < 0.001$?

解 由于当 $x \rightarrow 2$ 时, $|x-2| \rightarrow 0$, 故可设 $|x-2| < 1$, 即 $1 < x < 3$.

要使

$$|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2| < 0.001,$$

只要 $|x-2| < \frac{0.001}{5} = 0.0002$.

取 $\delta = 0.0002$, 则当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, 就有 $|x^2-4| < 0.001$.

4. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{x^2-1}{x^2+3} \rightarrow 1$, 问 X 等于多少, 使当 $|x| > X$ 时, $|y-1| < 0.01$?

解 要使 $\left| \frac{x^2-1}{x^2+3} - 1 \right| = \frac{4}{x^2+3} < 0.01$, 只要 $|x| > \sqrt{\frac{4}{0.01} - 3} = \sqrt{397}$, 故 $X = \sqrt{397}$.

5. 证明函数 $f(x) = |x|$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限为零.

证明 因为

$$|f(x) - 0| = ||x| - 0| = |x| = |x - 0|,$$

所以要使 $|f(x) - 0| < \varepsilon$, 只须 $|x| < \varepsilon$.

因为对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$, 使当 $0 < |x - 0| < \delta$, 时有

$$|f(x) - 0| = ||x| - 0| < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

6. 求 $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

证明 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x),$$

所以极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ 不存在.

7. 证明: 若 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A , 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

证明 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists X_1 > 0$, 使当 $x < -X_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$;

$\exists X_2 > 0$, 使当 $x > X_2$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 则当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

8. 根据极限的定义证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明 先证明必要性. 设 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

因此当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 和 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时都有

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

这说明 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时左右极限都存在并且都等于 A .

再证明充分性. 设 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta_1 > 0$, 使当 $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$;

$\exists \delta_2 > 0$, 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta_2$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ 及 $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, 从而有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,

即 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$.

9. 试给出 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的局部有界性的定理, 并加以证明.

解 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的局部有界性的定理: 如果 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 则存在 $X > 0$ 及 $M > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| < M$.

证明 设 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$, 则对于 $\varepsilon = 1, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon = 1$. 所以

$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$.

这就是说存在 $X > 0$ 及 $M > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| < M$, 其中 $M = 1 + |A|$.

习题 1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小? 举例说明之.

解 不一定.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = 2x, \beta(x) = 3x$ 都是无穷小, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{2}{3}, \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不是无

穷小.

2. 根据定义证明:

(1) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ 当 $x \rightarrow 3$ 时为无穷小;

(2) $y = x \sin \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷小.

证明 (1) 当 $x \neq 3$ 时 $|y| = \left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} \right| = |x - 3|$. 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时, 有

$$|y| = \left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} \right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon,$$

所以当 $x \rightarrow 3$ 时 $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ 为无穷小.

(2) 当 $x \neq 0$ 时 $|y| = |x| \sin \frac{1}{x} \leq |x - 0|$. 因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, 有

$$|y| = |x| \sin \frac{1}{x} \leq |x - 0| < \delta = \varepsilon,$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 为无穷小.

3. 根据定义证明: 函数 $y = \frac{1+2x}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件, 能使 $|y| > 10^4$?

证明 分析 $|y| = \left| \frac{1+2x}{x} \right| = \left| 2 + \frac{1}{x} \right| \geq \frac{1}{|x|} - 2$, 要使 $|y| > M$, 只须 $\frac{1}{|x|} - 2 > M$, 即 $|x| < \frac{1}{M+2}$.

证明 因为 $\forall M > 0, \exists \delta = \frac{1}{M+2}$, 使当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{1+2x}{x} \right| > M$,

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y = \frac{1+2x}{x}$ 是无穷大.

取 $M = 10^4$, 则 $\delta = \frac{1}{10^4 + 2}$. 当 $0 < |x - 0| < \frac{1}{10^4 + 2}$ 时, $|y| > 10^4$.

4. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x}$.

解 (1) 因为 $\frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$, 而当 $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 是无穷小, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x} = 2$.

(2) 因为 $\frac{1-x^2}{1-x} = 1+x (x \neq 1)$, 而当 $x \rightarrow 0$ 时 x 为无穷小, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x} = 1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义, 填写下表:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有恒 $ f(x) - A < \varepsilon$.			
$x \rightarrow x_0^+$				
$x \rightarrow x_0^-$				

$x \rightarrow \infty$		$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $ x > X$ 时, 有恒 $ f(x) > M$.		
$x \rightarrow +\infty$				
$x \rightarrow -\infty$				

解

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有恒 $ f(x) - A < \varepsilon$.	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有恒 $ f(x) > M$.	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有恒 $f(x) > M$.	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有恒 $f(x) < -M$.
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有恒 $ f(x) - A < \varepsilon$.	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有恒 $ f(x) > M$.	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有恒 $f(x) > M$.	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有恒 $f(x) < -M$.
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有恒 $ f(x) - A < \varepsilon$.	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有恒 $ f(x) > M$.	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有恒 $f(x) > M$.	$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有恒 $f(x) < -M$.
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $ x > X$ 时, 有恒 $ f(x) - A < \varepsilon$.	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $ x > X$ 时, 有恒 $ f(x) > M$.	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $ x > X$ 时, 有恒 $f(x) > M$.	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $ x > X$ 时, 有恒 $f(x) < -M$.
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $x > X$ 时, 有恒 $ f(x) - A < \varepsilon$.	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $x > X$ 时, 有恒 $ f(x) > M$.	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $x > X$ 时, 有恒 $f(x) > M$.	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $x > X$ 时, 有恒 $f(x) < -M$.
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $x < -X$ 时, 有恒 $ f(x) - A < \varepsilon$.	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $x < -X$ 时, 有恒 $ f(x) > M$.	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $x < -X$ 时, 有恒 $f(x) > M$.	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使 当 $x < -X$ 时, 有恒 $f(x) < -M$.

6. 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 这个函数是否为当 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大? 为什么?

解 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

这是因为 $\forall M > 0$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内总能找到这样的 x , 使得 $|y(x)| > M$. 例如

$$y(2k\pi) = 2k\pi \cos 2k\pi = 2k\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

当 k 充分大时, 就有 $|y(2k\pi)| > M$.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $y = x \cos x$ 不是无穷大.

这是因为 $\forall M > 0$, 找不到这样一个时刻 N , 使对一切大于 N 的 x , 都有 $|y(x)| > M$.

例如

$$y(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = (2k\pi + \frac{\pi}{2}) \cos(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

对任何大的 N , 当 k 充分大时, 总有 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} > N$, 但 $|y(x)| = 0 < M$.

7. 证明: 函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界, 但这函数不是当 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷大.

证明 函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界. 这是因为

$\forall M > 0$, 在 $(0, 1]$ 中总可以找到点 x_k , 使 $y(x_k) > M$. 例如当

$$x_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

时, 有

$$y(x_k) = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

当 k 充分大时, $y(x_k) > M$.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不是无穷大. 这是因为

$\forall M > 0$, 对所有的 $\delta > 0$, 总可以找到这样的点 x_k , 使 $0 < x_k < \delta$, 但 $y(x_k) < M$. 例如可取

$$x_k = \frac{1}{2k\pi} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

当 k 充分大时, $x_k < \delta$, 但 $y(x_k) = 2k\pi \sin 2k\pi = 0 < M$.

习题 1-5

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3} = \frac{2^2 + 5}{2 - 3} = -9.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 3}{(\sqrt{3})^2 + 1} = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x + 2} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$\text{解 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2});$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 2.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 - 1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 - 1} = 0 \text{ (分子次数低于分母次数, 极限为零).}$$

或
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = 0.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2});$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x^2}) = 1 \times 2 = 2.$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n});$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2};$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

$$(13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3};$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3} = \frac{1}{5}$ (分子与分母的次数相同, 极限为最高次项系数之比).

或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})(1 + \frac{3}{n}) = \frac{1}{5}.$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3});$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -1. \end{aligned}$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2};$$

$$\text{解 } \text{因为 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2} = \frac{0}{16} = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2} = \infty.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1} = \infty \text{ (因为分子次数高于分母次数).}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1).$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1) = \infty \text{ (因为分子次数高于分母次数).}$$

3. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ (当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 是无穷小, 而 $\sin \frac{1}{x}$ 是有界变量).

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \arctan x = 0$ (当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小,

而 $\arctan x$ 是有界变量).

4. 证明本节定理 3 中的(2).

习题 1-5

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3};$$

解 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3} = \frac{2^2 + 5}{2 - 3} = -9.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1};$$

解 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 3}{(\sqrt{3})^2 + 1} = 0.$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x};$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x + 2} = \frac{1}{2}.$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$\text{解 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2});$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 2.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 - 1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 - 1} = 0 \text{ (分子次数低于分母次数, 极限为零).}$$

或
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = 0.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2});$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})(2 - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{x^2}) = 1 \times 2 = 2.$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n});$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}{n^2};$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

$$(13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3};$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3} = \frac{1}{5}$ (分子与分母的次数相同, 极限为最高次项系数之比).

$$\text{或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n}) = \frac{1}{5}.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3});$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -1. \end{aligned}$$

2. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2};$$

$$\text{解 因为 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2} = \frac{0}{16} = 0, \text{ 所以 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2} = \infty.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1} = \infty \text{ (因为分子次数高于分母次数).}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1).$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1) = \infty \text{ (因为分子次数高于分母次数).}$$

3. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ (当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } x^2 \text{ 是无穷小, 而 } \sin \frac{1}{x} \text{ 是有界变量).}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \arctan x = 0$ (当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 是无穷小,

而 $\arctan x$ 是有界变量).

4. 证明本节定理 3 中的(2).

习题 1-7

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比, 哪一个是高阶无穷小?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x^3}{2x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^2}{2-x} = 0$,

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2-x^3 是高阶无穷小, 即 $x^2-x^3 = o(2x-x^2)$.

2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小 $1-x$ 和 $(1)1-x^3$, $(2)\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等价?

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^3}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x+x^2) = 3$,

所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x$ 和 $1-x^3$ 是同阶的无穷小, 但不是等价无穷小.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) = 1$,

所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $1-x$ 和 $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是同阶的无穷小, 而且是等价无穷小.

3. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:

(1) $\arctan x \sim x$;

(2) $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

证明 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$ (提示: 令 $y = \arctan x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时,

$y \rightarrow 0$),

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \sim x$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$,

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

4. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} (n, m \text{ 为正整数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n>m \\ \infty & n<m \end{cases}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\frac{1}{\cos x} - 1)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2 \cos x} = \frac{1}{2}.$$

(4) 因为

$$\sin x - \tan x = \tan x (\cos x - 1) = -2 \tan x \sin^2 \frac{x}{2} \sim -2x \cdot (\frac{x}{2})^2 = -\frac{1}{2}x^3 (x \rightarrow 0),$$

$$\sqrt[3]{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} \sim \frac{1}{3}x^2 (x \rightarrow 0),$$

$$\sqrt{1+\sin x} - 1 = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x} + 1} \sim \sin x \sim x (x \rightarrow 0),$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^2 \cdot x} = -3.$

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1) $\alpha \sim \alpha$ (自反性);

(2) 若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\beta \sim \alpha$ (对称性);

(3) 若 $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$, 则 $\alpha \sim \gamma$ (传递性).

证明 (1) $\lim \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, 所以 $\alpha \sim \alpha$;

(2) 若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 从而 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$. 因此 $\beta \sim \alpha$;

(3) 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, $\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim \frac{\beta}{\gamma} \cdot \lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$. 因此 $\alpha \sim \gamma$.

习题 1-8

1. 研究下列函数的连续性, 并画出函数的图形:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

解 已知多项式函数是连续函数, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 和 $(1, 2]$ 内是连续的.

在 $x=1$ 处, 因为 $f(1)=1$, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, 从而函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是连续的.

综上所述, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是连续函数.

$$(2) f(x) = \begin{cases} x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}.$$

解 只需考察函数在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处的连续性.

在 $x=-1$ 处, 因为 $f(-1)=-1$, 并且

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 = 1 \neq f(-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1 = f(-1),$$

所以函数在 $x=-1$ 处间断, 但右连续.

在 $x=1$ 处, 因为 $f(1)=1$, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = f(1), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 = f(1),$$

所以函数在 $x=1$ 处连续.

综合上述讨论, 函数在 $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, +\infty)$ 内连续, 在 $x=-1$ 处间断, 但右连续.

2. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类, 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使它连续:

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, \quad x=1, x=2;$$

解 $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$. 因为函数在 $x=2$ 和 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=2$ 和

$x=1$ 是函数的间断点.

因为 $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \infty$, 所以 $x=2$ 是函数的第二类间断点;

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x-2)} = -2$, 所以 $x=1$ 是函数的第一类间断点, 并且是可去间断

点. 在 $x=1$ 处, 令 $y=-2$, 则函数在 $x=1$ 处成为连续的.

$$(2) y = \frac{x}{\tan x}, x=k, x=k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

解 函数在点 $x=k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 和 $x=k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 处无定义, 因而这些点都是函数的间断点.

因 $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty (k \neq 0)$, 故 $x=k\pi (k \neq 0)$ 是第二类间断点;

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0 (k \in \mathbb{Z})$, 所以 $x=0$ 和 $x=k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 是第一

类间断点且是可去间断点.

令 $y|_{x=0}=1$, 则函数在 $x=0$ 处成为连续的;

令 $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y=0$, 则函数在 $x=k\pi + \frac{\pi}{2}$ 处成为连续的.

$$(3) y = \cos^2 \frac{1}{x}, x=0;$$

解 因为函数 $y = \cos^2 \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义, 所以 $x=0$ 是函数 $y = \cos^2 \frac{1}{x}$ 的间断点.

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 \frac{1}{x}$ 不存在, 所以 $x=0$ 是函数的第二类间断点.

$$(4) y = \begin{cases} x-1 & x \leq 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}, x=1.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-x) = 2$, 所以 $x=1$ 是函数的第一类不可去间断点.

3. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$ 的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

$$\text{解 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x = \begin{cases} -x & |x| > 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ x & |x| < 1 \end{cases}.$$

在分段点 $x=-1$ 处, 因为 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$, 所以 $x=-1$ 为函数的第一类不可去间断点.

在分段点 $x=1$ 处, 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x) = -1$, 所以 $x=1$ 为函数的第一类不可去间断点.

4. 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0) \neq 0$, 则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \neq 0$.

证明 不妨设 $f(x_0) > 0$. 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) > 0$, 由极限的局部保号性定理, 存在 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$, 使当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时 $f(x) > 0$, 从而当 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) > 0$. 这就是说, 则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \neq 0$.

5. 试分别举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

(1) $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm n, \pm \frac{1}{n}, \dots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点, 且它们都是无穷间断点;

解 函数 $f(x) = \csc(\pi x) + \csc \frac{\pi}{x}$ 在点 $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm n, \pm \frac{1}{n}, \dots$ 处是间断的, 且这些点是函数的无穷间断点.

(2) $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处不连续, 但 $|f(x)|$ 在 \mathbf{R} 上处处连续;

解 函数 $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbf{Q} \\ 1 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上处处不连续, 但 $|f(x)| = 1$ 在 \mathbf{R} 上处处连续.

(3) $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处有定义, 但仅在一处连续.

解 函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbf{Q} \\ -x & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上处处有定义, 它只在 $x=0$ 处连续.

习题 1-9

1. 求函数 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

解 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6} = \frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)}$, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内除点 $x=2$ 和 $x=-3$

外是连续的, 所以函数 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty, -3)$ 、 $(-3, 2)$ 、 $(2, +\infty)$.

在函数的连续点 $x=0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$.

在函数的间断点 $x=2$ 和 $x=-3$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)(x+1)}{x-2} = -\frac{8}{5}.$$

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 证明函数

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证明 已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

可以验证

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|],$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|].$$

因此 $\varphi(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0) + g(x_0) + |f(x_0) - g(x_0)|],$

$$\psi(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0) + g(x_0) - |f(x_0) - g(x_0)|].$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|] \\ &= \frac{1}{2}[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)|] \\ &= \frac{1}{2}[f(x_0) + g(x_0) + |f(x_0) - g(x_0)|] = \varphi(x_0), \end{aligned}$$

所以 $\varphi(x)$ 在点 x_0 也连续.

同理可证明 $\psi(x)$ 在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^3;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2 \cos 2x);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}).$$

解 (1) 因为函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ 是初等函数, $f(x)$ 在点 $x=0$ 有定义, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = f(0) = \sqrt{0^2 - 2 \cdot 0 + 5} = \sqrt{5}.$$

(2) 因为函数 $f(x) = (\sin 2x)^3$ 是初等函数, $f(x)$ 在点 $x = \frac{\pi}{4}$ 有定义, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^3 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)^3 = 1.$$

(3) 因为函数 $f(x) = \ln(2 \cos 2x)$ 是初等函数, $f(x)$ 在点 $x = \frac{\pi}{6}$ 有定义, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2 \cos 2x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln(2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6}) = 0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x-4}{(x-1)(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{5 \cdot 1 - 4} + \sqrt{1}} = 2.$$

$$\begin{aligned}
(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos \frac{a+a}{2} \cdot 1 = \cos a. \\
(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}})} = 1.
\end{aligned}$$

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x}{2}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x} - x}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) = \ln 1 = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 + \frac{1}{x})^x \right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3 \tan^2 x)^{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+3 \tan^2 x)^{\frac{1}{3 \tan^2 x}} \right]^3 = e^3.$$

$$(5) \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}} = \left(1 + \frac{-3}{6+x} \right)^{\frac{6+x}{-3} \cdot \frac{x-1}{2}}. \text{ 因为}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{6+x} \right)^{\frac{6+x}{-3}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{6+x} \cdot \frac{x-1}{2} = -\frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x} - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\sin^2 x} + 1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x} - 1)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x)(\sqrt{1+\sin^2 x} + 1)}{x \sin^2 x (\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a+x & x \geq 0 \end{cases}$, 应当如何选择数 a , 使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$

内的连续函数?

解 要使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 只须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 即只须

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = a.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a+x) = a$, 所以只须取 $a=1$.

习题 1-10

1. 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证明 设 $f(x) = x^5 - 3x - 1$, 则 $f(x)$ 是闭区间 $[1, 2]$ 上的连续函数.

因为 $f(1) = -3$, $f(2) = 25$, $f(1)f(2) < 0$, 所以由零点定理, 在 $(1, 2)$ 内至少有一点 ξ ($1 < \xi < 2$), 使 $f(\xi) = 0$, 即 $x = \xi$ 是方程 $x^5 - 3x = 1$ 的介于 1 和 2 之间的根.

因此方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

2. 证明方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0$, $b > 0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

证明 设 $f(x)=a\sin x+b-x$, 则 $f(x)$ 是 $[0, a+b]$ 上的连续函数.

$$f(0)=b, f(a+b)=a\sin(a+b)+b-(a+b)=a[\sin(a+b)-1]\leq 0.$$

若 $f(a+b)=0$, 则说明 $x=a+b$ 就是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根;

若 $f(a+b)<0$, 则 $f(0)f(a+b)<0$, 由零点定理, 至少存在一点 $\xi\in(0, a+b)$, 使 $f(\xi)=0$, 这说明 $x=\xi$ 也是方程 $x=a\sin x+b$ 的一个不超过 $a+b$ 的根.

总之, 方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

3. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a, b]$ 上的任意两点 x, y , 恒有 $|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$, 其中 L 为正常数, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明: 至少有一点 $\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

证明 设 x_0 为 (a, b) 内任意一点. 因为

$$0\leq \lim_{x\rightarrow x_0} |f(x)-f(x_0)|\leq \lim_{x\rightarrow x_0} L|x-x_0|=0,$$

所以
$$\lim_{x\rightarrow x_0} |f(x)-f(x_0)|=0,$$

即
$$\lim_{x\rightarrow x_0} f(x)=f(x_0).$$

因此 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

同理可证 $f(x)$ 在点 a 处左连续, 在点 b 处右连续, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 由零点定理, 至少有一点 $\xi\in(a, b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

4. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上至少有一点 ξ , 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明 显然 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上也连续. 设 M 和 m 分别是 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上的最大值和最小值.

因为 $x_i\in[x_1, x_n](1\leq i\leq n)$, 所以有 $m\leq f(x_i)\leq M$, 从而有

$$n\cdot m\leq f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leq n\cdot M,$$

$$m\leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leq M.$$

由介值定理推论, 在 $[x_1, x_n]$ 上至少有一点 ξ , 使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

5. 证明: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x\rightarrow\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 内有

界.

证明 令 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X > 0$, 只要 $|x| > X$ 就有

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ 即 } A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

又由于 $f(x)$ 在闭区间 $[-X, X]$ 上连续, 根据有界性定理, 存在 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$, $x \in [-X, X]$.

取 $N = \max\{M, |A - \varepsilon|, |A + \varepsilon|\}$, 则 $|f(x)| \leq N$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

6. 在什么条件下, (a, b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续?

总习题一

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的 _____ 条件. 数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的 _____ 条件.

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 _____ 条件. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的 _____ 条件.

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 的 _____ 条件.
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的 _____ 条件.

(4) $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 _____ 条件.

解 (1) 必要, 充分.

(2) 必要, 充分.

(3) 必要, 充分.

(4) 充分必要.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有().

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小; (B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小;

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小; (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x}$

$$= \ln 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} + \ln 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \ln 2 + \ln 3 \quad (\text{令 } 2^x - 1 = t, 3^x - 1 = u).$$

所以 $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小, 故应选 B.

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$;

(2) $f(\ln x)$;

(3) $f(\arctan x)$;

(4) $f(\cos x)$.

解 (1) 由 $0 \leq e^x \leq 1$ 得 $x \leq 0$, 即函数 $f(e^x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$.

(2) 由 $0 \leq \ln x \leq 1$ 得 $1 \leq x \leq e$, 即函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1, e]$.

(3) 由 $0 \leq \arctan x \leq 1$ 得 $0 \leq x \leq \tan 1$, 即函数 $f(\arctan x)$ 的定义域为 $[0, \tan 1]$.

(4) 由 $0 \leq \cos x \leq 1$ 得 $2n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2} (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$,

即函数 $f(\cos x)$ 的定义域为 $[2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}] (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases},$$

求 $f[f(x)], g[g(x)], f[g(x)], g[f(x)]$.

解 因为 $f(x) \geq 0$, 所以 $f[f(x)] = f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$;

因为 $g(x) \leq 0$, 所以 $g[g(x)] = 0$;

因为 $g(x) \leq 0$, 所以 $f[g(x)] = 0$;

因为 $f(x) \geq 0$, 所以 $g[f(x)] = -f^2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$.

5. 利用 $y = \sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

(1) $y = |\sin x|$;

(2) $y = \sin|x|$;

(3) $y = 2\sin \frac{x}{2}$.

6. 把半径为 R 的一圆形铁片, 自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为 α 的函数.

解 设围成的圆锥的底半径为 r , 高为 h , 依题意有

$$R(2\pi - \alpha) = 2\pi r, \quad r = \frac{R(2\pi - \alpha)}{2\pi},$$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2\pi - \alpha)^2}{4\pi^2}} = R \frac{\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}{2\pi}.$$

圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2(2\pi - \alpha)^2}{4\pi^2} \cdot R \frac{\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}{2\pi}$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - \alpha)^2 \cdot \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} \quad (0 < \alpha < 2\pi).$$

7. 根据函数极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使 $|\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} - 5| < \varepsilon$, 只需 $|x - 3| < \varepsilon$, 取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时, 就有 $|x - 3| < \varepsilon$, 即 $|\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} - 5| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$.

8. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{(x - 1)^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} (a > 0, b > 0, c > 0);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - x + 1} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \infty$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2} + \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{1}{2}} = e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2}{x^3} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(提示: 用等价无穷小换).

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \right)^{\frac{3}{a^x + b^x + c^x - 3} \cdot \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3x}}, \text{ 因为}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \right)^{\frac{3}{a^x + b^x + c^x - 3}} = e,$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3x} &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} + \frac{c^x - 1}{x} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left[\ln a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)} + \ln b \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+u)} + \ln c \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+v)} \right] \\
 &= \frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c) = \ln \sqrt[3]{abc},
 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$

提示: 求极限过程中作了变换 $a^x - 1 = t$, $b^x - 1 = u$, $c^x - 1 = v$.

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [1 + (\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1} (\sin x - 1) \tan x}, \text{ 因为}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [1 + (\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1}} = e,$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - 1) \tan x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (\sin x - 1)}{\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (\sin^2 x - 1)}{\cos x (\sin x + 1)} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sin x + 1} = 0,
 \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1.$

9. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ a + x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 应怎样选择数 a ?

解 要使函数连续, 必须使函数在 $x=0$ 处连续.

因为

$$f(0)=a, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a+x^2) = a, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

所以当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 因此选取 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x-1}} & x > 0 \\ \ln(1+x) & -1 < x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的间断点, 并说明间断点所属类型.

解 因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义, 所以 $x=1$ 是函数的一个间断点.

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \text{ (提示 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty \text{ (提示 } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty),$$

所以 $x=1$ 是函数的第二类间断点.

$$\text{又因为 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x+1) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{e},$$

所以 $x=0$ 也是函数的间断点, 且为第一类间断点.

11. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$.

证明 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$.

12. 证明方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

证明 设 $f(x) = \sin x + x + 1$, 则函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续.

$$\text{因为 } f(-\frac{\pi}{2}) = -1 - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi}{2} + 1 = 2 + \frac{\pi}{2}, f(-\frac{\pi}{2}) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0,$$

所以由零点定理, 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

这说明方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

13. 如果存在直线 $L: y=kx+b$, 使得当 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$) 时, 曲线 $y=f(x)$ 上的动点 $M(x, y)$ 到直线 L 的距离 $d(M, L) \rightarrow 0$, 则称 L 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k \neq 0$ 时, 称 L 为斜渐近线.

(1) 证明: 直线 $L: y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的充分必要条件是

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx].$$

(2) 求曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

证明 (1) 仅就 $x \rightarrow \infty$ 的情况进行证明.

按渐近线的定义, $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx+b)] = 0.$$

必要性: 设 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx+b)] = 0$,

于是有
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0 \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x},$$

同时有
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0 \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

充分性: 如果 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx+b)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] - b = b - b = 0,$$

因此 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

(2) 因为 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 2$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - 2x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [(2x-1)e^{\frac{1}{x}} - 2x] = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - 1 = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} - 1 = 1,$$

所以曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为 $y = 2x+1$.

习题 2-1

1. 设物体绕定轴旋转, 在时间间隔 $[0, t]$ 内转过的角度为 θ , 从而转角 θ 是 t 的函数: $\theta = \theta(t)$. 如果旋转是匀速的, 那么称 $\omega = \frac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度, 如果旋转是非匀速的, 应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度?

解 在时间间隔 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内的平均角速度 $\bar{\omega}$ 为

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta(t_0 + \Delta t) - \theta(t_0)}{\Delta t},$$

故 t_0 时刻的角速度为

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t_0 + \Delta t) - \theta(t_0)}{\Delta t} = \theta'(t_0).$$

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时, 物体就不断冷却, 若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T = T(t)$, 应怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度?

解 物体在时间间隔 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内, 温度的改变量为

$$\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t),$$

平均冷却速度为

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t},$$

故物体在时刻 t 的冷却速度为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = T'(t).$$

3. 设某工厂生产 x 单位产品所花费的成本是 $f(x)$ 元, 此函数 $f(x)$ 称为成本函数, 成本函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在经济学中称为边际成本. 试说明边际成本 $f'(x)$ 的实际意义.

解 $f(x + \Delta x) - f(x)$ 表示当产量由 x 改变到 $x + \Delta x$ 时成本的改变量.

$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 表示当产量由 x 改变到 $x + \Delta x$ 时单位产量的成本.

$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 表示当产量为 x 时单位产量的成本.

4. 设 $f(x) = 10x^2$, 试按定义, 求 $f'(-1)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{10(-1 + \Delta x)^2 - 10(-1)^2}{\Delta x} \\ &= 10 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 10 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2 + \Delta x) = -20. \end{aligned}$$

5. 证明 $(\cos x)' = -\sin x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\sin(x + \frac{\Delta x}{2})\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] = -\sin x.$$

6. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在, 按照导数定义观察下列极限, 指出 A 表示什么:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A;$$

$$\begin{aligned} \text{解 } A &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= - \lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = -f'(x_0). \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A, \text{ 其中 } f(0)=0, \text{ 且 } f'(0) \text{ 存在};$$

$$\text{解 } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x} = f'(0).$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = A.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } A &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)] - [f(x_0 - h) - f(x_0)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) - [-f'(x_0)] = 2f'(x_0). \end{aligned}$$

7. 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^4;$$

$$(2) y = \sqrt[3]{x^2};$$

$$(3) y = x^{1.6};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$(5) y = \frac{1}{x^2};$$

$$(6) y = x^3 \sqrt[5]{x};$$

$$(7) y' = \frac{x^{23} \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^5}};$$

解 (1) $y' = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$.

$$(2) y' = (\sqrt[3]{x^2})' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}.$$

$$(3) y' = (x^{1.6})' = 1.6x^{1.6-1} = 1.6x^{0.6}.$$

$$(4) y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}.$$

$$(5) y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}.$$

$$(6) y' = (x^3 \sqrt[5]{x})' = (x^{\frac{16}{5}})' = \frac{16}{5} x^{\frac{16}{5}-1} = \frac{16}{5} x^{\frac{11}{5}}.$$

$$(7) y' = \left(\frac{x^{23} \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^5}}\right)' = (x^{\frac{1}{6}})' = \frac{1}{6} x^{\frac{1}{6}-1} = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}}.$$

8. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$ (m). 求这物体在 $t=2$ 秒(s)时的速度.

解 $v=(s)'=3t^2$, $v|_{t=2}=12$ (米/秒).

9. 如果 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(0)$ 存在, 证明 $f'(0)=0$.

证明 当 $f(x)$ 为偶函数时, $f(-x)=f(x)$, 所以

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{x - 0} = - \lim_{-x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0} = -f'(0),$$

从而有 $2f'(0)=0$, 即 $f'(0)=0$.

10. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率: $x=\frac{2}{3}\pi$, $x=\pi$.

解 因为 $y'=\cos x$, 所以斜率分别为

$$k_1 = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = \cos \pi = -1.$$

11. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 处的切线方程和法线方程式.

解 $y'=-\sin x$, $y'|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

故在点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 处, 切线方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$,

法线方程为 $y - \frac{1}{2} = \frac{-2}{\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})$.

12. 求曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

解 $y'=e^x, y'|_{x=0}=1$, 故在 $(0, 1)$ 处的切线方程为

$$y-1=1 \cdot (x-0), \text{ 即 } y=x+1.$$

13. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点, 作过这两点的割线, 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解 $y'=2x$, 割线斜率为 $k=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=4$.

令 $2x=4$, 得 $x=2$.

因此抛物线 $y=x^2$ 上点 $(2, 4)$ 处的切线平行于这条割线.

14. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1) $y=|\sin x|$;

$$(2) y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

解 (1) 因为

$$f(0)=0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} |\sin x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sin x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} |\sin x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0,$$

所以函数在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$y'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

$$y'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

而 $y'_-(0) \neq y'_+(0)$, 所以函数在 $x=0$ 处不可导.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$, 又 $f(0)=0$, 所以函数在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

所以函数在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax+b & x > 1 \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导, a, b 应取什

么值?

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+b) = a+b, \quad f(1) = a+b,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处连续, 必须 $a+b=1$.

又因为当 $a+b=1$ 时

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+b-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x-1)+a+b-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x-1)}{x-1} = a,$$

所以要使函数在 $x=1$ 处可导, 必须 $a=2$, 此时 $b=-1$.

16. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$, 又 $f'(0)$ 是否存在?

解 因为

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0,$$

而 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 所以 $f'(0)$ 不存在.

17. 已知 $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

解 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x, f'(x) = 1$;

$$\text{因为 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 0}{x} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1, \text{ 所以 } f'(0) = 1, \text{ 从而}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}.$$

18. 证明: 双曲线 $xy = a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

$$\text{解 由 } xy = a^2 \text{ 得 } y = \frac{a^2}{x}, \quad k = y' = -\frac{a^2}{x^2}.$$

设 (x_0, y_0) 为曲线上任一点, 则过该点的切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0).$$

令 $y=0$, 并注意 $x_0 y_0 = a^2$, 解得 $x = \frac{y_0 x_0^2}{a^2} + x_0 = 2x_0$, 为切线在 x 轴上的距.

令 $x=0$, 并注意 $x_0 y_0 = a^2$, 解得 $y = \frac{a^2}{x_0} + y_0 = 2y_0$, 为切线在 y 轴上的距.

此切线与二坐标轴构成的三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2} |2x_0| |2y_0| = 2 |x_0 y_0| = 2a^2.$$

习题 2-2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:

$$(\cot x)' = -\csc^2 x; \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

$$\text{解 } (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \frac{4}{x^5} + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12;$$

$$(2) y = 5x^3 - 2^x + 3e^x;$$

$$(3) y = 2\tan x + \sec x - 1;$$

$$(4) y = \sin x \cos x;$$

$$(5) y = x^2 \ln x;$$

$$(6) y = 3e^x \cos x;$$

$$(7) y = \frac{\ln x}{x};$$

$$(8) y = \frac{e^x}{x^2} + \ln 3;$$

$$(9) y = x^2 \ln x \cos x;$$

$$(10) s = \frac{1 + \sin t}{1 + \cos t};$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) y' &= \left(\frac{4}{x^5} + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12 \right)' = (4x^{-5} + 7x^{-4} - 2x^{-1} + 12)' \\ &= -20x^{-6} - 28x^{-5} + 2x^{-2} = -\frac{20}{x^6} - \frac{28}{x^5} + \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

$$(2) y' = (5x^3 - 2^x + 3e^x)' = 15x^2 - 2^x \ln 2 + 3e^x.$$

$$(3) y' = (2 \tan x + \sec x - 1)' = 2 \sec^2 x + \sec x \tan x = \sec x (2 \sec x + \tan x).$$

$$\begin{aligned} (4) y' &= (\sin x \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x (\cos x)' \\ &= \cos x \cos x + \sin x (-\sin x) = \cos 2x. \end{aligned}$$

$$(5) y' = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

$$(6) y' = (3e^x \cos x)' = 3e^x \cos x + 3e^x \cdot (-\sin x) = 3e^x (\cos x - \sin x).$$

$$(7) y' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$(8) y' = \left(\frac{e^x}{x^2} + \ln 3 \right)' = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} (9) y' &= (x^2 \ln x \cos x)' = 2x \ln x \cos x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos x + x^2 \ln x (-\sin x) \\ &= 2x \ln x \cos x + x \cos x - x^2 \ln x \sin x. \end{aligned}$$

$$(10) s' = \left(\frac{1 + \sin t}{1 + \cos t} \right)' = \frac{\cos t(1 + \cos t) - (1 + \sin t)(-\sin t)}{(1 + \cos t)^2} = \frac{1 + \sin t + \cos t}{(1 + \cos t)^2}.$$

3. 求下列函数在给定点处的导数:

$$(1) y = \sin x - \cos x, \text{ 求 } y' \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} \text{ 和 } y' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}}.$$

(2) $\rho = \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$, 求 $\frac{d\rho}{d\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

(3) $f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}$, 求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

解 (1) $y' = \cos x + \sin x$,

$$y' \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$y' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

(2) $\frac{d\rho}{d\theta} = \sin \theta + \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta + \theta \cos \theta$,

$$\frac{d\rho}{d\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \frac{\pi}{2}).$$

(3) $f(x) = \frac{3}{(5-x)^2} + \frac{2}{5}x$, $f'(0) = \frac{3}{25}$, $f'(2) = \frac{17}{15}$.

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$.

求:

(1) 该物体的速度 $v(t)$;

(2) 该物体达到最高点的时刻.

解 (1) $v(t) = s'(t) = v_0 - gt$.

(2) 令 $v(t) = 0$, 即 $v_0 - gt = 0$, 得 $t = \frac{v_0}{g}$, 这就是物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线 $y = 2 \sin x + x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y' = 2 \cos x + 2x$, $y'|_{x=0} = 2$, 又当 $x=0$ 时, $y=0$, 所以所求的切线方程为

$$y = 2x,$$

所求的法线方程为

$$y = -\frac{1}{2}x, \text{ 即 } x + 2y = 0.$$

6. 求下列函数的导数:

(1) $y = (2x+5)^4$

$$(2) y = \cos(4-3x);$$

$$(3) y = e^{-3x^2};$$

$$(4) y = \ln(1+x^2);$$

$$(5) y = \sin^2 x;$$

$$(6) y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$(7) y = \tan(x^2);$$

$$(8) y = \arctan(e^x);$$

$$(9) y = (\arcsin x)^2;$$

$$(10) y = \ln \cos x.$$

解 (1) $y' = 4(2x+5)^{4-1} \cdot (2x+5)' = 4(2x+5)^3 \cdot 2 = 8(2x+5)^3.$

(2) $y' = -\sin(4-3x) \cdot (4-3x)' = -\sin(4-3x) \cdot (-3) = 3\sin(4-3x).$

(3) $y' = e^{-3x^2} \cdot (-3x^2)' = e^{-3x^2} \cdot (-6x) = -6xe^{-3x^2}.$

(4) $y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$

(5) $y' = 2\sin x (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$

(6) $y' = [(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (a^2 - x^2)'$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

(7) $y' = \sec^2(x^2) \cdot (x^2)' = 2x\sec^2(x^2).$

(8) $y' = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$

(9) $y' = 2\arcsin x (\arcsin x)' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

(10) $y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -\tan x.$

7. 求下列函数的导数:

(1) $y = \arcsin(1-2x);$

$$(2) y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(3) y = e^{-\frac{x}{2}} \cos 3x;$$

$$(4) y = \arccos \frac{1}{x};$$

$$(5) y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x};$$

$$(6) y = \frac{\sin 2x}{x};$$

$$(7) y = \arcsin \sqrt{x};$$

$$(8) y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2});$$

$$(9) y = \ln(\sec x + \tan x);$$

$$(10) y = \ln(\csc x - \cot x).$$

$$\text{解 (1) } y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} \cdot (1-2x)' = \frac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

$$(2) y' = [(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (1-x^2)'$$

$$= -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(3) y' = (e^{\frac{x}{2}})' \cos 3x + e^{\frac{x}{2}} (\cos 3x)' = e^{\frac{x}{2}} \left(-\frac{x}{2}\right)' \cos 3x + e^{\frac{x}{2}} (-\sin 3x) (3x)'$$

$$= -\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \cos 3x - 3e^{\frac{x}{2}} \sin 3x = -\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (\cos 3x + 6 \sin 3x).$$

$$(4) y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$(5) y' = \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln x) - (1-\ln x)\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2}.$$

$$(6) y' = \frac{\cos 2x \cdot 2 \cdot x - \sin 2x \cdot 1}{x^2} = \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

$$(7) y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot (x+\sqrt{a^2+x^2})' = \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot [1+\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(a^2+x^2)']$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot [1+\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}(2x)] = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

$$(9) y' = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot (\sec x + \tan x)' = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \sec x.$$

$$(10) y' = \frac{1}{\csc x - \cot x} \cdot (\csc x - \cot x)' = \frac{-\csc x \cot x + \csc^2 x}{\csc x - \cot x} = \csc x.$$

8. 求下列函数的导数:

$$(1) y = (\arcsin \frac{x}{2})^2;$$

$$(2) y = \ln \tan \frac{x}{2};$$

$$(3) y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$(4) y = e^{\arctan \sqrt{x}};$$

$$(5) y = \sin^n x \cos nx;$$

$$(6) y = \arctan \frac{x+1}{x-1};$$

$$(7) y = \frac{\arcsin x}{\arccos x};$$

$$(8) y = \ln[\ln(\ln x)];$$

$$(9) y' = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}};$$

$$(10) y' = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

解 (1) $y' = 2(\arcsin \frac{x}{2}) \cdot (\arcsin \frac{x}{2})'$

$$= 2(\arcsin \frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \cdot (\frac{x}{2})'$$

$$= 2(\arcsin \frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \cdot \frac{1}{2}.$$

$$= \frac{2 \arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(2) y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot (\tan \frac{x}{2})' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot (\frac{x}{2})'$$

$$= \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \csc x.$$

$$(3) y' = \sqrt{1+\ln^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} \cdot (1+\ln^2 x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} \cdot 2 \ln x (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.$$

$$(4) y' = e^{\arctan \sqrt{x}} \cdot (\arctan \sqrt{x})' = e^{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= e^{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\arctan \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

$$(5) y' = n \sin^{n-1} x (\sin x)' \cdot \cos nx + \sin^n x (-\sin nx) \cdot (nx)'$$

$$= n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \cdot \cos nx + \sin^n x (-\sin nx) \cdot n$$

$$= n \sin^{n-1} x (\cos x \cos nx - \sin x \sin nx) = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x.$$

$$(6) y' = \frac{1}{1 + (\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot (\frac{x+1}{x-1})' = \frac{1}{1 + (\frac{x+1}{x-1})^2} \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(7) y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{(\arccos x)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\arccos x + \arcsin x}{(\arccos x)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot [\ln(\ln x)]' = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)'$$

$$= \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}.$$

$$(9) y' = \frac{(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2}.$$

$$(10) y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1-x}{1+x}}} \cdot (\frac{1-x}{1+x})' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}.$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导, 且 $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$, 试求函数 $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ 的导数

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} \cdot [f^2(x) + g^2(x)]'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} \cdot [2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x)]$$

$$= \frac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}.$$

10. 设 $f(x)$ 可导, 求下列函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y = f(x^2)$;

(2) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$.

解 (1) $y' = f'(x^2) \cdot (x^2)' = f'(x^2) \cdot 2x = 2x f'(x^2)$.

(2) $y' = f'(\sin^2 x) \cdot (\sin^2 x)' + f'(\cos^2 x) \cdot (\cos^2 x)'$
 $= f'(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cos x + f'(\cos^2 x) \cdot 2\cos x (-\sin x)$
 $= \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)].$

11. 求下列函数的导数:

(1) $y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$;

(2) $y = \operatorname{sh} x \cdot e^{\operatorname{ch} x}$;

(3) $y = \operatorname{th}(\ln x)$;

(4) $y = \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{ch}^2 x$;

(5) $y = \operatorname{th}(1 - x^2)$;

(6) $y = \operatorname{arch}(x^2 + 1)$;

(7) $y = \operatorname{arch}(e^{2x})$;

(8) $y = \arctan(\operatorname{th} x)$;

(9) $y = \ln \operatorname{ch} x + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$;

(10) $y = \operatorname{ch}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

解 (1) $y' = \operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) \cdot (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{ch} x$.

(2) $y' = \operatorname{ch} x \cdot e^{\operatorname{ch} x} + \operatorname{sh} x \cdot e^{\operatorname{ch} x} \cdot \operatorname{sh} x = e^{\operatorname{ch} x} (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x)$.

(3) $y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\ln x)} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \operatorname{ch}^2(\ln x)}$.

(4) $y' = 3\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x (3\operatorname{sh} x + 2)$.

(5) $y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)} \cdot (1-x^2)' = \frac{-2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$.

(6) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)}} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$.

$$(7) y' = \frac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2 - 1}} \cdot (e^{2x})' = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} - 1}}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{1 + (\operatorname{th} x)^2} \cdot (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{1 + 2\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$(9) y' = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \cdot (\operatorname{ch} x)' - \frac{1}{2\operatorname{ch}^4 x} \cdot (\operatorname{ch}^2 x)'$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{1}{2\operatorname{ch}^4 x} \cdot 2\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} x$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x \cdot (\operatorname{ch}^2 x - 1)}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x} = \operatorname{th}^3 x.$$

$$(10) y' = 2\operatorname{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left[\operatorname{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]' = 2\operatorname{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$

$$= \operatorname{sh}\left(2 \cdot \frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{sh}\left(2 \cdot \frac{x-1}{x+1}\right).$$

12. 求下列函数的导数:

$$(1) y = e^{-x}(x^2 - 2x + 3);$$

$$(2) y = \sin^2 x \sin(x^2);$$

$$(3) y = \left(\arctan \frac{x}{2}\right)^2;$$

$$(4) y = \frac{\ln x}{x^n};$$

$$(5) y = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}};$$

$$(6) y = \ln \cos \frac{1}{x};$$

$$(7) y = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}};$$

$$(8) y = \sqrt{x + \sqrt{x}};$$

$$(9) y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2};$$

$$(10) y' = \arcsin \frac{2t}{1+t^2}.$$

解 (1) $y' = -e^{-x}(x^2-2x+3) + e^{-x}(2x-2)$
 $= e^{-x}(-x^2+4x-5).$

$$(2) y' = 2 \sin x \cos x \sin(x^2) + \sin^2 x \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$= \sin 2x \sin(x^2) + 2x \sin^2 x \cos(x^2).$$

$$(3) y' = 2 \arctan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{x^2+4} \arctan \frac{x}{2}.$$

$$(4) y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^n - \ln x \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{1-n \ln x}{x^{n+1}}.$$

$$(5) y' = \frac{(e^t + e^{-t})(e^t + e^{-t}) - (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{4e^{2t}}{(e^{2t} + 1)^2}.$$

$$(6) y' = \sec \frac{1}{x} \cdot (\cos \frac{1}{x})' = \sec \frac{1}{x} \cdot (-\sin \frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x}.$$

$$(7) y' = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot (-\sin^2 \frac{1}{x})' = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot (-2 \sin \frac{1}{x}) \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{2}{x} \cdot e^{-\sin^2 \frac{1}{x}}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot (x+\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot (1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

$$(9) y' = \arcsin \frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) = \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$(10) y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}} \cdot (\frac{2t}{1+t^2})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{1+t^2})^2}} \cdot \frac{2 \cdot (1+t^2) - 2t \cdot (2t)}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}} \cdot \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}.$$

习题 2-3

1. 求函数的二阶导数:

(1) $y=2x^2+\ln x$;

(2) $y=e^{2x-1}$;

(3) $y=x\cos x$;

(4) $y=e^{-t}\sin t$;

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(6) $y=\ln(1-x^2)$

(7) $y=\tan x$;

(8) $y=\frac{1}{x^3+1}$;

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(10) $y=\frac{e^x}{x}$;

(11) $y=xe^{x^2}$;

(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) $y'=4x+\frac{1}{x}$, $y''=4-\frac{1}{x^2}$.

(2) $y'=e^{2x-1} \cdot 2=2e^{2x-1}$, $y''=2e^{2x-1} \cdot 2=4e^{2x-1}$.

(3) $y=x\cos x$; $y'=\cos x-x\sin x$,

$$y''=-\sin x-\sin x-x\cos x=-2\sin x-x\cos x.$$

(4) $y'=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$

$$y''=-e^{-t}(\cos t-\sin t)+e^{-t}(-\sin t-\cos t)=-2e^{-t}\cos t.$$

(5) $y'=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (a^2-x^2)'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$

$$y'' = -\frac{\sqrt{a^2-x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = -\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$(6) \quad y' = \frac{1}{1-x^2} \cdot (1-x^2)' = -\frac{2x}{1-x^2},$$

$$y'' = -\frac{2(1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = -\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

$$(7) \quad y' = \sec^2 x,$$

$$y'' = 2\sec x (\sec x)' = 2\sec x \cdot \sec x \tan x = 2\sec^2 x \tan x.$$

$$(8) \quad y' = \frac{-(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = -\frac{3x^2}{(x^3+1)^2},$$

$$y'' = -\frac{6x \cdot (x^3+1)^2 - 3x^2 \cdot 2(x^3+1) \cdot 3x}{(x^3+1)^4} = \frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

$$(9) \quad y' = 2x \arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2x \arctan x + 1,$$

$$y'' = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$(10) \quad y' = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

$$y'' = \frac{[e^x(x-1) + e^x] \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

$$(11) \quad y' = e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot (2x) = e^{x^2}(1+2x^2),$$

$$y'' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (1+2x^2) + e^{x^2} \cdot 4x = 2xe^{x^2}(3+2x^2).$$

$$(12) \quad y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y'' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot (\sqrt{1+x^2})' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$$2. \text{ 设 } f(x) = (x+10)^6, \quad f'''(2) = ?$$

$$\text{解 } f'(x) = 6(x+10)^5, \quad f''(x) = 30(x+10)^4, \quad f'''(x) = 120(x+10)^3,$$

$$f'''(2)=120(2+10)^3=207360.$$

3. 若 $f''(x)$ 存在, 求下列函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$(1) y=f(x^2);$$

$$(2) y=\ln[f(x)].$$

$$\text{解 } (1) y' = f'(x^2) \cdot (x^2)' = 2xf'(x^2),$$

$$y'' = 2f'(x^2) + 2x \cdot 2xf''(x^2) = 2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2).$$

$$(2) y' = \frac{1}{f(x)} f'(x),$$

$$y'' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}.$$

4. 试从 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 导出:

$$(1) \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3};$$

$$(2) \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

$$\text{解 } (1) \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

$$(2) \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) \cdot \frac{dx}{dy} \\ = -\frac{y'''(y')^3 - y'' \cdot 3(y')^2 y'}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$ (A, ω 是常数), 求物体运动的加速度, 并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

$$\text{解 } \frac{ds}{dt} = A\omega \cos\omega t,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

$\frac{d^2s}{dt^2}$ 就是物体运动的加速度.

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = -A\omega^2 \sin \omega t + \omega^2 A \sin \omega t = 0.$$

6. 验证函数 $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ (λ, C_1, C_2 是常数) 满足关系式:

$$y'' - \lambda^2 y = 0.$$

解 $y' = C_1 \lambda e^{\lambda x} - C_2 \lambda e^{-\lambda x},$

$$y'' = C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}.$$

$$\begin{aligned} y'' - \lambda^2 y &= (C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}) - \lambda^2 (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) \\ &= (C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}) - (C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}) = 0. \end{aligned}$$

7. 验证函数 $y = e^x \sin x$ 满足关系式:

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

解 $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x),$

$$y'' = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x.$$

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 2y &= 2e^x \cos x - 2e^x (\sin x + \cos x) + 2e^x \sin x \\ &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x + 2e^x \sin x = 0. \end{aligned}$$

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ (a_1, a_2, \cdots, a_n 都是常数);

(2) $y = \sin^2 x$;

(3) $y = x \ln x$;

(4) $y = x e^x$.

解 (1) $y' = nx^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1},$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 x^{n-3} + (n-2)(n-3)a_2 x^{n-4} + \cdots + a_{n-2},$$

$\cdots,$

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 x^0 = n!.$$

(2) $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x,$

$$y'' = 2 \cos 2x = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{2}),$$

$$y''' = 2^2 \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = 2^2 \sin(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(4)} = 2^3 \cos(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = 2^3 \sin(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}),$$

...

$$y^{(n)} = 2^{n-1} \sin[2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}].$$

$$(3) \quad y' = \ln x + 1,$$

$$y'' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

$$y''' = (-1)x^{-2},$$

$$y^{(4)} = (-1)(-2)x^{-3},$$

...

$$y^{(n)} = (-1)(-2)(-3) \cdots (-n+2)x^{-n+1} = (-1)^{n-2} \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

$$(4) \quad y' = e^x + xe^x,$$

$$y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x,$$

$$y''' = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x,$$

...

$$y^{(n)} = ne^x + xe^x = e^x(n+x).$$

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

$$(1) \quad y = e^x \cos x, \text{ 求 } y^{(4)};$$

$$(2) \quad y = x \operatorname{sh} x, \text{ 求 } y^{(100)};$$

$$(3) \quad y = x^2 \sin 2x, \text{ 求 } y^{(50)}.$$

解 (1) 令 $u = e^x$, $v = \cos x$, 有

$$u' = u'' = u''' = u^{(4)} = e^x;$$

$$v' = -\sin x, \quad v'' = -\cos x, \quad v''' = \sin x, \quad v^{(4)} = \cos x,$$

所以 $y^{(4)} = u^{(4)} \cdot v + 4u''' \cdot v' + 6u'' \cdot v'' + 4u' \cdot v''' + u \cdot v^{(4)}$

$$= e^x [\cos x + 4(-\sin x) + 6(-\cos x) + 4\sin x + \cos x] = -4e^x \cos x.$$

(2) 令 $u = x$, $v = \operatorname{sh} x$, 则有

$$u' = 1, \quad u'' = 0;$$

$$v' = \operatorname{ch} x, \quad v'' = \operatorname{sh} x, \quad \cdots, \quad v^{(99)} = \operatorname{ch} x, \quad v^{(100)} = \operatorname{sh} x,$$

所以

$$y^{(100)} = u^{(100)} \cdot v + C_{100}^1 u^{(99)} \cdot v' + C_{100}^2 u^{(98)} \cdot v'' + \dots + C_{100}^{98} u'' \cdot v^{(98)} + C_{100}^{99} u' \cdot v^{(99)} + u \cdot v^{(100)}$$

$$= 100 \cosh x + x \sinh x.$$

(3) 令 $u=x^2$, $v=\sin 2x$, 则有

$$u'=2x, u''=2, u'''=0;$$

$$v^{(48)} = 2^{48} \sin(2x + 48 \cdot \frac{\pi}{2}) = 2^{48} \sin 2x,$$

$$v^{(49)} = 2^{49} \cos 2x, v^{(50)} = -2^{50} \sin 2x,$$

所以 $y^{(50)} = u^{(50)} \cdot v + C_{150}^1 u^{(49)} \cdot v' + C_{50}^2 u^{(48)} \cdot v'' + \dots + C_{50}^{48} u'' \cdot v^{(48)} + C_{50}^{49} u' \cdot v^{(49)} + u \cdot v^{(50)}$

$$= C_{50}^{48} u'' \cdot v^{(48)} + C_{50}^{49} u' \cdot v^{(49)} + u \cdot v^{(50)}$$

$$= \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2 \cdot 2^{28} \sin 2x + 50 \cdot 2x \cdot 2^{49} \cos 2x + x^2 \cdot (-2^{50} \sin 2x)$$

$$= 2^{50} (-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x).$$

习题 2-3

1. 求函数的二阶导数:

(1) $y=2x^2+\ln x$;

(2) $y=e^{2x-1}$;

(3) $y=x \cos x$;

(4) $y=e^{-t} \sin t$;

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(6) $y=\ln(1-x^2)$

(7) $y=\tan x$;

(8) $y=\frac{1}{x^3+1}$;

(9) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(10) $y=\frac{e^x}{x}$;

(11) $y=xe^{x^2}$;

$$(12) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

解 (1) $y' = 4x + \frac{1}{x}, \quad y'' = 4 - \frac{1}{x^2}.$

$$(2) y' = e^{2x-1} \cdot 2 = 2e^{2x-1}, \quad y'' = 2e^{2x-1} \cdot 2 = 4e^{2x-1}.$$

$$(3) y = x \cos x; \quad y' = \cos x - x \sin x,$$

$$y'' = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2\sin x - x \cos x.$$

$$(4) y' = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

$$y'' = -e^{-t}(\cos t - \sin t) + e^{-t}(-\sin t - \cos t) = -2e^{-t} \cos t.$$

$$(5) y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (a^2-x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$y'' = -\frac{\sqrt{a^2-x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = -\frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$(6) y' = \frac{1}{1-x^2} \cdot (1-x^2)' = -\frac{2x}{1-x^2},$$

$$y'' = -\frac{2(1-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = -\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

$$(7) y' = \sec^2 x,$$

$$y'' = 2\sec x (\sec x)' = 2\sec x \sec x \tan x = 2\sec^2 x \tan x.$$

$$(8) y' = \frac{-(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = -\frac{3x^2}{(x^3+1)^2},$$

$$y'' = -\frac{6x \cdot (x^3+1)^2 - 3x^2 \cdot 2(x^3+1) \cdot 3x}{(x^3+1)^4} = \frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}.$$

$$(9) y' = 2x \arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2x \arctan x + 1,$$

$$y'' = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$(10) y' = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

$$y'' = \frac{[e^x(x-1) + e^x] \cdot x^2 - e^x(x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

$$(11) y' = e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot (2x) = e^{x^2}(1+2x^2),$$

$$y'' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot (1+2x^2) + e^{x^2} \cdot 4x = 2xe^{x^2}(3+2x^2).$$

$$(12) y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y'' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot (\sqrt{1+x^2})' = -\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{(1+x^2)^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$2. \text{ 设 } f(x)=(x+10)^6, \quad f'''(2)=?$$

$$\text{解 } f'(x)=6(x+10)^5, \quad f''(x)=30(x+10)^4, \quad f'''(x)=120(x+10)^3,$$

$$f'''(2)=120(2+10)^3=207360.$$

$$3. \text{ 若 } f''(x) \text{ 存在, 求下列函数 } y \text{ 的二阶导数 } \frac{d^2 y}{dx^2}:$$

$$(1) y=f(x^2);$$

$$(2) y=\ln[f(x)].$$

$$\text{解 } (1) y' = f'(x^2) \cdot (x^2)' = 2x f'(x^2),$$

$$y' = 2f'(x^2) + 2x \cdot 2x f''(x^2) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2).$$

$$(2) y' = \frac{1}{f(x)} f'(x),$$

$$y'' = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}.$$

$$4. \text{ 试从 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} \text{ 导出:}$$

$$(1) \frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3};$$

$$(2) \frac{d^3 x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y' y'''}{(y')^5}.$$

$$\text{解 } (1) \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \frac{d^3x}{dy^3} &= \frac{d}{dy} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{y''}{(y')^3} \right) \cdot \frac{dx}{dy} \\
 &= -\frac{y'''(y')^3 - y'' \cdot 3(y')^2 y'}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y' y'''}{(y')^5}.
 \end{aligned}$$

5. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$ (A, ω 是常数), 求物体运动的加速度, 并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

解 $\frac{ds}{dt} = A\omega \cos \omega t,$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

$\frac{d^2s}{dt^2}$ 就是物体运动的加速度.

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = -A\omega^2 \sin \omega t + \omega^2 A \sin \omega t = 0.$$

6. 验证函数 $y=C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ (λ, C_1, C_2 是常数) 满足关系式:

$$y'' - \lambda^2 y = 0.$$

解 $y' = C_1 \lambda e^{\lambda x} - C_2 \lambda e^{-\lambda x},$

$$y'' = C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}.$$

$$\begin{aligned}
 y'' - \lambda^2 y &= (C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}) - \lambda^2 (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) \\
 &= (C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}) - (C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}) = 0.
 \end{aligned}$$

7. 验证函数 $y=e^x \sin x$ 满足关系式:

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

解 $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x),$

$$y'' = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x.$$

$$\begin{aligned}
 y'' - 2y' + 2y &= 2e^x \cos x - 2e^x (\sin x + \cos x) + 2e^x \sin x \\
 &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x - 2e^x \cos x + 2e^x \sin x = 0.
 \end{aligned}$$

8. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

(1) $y=x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ (a_1, a_2, \cdots, a_n 都是常数);

(2) $y=\sin^2 x$;

$$(3) y = x \ln x;$$

$$(4) y = x e^x.$$

$$\text{解 } (1) y' = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1},$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + (n-2)(n-3)a_2x^{n-4} + \cdots + a_{n-2},$$

$$\cdots,$$

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 x^0 = n!.$$

$$(2) y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$

$$y'' = 2 \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = 2^2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2^2 \sin\left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)} = 2^3 \cos\left(2x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2^3 \sin\left(2x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots,$$

$$y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left[2x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right].$$

$$(3) y' = \ln x + 1,$$

$$y'' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

$$y''' = (-1)x^{-2},$$

$$y^{(4)} = (-1)(-2)x^{-3},$$

$$\cdots,$$

$$y^{(n)} = (-1)(-2)(-3) \cdots (-n+2)x^{-n+1} = (-1)^{n-2} \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}.$$

$$(4) y' = e^x + x e^x,$$

$$y'' = e^x + e^x + x e^x = 2e^x + x e^x,$$

$$y''' = 2e^x + e^x + x e^x = 3e^x + x e^x,$$

$$\cdots,$$

$$y^{(n)} = n e^x + x e^x = e^x (n+x).$$

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

$$(1) y = e^x \cos x, \text{ 求 } y^{(4)};$$

$$(2) y = x \operatorname{sh} x, \text{ 求 } y^{(100)};$$

$$(3) y = x^2 \sin 2x, \text{ 求 } y^{(50)}.$$

解 (1) 令 $u=e^x$, $v=\cos x$, 有

$$u'=u''=u'''=u^{(4)}=e^x;$$

$$v'=-\sin x, v''=-\cos x, v'''=\sin x, v^{(4)}=\cos x,$$

所以 $y^{(4)}=u^{(4)} \cdot v + 4u''' \cdot v' + 6u'' \cdot v'' + 4u' \cdot v''' + u \cdot v^{(4)}$

$$=e^x[\cos x + 4(-\sin x) + 6(-\cos x) + 4\sin x + \cos x] = -4e^x \cos x.$$

(2) 令 $u=x$, $v=\operatorname{sh} x$, 则有

$$u'=1, u''=0;$$

$$v'=\operatorname{ch} x, v''=\operatorname{sh} x, \dots, v^{(99)}=\operatorname{ch} x, v^{(100)}=\operatorname{sh} x,$$

所以

$$y^{(100)}=u^{(100)} \cdot v + C_{100}^1 u^{(99)} \cdot v' + C_{100}^2 u^{(98)} \cdot v'' + \dots + C_{100}^{98} u'' \cdot v^{(98)} + C_{100}^{99} u' \cdot v^{(99)} + u \cdot v^{(100)}$$

$$=100 \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x.$$

(3) 令 $u=x^2$, $v=\sin 2x$, 则有

$$u'=2x, u''=2, u'''=0;$$

$$v^{(48)}=2^{48} \sin(2x + 48 \cdot \frac{\pi}{2}) = 2^{48} \sin 2x,$$

$$v^{(49)}=2^{49} \cos 2x, v^{(50)}=-2^{50} \sin 2x,$$

所以 $y^{(50)}=u^{(50)} \cdot v + C_{150}^1 u^{(49)} \cdot v' + C_{50}^2 u^{(48)} \cdot v'' + \dots + C_{50}^{48} u'' \cdot v^{(48)} + C_{50}^{49} u' \cdot v^{(49)} + u \cdot v^{(50)}$

$$=C_{50}^{48} u'' \cdot v^{(48)} + C_{50}^{49} u' \cdot v^{(49)} + u \cdot v^{(50)}$$

$$=\frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2 \cdot 2^{48} \sin 2x + 50 \cdot 2x \cdot 2^{49} \cos 2x + x^2 \cdot (-2^{50} \sin 2x)$$

$$=2^{50}(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x).$$

习题 2-4

1. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y^2 - 2xy + 9 = 0;$

(2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0;$

(3) $xy = e^{x+y};$

(4) $y = 1 - xe^y.$

解 (1) 方程两边求导数得

$$\begin{aligned} & 2yy'-2y-2xy'=0, \\ \text{于是} \quad & (y-x)y'=y, \end{aligned}$$

$$y' = \frac{y}{y-x}.$$

(2) 方程两边求导数得

$$\begin{aligned} & 3x^2+3y^2y'-2ay-3axy'=0, \\ \text{于是} \quad & (y^2-ax)y'=ay-x^2, \end{aligned}$$

$$y' = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

(3) 方程两边求导数得

$$\begin{aligned} & y+xy'=e^{x+y}(1+y'), \\ \text{于是} \quad & (x-e^{x+y})y'=e^{x+y}-y, \end{aligned}$$

$$y' = \frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}.$$

(4) 方程两边求导数得

$$\begin{aligned} & y'=-e^y-xe^y y', \\ \text{于是} \quad & (1+xe^y)y'=-e^y, \end{aligned}$$

$$y' = -\frac{e^y}{1+xe^y}.$$

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处的切线方程和法线方程.

解 方程两边求导数得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0,$$

$$\text{于是} \quad y' = -\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}},$$

在点 $(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a)$ 处 $y'=-1$.

所求切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a), \text{ 即 } x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

所求法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a), \text{ 即 } x-y=0.$$

3. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2 - y^2 = 1$;

(2) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;

(3) $y = \tan(x+y)$;

(4) $y = 1 + xe^y$.

解 (1) 方程两边求导数得

$$2x - 2yy' = 0,$$

$$y' = \frac{x}{y},$$

$$y'' = \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{y - x \cdot \frac{x}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

(2) 方程两边求导数得

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0,$$

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x\left(-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}\right)}{y^2} \\ &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}. \end{aligned}$$

(3) 方程两边求导数得

$$y' = \sec^2(x+y) \cdot (1+y'),$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sec^2(x+y)}{1 - \sec^2(x+y)} = \frac{1}{\cos^2(x+y) - 1} \\ &= \frac{\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y)}{-\sin^2(x+y)} = -1 - \frac{1}{y^2}, \end{aligned}$$

$$y'' = \frac{2}{y^3} y' = \frac{2}{y^3} \left(-1 - \frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

(4) 方程两边求导数得

$$y' = e^y + xe^y y',$$

$$y' = \frac{e^y}{1-xe^y} = \frac{e^y}{1-(y-1)} = \frac{e^y}{2-y},$$

$$y'' = \frac{e^y y'(2-y) - e^y(-y')}{(2-y)^2} = \frac{e^y(3-y)y'}{(2-y)^2} = \frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$;

(2) $y = 5\sqrt[5]{\frac{x-5}{x^2+2}}$;

(3) $y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$;

(4) $y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1-e^x}$.

解 (1) 两边取对数得

$$\ln y = x \ln |x| - x \ln |1+x|,$$

两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - \ln(1+x) - x \cdot \frac{1}{1+x},$$

于是 $y' = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left[\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right].$

(2) 两边取对数得

$$\ln y = \frac{1}{5} \ln |x-5| - \frac{1}{25} \ln(x^2+2),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-5} - \frac{1}{25} \cdot \frac{2x}{x^2+2},$$

于是 $y' = \frac{1}{5} \sqrt[5]{\frac{x-5}{x^2+2}} = \left[\frac{1}{x-5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2x}{x^2+2}\right].$

(3) 两边取对数得

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x+2) + 4 \ln(3-x) - 5 \ln(x+1),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1},$$

于是 $y' = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} \left[\frac{1}{2(x+2)} + \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+1}\right]$

(4)两边取对数得

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln \sin x + \frac{1}{4} \ln(1-e^x),$$

两边求导得

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cot x - \frac{e^x}{4(1-e^x)},$$

于是
$$y' = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \cot x - \frac{e^x}{4(1-e^x)} \right]$$
$$= \frac{1}{4} \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}} \left[\frac{2}{x} + 2 \cot x + \frac{e^x}{e^x-1} \right].$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1)
$$\begin{cases} x = at^2; \\ y = bt^2; \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x = \theta(1 - \sin \theta) \\ y = \theta \cos \theta \end{cases}.$$

解 (1)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3bt^2}{2at} = \frac{3b}{2a}t.$$

(2)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{1 - \sin \theta - \theta \cos \theta}.$$

6. 已知
$$\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$$
 求当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

解
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t},$$

当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2.$$

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1)
$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}, \text{ 在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处};$$

(2)
$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}, \text{ 在 } t=2 \text{ 处}.$$

解 (1)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2 \sin 2t}{\cos t}.$$

$$\text{当 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{-2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{2}, \quad x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_0 = 0,$$

所求切线方程为

$$y = -2\sqrt{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ 即 } 2\sqrt{2}x + y - 2 = 0;$$

所求法线方程为

$$y = -\frac{1}{-2\sqrt{2}}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}), \text{ 即 } \sqrt{2}x - 4y - 1 = 0.$$

$$(2) \quad y'_t = \frac{6at(1+t^2) - 3at^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{6at}{(1+t^2)^2},$$

$$x'_t = \frac{3a(1+t^2) - 3at \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{3a - 3at^2}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{6at}{3a - 3at^2} = \frac{2t}{1-t^2}.$$

$$\text{当 } t=2 \text{ 时, } \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot 2}{1-2^2} = -\frac{4}{3}, \quad x_0 = \frac{6}{5}a, \quad y_0 = \frac{12}{5}a,$$

所求切线方程为

$$y - \frac{12}{5}a = -\frac{4}{3}(x - \frac{6}{5}a), \text{ 即 } 4x + 3y - 12a = 0;$$

所求法线方程为

$$y - \frac{12}{5}a = \frac{3}{4}(x - \frac{6}{5}a), \text{ 即 } 3x - 4y + 6a = 0.$$

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{t^2}{2}; \\ y = 1 - t. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x = 3e^{-t}; \\ y = 2e^t; \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}, \text{ 设 } f''(t) \text{ 存在且不为零.}$$

$$\text{解 (1) } \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-1}{t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{t^2}}{t} = \frac{1}{t^3}.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{b}{a} \csc^2 t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}.$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2e^t}{-3e^{-t}} = -\frac{2}{3} e^{2t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{2}{3} \cdot 2e^{2t}}{-3e^{-t}} = \frac{4}{9} e^{3t}.$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{f'(t) + t f''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1}{f''(t)}.$$

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\frac{d^3 y}{dx^3}$:

$$(1) \begin{cases} x = 1 - t^2; \\ y = t - t^3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}.$$

解(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{(t - t^3)'}{(1 - t^2)'} = \frac{1 - 3t^2}{-2t},$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(\frac{1 - 3t^2}{-2t})'}{-2t} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{t^3} + \frac{3}{t} \right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{-\frac{1}{4} (\frac{1}{t^3} + \frac{3}{t})'}{-2t} = -\frac{3}{8t^5} (1 + t^2).$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{(t - \arctan t)'}{[\ln(1 + t^2)]'} = \frac{1 - \frac{1}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{1}{2} t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(\frac{1}{2} t)'}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{1 + t^2}{4t},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{1+t^2}{4t}\right)'}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^4-1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头, 产生同心波纹, 若最外一圈波半径的增大率总是 6m/s , 问在 2 秒末扰动水面面积的增大率为多少?

解 设波的半径为 r , 对应圆面积为 S , 则 $S=\pi r^2$, 两边同时对 t 求导得

$$S'_t = 2\pi r r'.$$

当 $t=2$ 时, $r=6 \cdot 2=12$, $r'=6$,

故 $S'_t|_{t=2}=2 \cdot 12 \cdot 6\pi=144\pi$ (米²/秒).

11. 注水入深 8m 上顶直径 8m 的正圆锥形容器中, 其速率为 $4\text{m}^3/\text{min}$. 当水深为 5m 时, 其表面上升的速度为多少?

解 水深为 h 时, 水面半径为 $r=\frac{1}{2}h$, 水面面积为 $S=\frac{1}{4}h^2\pi$,

水的体积为 $V=\frac{1}{3}hS=\frac{1}{3}h \cdot \frac{1}{4}h^2\pi=\frac{\pi}{12}h^3$,

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot \frac{dh}{dt}, \quad \frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt}.$$

已知 $h=5(\text{m})$, $\frac{dV}{dt}=4(\text{m}^3/\text{min})$, 因此 $\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt}=\frac{4}{25\pi} \cdot 4=\frac{16}{25\pi} (\text{m}/\text{min})$.

12. 溶液自深 18cm 直径 12cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10cm 的圆柱形筒中, 开始时漏斗中盛满了溶液, 已知当溶液在漏斗中深为 12cm 时, 其表面下降的速率为 $1\text{cm}/\text{min}$. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解 设在 t 时刻漏斗中的水深为 y , 圆柱形筒中水深为 h . 于是有

$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \pi \cdot 18 - \frac{1}{3} \pi r^2 y = 5^2 h.$$

由 $\frac{r}{6}=\frac{y}{18}$, 得 $r=\frac{y}{3}$, 代入上式得

$$\frac{1}{3} \cdot 6^2 \pi \cdot 18 - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{y}{3}\right)^2 y = 5^2 h,$$

即 $\frac{1}{3} \cdot 6^2 \pi \cdot 18 - \frac{1}{3^3} y^3 = 5^2 h$.

两边对 t 求导得

$$-\frac{1}{3^2} y^2 y'_t = 5^2 h'.$$

当 $y=12$ 时, $y'_t=-1$ 代入上式得

$$h'_t = \frac{-\frac{1}{3^2} \cdot 12^2 \cdot (-1)}{5^2} = \frac{16}{25} \approx 0.64 (\text{cm}/\text{min}).$$

2-7

1. 已知 $y=x^3-x$, 计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1, 0.1, 0.01 时的 Δy 及 dy .

解 $\Delta y|_{x=2, \Delta x=1} = [(2+1)^3 - (2+1)] - (2^3 - 2) = 18,$

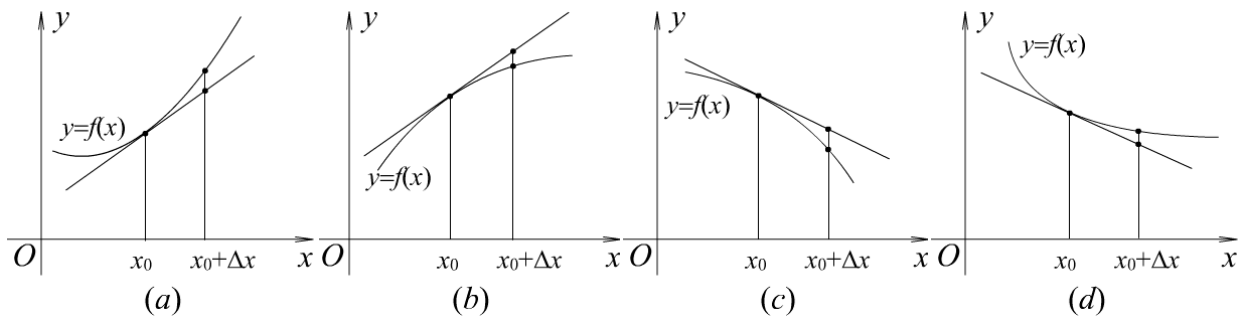
$$dy|_{x=2, \Delta x=1} = (3x^2 - 1)\Delta x|_{x=2, \Delta x=1} = 11;$$

$$\Delta y|_{x=2, \Delta x=0.1} = [(2+0.1)^3 - (2+0.1)] - (2^3 - 2) = 1.161,$$

$$dy|_{x=2, \Delta x=0.1} = (3x^2 - 1)\Delta x|_{x=2, \Delta x=0.1} = 1.1;$$

$$\Delta y|_{x=2, \Delta x=0.01} = [(2+0.01)^3 - (2+0.01)] - (2^3 - 2) = 0.110601,$$

$$dy|_{x=2, \Delta x=0.01} = (3x^2 - 1)\Delta x|_{x=2, \Delta x=0.01} = 0.11.$$



2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图所示, 试在图(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 dy 、 Δy 及 $\Delta y - dy$ 并说明其正负.

解 (a) $\Delta y > 0$, $dy > 0$, $\Delta y - dy > 0$.

(b) $\Delta y > 0$, $dy > 0$, $\Delta y - dy < 0$.

(c) $\Delta y < 0$, $dy < 0$, $\Delta y - dy < 0$.

(d) $\Delta y < 0$, $dy < 0$, $\Delta y - dy > 0$.

3. 求下列函数的微分:

$$(1) y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x};$$

$$(2) y = x \sin 2x;$$

$$(3) y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(4) y = \ln^2(1-x);$$

$$(5) y = x^2 e^{2x};$$

$$(6) y = e^{-x} \cos(3-x);$$

$$(7) y = \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$(8) y = \tan^2(1+2x^2);$$

$$(9) y = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$(10) s = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (A, \omega, \varphi \text{ 是常数}).$$

解 (1) 因为 $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $dy = (-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

(2) 因为 $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x$, 所以 $dy = (\sin 2x + 2x \cos 2x)dx$.

$$(3) \text{ 因为 } y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, \text{ 所以 } dy = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$(4) dy = y' dx = [\ln^2(1-x)]' dx = [2 \ln(1-x) \cdot \frac{-1}{(1-x)}] dx = \frac{2}{x-1} \ln(1-x) dx.$$

$$(5) dy = y' dx = (x^2 e^{2x})' dx = (2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x}) dx = 2x(1+x) e^{2x} dx.$$

$$(6) dy = y' dx = [e^{-x} \cos(3-x)]' dx = [-e^{-x} \cos(3-x) + e^{-x} \sin(3-x)] dx \\ = e^{-x} [\sin(3-x) - \cos(3-x)] dx.$$

$$(7) dy = y' dx = (\arcsin \sqrt{1-x^2})' dx = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}) dx = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$(8) dy = d \tan^2(1+2x^2) = 2 \tan(1+2x^2) d \tan(1+2x^2) \\ = 2 \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) d(1+2x^2) \\ = 2 \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) \cdot 4x dx \\ = 8x \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) dx.$$

$$(9) dy = d\arctan \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2} d(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

$$= \frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{4x}{1+x^4} dx.$$

$$(10) dy = d[A\sin(\omega t + \varphi)] = A\cos(\omega t + \varphi) d(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) dx.$$

4. 将适当的函数填入下列括号内, 使等式成立:

$$(1) d(\quad) = 2dx;$$

$$(2) d(\quad) = 3xdx;$$

$$(3) d(\quad) = \cos t dt;$$

$$(4) d(\quad) = \sin \omega x dx;$$

$$(5) d(\quad) = \frac{1}{x+1} dx;$$

$$(6) d(\quad) = e^{-2x} dx;$$

$$(7) d(\quad) = \frac{1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(8) d(\quad) = \sec^2 3x dx.$$

$$\text{解 } (1) d(2x+C) = 2dx.$$

$$(2) d(\frac{3}{2}x^2 + C) = 3xdx.$$

$$(3) d(\sin t + C) = \cos t dt.$$

$$(4) d(-\frac{1}{\omega}\cos \omega x + C) = \sin \omega x dx.$$

$$(5) d(\ln(1+x) + C) = \frac{1}{x+1} dx.$$

$$(6) d(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C) = e^{-2x} dx.$$

$$(7) d(2\sqrt{x} + C) = \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

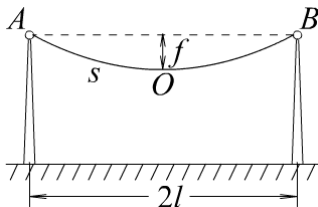
$$(8) d(\frac{1}{3}\tan 3x + C) = \sec^2 3x dx.$$

5. 如图所示的电缆 $\overset{\frown}{AOB}$ 的长为 s , 跨度为 $2l$, 电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB

的距离为 f , 则电缆长可按下面公式计算:

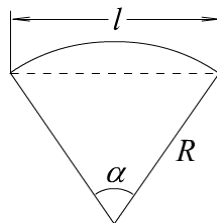
$$s=2l(1+\frac{2f^2}{3l^2}),$$

当 f 变化了 Δf 时, 电缆长的变化约为多少?



$$\text{解 } \Delta S \approx dS = 2l(1 + \frac{2f^2}{3l^2})' df = \frac{8}{3l} f \Delta f.$$

6. 设扇形的圆心角 $\alpha=60^\circ$, 半径 $R=100\text{cm}$ (如图), 如果 R 不变, α 减少 $30'$, 问扇形面积大约改变了多少? 又如果 α 不变, R 增加 1cm , 问扇形面积大约改变了多少?



$$\text{解 (1) 扇形面积 } S = \frac{1}{2} \alpha R^2,$$

$$\Delta S \approx dS = (\frac{1}{2} \alpha R^2)'_{\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} R^2 \Delta \alpha.$$

将 $\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$, $R=100$, $\Delta \alpha=-30'=-\frac{\pi}{360}$ 代入上式得

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot (-\frac{\pi}{360}) \approx -43.63 (\text{cm}^2).$$

$$(2) \Delta S \approx dS = (\frac{1}{2} \alpha R^2)'_R dR = \alpha R \Delta R.$$

将 $\alpha=60^\circ=\frac{\pi}{3}$, $R=100$, $\Delta R=1$ 代入上式得

$$\Delta S \approx \frac{\pi}{3} \cdot 100 \cdot 1 \approx 104.72 (\text{cm}^2).$$

7. 计算下列三角函数值的近似值:

(1) $\cos 29^\circ$;

(2) $\tan 136^\circ$.

解 (1) 已知 $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, 当 $f(x) = \cos x$ 时, 有 $\cos(x+\Delta x) \approx \cos x - \sin x \Delta x$, 所以

$$\cos 29^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.87467.$$

(2) 已知 $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, 当 $f(x) = \tan x$ 时, 有 $\tan(x+\Delta x) \approx \tan x + \sec^2 x \Delta x$, 所以

$$\tan 136^\circ = \tan\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \tan \frac{3\pi}{4} + \sec^2 \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = -1 + 2 \cdot \frac{\pi}{180} \approx -0.96509.$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值

(1) $\arcsin 0.5002$;

(2) $\arccos 0.4995$.

解 (1) 已知 $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, 当 $f(x) = \arcsin x$ 时, 有

$$\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \Delta x,$$

所以

$$\begin{aligned} \arcsin 0.5002 &= \arcsin(0.5 + 0.0002) \approx \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} \cdot 0.0002 \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0.0002 \approx 30^\circ 47''. \end{aligned}$$

(2) 已知 $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, 当 $f(x) = \arccos x$ 时, 有

$$\arccos(x+\Delta x) \approx \arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \Delta x,$$

所以

$$\arccos 0.4995 = \arccos(0.5 - 0.0005) \approx \arccos 0.5 - \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} \cdot (-0.0005)$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0.0005 \approx 60^\circ 2'.$$

9. 当 $|x|$ 较小时, 证明下列近似公式:

(1) $\tan x \approx x$ (x 是角的弧度值);

(2) $\ln(1+x) \approx x$;

(3) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$,

并计算 $\tan 45'$ 和 $\ln 1.002$ 的近似值.

(1) 已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x) = \tan x$, $x_0 = 0$, $\Delta x = x$, 则有

$$\tan x = \tan(0+x) \approx \tan 0 + \sec^2 0 \cdot x = \sec^2 0 \cdot x = x.$$

(2) 已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = x$, 则有

$$\ln(1+x) \approx \ln 1 + (\ln x)'|_{x=1} \cdot x = x.$$

(3) 已知当 $|\Delta x|$ 较小时, $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, 取 $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = x$, 则有

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 + \left(\frac{1}{x}\right)'|_{x=1} \cdot x = 1 - x.$$

$$\tan 45' \approx 45' \approx 0.01309;$$

$$\ln(1.002) = \ln(1+0.002) \approx 0.002.$$

10. 计算下列各根式的近似值:

(1) $\sqrt[3]{996}$;

(2) $\sqrt[6]{65}$.

解 (1) 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 则当 $|x|$ 较小时, 有 $f(1+x) \approx f(1) + f'(1)x = 1 + \frac{1}{3}x$,

$$\sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1000-4} = 10 \cdot \sqrt[3]{1-\frac{4}{1000}} \approx 10\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1000}\right) \approx 9.987.$$

(2) 设 $f(x) = \sqrt[6]{x}$, 则当 $|x|$ 较小时, 有 $f(1+x) \approx f(1) + f'(1)x = 1 + \frac{1}{6}x$, 于是

$$\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64+1} = 2 \cdot \sqrt[6]{1+\frac{1}{64}} \approx 2\left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64}\right) \approx 2.0052.$$

11. 计算球体体积时, 要求精确度在 2% 以内, 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

解 球的体积为 $V = \frac{1}{6}\pi D^3$, $dV = \frac{1}{2}\pi D^2 \cdot \Delta D$, 因为计算球体体积时, 要求精度在 2% 以内, 所以其相对误差不超过 2%, 即要求

$$\left| \frac{dV}{V} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}\pi D^2 \cdot \Delta D}{\frac{1}{6}\pi D^3} \right| = 3 \left| \frac{\Delta D}{D} \right| \leq 2\%,$$

所以 $\left| \frac{\Delta D}{D} \right| \leq \frac{2}{3}\%$,

也就是测量直径的相对误差不能超过 $\frac{2}{3}\%$.

12. 某厂生产如图所示的扇形板, 半径 $R=200\text{mm}$, 要求中心角 α 为 55° . 产品检验时, 一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α , 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l=0.1\text{mm}$, 问此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少?

解 由 $\frac{l}{2} = R \sin \frac{\alpha}{2}$ 得 $\alpha = 2 \arcsin \frac{l}{2R} = 2 \arcsin \frac{l}{400}$,

当 $\alpha=55^\circ$ 时, $l = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 400 \sin 27.5^\circ \approx 184.7$,

$$\delta'_\alpha = |\alpha'| \cdot \delta_l = \left| 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{400}\right)^2}} \cdot \frac{1}{400} \right| \cdot \delta_l.$$

当 $l=184.7$, $\delta_l=0.1$ 时,

$$\delta_\alpha = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{184.7}{400}\right)^2}} \cdot \frac{1}{400} \cdot 0.1 \approx 0.00056 (\text{弧度}).$$

总习题二

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的_____条件. $f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件.

(2) $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件.

(3) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的_____条件.

解 (1) 充分, 必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是
().

(A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在; (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在;

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在; (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

解 正确结论是 D.

提示: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} (\Delta x=-h).$

3. 设有一根细棒, 取棒的一端作为原点, 棒上任一点的坐标 x 为, 于是分布在区间 $[0, x]$ 上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m=m(x)$, 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度 (对于均匀细棒来说, 单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

解 $\Delta m = m(x_0 + \Delta x) - m(x_0).$

在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均线密度为

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}.$$

于是, 在点 x_0 处的线密度为

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x} = m'(x_0).$$

4. 根据导数的定义, 求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数.

解 $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+\Delta x)x} = -\frac{1}{x^2}.$

5. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'(0)$ 及 $f'_+(0)$, 又 $f'(0)$ 是否存在?

$$(1) f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases};$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

解 (1) 因为 $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 0}{x} = 1,$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1,$$

而且 $f'(0) = f'_+(0)$, 所以 $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = 1$.

$$(2) \text{ 因为 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{1+e^x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^x} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{1+e^x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^x} = 0,$$

而 $f'(0) \neq f'_+(0)$, 所以 $f'(0)$ 不存在.

6. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

因为极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

7. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \arcsin(\sin x);$$

$$(2) y = \arctan \frac{1+x}{1-x};$$

$$(3) y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \tan x;$$

$$(4) y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}});$$

$$(5) y = \sqrt{x} (x > 0).$$

$$\text{解}(1) y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

$$(2) y' = \frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} \cdot (\frac{1+x}{1-x})' = \frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(3) y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot (\tan \frac{x}{2})' + \sin x \cdot \ln \tan x - \cos x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)' \\ \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln \tan x - \cos x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x = \sin x \cdot \ln \tan x.$$

$$(4) y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \cdot (e^x + \sqrt{1+e^{2x}})' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \cdot (e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

$$(5) \ln y = \frac{1}{x} \ln x, \quad \frac{1}{y} y' = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}, \quad y' = \sqrt[3]{x} \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} (1 - \ln x).$$

8. 求下列函数的二阶导数:

$$(1) y = \cos^2 x \cdot \ln x;$$

$$(2) y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解} (1) y' = -2 \cos x \sin x \cdot \ln x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{x} = -\sin 2x \cdot \ln x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{x},$$

$$y'' = -2 \cos 2x \cdot \ln x - \sin 2x \cdot \frac{1}{x} - 2 \cos x \sin x \cdot \frac{1}{x} - \cos^2 x \cdot \frac{1}{x^2} \\ = -2 \cos 2x \cdot \ln x - \frac{2 \sin 2x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

$$(2) y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'' = -\frac{3}{2} (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) = \frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

9. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y = \sqrt[m]{1+x}$;

(2) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

解 (1) $y = \sqrt[m]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{m}}$,

$$y' = \frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}, \quad y'' = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2}, \quad y''' = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-3}, \dots,$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

(2) $y = \frac{1-x}{1+x} = -1 + 2(1+x)^{-1}$,

$$y' = 2(-1)(1+x)^{-2}, \quad y'' = 2(-1)(-2)(1+x)^{-3}, \quad y''' = 2(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}, \dots,$$

$$y^{(n)} = 2(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)} = \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

10. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定, 求 $y''(0)$.

解 方程两边求导得

$$e^y y' + y + xy' = 0, \quad \text{—— (1)}$$

于是 $y' = -\frac{y}{x + e^y}$;

$$y'' = \left(-\frac{y}{x + e^y}\right)' = -\frac{y'(x + e^y) - y(1 + e^y y')}{(x + e^y)^2}. \quad \text{—— (2)}$$

当 $x=0$ 时, 由原方程得 $y(0)=1$, 由(1)式得 $y'(0)=-\frac{1}{e}$, 由(2)式得 $y''(0)=\frac{1}{e^2}$.

11. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \sin^3 \theta, \end{cases}$

$$(2) \begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = \arctan t \end{cases}.$$

$$\text{解 (1)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(a \sin^3 \theta)'}{(a \cos^3 \theta)'} = \frac{3a \sin^2 \theta \cos \theta}{3a \cos^2 \theta (-\sin \theta)} = -\tan \theta,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(-\tan \theta)'}{(a \cos^3 \theta)'} = \frac{-\sec^2 \theta}{-3a \cos^2 \theta \sin \theta} = \frac{1}{3a} \sec^4 \theta \cdot \csc \theta.$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\arctan t)'}{[\ln \sqrt{1+t^2}]'} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(\frac{1}{t})'}{[\ln \sqrt{1+t^2}]'} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{t^3}.$$

12. 求曲线 $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 相的点处的切线方程及法线方程.

$$\text{解} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(e^{-t})'}{(2e^t)'} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -\frac{1}{2e^{2t}}.$$

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}, x=2, y=1.$$

所求切线的方程为 $y-1 = -\frac{1}{2}(x-2)$, 即 $x+2y-4=0$;

所求法线的方程为 $y-1=2(x-2)$.

13. 甲船以 6km/h 的速率向东行驶, 乙船以 8km/h 的速率向南行驶, 在中午十二点正, 乙船位于甲船之北 16km 处. 问下午一点正两船相离的速率为多少?

解 设从中午十二点开始, 经过 t 小时, 两船之间的距离为 S , 则有

$$S^2 = (16-8t)^2 + (6t)^2,$$

$$2S \frac{dS}{dt} = -16(16-8t) + 72t,$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-16(16-8t)+72t}{2S}.$$

当 $t=1$ 时, $S=10$,

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=1} = \frac{-128+72}{20} = -2.8 \text{ (km/h)},$$

即下午一点正两船相离的速度为 -2.8 km/h .

14. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 则有 $f(1+\Delta x) - f(1) \approx f'(1)\Delta x = \frac{1}{3}\Delta x$, 或 $f(1+\Delta x) \approx 1 + \frac{1}{3}\Delta x$ 于是

$$\sqrt[3]{1.02} = \sqrt[3]{1+0.02} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.02 = 1.007.$$

15. 已知单摆的振动周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 $g=980 \text{ cm/s}^2$, l 为摆长(单位为 cm).

设原摆长为 20 cm , 为使周期 T 增大 0.05 s , 摆长约需加长多少?

解 因为 $\Delta T \approx dT = \frac{\pi}{\sqrt{gL}} \cdot \Delta L$,

$$\text{所以 } \Delta L \approx \frac{0.05\sqrt{gL}}{\pi} \Big|_{L=20} = 2.23 \text{ (cm)},$$

即摆长约需加长 2.23 cm .

习题 3-1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln \sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上的正确性.

解 因为 $y=\ln \sin x$ 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ 上连续, 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 内可导, 且 $y(\frac{\pi}{6})=y(\frac{5\pi}{6})$, 所以由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 使得 $y'(\xi)=\cot \xi=0$.

由 $y'(x)=\cot x=0$ 得 $\frac{\pi}{2} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$.

因此确有 $\xi=\frac{\pi}{2} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 使 $y'(\xi)=\cot \xi=0$.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0, 1]$ 上的正确性.

解 因为 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}=0$.

由 $y'(x)=12x^2-10x+1=0$ 得 $x=\frac{5 \pm \sqrt{13}}{12} \in (0, 1)$.

因此确有 $\xi=\frac{5 \pm \sqrt{13}}{12} \in (0, 1)$, 使 $y'(\xi)=\frac{y(1)-y(0)}{1-0}$.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

解 因为 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 可导, 且 $F'(x)=1-\sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内不为 0, 所以由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

$$\text{令 } \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)}, \text{ 即 } \frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{2}{\pi-2}.$$

化简得 $\sin x = \frac{8}{(\pi-2)^2+4} - 1$. 易证 $0 < \frac{8}{(\pi-2)^2+4} - 1 < 1$, 所以 $\sin x = \frac{8}{(\pi-2)^2+4} - 1$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有解, 即确实存在 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{F(\frac{\pi}{2})-F(0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

证明 因为函数 $y=px^2+qx+r$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $y(b)-y(a)=y'(\xi)(b-a)$, 即

$$(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)=(2p\xi+q)(b-a).$$

化简上式得

$$p(b-a)(b+a)=2p\xi(b-a),$$

$$\text{故 } \xi = \frac{a+b}{2}.$$

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 由于 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, 在 $(1, 2)$ 内可导, 且 $f(1)=f(2)=0$, 所以由罗尔定理可知, 存在 $\xi_1 \in (1, 2)$, 使 $f'(\xi_1)=0$. 同理存在 $\xi_2 \in (2, 3)$, 使 $f'(\xi_2)=0$; 存在 $\xi_3 \in (3, 4)$, 使 $f'(\xi_3)=0$. 显然 ξ_1, ξ_2, ξ_3 都是方程 $f'(x)=0$ 的根. 注意到方程 $f'(x)=0$ 是三次方程, 它至多能有三个实根, 现已发现它的三个实根, 故它们也就是方程 $f'(x)=0$ 的全部根.

6. 证明恒等式: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$.

证明 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. 因为

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

所以 $f(x) = C$, 其中 C 是一常数.

因此 $f(x) = f(0) = \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, 即 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

7. 若方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x = 0$ 有一个正根 x_0 , 证明方程

$$a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

证明 设 $F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x$, 由于 $F(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上连续, 在 $(0, x_0)$ 内可导, 且 $F(0) = F(x_0) = 0$, 根据罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (0, x_0)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即方程

$$a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, 证明:

在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$.

证明 由于 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可导, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 根据罗尔定理, 至少存在一点 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, 使 $f'(\xi_1) = 0$. 同理存在一点 $\xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使 $f'(\xi_2) = 0$.

又由于 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上连续, 在 (ξ_1, ξ_2) 内可导, 且 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, 根据罗尔定理, 至少存在一点 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (x_1, x_3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

9. 设 $a > b > 0, n > 1$, 证明:

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

证明 设 $f(x) = x^n$, 则 $f(x)$ 在 $[b, a]$ 上连续, 在 (b, a) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (b, a)$, 使

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b), \text{ 即 } a^n - b^n = n\xi^{n-1}(a-b).$$

因为 $nb^{n-1}(a-b) < n\xi^{n-1}(a-b) < na^{n-1}(a-b)$,

所以 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a > b > 0$, 证明:

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

证明 设 $f(x) = \ln x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[b, a]$ 上连续, 在区间 (b, a) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (b, a)$, 使

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b), \text{ 即 } \ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b).$$

因为 $b < \xi < a$, 所以

$$\frac{1}{a}(a-b) < \ln a - \ln b < \frac{1}{b}(a-b), \text{ 即 } \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

11. 证明下列不等式:

(1) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$;

(2) 当 $x > 1$ 时, $e^x > e \cdot x$.

证明 (1) 设 $f(x) = \arctan x$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \text{ 即 } \arctan b - \arctan a = \frac{1}{1+\xi^2}(b-a),$$

所以 $|\arctan b - \arctan a| = \frac{1}{1+\xi^2}|b-a| \leq |b-a|$, 即 $|\arctan a - \arctan b| \leq |a-b|$.

(2) 设 $f(x) = e^x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[1, x]$ 上连续, 在区间 $(1, x)$ 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (1, x)$, 使

$$f(x) - f(1) = f'(\xi)(x-1), \text{ 即 } e^x - e = e^\xi(x-1).$$

因为 $\xi > 1$, 所以

$$e^x - e = e^\xi(x-1) > e(x-1), \text{ 即 } e^x > e \cdot x.$$

12. 证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个正根.

证明 设 $f(x) = x^5 + x - 1$, 则 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 内的连续函数.

因为 $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, $f(0)f(1) < 0$, 所以函数在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点, 即 $x^5 + x - 1 = 0$ 至少有一个正根.

假如方程至少有两个正根, 则由罗尔定理, $f'(x)$ 存在零点, 但 $f'(x) = 5x^4 + 1 \neq 0$, 矛盾. 这说明方程只能有一个正根.

13. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明在 (a, b) 内有一点 ξ , 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

解 设 $\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b-a),$$

即
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix} = (b-a) \left[\begin{vmatrix} [f(a)]' & f(\xi) \\ [g(a)]' & g(\xi) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix} \right].$$

因此
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

14. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足关系式 $f'(x) = f(x)$, 且 $f(0) = 1$ 则 $f(x) = e^x$.

证明 令 $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则在 $(-\infty, +\infty)$ 内有

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^2}{e^{2x}} = \frac{f(x)e^x - f(x)e^2}{e^{2x}} \equiv 0,$$

所以在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $\varphi(x)$ 为常数.

因此 $\varphi(x) = \varphi(0) = 1$, 从而 $f(x) = e^x$.

15. 设函数 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 试用柯西中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad (0 < \theta < 1).$$

证明 根据柯西中值定理

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}} \quad (\xi_1 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}} = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{n\xi_1^{n-1} - n \cdot 0^{n-1}} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}} \quad (\xi_2 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}),$$

$$\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}} = \frac{f''(\xi_2) - f''(0)}{n(n-1)\xi_2^{n-2} - n(n-1) \cdot 0^{n-2}} = \frac{f'''(\xi_3)}{n(n-1)(n-2)\xi_3^{n-3}} \quad (\xi_3 \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } \xi_2 \text{ 之$$

间),

依次下去可得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1}} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(0)}{n(n-1)\cdots 2\cdot\xi_{n-1} - n(n-1)\cdots 2\cdot 0} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} \quad (\xi_n \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } \xi_{n-1} \text{ 之$$

间),

$$\text{所以 } \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}.$$

由于 ξ_n 可以表示为 $\xi_n = \theta x$ ($0 < \theta < 1$), 所以 $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad (0 < \theta < 1).$

习题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x;$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right);$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x;$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x}{1} = \cos a.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3 \cos 3x}{5 \sec^2 5x} = -\frac{3}{5}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{2(\pi - 2x) \cdot (-2)} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{-2} = -\frac{1}{8}.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{mx^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{\tan 7x} \cdot \sec^2 7x \cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x} \cdot \sec^2 2x \cdot 2}$$

$$= \frac{7}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\tan 2x}{\tan 7x} = \frac{7}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sec^2 2x \cdot 2}{\sec^2 7x \cdot 7} = 1.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x \cdot 3} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos 3x (-\sin 3x) \cdot 3}{2 \cos x (-\sin x)} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \sin 3x}{-\sin x} = 3.$$

$$\begin{aligned} (9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x+x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \ln(1+x^2)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-2 \cos x (-\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1. \end{aligned}$$

(注: $\cos x \ln(1+x^2) \sim x^2$)

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 2x \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{1} = +\infty$$

(注: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $t = \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$.)

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$(14) \quad \text{因为 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(1 + \frac{a}{x})},$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}} \cdot (-\frac{a}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x+a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1} = a, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(1 + \frac{a}{x})} = e^a.$$

(15) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \ln x}$,

而
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cdot \cot x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \ln x} = e^0 = 1$.

(16) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^{-\tan x \ln x}$,

而
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \tan x \ln x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\tan x \ln x} = e^0 = 1$.

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$, 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 是存在的.

但 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x)$ 不存在, 不能用洛必达法则.

3. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 是存在的.

但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin \frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \cdot x$ 不存在, 不能用洛必达法则.

4. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ e^{\frac{1}{2}} & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0)=e^{-\frac{1}{2}}, \lim_{x \rightarrow 0^0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = f(0),$

因为 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x} [\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1]},$

而 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2},$

所以 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x} [\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1]}$
 $= e^{-\frac{1}{2}} = f(0).$

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

习题 3-3

1. 按 $(x-4)$ 的幂展开多项式 $x^4-5x^3+x^2-3x+4$.

解 设 $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$. 因为

$$f(4)=-56,$$

$$f'(4)=(4x^3-15x^2+2x-3)|_{x=4}=21,$$

$$f''(4)=(12x^2-30x+2)|_{x=4}=74,$$

$$f'''(4)=(24x-30)|_{x=4}=66,$$

$$f^{(4)}(4)=24,$$

所以

$$f(x)=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4$$

$$=-56+21(x-4)+37(x-4)^2+11(x-4)^3+(x-4)^4.$$

2. 应用麦克劳林公式, 按 x 幂展开函数 $f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

解 因为

$$f'(x)=3(x^2-3x+1)^2(2x-3),$$

$$f''(x)=6(x^2-3x+1)(2x-3)^2+6(x^2-3x+1)^2=30(x^2-3x+1)(x^2-3x+2),$$

$$f'''(x)=30(2x-3)(x^2-3x+2)+30(x^2-3x+1)(2x-3)=30(2x-3)(2x^2-6x+3),$$

$$f^{(4)}(x)=60(2x^2-6x+3)+30(2x-3)(4x-6)=360(x^2-3x+2),$$

$$f^{(5)}(x)=360(2x-3),$$

$$f^{(6)}(x)=720;$$

$$f(0)=1, f'(0)=-9, f''(0)=60, f'''(0)=-270,$$

$$f^{(4)}(0)=720, f^{(5)}(0)=-1080, f^{(6)}(0)=720,$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 \\ &= 1 - 9x + 30x^2 - 45x^3 + 30x^4 - 9x^5 + x^6. \end{aligned}$$

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 3 阶泰勒公式.

解 因为

$$f(4)=\sqrt{4}=2, \quad f'(4)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{1}{4}, \quad f''(4)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\Big|_{x=4}=-\frac{1}{32},$$

$$f'''(4)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\Big|_{x=4}=\frac{3}{8 \cdot 32}, \quad f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad \sqrt{x} &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4 \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{1}{4!} \cdot \frac{15}{16\sqrt{[4+\theta(x-4)]^7}}(x-4)^4 \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f'(x)=x^{-1}, f''(x)=(-1)x^{-2}, f'''(x)=(-1)(-2)x^{-3}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-n+1)x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

$$f^{(k)}(2) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k} (k=1, 2, \dots, n+1),$$

所以

$$\begin{aligned} \ln x &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + o[(x-2)^n] \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2 \cdot 2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(x-2)^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}(x-2)^n + o[(x-2)^n]. \end{aligned}$$

5. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f(x) = x^{-1}, f'(x) = (-1)x^{-2}, f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2) \cdots (-n)x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}};$$

$$f^{(k)}(-1) = \frac{(-1)^k k!}{(-1)^{k+1}} = -k! (k=1, 2, \dots, n),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{x} &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1} \\ &= -[1 + (x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \dots + (x+1)^n] + \frac{(-1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}(x+1)^{n+1} \end{aligned}$$

$(0 < \theta < 1)$.

6. 求函数 $f(x) = \tan x$ 的带有拉格朗日型余项的 3 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x) = \sec^2 x,$$

$$f''(x) = 2 \sec x \sec x \tan x = 2 \sec^2 x \tan x,$$

$$f'''(x) = 4 \sec x \sec x \tan^2 x + 2 \sec^4 x = 4 \sec^2 x \tan^2 x + 2 \sec^4 x,$$

$$f^{(4)}(x) = 8 \sec^2 x \tan^3 x + 8 \sec^4 x \tan x + 8 \sec^4 x \tan x = \frac{8 \sin x (\sin^2 x + 2)}{\cos^5 x};$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 2,$$

$$\text{所以 } \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\sin(\theta x)[\sin^2(\theta x) + 2]}{3 \cos^5(\theta x)}x^4 \quad (0 < \theta < 1).$$

7. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x)=e^x+xe^x,$$

$$f''(x)=e^x+e^x+xe^x=2e^x+xe^x,$$

$$f'''(x)=2e^x+e^x+xe^x=3e^x+xe^x, \dots,$$

$$f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x,$$

$$f^{(k)}(0)=k \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad xe^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

8. 验证当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时, 所产生的误差

小于 0.01, 并求 \sqrt{e} 的近似值, 使误差小于 0.01.

解 因为公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 右端为 e^x 的三阶麦克劳林公式, 其余项为

$$R_3(x) = \frac{e^\xi}{4!}x^4,$$

所以当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的误差

$$|R_3(x)| = \left| \frac{e^\xi}{4!}x^4 \right| \leq \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!} \left(\frac{1}{2} \right)^4 \approx 0.0045 < 0.01.$$

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 \approx 1.645.$$

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$;

(2) $\sin 18^\circ$.

解 (1) 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 则 $f(x)$ 在 $x_0=27$ 点展开成三阶泰勒公式为

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}}(x-27) + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{2}{9} \cdot 27^{-\frac{5}{3}} \right) (x-27)^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{10}{27}\cdot 27^{-\frac{8}{3}}\right)(x-27)^3+\frac{1}{4!}\cdot\left(-\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}}\right)(x-27)^4 (\xi \text{ 介于 } 27 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

$$\text{于是 } \sqrt[3]{30} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{2}{9} \cdot 27^{-\frac{5}{3}}\right) \cdot 3^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{10}{27} \cdot 27^{-\frac{8}{3}}\right) \cdot 3^3$$

$$\approx 3\left(1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^6} + \frac{5}{3^{10}}\right) \approx 3.10724,$$

其误差为

$$|R_3(30)| = \left| \frac{1}{4!} \cdot \left(-\frac{80}{81} \xi^{-\frac{11}{3}}\right) \cdot 3^4 \right| < \frac{1}{4!} \cdot \frac{80}{81} \cdot 27^{-\frac{11}{3}} \cdot 3^4 = \frac{80}{4! 3^{11}} = 1.88 \times 10^{-5}.$$

(2) 已知

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{\sin \xi}{4!}x^4 (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

$$\text{所以 } \sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0.3090,$$

其误差为

$$|R_3(\frac{\pi}{10})| = \left| \frac{\sin \xi}{4!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 \right| < \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{4!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 2.03 \times 10^{-4}.$$

10. 利用泰勒公式求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[4]{x^4-2x^3});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[4]{x^4-2x^3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} - \sqrt[4]{1-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sqrt[3]{1+3t} - \sqrt[4]{1-2t}}{t}.$$

因为 $\sqrt[3]{1+3t} = 1+t+o(t)$, $\sqrt[4]{1-2t} = 1-\frac{1}{2}t+o(t)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{[1+t+o(t)]-[1-\frac{1}{2}t+o(t)]}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} [\frac{3}{2} + \frac{o(t)}{t}] = \frac{3}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)] - [1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)]}{x^3[1 + \ln(1-x)^{\frac{1}{x}}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x + \frac{o(x^4)}{x^3}}{1 + \ln(1-x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1+e^{-1}} = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - [1 + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 + o(x^4)]}{[(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)) - (1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + o(x^4))]x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4!}x^4 + o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4 - \frac{11}{24}x^6 + x^2 \cdot o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4!} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2} - \frac{11}{24}x^2 + \frac{o(x^4)}{x^2}} = -\frac{\frac{3}{4!}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{12}.$$

习题 3-4

1. 判定函数 $f(x) = \arctan x$ 单调性.

解 因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{1}{1+x^2} \leq 0$, 且仅当 $x=0$ 时等号成立, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少.

2. 判定函数 $f(x) = x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的单调性.

解 因为 $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$, 所以 $f(x) = x + \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$;

(2) $y = 2x + \frac{8}{x}$ ($x > 0$);

(3) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;

(4) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

(5) $y = (x-1)(x+1)^3$;

$$(6) y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} \quad (a > 0);$$

$$(7) y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x \geq 0);$$

$$(8) y = x + |\sin 2x|.$$

解 (1) $y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x-3)(x+1) = 0$, 令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 3$.

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow		\searrow		\nearrow

可见函数在 $(-\infty, -1]$ 和 $[3, +\infty)$ 内单调增加, 在 $[-1, 3]$ 内单调减少.

$$(2) y' = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2} = 0, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得驻点 } x_1 = 2, x_2 = -2 (\text{舍去}).$$

因为当 $x > 2$ 时, $y' > 0$; 当 $0 < x < 2$ 时, $y' < 0$, 所以函数在 $(0, 2]$ 内单调减少, 在 $[2, +\infty)$ 内单调增加.

$$(3) y' = \frac{-60(2x-1)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得驻点 } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, \text{ 不可导点为 } x=0.$$

列表得

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	不存在	$-$	0	$+$	0	$-$
y	\searrow		\searrow	0	\nearrow		\searrow

可见函数在 $(-\infty, 0), (0, \frac{1}{2}], [1, +\infty)$ 内单调减少, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调增加.

$$(4) \text{ 因为 } y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0, \text{ 所以函数在 } (-\infty, +\infty) \text{ 内单调增}$$

加.

$$(5) y' = (x+1)^3 + 3(x-1)(x+1)^2 = 4(x - \frac{1}{2})(x+1)^2. \text{ 因为当 } x < \frac{1}{2} \text{ 时, } y' < 0; \text{ 当 } x > \frac{1}{2} \text{ 时, } y' > 0, \text{ 所以函数在 } (-\infty, \frac{1}{2}] \text{ 内单调减少, 在 } [\frac{1}{2}, +\infty) \text{ 内单调增加.}$$

$$(6) y' = \frac{-(x - \frac{2a}{3})}{3\sqrt[3]{(2x - a)^2(a - x)}}, \text{ 驻点为 } x_1 = \frac{2a}{3}, \text{ 不可导点为 } x_2 = \frac{a}{2}, x_3 = a.$$

列表得

x	$(-\infty, \frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3})$	$\frac{2a}{3}$	$(\frac{2a}{3}, a)$	a	$(a, +\infty)$
y'	+	不存在	+	0	-	不存在	+
y	\nearrow		\nearrow		\searrow		\nearrow

可见函数在 $(-\infty, \frac{a}{2})$, $(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3}]$, $(a, +\infty)$ 内单调增加, 在 $[\frac{2a}{3}, a)$ 内单调减少.

(7) $y' = e^{-x}x^{n-1}(n-x)$, 驻点为 $x=n$. 因为当 $0 < x < n$ 时, $y' > 0$; 当 $x > n$ 时, $y' < 0$, 所以函数在 $[0, n]$ 上单调增加, 在 $[n, +\infty)$ 内单调减少.

$$(8) y = \begin{cases} x + \sin 2x & k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x - \sin 2x & k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi \end{cases} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y' = \begin{cases} 1 + 2\cos 2x & k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 1 - 2\cos 2x & k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi \end{cases} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

y' 是以 π 为周期的函数, 在 $[0, \pi]$ 内令 $y' = 0$, 得驻点 $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, 不可导点为

$$x_3 = \frac{\pi}{2}.$$

列表得

x	$(0, \frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$	$\frac{5\pi}{6}$	$(\frac{5\pi}{6}, \pi)$
y'	+	0	-	不存在	+	0	-
y	\nearrow		\searrow		\nearrow		\searrow

根据函数在 $[0, \pi]$ 上的单调性及 y' 在 $(-\infty, +\infty)$ 的周期性可知函数在 $[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}]$ 上单

调增加, 在 $[\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}]$ 上单调减少($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

4. 证明下列不等式:

(1) 当 $x>0$ 时, $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$;

(2) 当 $x>0$ 时, $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$;

(3) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x+\tan x>2x$;

(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$;

(5) 当 $x>4$ 时, $2^x>x^2$;

证明 (1) 设 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内是连续的. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 从而当 $x>0$ 时 $f(x)>f(0)=0$, 即

$$1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}>0,$$

也就是 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

(2) 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内是连续的. 因为

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 从而当 $x>0$ 时 $f(x)>f(0)=0$, 即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}>0,$$

也就是 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

(3) 设 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内连续,

$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2=\frac{(\cos x-1)[(\cos^2 x-1)-\cos x]}{\cos^2 x}.$$

因为在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内 $\cos x-1<0$, $\cos^2 x-1<0$, $-\cos x<0$, 所以 $f'(x)>0$, 从而 $f(x)$ 在

$(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 因此当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$\sin x + \tan x - 2x > 0,$$

也就是 $\sin x + \tan x > 2x$.

(4) 设 $f(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内连续,

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x).$$

因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x$, $\tan x + x > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 因此当

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即

$$\tan x - x - \frac{1}{3}x^3 > 0,$$

也就是 $\tan x > x + \frac{1}{3}x^2$.

(5) 设 $f(x) = x \ln 2 - 2 \ln x$, 则 $f(x)$ 在 $[4, +\infty)$ 内连续, 因为

$$f'(x) = \ln 2 - \frac{2}{x} = \frac{\ln 4}{2} - \frac{2}{x} > \frac{\ln e}{2} - \frac{2}{4} = 0,$$

所以当 $x > 4$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 内单调增加.

因此当 $x > 4$ 时, $f(x) > f(4) = 0$, 即 $x \ln 2 - 2 \ln x > 0$, 也就是 $2^x > x^2$.

5. 讨论方程 $\ln x = ax$ (其中 $a > 0$) 有几个实根?

解 设 $f(x) = \ln x - ax$. 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x}$, 驻点为 $x = \frac{1}{a}$.

因为当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 内单调增加; 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 内单调减少. 又因为当 $x \rightarrow 0$ 及 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 所以如果

$f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1 > 0$, 即 $a < \frac{1}{e}$, 则方程有且仅有两个实根; 如果 $f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1 < 0$, 即

$a > \frac{1}{e}$, 则方程没有实根. 如果 $f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1 = 0$, 即 $a = \frac{1}{e}$, 则方程仅有一个实根.

6. 单调函数的导函数是否必为单调函数? 研究下面这个例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

解 单调函数的导函数不一定为单调函数.

例如 $f(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的, 但其导数不是单调函数. 事实上

,

$$f'(x)=1+\cos x \geq 0,$$

这就说明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的. $f''(x)=-\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不保持确定的符号, 故 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的.

7. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y=4x-x^2$;

(2) $y=\operatorname{sh} x$;

(3) $y=1+\frac{1}{x} (x>0)$;

(4) $y=x \arctan x$;

解 (1) $y'=4-2x, y''=-2$,

因为 $y''<0$, 所以曲线在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凸的.

(2) $y'=\operatorname{ch} x, y''=\operatorname{sh} x$. 令 $y''=0$, 得 $x=0$.

因为当 $x<0$ 时, $y''=\operatorname{sh} x<0$; 当 $x>0$ 时, $y''=\operatorname{sh} x>0$, 所以曲线在 $(-\infty, 0]$ 内是凸的, 在 $[0, +\infty)$ 内是凹的.

(3) $y'=-\frac{1}{x^2}, y''=\frac{2}{x^3}$.

因为当 $x>0$ 时, $y''>0$, 所以曲线在 $(0, +\infty)$ 内是凹的.

(4) $y'=\arctan x + \frac{x}{1+x^2}, y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}$.

因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $y''>0$, 所以曲线 $y=x \operatorname{arctg} x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的.

8. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$;

(2) $y=xe^{-x}$;

(3) $y=(x+1)^4+e^x$;

(4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=e^{\arctan x}$;

(6) $y=x^4(12\ln x-7)$,

解 (1) $y'=3x^2-10x+3, y''=6x-10$. 令 $y''=0$, 得 $x=\frac{5}{3}$.

因为当 $x < \frac{5}{3}$ 时, $y' < 0$; 当 $x > \frac{5}{3}$ 时, $y' > 0$, 所以曲线在 $(-\infty, \frac{5}{3}]$ 内是凸的, 在 $[\frac{5}{3}, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(\frac{5}{3}, \frac{20}{27})$.

$$(2) y' = e^{-x} - xe^{-x}, y'' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2). \text{ 令 } y''=0, \text{ 得 } x=2.$$

因为当 $x < 2$ 时, $y' < 0$; 当 $x > 2$ 时, $y' > 0$, 所以曲线在 $(-\infty, 2]$ 内是凸的, 在 $[2, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(2, 2e^{-2})$.

$$(3) y' = 4(x+1)^3 + e^x, y'' = 12(x+1)^2 + e^x.$$

因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内, $y' > 0$, 所以曲线 $y = (x+1)^4 + e^x$ 的在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的, 无拐点.

$$(4) y' = \frac{2x}{x^2+1}, y'' = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}. \text{ 令 } y''=0, \text{ 得 } x_1=-1, x_2=1.$$

列表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	\cap	$\ln 2$ 拐点	\cup	$\ln 2$ 拐点	\cap

可见曲线在 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$ 内是凸的, 在 $[-1, 1]$ 内是凹的, 拐点为 $(-1, \ln 2)$ 和 $(1, \ln 2)$.

$$(5) y' = e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}, y'' = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} (1-2x). \text{ 令 } y''=0 \text{ 得, } x = \frac{1}{2}.$$

因为当 $x < \frac{1}{2}$ 时, $y' > 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y' < 0$, 所以曲线 $y = e^{\arctan x}$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 内是凹的,

在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内是凸的, 拐点是 $(\frac{1}{2}, e^{\arctan \frac{1}{2}})$.

$$(6) y' = 4x^3(12\ln x - 7) + 12x^3, y'' = 144x^2 \ln x. \text{ 令 } y''=0, \text{ 得 } x=1.$$

因为当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$; 当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 所以曲线在 $(0, 1]$ 内是凸的, 在 $[1, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(1, -7)$.

9. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式:

$$(1) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n (x>0, y>0, x \neq y, n>1);$$

$$(2) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} (x \neq y);$$

$$(3) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} (x>0, y>0, x \neq y).$$

证明 (1) 设 $f(t) = t^n$, 则 $f'(t) = nt^{n-1}$, $f''(t) = n(n-1)t^{n-2}$. 因为当 $t>0$ 时, $f''(t)>0$, 所以曲线 $f(t) = t^n$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是凹的. 由定义, 对任意的 $x>0, y>0, x \neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即
$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(2) 设 $f(t) = e^t$, 则 $f'(t) = e^t$, $f''(t) = e^t$. 因为 $f''(t)>0$, 所以曲线 $f(t) = e^t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的. 由定义, 对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty), x \neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即
$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} (x \neq y).$$

$$(3) \text{ 设 } f(t) = t \ln t, \text{ 则 } f'(t) = \ln t + 1, f''(t) = \frac{1}{t}.$$

因为当 $t>0$ 时, $f''(t)>0$, 所以函数 $f(t) = t \ln t$ 的图形在 $(0, +\infty)$ 内是凹的. 由定义, 对任意的 $x>0, y>0, x \neq y$ 有

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

即
$$x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$$

10. 试证明曲线 $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

$$\text{证明 } y' = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}, y'' = \frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3} = \frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}.$$

$$\text{令 } y''=0, \text{ 得 } x_1=-1, x_2=2-\sqrt{3}, x_3=2+\sqrt{3}.$$

例表得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2-\sqrt{3})$	$2-\sqrt{3}$	$(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3}, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\cap	-1	\cup	$\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}$	\cap	$\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}$	\cup

可见拐点为 $(-1, -1)$, $(2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})})$, $(2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})})$. 因为

$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}-(-1)}{2-\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4}, \quad \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}-(-1)}{2+\sqrt{3}-(-1)}=\frac{1}{4},$$

所以这三个拐点在一条直线上.

11. 问 a 、 b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?

解 $y'=3ax^2+2bx$, $y''=6ax+2b$. 要使 $(1, 3)$ 成为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点, 必须 $y(1)=3$ 且 $y''(1)=0$, 即 $a+b=3$ 且 $6a+2b=0$, 解此方程组得 $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$.

12. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a 、 b 、 c 、 d , 使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$ 为拐点, 且点 $(-2, 44)$ 在曲线上.

解 $y'=3ax^2+2bx+c$, $y''=6ax+2b$. 依条件有

$$\begin{cases} y(-2)=44 \\ y(1)=-10 \\ y'(-2)=0 \\ y''(1)=0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -8a+4b-2c+d=44 \\ a+b+c+d=-10 \\ 12a-4b+c=0 \\ 6a+2b=0 \end{cases}.$$

解之得 $a=1$, $b=-3$, $c=-24$, $d=16$.

13. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.

解 $y'=4kx^3-12kx$, $y''=12k(x-1)(x+1)$. 令 $y''=0$, 得 $x_1=-1$, $x_2=1$.

因为在 $x_1=-1$ 的两侧 y' 是异号的, 又当 $x=-1$ 时 $y=4k$, 所以点 $(-1, 4k)$ 是拐点.

因为 $y'(-1)=8k$, 所以过拐点 $(-1, 4k)$ 的法线方程为 $y-4k=-\frac{1}{8k}(x+1)$. 要使法线

过原点, 则 $(0, 0)$ 应满足法线方程, 即 $-4k=-\frac{1}{8k}$, $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

同理, 因为在 $x=1$ 的两侧 y'' 是异号的, 又当 $x=1$ 时 $y=4k$, 所以点 $(1, 4k)$ 也是拐点.

因为 $y'(1)=-8k$, 所以过拐点 $(-1, 4k)$ 的法线方程为 $y-4k=\frac{1}{8k}(x-1)$. 要使法线过原点, 则 $(0, 0)$ 应满足法线方程, 即 $-4k=-\frac{1}{8k}$, $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

因此当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ 时, 该曲线的拐点处的法线通过原点.

14. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么?

解 不妨设 $f'''(x_0)>0$. 由 $f'''(x)$ 的连续性, 存在 x_0 的某一邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 在此邻域内有 $f'''(x)>0$. 由拉格朗日中值定理, 有

$$f''(x)-f''(x_0)=f'''(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 介于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

即 $f''(x)=f'''(\xi)(x-x_0)$.

因为当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $f''(x)<0$; 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $f''(x)>0$, 所以 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点.

习题 3-5

1. 求函数的极值:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

(2) $y=x-\ln(1+x)$;

(3) $y=-x^4+2x^2$;

(4) $y=x+\sqrt{1-x}$;

(5) $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(6) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y=e^x \cos x$;

(8) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

$$(9) y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}};$$

$$(10) y = x + \tan x.$$

解 (1)函数的定义为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3) = 6(x-3)(x+1)$, 驻点为 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow	17 极大值	\searrow	-47 极小值	\nearrow

可见函数在 $x = -1$ 处取得极大值 17, 在 $x = 3$ 处取得极小值 -47.

(2)函数的定义为 $(-1, +\infty)$, $y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, 驻点为 $x = 0$. 因为当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$; 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 所以函数在 $x = 0$ 处取得极小值, 极小值为 $y(0) = 0$.

(3)函数的定义为 $(-\infty, +\infty)$,

$$y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1), y'' = -12x^2 + 4,$$

令 $y' = 0$, 得 $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

因为 $y''(0) = 4 > 0, y''(-1) = -8 < 0, y''(1) = -8 < 0$, 所以 $y(0) = 0$ 是函数的极小值, $y(-1) = 1$ 和 $y(1) = 1$ 是函数的极大值.

(4)函数的定义域为 $(-\infty, 1]$,

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x} - 1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{3-4x}{2\sqrt{1-x}(2\sqrt{1-x}+1)},$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x = \frac{3}{4}$.

因为当 $x < \frac{3}{4}$ 时, $y' > 0$; 当 $\frac{3}{4} < x < 1$ 时, $y' < 0$, 所以 $y(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$ 为函数的极大值.

$$(5) \text{函数的定义为} (-\infty, +\infty), y' = \frac{-5(x - \frac{12}{5})}{\sqrt{(4+5x^2)^3}}, \text{驻点为 } x = \frac{12}{5}.$$

因为当 $x < \frac{12}{5}$ 时, $y' > 0$; 当 $x > \frac{12}{5}$ 时, $y' < 0$, 所以函数在 $x = \frac{12}{5}$ 处取得极大值, 极大值为 $y(\frac{12}{5}) = \frac{\sqrt{205}}{10}$.

(6)函数的定义为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$, 驻点为 $x_1 = 0, x_2 = -2$.

列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
-----	-----------------	------	-----------	-----	----------------

y'	-	0	+	0	-
y	\searrow	$\frac{8}{3}$ 极小值	\nearrow	4 极大值	\searrow

可见函数在 $x=-2$ 处取得极小值 $\frac{8}{3}$, 在 $x=0$ 处取得极大值 4.

(7) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = e^x(\cos x - \sin x), \quad y'' = -e^x \sin x.$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi$, ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

因为 $y''(\frac{\pi}{4}+2k\pi) < 0$, 所以 $y(\frac{\pi}{4}+2k\pi) = e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极大值.

因为 $y''[\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi] > 0$, 所以 $y[\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi] = -e^{\frac{\pi}{4}+2(k+1)\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数的极小值.

(8) 函数 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$y' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} (1 - \ln x).$$

令 $y'=0$, 得驻点 $x=e$.

因为当 $x < e$ 时, $y' > 0$; 当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 所以 $y(e) = e^{\frac{1}{e}}$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.

(9) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = -\frac{2}{3} \frac{1}{(x+1)^{2/3}}$, 因为 $y' < 0$, 所以函数在 $(-\infty, +\infty)$ 是单调

减少的, 无极值.

(10) 函数 $y=x+\operatorname{tg} x$ 的定义域为 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

因为 $y'=1+\sec^2 x > 0$, 所以函数 $f(x)$ 无极值.

2. 试证明: 如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac < 0$, 那么这函数没有极值.

证明 $y'=3ax^2+2bx+c$. 由 $b^2-3ac < 0$, 知 $a \neq 0$. 于是配方得到

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 3a(x^2 + \frac{2b}{3a}x + \frac{c}{3a}) = 3a(x^2 + \frac{b}{3a})^2 + \frac{3ac-b^2}{3a},$$

因 $3ac-b^2 > 0$, 所以当 $a > 0$ 时, $y' > 0$; 当 $a < 0$ 时, $y' < 0$. 因此 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 是单调函数, 没有极值.

3. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x)=a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小

值? 并求此极值.

解 $f(x)=a\cos x+\cos 3x, f'(x)=-a\sin x-3\sin x$.

要使函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 必有 $f'(\frac{\pi}{3})=0$, 即 $a\cdot\frac{1}{2}-1=0, a=2$.

当 $a=2$ 时, $f'(\frac{\pi}{3})=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<0$. 因此, 当 $a=2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 而且取得极大值, 极大值为 $f(\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$.

4. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) $y=2x^3-3x^2, -1\leq x\leq 4$;

(2) $y=x^4-8x^2+2, -1\leq x\leq 3$;

(3) $y=x+\sqrt{1-x}, -5\leq x\leq 1$.

解 (1) $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$, 令 $y'=0$, 得 $x_1=0, x_2=1$. 计算函数值得

$$y(-1)=-5, y(0)=0, y(1)=-1, y(4)=80,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(-1)=-5$, 最大值为 $y(4)=80$.

(2) $y'=4x^3-16x=4x(x^2-4)$, 令 $y'=0$, 得 $x_1=0, x_2=-2$ (舍去), $x_3=2$. 计算函数值得

$$y(-1)=-5, y(0)=2, y(2)=-14, y(3)=11,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(2)=-14$, 最大值为 $y(3)=11$.

(3) $y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$, 令 $y'=0$, 得 $x=\frac{3}{4}$. 计算函数值得

$$y(-5)=-5+\sqrt{6}, y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}, y(1)=1,$$

经比较得出函数的最小值为 $y(-5)=-5+\sqrt{6}$, 最大值为 $y(\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$.

5. 问函数 $y=2x^3-6x^2-18x-7(1\leq x\leq 4)$ 在何处取得最大值? 并求出它的最大值.

解 $y'=6x^2-12x-18=6(x-3)(x+1)$, 函数 $f(x)$ 在 $1\leq x\leq 4$ 内的驻点为 $x=3$.

比较函数值:

$$f(1)=-29, f(3)=-61, f(4)=-47,$$

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1)=-29$.

6. 问函数 $y=x^2-\frac{54}{x}(x<0)$ 在何处取得最小值?

解 $y'=2x+\frac{54}{x^2}$, 在 $(-\infty, 0)$ 的驻点为 $x=-3$. 因为

$$y''=2-\frac{108}{x^3}, y''(-3)=2+\frac{108}{27}>0,$$

所以函数在 $x=-3$ 处取得极小值. 又因为驻点只有一个, 所以这个极小值也就是最小值, 即函数在 $x=-3$ 处取得最小值, 最小值为 $y(-3)=27$.

7. 问函数 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ ($x \geq 0$) 在何处取得最大值?

解 $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. 函数在 $(0, +\infty)$ 内的驻点为 $x=1$.

因为当 $0 < x < 1$ 时, $y' > 0$; 当 $x > 1$ 时 $y' < 0$, 所以函数在 $x=1$ 处取得极大值. 又因为函数在 $(0, +\infty)$ 内只有一个驻点, 所以此极大值也是函数的最大值, 即函数在 $x=1$ 处取得最大值, 最大值为 $f(1) = \frac{1}{2}$.

8. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌 20cm 长的墙壁, 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

解 设宽为 x 长为 y , 则 $2x+y=20$, $y=20-2x$, 于是面积为

$$S = xy = x(20-2x) = 20x - 2x^2.$$

$$S' = 20 - 4x = 4(5-x), S'' = -4.$$

令 $S' = 0$, 得唯一驻点 $x=5$.

因为 $S''(5) = -4 < 0$, 所以 $x=5$ 为极大值点, 从而也是最大值点.

当宽为 5 米, 长为 10 米时这间小屋面积最大.

9. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

解 由 $V = \pi r^2 h$, 得 $h = V\pi^{-1}r^{-2}$. 于是油罐表面积为

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \quad (0 < r < +\infty),$$

$$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

令 $S' = 0$, 得驻点 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

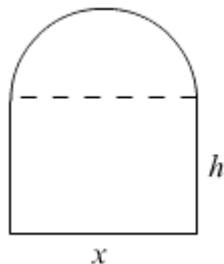
因为 $S' = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$, 所以 S 在驻点 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 处取得极小值, 也就是最小值. 这时相应的

高为 $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r$. 底直径与高的比为 $2r : h = 1 : 1$.

10. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图), 截面的面积为 5m^2 , 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省?

解 设矩形高为 h , 截面的周长 S , 则 $xh + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi = 5$, $h = \frac{5}{x} - \frac{\pi}{8}x$.

于是



$$S = x + 2h + \frac{x\pi}{2} = x + \frac{\pi}{4}x + \frac{10}{x} \quad (0 < x < \sqrt{\frac{40}{\pi}}),$$

$$S' = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{10}{x^2}.$$

令 $S'=0$, 得唯一驻点 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$.

因为 $S' = \frac{20}{x^3} > 0$, 所以 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 为极小值点, 同时也是最小值点.

因此底宽为 $x = \sqrt{\frac{40}{4+\pi}}$ 时所用的材料最省.

11. 设有重量为 5kg 的物体, 置于水平面上, 受力 F 的作用而开始移动(如图). 设摩擦系数 $\mu=0.25$, 问力 F 与水平线的交角 α 为多少时, 才可使力 F 的大小为最小?

解 由 $F \cos \alpha = (m - F \sin \alpha) \mu$ 得

$$F = \frac{\mu m}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}),$$

$$F' = \frac{\mu m (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2},$$

驻点为 $\alpha = \arctan \mu$.

因为 F 的最小值一定在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内取得, 而 F 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内只有一个驻点 $\alpha = \arctan \mu$,

所以 $\alpha = \arctan \mu$ 一定也是 F 的最小值点. 从而当 $\alpha = \arctan 0.25 = 14^\circ$ 时, 力 F 最小.

12. 有一杠杆, 支点在它的一端. 在距支点 0.1m 处挂一重量为 49kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(如图). 如果杠杆的线密度为 5kg/m , 求最省力的杆长?

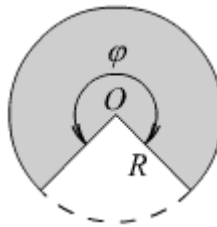
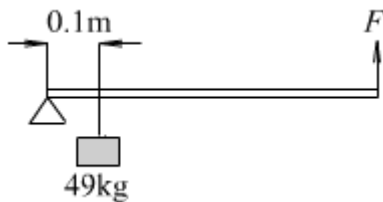
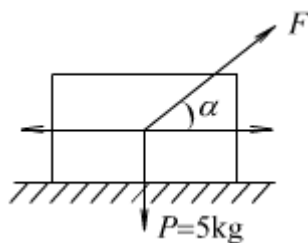
解 设杆长为 $x(\text{m})$, 加于杠杆一端的力为 F , 则有

$$xF = \frac{1}{2}x \cdot 5x + 49 \cdot 0.1, \text{ 即 } F = \frac{5}{2}x + \frac{4.9}{x} \quad (x > 0).$$

$$F' = \frac{5}{2} - \frac{4.9}{x^2},$$

驻点为 $x=1.4$. 由问题的实际意义知, F 的最小值一定在 $(0, +\infty)$ 内取得, 而 F 在 $(0, +\infty)$ 内只有一个驻点 $x=1.4$, 所以 F 一定在 $x=1.4\text{m}$ 处取得最小值, 即最省力的杆长为 1.4m .

13. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一漏斗(如图), 问留下的扇形的中心角 φ 取多大时, 做成的漏斗的容积最大?



解 漏斗的底周长 l 、底半径 r 、高 h 分别为

$$l=R\cdot\varphi, \quad r=\frac{R\varphi}{2\pi}, \quad h=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}.$$

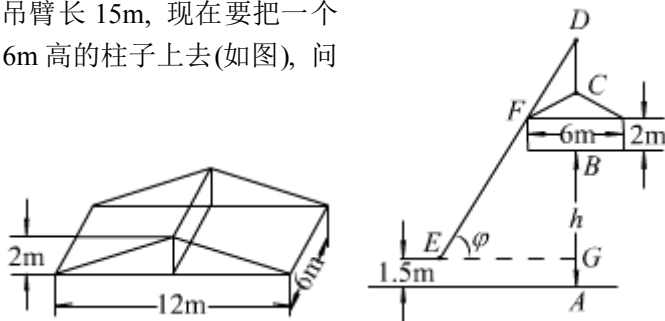
漏斗的容积为

$$V=\frac{1}{3}hr^2\pi=\frac{R^3\varphi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2} \quad (0<\varphi<2\pi).$$

$$V'=\frac{R^3}{24\pi^2}\cdot\frac{\varphi(8\pi^2-3\varphi^2)}{\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}}, \quad \text{驻点为 } \varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi.$$

由问题的实际意义, V 一定在 $(0, 2\pi)$ 内取得最大值, 而 V 在 $(0, 2\pi)$ 内只有一个驻点, 所以该驻点一定也是最大值点. 因此当 $\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时, 漏斗的容积最大.

14. 某吊车的车身高为 1.5m, 吊臂长 15m, 现在要把一个 6m 宽、2m 高的屋架, 水平地吊到 6m 高的柱子上去(如图), 问能否吊得上去?



解 设吊臂对地面的倾角为 φ 时, 屋架能够吊到的最大高度为 h . 在直角三角形 $\triangle EDG$ 中

$$15\sin\varphi=(h-1.5)+2+3\tan\varphi,$$

故
$$h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2},$$

$$h'=15\cos\varphi-\frac{3}{\cos^2\varphi}.$$

令 $h'=0$ 得唯一驻点 $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\approx 54^\circ$.

因为 $h''=-15\sin\varphi-\frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi}<0$, 所以 $\varphi=54^\circ$ 为极大值点, 同时这也是最大值点.

当 $\varphi=54^\circ$ 时, $h=15\sin\varphi-3\tan\varphi-\frac{1}{2}\approx 7.5\text{m}$.

所以把此屋最高能水平地吊至 7.5m 高, 现只要求水平地吊到 6m 处, 当然能吊上去.

15. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 试问房租定为多少可获最大收入?

解 房租定为 x 元, 纯收入为 R 元.

当 $x \leq 1000$ 时, $R = 50x - 50 \times 100 = 50x - 5000$, 且当 $x = 1000$ 时, 得最大纯收入 45000 元.

当 $x > 1000$ 时,

$$R = [50 - \frac{1}{5}(x - 1000)] \cdot x - [50 - \frac{1}{5}(x - 1000)] \cdot 100 = -\frac{1}{50}x^2 + 72x - 7000,$$

$$R' = -\frac{1}{25}x + 72.$$

令 $R' = 0$ 得 $(1000, +\infty)$ 内唯一驻点 $x = 1800$. 因为 $R'' = -\frac{1}{25} < 0$, 所以 1800 为极大值点, 同时也是最大值点. 最大值为 $R = 57800$.

因此, 房租定为 1800 元可获最大收入.

习题 3-6

描绘下列函数的图形:

$$1. y = \frac{1}{5}(x^4 - 6x^2 + 8x + 7);$$

解 (1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

$$(2) y' = \frac{1}{5}(4x^3 - 12x + 8) = \frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2,$$

$$y'' = \frac{4}{5}(3x^2 - 3) = \frac{12}{5}(x+1)(x-1),$$

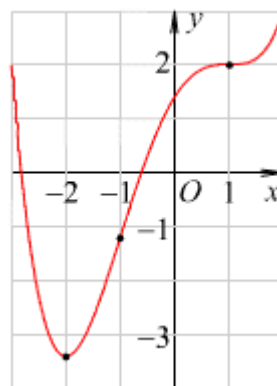
令 $y' = 0$, 得 $x = -2, x = 1$; 令 $y'' = 0$, 得 $x = -1, x = 1$.

(3) 列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	$\searrow \cup$	$-\frac{17}{5}$	$\nearrow \cup$	$-\frac{6}{5}$	$\nearrow \cap$	2	$\nearrow \cup$

		极小值		拐点		拐点	
--	--	-----	--	----	--	----	--

(4)作图:



2. $y = \frac{x}{1+x^2}$;

解 (1)定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(2)奇函数, 图形关于原点对称, 故可选讨论 $x \geq 0$ 时函数的图形.

(3) $y' = \frac{-(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$, $y'' = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$,

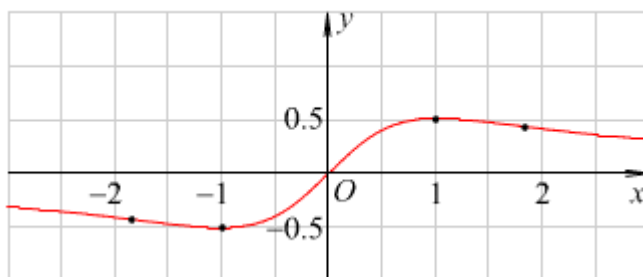
当 $x \geq 0$ 时, 令 $y' = 0$, 得 $x = 1$; 令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$, $x = \sqrt{3}$.

(4)列表

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+	+	0	-	-	-
y''	0	-	-	-	0	+
$y=f(x)$	0 拐点	$\nearrow \cap$	$\frac{1}{2}$ 极大 值	$\searrow \cap$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ 拐点	$\searrow \cup$

(5)有水平渐近线 $y=0$;

(6)作图:



3. $y=e^{-(x-1)^2}$;

解 (1)定义域为 $(-\infty, +\infty)$;

(2) $y'=-2(x-1)e^{-(x-1)^2}$ $y''=4e^{-(x-1)^2}[x-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})][x-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})]$,

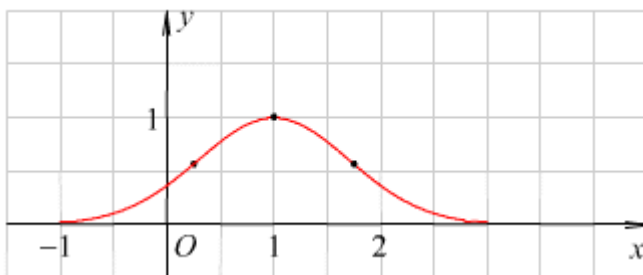
令 $y'=0$, 得 $x=1$; 令 $y''=0$, 得 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)列表

x	$(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$	1	$(1, 1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
$y=f(x)$	$\nearrow \cup$	$e^{\frac{1}{2}}$ 拐点	$\nearrow \cap$	1 极大值	$\searrow \cap$	$e^{\frac{1}{2}}$ 拐点	$\searrow \cup$

(4)有水平渐近线 $y=0$;

(5)作图:



4. $y=x^2+\frac{1}{x}$;

解 (1)定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$;

(2) $y'=2x-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$, $y''=2+\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^3+1)}{x^3}$,

令 $y'=0$, 得 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 令 $y''=0$, 得 $x=-1$.

(3)列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	无	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	无	$+$	$+$	$+$
$y=f(x)$	$\searrow \cup$	0 拐点	$\searrow \cap$	无	$\searrow \cup$	$\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ 极小值	$\nearrow \cup$

(4)有铅直渐近线 $x=0$;

(5)作图:



5. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$

解 (1)定义域为 $x \neq \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

(2)是偶函数, 周期为 2π . 可先作 $[0, \pi/2]$ 上的图形, 再根据对称性作出 $[-\pi/2, 0)$ 内的图形, 最后根据周期性作出 $[-\pi/2, \pi/2]$ 以外的图形;

(3) $y' = \frac{\sin x(3-2\sin^2 x)}{\cos^2 2x}, y'' = \frac{\cos x \cdot (3+12\sin^2 x-4\sin^4 x)}{\cos^3 2x},$

在 $[0, \pi/2]$ 上, 令 $y'=0$, 得 $x=0, x=\pi/2$; 令 $y''=0$, 得 $x=\pi/2$.

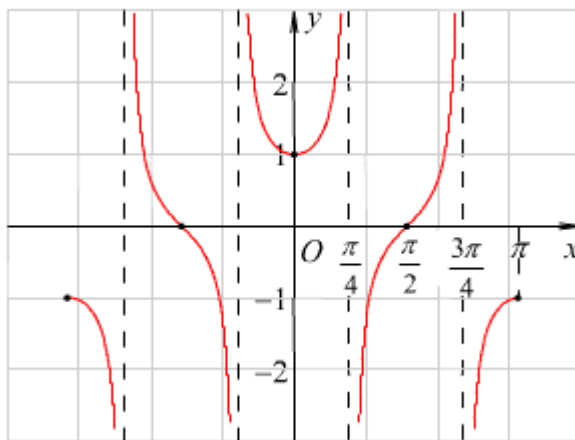
(4)列表

x	0	$(0, \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\frac{3\pi}{4}, \pi)$	π
-----	-----	----------------------	-----------------	----------------------------------	-----------------	-----------------------------------	------------------	-------------------------	-------

y'	0	+	无	+	+	+	无	+	0
y''	+	+	无	-	0	+	无	-	-
$y=f(x)$	1 极小值	$\nearrow \cup$	无	$\nearrow \cap$	0 拐点	$\nearrow \cup$	无	$\nearrow \cap$	-1 极大值

(5)有铅直渐近线 $x=\frac{\pi}{4}$ 及 $x=\frac{3\pi}{4}$;

(6)作图:



习题 3-7

1. 求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点(0, 2)处的曲率.

解 两边对 x 求导数得

$$8x+2yy'=0, \quad y'=-\frac{4x}{y}, \quad y''=-\frac{4y-4xy'}{y^2}.$$

$$y'|_{(0,2)}=0, \quad y''|_{(0,2)}=-2.$$

所求曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|-2|}{(1+0^2)^{3/2}} = 2.$$

2. 求曲线 $y = \ln \sec x$ 在点 (x, y) 处的曲率及曲率半径.

$$\text{解 } y' = \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x = \tan x, \quad y'' = \sec^2 x.$$

所求曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|\sec^2 x|}{(1+\tan^2 x)^{3/2}} = |\cos x|,$$

曲率半径为

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{|\cos x|} = |\sec x|.$$

3. 求抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

$$\text{解 } y' = 2x - 4, \quad y'' = 2.$$

令 $y' = 0$, 得顶点的横坐标为 $x = 2$.

$$y'|_{x=2} = 0, \quad y''|_{x=2} = 2.$$

所求曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{|2|}{(1+0^2)^{3/2}} = 2,$$

曲率半径为

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{2}.$$

4. 求曲线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 在 $t = t_0$ 处的曲率.

$$\text{解 } y' = \frac{(a \sin^3 t)'}{(a \cos^3 x)'} = -\tan t, \quad y'' = \frac{(-\tan t)'}{(a \cos^3 x)'} = \frac{1}{3a \sin t \cdot \cos^4 t}.$$

所求曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left| \frac{1}{3a \sin t \cdot \cos^4 t} \right|}{(1+\tan^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{3a \sin t \cos^3 t} = \frac{2}{3|a \sin 2t|},$$

$$K|_{t=t_0} = \frac{2}{3|a \sin 2t_0|}.$$

5. 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

$$\text{解 } y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},$$

$$\rho = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x},$$

$$\rho' = \frac{\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x - (1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2}(2x^2-1)}{x^2}.$$

$$\text{令 } \rho'=0, \text{ 得 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho < 0$; 当 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho > 0$, 所以 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是 ρ 的极小值点, 同时也最小值点. 当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y = \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此在曲线上点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处曲率半径最小, 最小曲率半径为 $\rho = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. 证明曲线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 在点 (x, y) 处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.

$$\text{解 } y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

在点 (x, y) 处的曲率半径为

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a})^{3/2}}{\left|\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right|} = \frac{(\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a})^{3/2}}{\left|\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right|} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}.$$

7. 一飞机沿抛物线路径 $y = \frac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位为 m) 作俯冲飞行, 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v = 200 \text{ m/s}$ 飞行员体重 $G = 70 \text{ Kg}$. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

$$\text{解 } y' = \frac{2x}{10000} = \frac{x}{5000}, \quad y'' = \frac{1}{5000}; \quad y'|_{x=0} = 0, \quad y''|_{x=0} = \frac{1}{5000}.$$

$$\rho|_{x=0} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+0^2)^{3/2}}{\frac{1}{5000}} = 5000.$$

$$\text{向心力 } F = \frac{mV^2}{\rho} = \frac{70 \times 200^2}{5000} = 560 \text{ (牛顿)}.$$

飞行员离心力及它本身的重量对座椅的压力为

$$79 \times 9.8 + 560 = 1246 \text{ (牛顿)}.$$

8. 汽车连同载重共 5t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6km/h, 桥的跨度为 10m, 拱的矢高为 0.25m. 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

解 如图取直角坐标系, 设抛物线拱桥方程为 $y=ax^2$, 由于抛物线过点(5, 0.25), 代入方程得

$$a = \frac{0.25}{25} = 0.01,$$

于是抛物线方程为 $y=0.01x^2$.

$$y'=0.02x, y''=0.02.$$

$$\rho|_{x=0} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+0^2)^{3/2}}{0.02} = 50.$$

$$\text{向心力为 } F = \frac{mV^2}{\rho} = \frac{5 \times 10^3 \left(\frac{21.6 \times 10^3}{3600} \right)^2}{50} = 3600 \text{ (牛顿)}.$$

因为汽车重为 5 吨, 所以汽车越过桥顶时对桥的压力为

$$5 \times 10^3 \times 9.8 - 3600 = 45400 \text{ (牛顿)}.$$

*9. 求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

*10. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 处的曲率圆方程.

*11. 求抛物线 $y^2=2px$ 的渐屈线方程.

总习题三

1. 填空:

设常数 $k>0$, 函数 $f(x)=\ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为_____.

解 应填写 2.

$$\text{提示: } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

在 $(0, +\infty)$ 内, 令 $f'(x)=0$, 得唯一驻点 $x=e$.

因为 $f''(x)<0$, 所以曲线 $f(x)=\ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内是凸的, 且驻点 $x=e$ 一定是最大值点,

最大值为 $f(e)=k>0$.

又因为 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=-\infty$, 所以曲线经过 x 轴两次, 即零点的个数为 2.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为().

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$; (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$;

$$(C) f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0); \quad (D) f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0).$$

解 选择 B.

提示: 因为 $f''(x)>0$, 所以 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加, 从而 $f'(1)>f'(x)>f'(0)$.

又由拉格朗日中值定理, 有 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$, $\xi \in [0, 1]$, 所以

$$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0).$$

3. 列举一个函数 $f(x)$ 满足: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内除某一点外处处可导, 但在 (a, b) 内不存在点 ξ , 使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解 取 $f(x)=|x|$, $x \in [-1, 1]$.

易知 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 且当 $x>0$ 时 $f'(x)=1$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=-1$; $f'(0)$ 不存在, 即 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上除 $x=0$ 外处处可导.

注意 $f(1)-f(-1)=0$, 所以要使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$ 成立, 即 $f'(\xi)=0$, 是不可能的.

因此在 $(-1, 1)$ 内不存在点 ξ , 使 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)(1-(-1))$.

4. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)=k$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a)-f(x)]$.

解 根据拉格朗日中值公式, $f(x+a)-f(x)=f'(\xi) \cdot a$, ξ 介于 $x+a$ 与 x 之间.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi \rightarrow \infty$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a)-f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(\xi) \cdot a = a \lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi) = ak.$$

5. 证明多项式 $f(x)=x^3-3x+2$ 在 $[0, 1]$ 上不可能有两个零点.

证明 $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$, 因为当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调减少. 因此, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上至多有一个零点.

6. 设 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, 证明多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

证明 设 $F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且

$F(0)=F(1)=0$. 由罗尔定理, 在 $(0, 1)$ 内至少有一个点 ξ , 使 $F'(\xi)=0$. 而 $F'(x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 且 $f(a)=0$, 证明存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使

$$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

证明 设 $F(x)=xf(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 且 $F(0)=F(a)=0$. 由罗尔定理, 在 $(0, a)$ 内至少有一个点 ξ , 使 $F'(\xi)=0$. 而 $F(x)=f(x)+xf'(x)$, 所以 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

8. 设 $0<a<b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 试利用柯西中值定理, 证明存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(a)-f(b)=f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$.

证明 对于 $f(x)$ 和 $\ln x$ 在 $[a, b]$ 上用柯西中值定理, 有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}, \quad \xi \in (a, b),$$

即 $f(a)-f(b)=\xi f'(\xi)\ln \frac{b}{a}, \xi \in (a, b).$

9. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是可导函数, 且 $|f'(x)| < g'(x)$, 证明: 当 $x > a$ 时, $|f(x)-f(a)| < g(x)-g(a)$.

证明 由条件 $|f'(x)| < g'(x)$ 得知, $\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| < 1$, 且有 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 是单调增加的, 当 $x > a$ 时,

$g(x) > g(a)$.

因为 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是可导函数, 所以 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a, x]$ 上连续, 在 (a, x) 内可导, 根据柯西中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (a, x)$, 使 $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

因此, $\frac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)} = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| < 1, |f(x)-f(a)| < g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^x}{1-x+\ln x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x) / n \right]^{nx} \text{ (其中 } a_1, a_2, \cdots, a_n > 0 \text{)}.$$

解 (1) $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^x}{1-x+\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-x^x)'}{(1-x+\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^x (\ln x + 1)}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^{x+1} (\ln x + 1)}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^{x+1} (\ln x + 1 + \frac{1}{x}) (\ln x + 1) - x^x}{-1} = 2.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x - \ln(1+x)]'}{[x \ln(1+x)]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x) \ln(1+x) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x) + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi})},$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{2}{\pi} \arctan x)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(\ln \arctan x + \ln \frac{2}{\pi})} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(4) 令 $y = [(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx}$. 则 $\ln y = nx[\ln(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}) - \ln n]$, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n[\ln(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}) - \ln n]}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}} \cdot (a_1^{\frac{1}{x}} \ln a_1 + a_2^{\frac{1}{x}} \ln a_2 + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}} \ln a_n) \cdot (\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} \\ &= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n = \ln(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n). \end{aligned}$$

即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \ln(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)$, 从而 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx} = \lim_{x \rightarrow \infty} y = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$.

11. 证明下列不等式:

(1) 当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$;

(2): 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$.

证明 (1) 令 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

因为 $f'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} > \frac{x - \tan x}{x^2} > 0$,

所以在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内 $f(x)$ 为单调增加的. 因此当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时有

$$\frac{\tan x_1}{x_1} < \frac{\tan x_2}{x_2}, \text{ 即 } \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

(2) 要证 $(1+x)\ln(1+x) > \arctan x$, 即证 $(1+x)\ln(1+x) - \arctan x > 0$.

设 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $f'(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$.

因为当 $x>0$ 时, $\ln(1+x)>0$, $1-\frac{1}{1+x^2}>0$, 所以 $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

因此, 当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)$, 而 $f(0)=0$, 从而 $f(x)>0$, 即 $(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x} & x>0 \\ x+2 & x\leq 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的极值.

解 $x=0$ 是函数的间断点.

当 $x<0$ 时, $f'(x)=1$; 当 $x>0$ 时, $f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$.

令 $f'(x)=0$, 得函数的驻点 $x=\frac{1}{e}$.

列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	2 极大值	\searrow	$e^{-\frac{2}{e}}$ 极小值	\nearrow

函数的极大值为 $f(0)=2$, 极小值为 $f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

13. 求椭圆 $x^2-xy+y^2=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

解 $2x-y-xy'+2yy'=0$, $y'=\frac{2x-y}{x-2y}$. 当 $x=\frac{1}{2}y$ 时, $y'=0$.

将 $x=\frac{1}{2}y$ 代入椭圆方程, 得 $\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}y^2+y^2=3$, $y=\pm 2$.

于是得驻点 $x=-1, x=1$. 因为椭圆上纵坐标最大和最小的点一定存在, 且在驻点处取得, 又当 $x=-1$ 时, $y=-2$, 当 $x=1$ 时, $y=2$, 所以纵坐标最大和最小的点分别为 $(1, 2)$ 和 $(-1, -2)$.

14. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

解 令 $f(x)=\sqrt[x]{x}=x^{\frac{1}{x}} (x>0)$, 则

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln x,$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x=\frac{1}{x^2}(1-\ln x),$$

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

令 $f'(x)=0$, 得唯一驻点 $x=e$.

因为当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 所以唯一驻点 $x=e$ 为最大值点.

因此所求最大项为 $\max\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\} = \sqrt[3]{3}$.

15. 曲线弧 $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

解 $y' = \cos x, y'' = -\sin x$,

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{\sin x} \quad (0 < x < \pi), \\ \rho' &= \frac{\frac{3}{2}(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}(-2\cos x \sin x) \cdot \sin x - (1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{2}} \cos x (3\sin^2 x + \cos^2 x + 1)}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

在 $(0, \pi)$ 内, 令 $\rho' = 0$, 得驻点 $x = \frac{\pi}{2}$.

因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\rho' < 0$; 当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, $\rho' > 0$, 所以 $x = \frac{\pi}{2}$ 是 ρ 的极小值点, 同时也是 ρ 的最

小值点, 最小值为 $\rho = \frac{(1+\cos^2 \frac{\pi}{2})^{3/2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = 1$.

16. 证明方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只有一个正根. 并求此正根的近似值, 使精确到本世纪末 10^{-3} .

解 设 $f(x) = x^3 - 5x - 2$, 则

$$f'(x) = 3x^2 - 5, f''(x) = 6x.$$

当 $x > 0$ 时, $f''(x) > 0$, 所以在 $(0, +\infty)$ 内曲线是凹的, 又 $f(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x - 2) = +\infty$, 所以在

$(0, +\infty)$ 内方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只能有一个根.

(求根的近似值略)

17. 设 $f''(x_0)$ 存在, 证明 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$.

$$\begin{aligned}\text{证明 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0-h)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f'(x_0+h) - f'(x_0)] + [f'(x_0) - f'(x_0-h)]}{h}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} + \frac{f'(x_0) - f'(x_0-h)}{h} \right] = \frac{1}{2} [f''(x_0) + f''(x_0)] = f''(x_0).$$

18. 设 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 且 $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$, 证明 $f(x) = o[(x-x_0)^n] (x \rightarrow x_0)$.

证明 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) = 0, \end{aligned}$$

所以 $f(x) = o[(x-x_0)^n] (x \rightarrow x_0)$.

19. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0$. 证明对于 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 及 $0 \leq t \leq 1$, 有 $f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

证明 设 $(1-t)x_1 + tx_2 = x_0$. 在 $x = x_0$ 点的一阶泰勒公式为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \quad (\text{其中 } \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}).$$

因为 $f''(x) \geq 0$, 所以

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

因此

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \quad f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0).$$

于是有

$$\begin{aligned} (1-t)f(x_1) + tf(x_2) &\geq (1-t)[f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)] + t[f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)] \\ &= (1-t)f(x_0) + tf(x_0) + f'(x_0)[(1-t)x_1 + tx_2 - f'(x_0)[(1-t)x_0 + tx_0]] \\ &= f(x_0) + f'(x_0)x_0 - f'(x_0)x_0 \\ &= f(x_0), \end{aligned}$$

即

$$f(x_0) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

所以

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

20. 试确定常数 a 和 b , 使 $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

解 $f(x)$ 是任意阶导数的, 它的 5 阶麦克劳公式为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + o(x^5) \\ &= (1-a-b)x + \frac{a+4b}{3!}x^3 + \frac{-a-16b}{5!}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

要使 $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小, 就是要使极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1-a-b}{x^4} + \frac{a+4b}{3!x^2} + \frac{-a-16b}{5!} + \frac{o(x^5)}{x^5} \right]$$

存在且不为 0. 为此令

$$\begin{cases} 1-a-b=0 \\ a+4b=0 \end{cases},$$

解之得 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$.

因为当 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^5} = \frac{-a-16b}{5!} = \frac{1}{30} \neq 0,$$

所以当 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ 时, $f(x)=x-(a+b \cos x)\sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.