2016年普通高等学校招生全国统一考试理科数学

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、设集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x|2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$ (　)

A. $(-3,-\frac{3}{2})$　　B. $(-3,\frac{3}{2})$　　C. $(1,\frac{3}{2})$　　D. $(\frac{3}{2},3)$

2、设 $(1+i)x=1+yi$，其中 x，y 是实数，则 $|x+yi|=$(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3、已知等差数列 $\{a_n\}$前 9 项的和为 27，$a_{10}=8$，则 $a_{100}=$ (　　)

A. 100　　B. 99　　C. 98　　D. 97

4、某公司的班车在 7:00，8:00，8:30 发车，小明在 7:50 至 8:30 之间到达发车站乘坐班车，且到达发车站的时刻是随机的，则他等车时间不超过 10 分钟的概率是 (　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

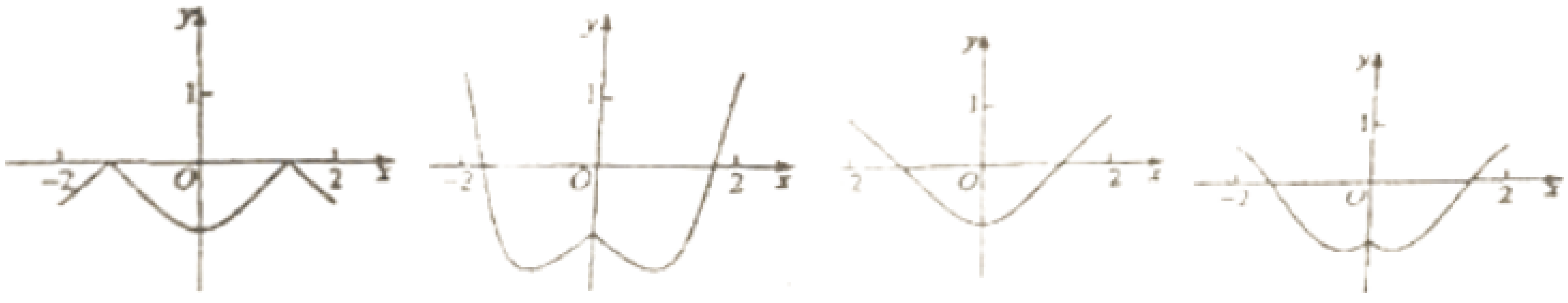
5、已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$ 表示双曲线，且该双曲线两焦点间的距离为 4，则 n 的取值范围是 (　　)

A. $(-1,3)$　　B. $(-1,\sqrt{3})$　　C. $(0,3)$　　D. $(0,\sqrt{3})$

6、如图，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条相互垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\frac{28\pi}{3}$，则它的表面积是 (　　)

A. 17π　　B. 18π　　C. 20π　　D. 28π

7、函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在$[-2,2]$的图像大致为 (　　)



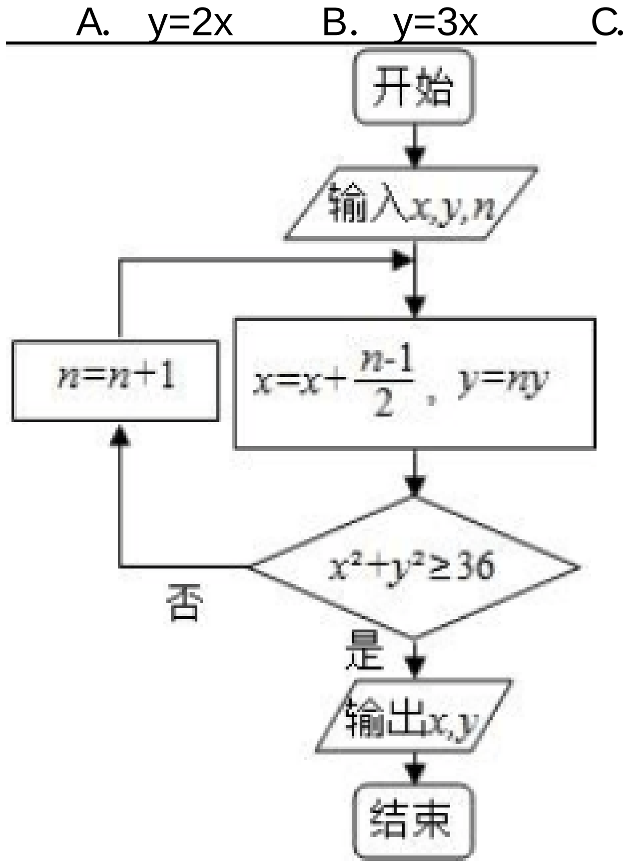
A.　　B.　　C.　　D.

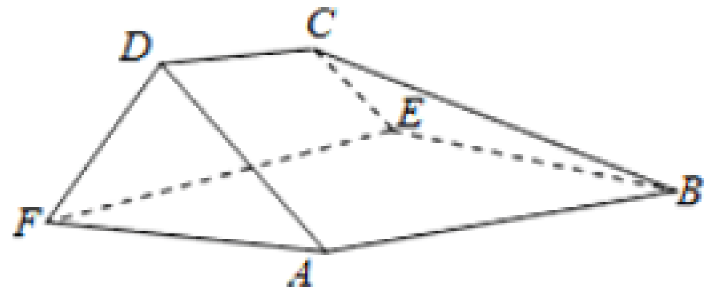
8、若 $a>b>1$，$0<c<1$，则 (　　)

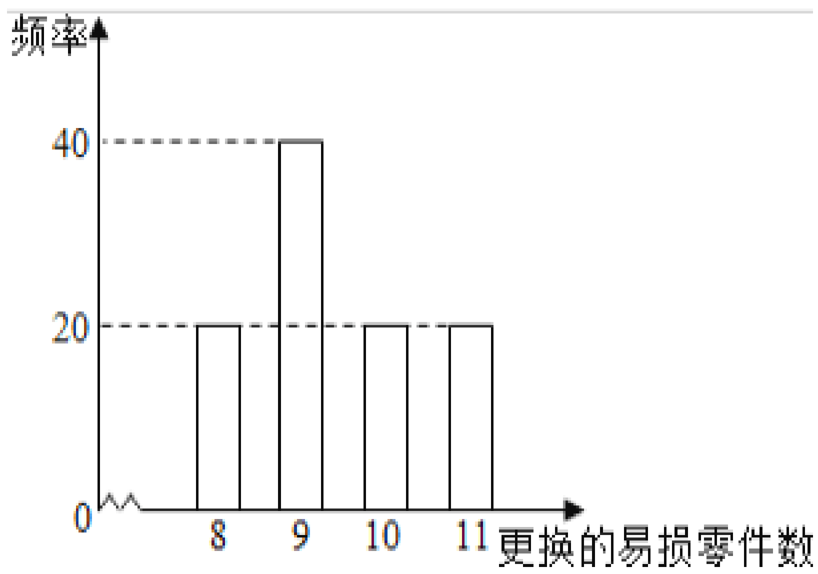
A. $a^c<b^c$　　B. $ab^c<ba^c$　　C. $a\log_b c<b\log_a c$　　D. $\log_a c<\log_b c$

9、执行下左 1 图的程序图，如果输入的 $x=0$，$y=1$，$n=1$，则输出 x，y 的值满足 (　　)

A. $y=2x$　　B. $y=3x$　　C. $y=4x$　　D. $y=5x$







10、以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A、B 两点，交 C的准线于 D、E 两点. 已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为 (　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

11、平面 a 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，$a//$平面 CB_1D_1，$a\cap$平面 $ABCD=m$，$a\cap$平面 $ABB_1A_1=n$，则 m、n 所成角的正弦值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

12、已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)(\omega>0,\ |\phi|\le\frac{\pi}{2})$，$x=-\frac{\pi}{4}$为 $f(x)$的零点， $x=\frac{\pi}{4}$为 $y=f(x)$图像的对称轴，且 $f(x)$在$(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36})$单调，则 ω的最大值为（　）

A. 11　　B. 9　　C. 7　　D. 5

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分

13、设向量 $\mathbf{a}=(m,1)$，$\mathbf{b}=(1,2)$，且 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$，则 m=________________.

14、$(2x+\sqrt{x})^5$的展开式中， x^3的系数是 _________（用数字填写答案 ）.

15、设等比数列满足 $\{a_n\}$满足 $a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则 $a_1a_2\cdots a_n$的最大值为 ___________.

16、某高科技企业生产产品 A 和产品 B需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg，乙材料 0.3kg，用 3 个工时， 生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为 ___________元.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(必考题)

17、(本题满分为 12 分)△ABC的内角 A，B，C 的对边分别别为 a，b，c，已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$

(1)求 C；

(2)若 $c=\sqrt{7}$，△ABC的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求 △ABC的周长.

18、(本题满分为 12 分)如上左 2 图，在已 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，面 ABEF为正方形，AF=2FD，$\angle AFD=90^\circ$，且二面角 D-AF-E 与二面角 C-BE-F 都是 60°.

(1)证明；平面 ABEF⊥平面 EFDC；

(2)求二面角 E-BC-A 的余弦值.

19、(本小题满分 12 分)某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰．机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元．在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元．现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得如上左 3 图柱状图．以这 100 台机器更换的易损零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共需更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数．

(1)求 X 的分布列；

(2)若要求 $P(X\le n)\ge 0.5$，确定 n 的最小值；

(3)以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 $n=19$ 与 $n=20$ 之中选其一，应选用哪个？

20、(本小题满分 12 分)设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，直线 l 过点 $B(1,0)$且与 x 轴不重合，l 交圆 A 于 C，D 两点，过 B 作 AC 的平行线交 AD 于点 E

(1)证明 $|EA|+|EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程；

(2)设点 E 的轨迹为曲线 C_1，直线 l 交 C_1 于 M，N 两点，过 B 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P,Q 两点，求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

21、(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

(1)求 a 的取值范围；

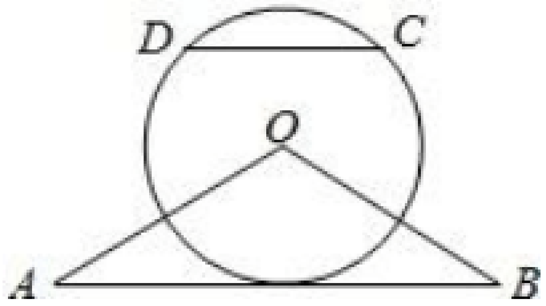
(2)设 x_1，x_2 是的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

(选考题)请考生在 22、23、24 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分，做答时请写清题号

22、(本小题满分 10 分)[选修 4-1：几何证明选讲]如图，△OAB 是等腰三角形，∠AOB=120°. 以 O 为圆心，$\frac{1}{2}$OA 为半径作圆.

(1)证明：直线 AB 与⊙O 相切

(2)点 C，D 在⊙O 上，且 A，B，C，D 四点共圆，证明：AB∥CD.



23、(本小题满分 10 分)[选修 4-4：坐标系与参数方程]在直线坐标系 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=1+a\sin t \end{cases}$(t 为参数，a>0). 在以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=4\cos\theta$.

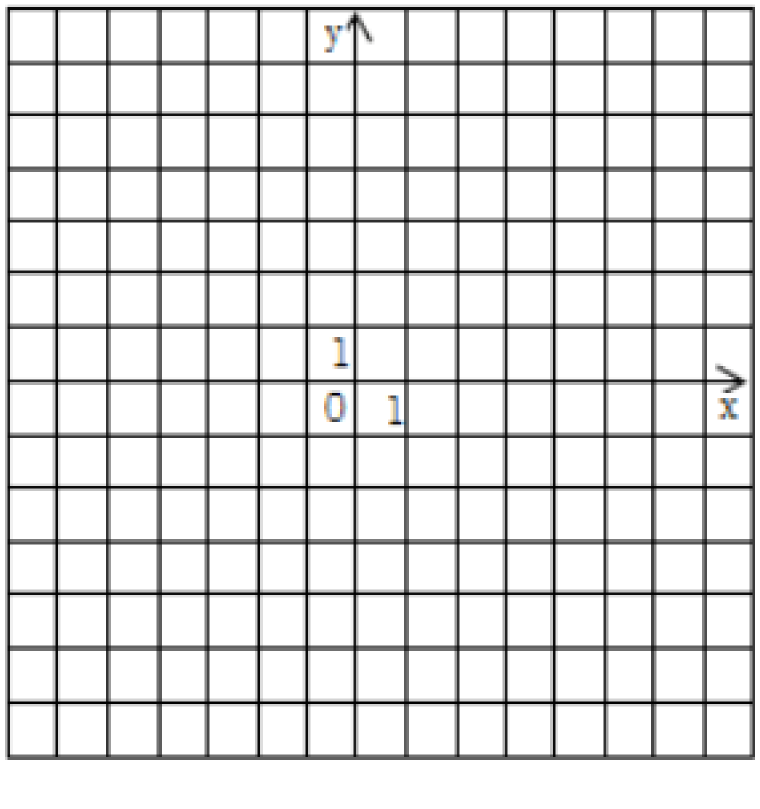
(1)说明 C_1 是哪种曲线，并将 C_1 的方程化为极坐标方程；

(2)直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=a_0$，其中 a_0 满足 tan=2，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，求 a.

24、(本小题满分 10 分)[选修 4-5：不等式选讲]已知函数 f(x)=|x+1|-|2x-3|.

(1)在答题卡第 (24)题图中画出 y= f(x)的图像；

(2)求不等式 |f(x)|>1 的解集.



理科数学参考答案

一、选择题：

1、D　2、B　3、C　4、B　5、A　6、A

7、D　8、C　9、C　10、B　11、A　12、B

二、填空题：

13、-2

14、10

15、64

16、216000

三、解答题：

17、解：(1)由已知及正弦定理得，$2\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$，即 $2\cos C\sin(A+B)=\sin C$，故 $2\sin C\cos C=\sin C$

可得 $\cos C=\frac{1}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由已知，$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 又 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $ab=6$.

由已知及余弦定理得，$a^2+b^2-2ab\cos C=7$，故 $a^2+b^2=13$，从而 $(a+b)^2=25$. 所以 △ABC 的周长为 $5+\sqrt{7}$.

18、解：(1)由已知可得 $AF\perp DF$，$AF\perp FE$，所以 $AF\perp$平面 EFDC

又 $AF\subset$平面 ABEF，故平面 ABEF$\perp$平面 EFDC

(2)过 D 作 $DG\perp EF$，垂足为 G，由(I)知 $DG\perp$平面 ABEF.

以 G 为坐标原点，向量 $\mathbf{GF}$ 的方向为 x 轴正方向，$|\mathbf{GF}|$ 为单位长度，建立如图所示的空间直角坐标系 $G-xyz$.

由(1)知∠DFE 为二面角 $D-AF-E$ 的平面角，故∠DFE=60°，则 $|DF|=2$，$|DG|=3$，可得 $A(1,4,0)$，$B(-3,4,0)$，$E(-3,0,0)$，$D(0,0,\sqrt{3})$. 由已知，$AB\parallel EF$，所以 $AB\parallel$平面 EFDC 又平面 ABCD∩平面 EFDC=DC，故 $AB\parallel CD$，$CD\parallel EF$.

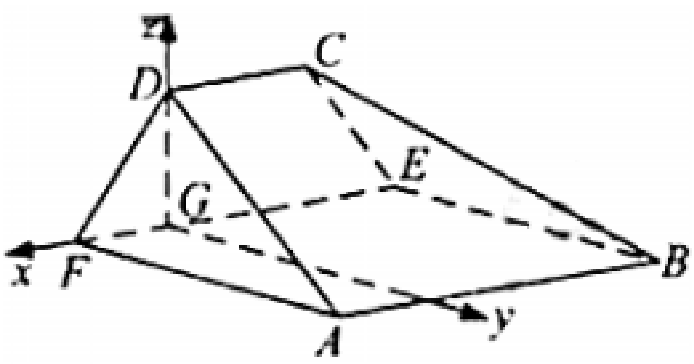
由 $BE\parallel AF$，可得 $BE\perp$平面 EFDC，所以∠CEF 为二面角 $C-BE-F$ 的平面角，∠CEF=60°. 从而可得 $C(-2,0,\sqrt{3})$.

所以向量 $\mathbf{EC}=(1,0,\sqrt{3})$，$\mathbf{EB}=(0,4,0)$，$\mathbf{AC}=(-3,-4,\sqrt{3})$，$\mathbf{AB}=(-4,0,0)$.

设 $\mathbf{n}=(x,y,z)$是平面 BCE 的法向量，则 $\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\mathbf{EC}=0\\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{EB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\ 4y=0\end{cases}$，所以可取 $\mathbf{n}=(3,0,-\sqrt{3})$.

设 $\mathbf{m}$ 是平面 ABCD 的法向量，则 $\begin{cases}\mathbf{m}\cdot\mathbf{AC}=0\\ \mathbf{m}\cdot\mathbf{AB}=0\end{cases}$，同理可取 $\mathbf{m}=(0,\sqrt{3},4)$. 则 $\cos\langle\mathbf{n},\mathbf{m}\rangle=-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

故二面角 $E-BC-A$ 的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.



9、解：(1)由柱状图并以频率代替概率可得，一台机器在三年内需更换的易损零件数为 8，9，10，11 的概率分别为 0.2，0.4，0.2，0.2，从而：

$P(X=16)=0.2\times0.2=0.04$　$P(X=17)=2\times0.2\times0.4=0.16$　$P(X=18)=2\times0.2\times0.2+0.4\times0.4=0.24$

$P(X=19)=2\times0.2\times0.2+2\times0.4\times0.2=0.24$　$P(X=20)=2\times0.2\times0.4+0.2\times0.2=0.2$　$P(X=21)=2\times0.2\times0.2=0.08$

$P(X=22)=0.2\times0.2=0.04$ 所以 X 的分布列为

X	16	17	18	19	20	21	22
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.2	0.08	0.04

(2)由(1)知 $P(X\le18)=0.44$，$P(X\le19)=0.68$，故 n 的最小值为 19.

(3)记 Y 表示 2 台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元）.

当 $n=19$ 时，$EY=19\times200\times0.68+(19\times200+500)\times0.2+(19\times200+2\times500)\times0.08+(19\times200+3\times500)\times0.04=4040$

当 $n=20$ 时，$EY=20\times200\times0.88+(20\times200+500)\times0.08+(20\times200+2\times500)\times0.04=4080$

可知当 $n=19$ 时所需费用的期望值小于 $n=20$ 时所需费用的期望值，故应选 $n=19$.

20、解：(1)∵$|AD|=|AC|$，$EB\parallel AC$，故∠EBD=∠ACD=∠ADC，∴$|EB|=|ED|$，故 $|EA|+|EB|=|EA|+|ED|=|AD|$.

又圆 A 的标准方程为 $(x+1)^2+y^2=16$，从而 $|AD|=4$，所以 $|EA|+|EB|=4$.

由题设得 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$|AB|=2$，由椭圆定义可得点 E 的轨迹方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq0)$

(2)当 l 与 x 轴不垂直时，设 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$. ∴ $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}$. ∴ $|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$.

过点 $B(1,0)$且与 l 垂直的直线 m：$y=-\dfrac{1}{k}(x-1)$，A 到 m 的距离为 $\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $|PQ|=2\sqrt{4^2-\left(\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2}=4\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{k^2+1}}$. 故

四边形 $MPNQ$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|MN||PQ|=12\sqrt{1+\dfrac{1}{4k^2+3}}$.

可得当 l 与 x 轴不垂直时，四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围为 $[12,8\sqrt{3})$.

当 l 与 x 轴垂直时，其方程为 $x=1$，$|MN|=3$，$|PQ|=8$，四边形 $MPNQ$ 的面积为 12.

综上，四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围为 $[12,8\sqrt{3})$.

21、解：(1)$f'(x)=(x-1)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$.

① 设 $a=0$，则 $f(x)=(x-2)e^x$，$f(x)$只有一个零点.

② 设 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在 $(1,+\infty)$上单调递增.

又 $f(1)=-e$，$f(2)=a$，取 b 满足 $b<0$ 且 $b<\ln\dfrac{a}{2}$，则 $f(b)>\dfrac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^2=a(b^2-\dfrac{3}{2}b)>0$，故 $f(x)$存在两个零点.

③ 设 $a<0$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

若 $a\geq-\dfrac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)\leq 1$，故当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增. 又当 $x\leq 1$时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$不存在两个零点.

若 $a<-\dfrac{e}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$，故当 $x\in(1,\ln(-2a))$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$时，$f'(x)>0$. 因此 $f(x)$在$(1,\ln(-2a))$单调递减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$单调递增. 又当 $x\leq 1$时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$不存在两个零点.

综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

(2)不妨设 $x_1<x_2$，由(1)知 $x_1\in(-\infty,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，$2-x_2\in(-\infty,1)$，$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，所以 $x_1+x_2<2$ 等价于 $f(x_1)>f(2-x_2)$，即 $f(2-x_2)<0$.

由于 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$，而 $f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$，所以 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$.

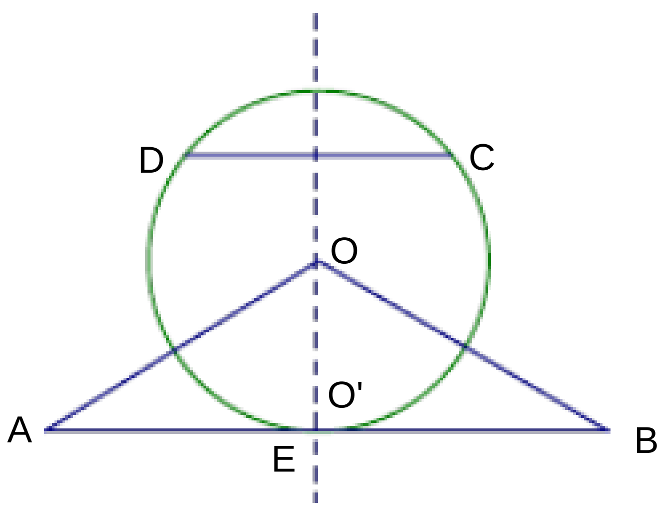
设 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$，则 $g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)$.

所以当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，而 $g(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$g(x)<0$. 从而 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$，故 $x_1+x_2<2$.

22、解：(1)设 E 是 AB 的中点，连结 OE，

因为 $OA=OB$，$\angle AOB=120^\circ$，所以 $OE\perp AB$，$\angle AOE=60^\circ$.

在 $Rt\triangle AOE$ 中，$OE=\dfrac{1}{2}AO$，即 O 到直线 AB 的距离等于圆 O 的半径，所以直线 AB 与⊙ O 相切.



(2)因为 $OA=2OD$，所以 O 不是 A，B，C，D 四点所在圆的圆心，设 O'是 A，B，C，D 四点所在圆的圆心，作直线 OO'.

由已知得 O 在线段 AB 的垂直平分线上，又 O'在线段 AB 的垂直平分线上，所以 $OO'\perp AB$.

同理可证，$OO'\perp CD$. 所以 $AB\parallel CD$.

23、解：(1) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=1+a\sin t \end{cases}$($t$ 为参数)，∴ $x^2+(y-1)^2=a^2$① ∴ C_1 为以$(0,1)$为圆心，a 为半径的圆，方程为 $x^2+y^2-2y+1-a^2=0$.

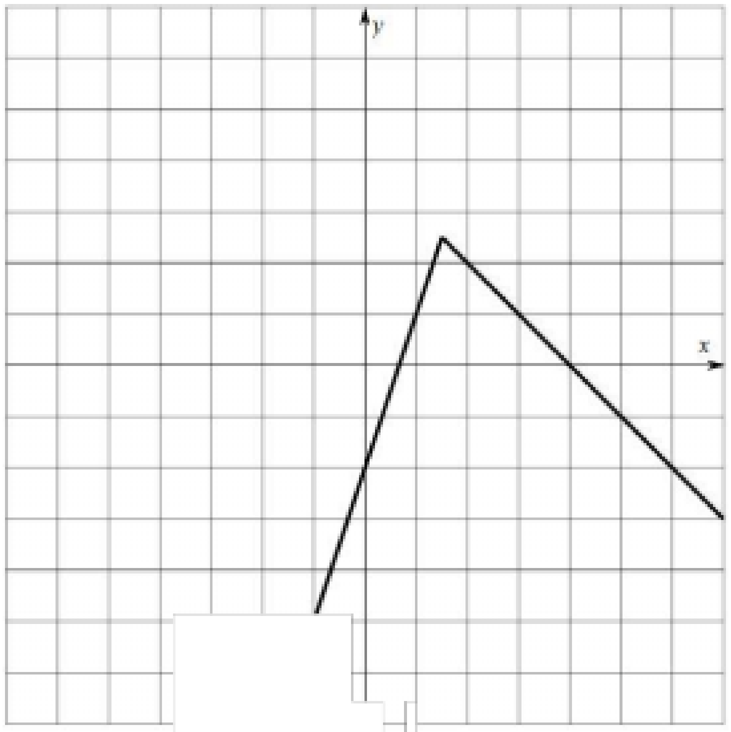
∵ $x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$，∴ $\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$ 即为 C_1 的极坐标方程.

(2)C_2：$\rho=4\cos\theta$，两边同乘 ρ得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，∵ $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，∴ $x^2+y^2=4x$，即 $(x-2)^2+y^2=4$②

C_3：化为普通方程为 $y=2x$. 由题意：C_1 和 C_2 的公共方程所在直线即为 C_3，

①－② 得：$4x-2y+1-a^2=0$，即为 C_3．∴ $1-a^2=0$，∴ $a=1$．

24、解：(1)如图：



(2)$f(x)=\begin{cases} x-4(x\le -1) \\ 3x-2(-1<x<\frac{3}{2}) \\ 4-x(x\ge\frac{3}{2}) \end{cases}$，又∵ $|f(x)|>1$ ．

当 $x\le -1$，$|x-4|>1$，解得 $x>5$ 或 $x<3$，∴ $x\le -1$．

当 $-1<x<\frac{3}{2}$，$|3x-2|>1$，解得 $x>1$ 或 $x<\frac{1}{3}$．∴ $-1<x<\frac{1}{3}$或 $1<x<\frac{3}{2}$．

当 $x\ge\frac{3}{2}$，$|4-x|>1$，解得 $x>5$ 或 $x<3$，∴ $\frac{3}{2}\le x<3$或 $x>5$．

综上，$x<\frac{1}{3}$或 $1<x<3$ 或 $x>5$．

∴ $|f(x)|>1$ ，解集为 $(-\infty,\frac{1}{3})\cup(1,3)\cup(5,+\infty)$．