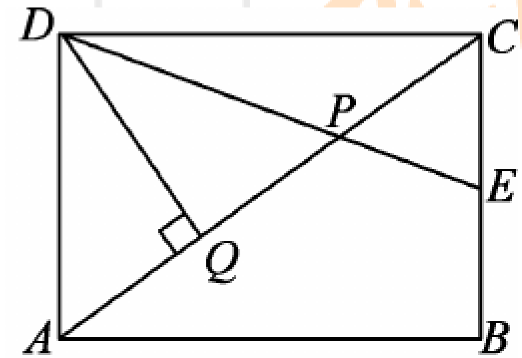
第二十七章　相似

专题九　相似三角形与特殊图形

类型 I 相似与矩形

1.如图，在矩形ABCD中，E为BC中点，ED交AC于点P，DQ⊥AC于点Q，AB= $\sqrt{2}$ BC,求证：AQ=QP.



证明:∵四边形ABCD为矩形，∴AD∥BC,

∴△ADP∽△CEP,∴ $\frac{CE}{AD}=\frac{CP}{AP}$,

∵E为BC中点,∴CE= $\frac{1}{2}$ AD,

∴CP= $\frac{1}{2}$ AP,设AD=x,∴CD= $\sqrt{2}$ x,

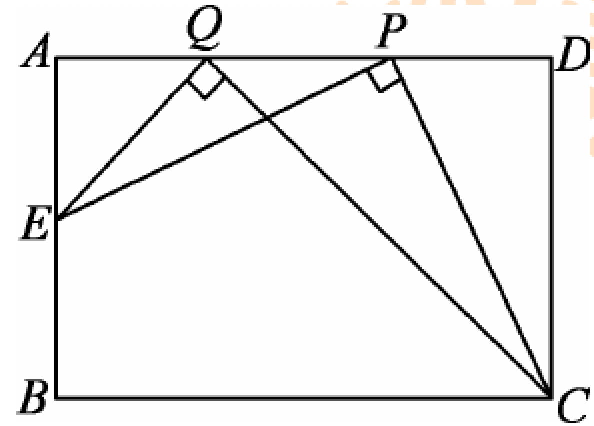
∴CA= $\sqrt{3}$ x,∴CP= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ x,∵DQ⊥AC,

∴△ADQ∽△ACD,∴AD^2=AQ AC,

∴AQ= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ x,∴PQ=AC-CP-AQ= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ x,∴AQ=QP.

类型Ⅰ相似与矩形

2.如图，矩形ABCD，AB=2，AD=3，
点P为AD上一点，PE⊥PC，交AB于E点，点Q在AP上不与P点重合，且QE⊥QC,
(1)求证：AP DP=AE DC;
(2)求AP+AQ的值.



证明：(1)∵四边形ABCD是矩形，

∴∠A=∠D=90°，∠APE+∠AEP=90°，

∵PE⊥PC，∴∠APE+∠DPC=90°，

∴∠DPC=∠AEQ，∴△APE∽△DCP,∴ $\frac{AP}{DC}=\frac{AE}{DP}$,

∴AP DP=AE DC.

(2)同(1)可得AQ DQ=AE DC,

∴AQ DQ=AP DP.即AQ (3-AQ)=AP (3-AP),

∴(AP+AQ)(AP-AQ)=3(AP-AQ).

∵AP≠AQ,∴AP+AQ=3.

类型Ⅰ 相似与矩形

3.已知，点O为矩形BHCM的对称中心，将一直角的顶点放在点O处，绕点O旋转，直角两边分别交直线BH、HC于E、D两点.

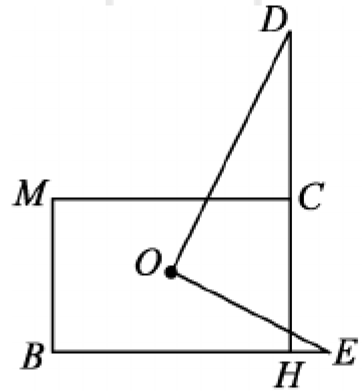


图1

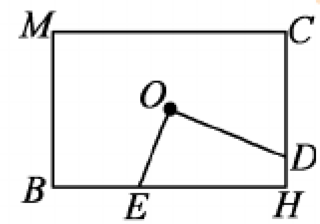


图2

(1)如图1,当BH= $\sqrt{3}$ CH时，探究OE与OD的数量关系，并证明.

(2)如图2,当BH=nCH时，直接写出OE : OD=______.

(1)证明:连BC，作OG⊥BC交BH于G，∵BH= $\sqrt{3}$ CH,

∴BC=2CH,∴∠HBC=30°,∴∠OGH=90°+30°=120°,

∵∠BCH=60°,∴∠OCD=120°,∴∠OCD=∠OGE,

∵∠EOD=90°,∴∠DOC+∠COE=90°,

∵∠COE+∠EOG=90°,∴∠DOC=∠GOE,

∴△COD∽△GOE,∴ $\dfrac{OE}{OD}=\dfrac{OG}{OC}=\dfrac{OG}{OB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)1 : n.

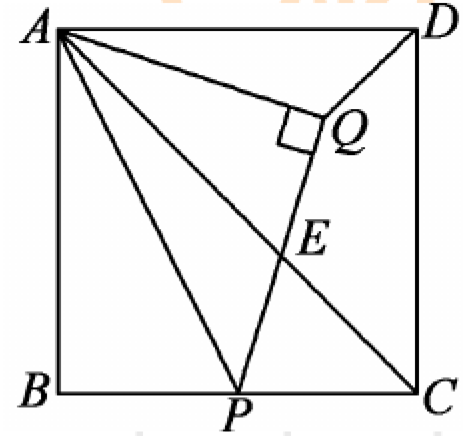
类型Ⅱ相似与正方形

4.如图，正方形ABCD，P为BC边上一点，以AP为斜边在正方形ABCD内作等腰Rt△APQ,连接AC交PQ于点E，连接DQ.

(1)求证：△ACP∽△ADQ;

(2)当P为BC的中点时，求 $\frac{PE}{PC}$ 的值;

(3)在（2）的条件下，求证EQ= $\sqrt{2}$ DQ.



解：（1）∵AC=$\sqrt{2}$AD,AP=$\sqrt{2}$AQ,∠PAC=∠DAQ,

∴△ACP∽△ADQ

(2)△ABP∽△AQE,∴ $\frac{AB}{BP}=\frac{AQ}{QE}=2,$

∴PE=QE,设正方形边长为2,则BP=PC=1,

$AP=\sqrt{5},AQ=QP=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}},PE=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}},$

∴ $\frac{PE}{PC}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{1}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$

(3)由(1)知PC=$\sqrt{2}$DQ

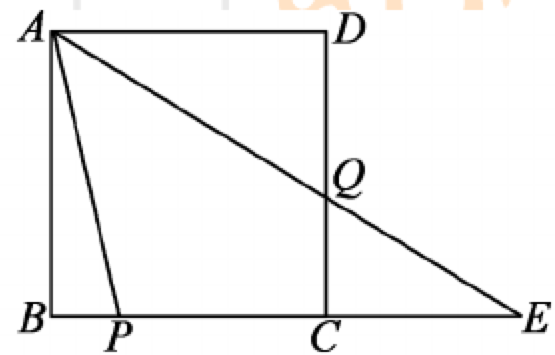
∴由(2)知PE=EQ,PE=$\frac{\sqrt{10}}{4}$PC=$\frac{\sqrt{10}}{4}$·$\sqrt{2}$DQ=$\frac{\sqrt{5}}{2}$DQ

∴EQ=$\frac{\sqrt{5}}{2}$DQ.

类型Ⅱ相似与正方形

5.如图，正方形ABCD中，点P、点Q分别在BC、CD上，$\angle PAQ=45^\circ$．

(1)如图,若AQ交BC的延长线于E，若AB=4,BP=1,求PE;



解：连AC，$\because \angle CAE+\angle E=45^\circ$，$\angle CAP+\angle CAE=45^\circ$，

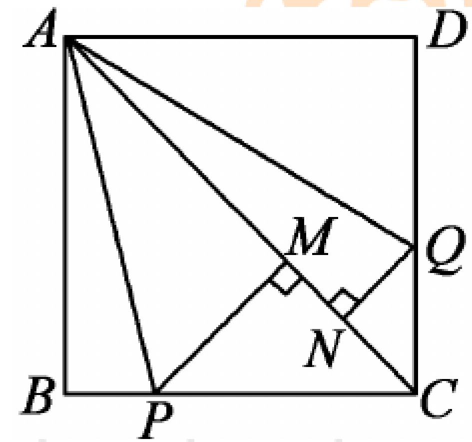
$\therefore \angle CAP=\angle E$，$\because \angle APC=\angle EPA$，

$\therefore \triangle APC\backsim\triangle EPA$　$AP^2=PC\cdot PE$，$17=3PE$，

$\therefore PE=\dfrac{17}{3}$.

类型Ⅱ相似与正方形

(2)如图，过P点作PM⊥AC,QN⊥AC,垂足分别为M、N，若AB=4，求AM AN的值;



解：∵∠PAM+∠QAM=45°，∠QAM+∠DAQ=45°，

∴∠PAM=∠DAQ.∵PM⊥AC,

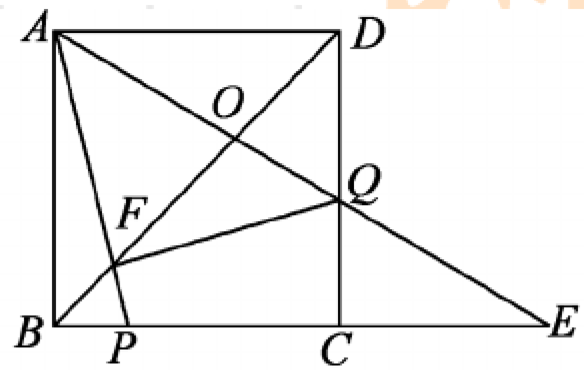
∴∠AMP=∠D,∴△APM∽△AQD,

∴ $\frac{AM}{4}=\frac{AP}{AQ}$，同理可证:△ANQ∽△ABP.

∴ $\frac{4}{AN}=\frac{AP}{AQ}$，$\frac{AM}{4}=\frac{4}{AN}$，∴AM AN=16.

类型Ⅱ相似与正方形

(3)若AP交BD于F点，连FQ，求证：AF=FQ.



证明：设AQ与DF相交于O，

∵∠FAQ=∠ODQ=45°，∠AOF=∠DOQ，

∴△AOF∽△DOQ,∴$\dfrac{AO}{OD}=\dfrac{OF}{OQ}$，

∵∠AOD=∠FOQ,∴△AOD∽△FOQ,

∴∠AQF=∠ADB=45°,∴∠FAQ=∠AQF,

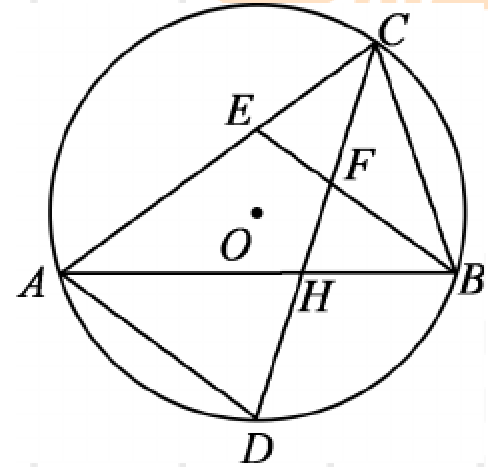
∴AF=FQ.

类型Ⅲ相似与圆

6.如图，等腰△ABC内接于⊙O，AB=AC，弦CD平分∠ACB,交AB于点H，过点B作AD的平行线分别交AC、DC于点E、F.

（1）求证：CF=BF；

（2）若BH=DH=1，求FH的值.



证明：（1）∵CD平分∠ACB,∴∠ACD=∠BCD,

∵∠BCD=∠DAB,∴∠ACD=∠DAB,

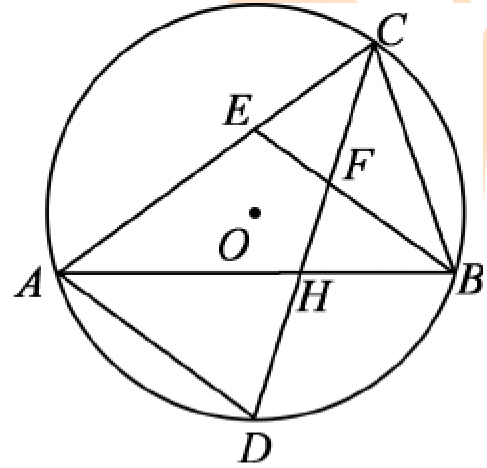
∵BE∥AD,∴∠EBA=∠DAB,∴∠ACD=∠ABE,

∵AB=AC,∴∠ACB=∠ABC,

∴∠FCB=∠FBC,∴CF=BF.

类型Ⅲ相似与圆

（2）若BH=DH=1，求FH的值.



(2)连接DB，∵BH=DH,∴∠HDB=∠HBD,

∴∠FHB=2∠HBD,同理,∠HFB=2∠FCB,

∵∠ABD=∠ACD=∠DCB,∴∠FHB=∠HFB,

∴FB=HB=1,∵∠FBH=∠BDF,∴△FBH∽△FDB,

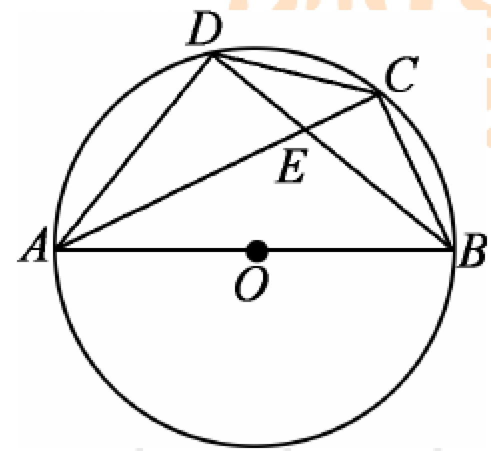
∴ $\frac{FH}{FB}=\frac{FB}{FD}$, 设FH=x,则FD=x+1,

∴ $\frac{x}{1}=\frac{1}{x+1}$, ∴x= $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (负值舍去),

∴FH= $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

类型Ⅲ相似与圆

7.如图，四边形ABCD内接于⊙O，AB为⊙O的直径，C为BD弧的中点，AC、BD交于点E.



(1)求证：△CBE∽△CAB;

(2)若$S_{\triangle CBE}:S_{\triangle CAB}=1:4$,求 $\frac{AD}{AB}$ 的值.

（1）证明：∵AB为直径，∴∠BCE=∠ACB=90°，

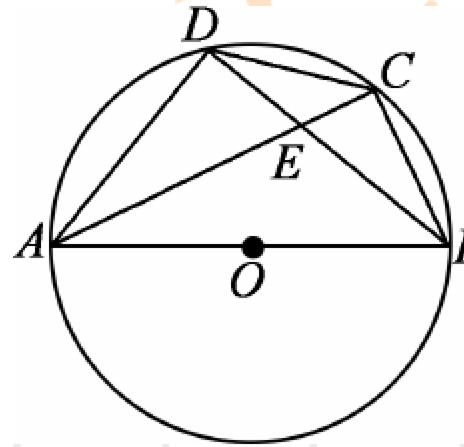
∵C为$\overset{\frown}{BD}$中点，∴∠DAC=∠BAC，

∵∠DAC=∠CBD，∴∠CAB=∠CBE，

∴△CBE∽△CAB.

类型Ⅲ相似与圆

(2)若$S_{\triangle CBE}:S_{\triangle CAB}=1:4$,求$\frac{AD}{AB}$的值.



（2）解：连OC交BD于F，则OC垂直平分BD，

$\because S_{\triangle CBE}:S_{\triangle CAB}=1:4$,$\triangle CBE\backsim\triangle CAB$,

$\therefore AC:BC=BC:EC=2:1$,$\therefore AC=4EC$,

$\therefore AE:EC=3:1$,$\because$AB为⊙O的直径，$\therefore\angle ADB=90°$，

$\therefore AD\parallel OC$,则$AD:FC=AE:EC=3:1$.设$FC=a$,则$AD=3a$,

$\because$F为BD中点，O为AB中点，

$\therefore$OF是△ABD的中位线，则$OF=\frac{1}{2}AD=1.5a$,

$\therefore OC=OF+FC=1.5a+a=2.5a$,则$AB=2OC=5a$,

$\therefore\frac{AD}{AB}=\frac{3a}{5a}=\frac{3}{5}$.