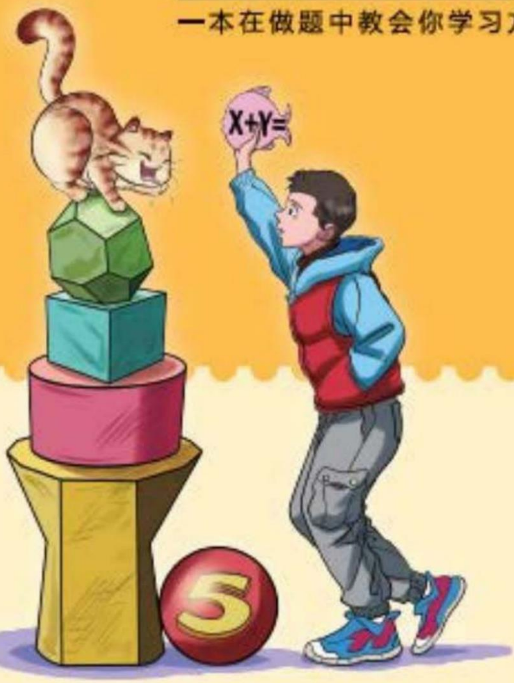
荣德基 主编

按课时编写

典中点®

综合应用创新题 典中点

一本在做题中教会你学习方法的书



八年级数学（下）

（R版） 内含 极速提分法

按 80：1 配赠教师用书

登录荣德基官方网站
免费下载课件资源

练透方法 练出高分

◦ 方法技巧57招 ◦ 典型易错题32道 ◦ 培优拔尖题59道 ◦ 高频考点14个

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

练透方法 练出高分

本书方法规律索引

方法规律

荣德基 主编

典中点®

综合应用创新题 典中点

一本在做题中教会你学习方法的书

本册主编：程小恒

八年级数学 下

（R版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社
·西安·

极速提分17招

书山有路·训练有法

内容详见夹册《极速提分法》

目录 CONTENTS

目录 CONTENTS

二次根式

16.1 二次根式

第1课时 二次根式的定义

名师点金

1. **二次根式的识别方法**：一个式子是二次根式必须具备二次根式的两个特征，一是含有二次根号；二是被开方数必须是非负数.
2. **二次根式的双重非负性**：一是$\sqrt{a}\geqslant 0$；二是$a\geqslant 0$.

I 夯实基础·逐点练 (答案见141页)

知识点1 二次根式的定义

1. 下列式子一定是二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{-x-2}$　　B. $\sqrt{x}$

C. $\sqrt{x^2+2}$　　D. $\sqrt{x^2-2}$

2. 下列式子不一定是二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{a}$　　B. $\sqrt{b^2+1}$

C. $\sqrt{0}$　　D. $\sqrt{(a+b)^2}$

3. 下列各式中，二次根式的个数为(　　)

①$\sqrt{\frac{1}{3}}$；②$\sqrt{-3}$；③$-\sqrt{x^2+1}$；④$\sqrt[3]{8}$；⑤$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$；⑥$\sqrt{x^2+2x+3}$.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

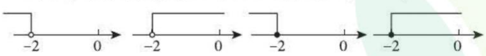
知识点2 二次根式有意义的条件

4. 【2019·武汉】式子$\sqrt{x-1}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是(　　)

A. $x>0$　　B. $x\geqslant -1$

C. $x\geqslant 1$　　D. $x\leqslant 1$

5. 【2018·苏州】若$\sqrt{x+2}$在实数范围内有意义，则x的取值范围在数轴上表示正确的是(　　)



A　　B　　C　　D

6. 【中考·济宁】若$\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+1$在实数范围内有意义，则$x$满足的条件是(　　)

A. $x\geqslant\frac{1}{2}$　　B. $x\leqslant\frac{1}{2}$

C. $x=\frac{1}{2}$　　D. $x\neq\frac{1}{2}$

7. 已知$y=\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}+3$，则$\frac{y}{x}$的值为(　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{3}{4}$

8. 【中考·湖州】若式子$\sqrt{x-1}$有意义，则$x-2$的最小值是(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. -2

知识点3 二次根式的"双重"非负性($\sqrt{a}\geqslant 0$，$a\geqslant 0$)

9. 【2019·安顺】若实数a，b满足$|a+1|+\sqrt{b-2}=0$，则$a+b=$________.

10. 【2018·桂林】若$|3x-2y-1|+\sqrt{x+y-2}=0$，则x，y的值为(　　)

A. $\begin{cases}x=1,\\y=4\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=2,\\y=0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$

11. 【2018·宿迁】若实数m，n满足等式$|m-2|+\sqrt{n-4}=0$，且m，n恰好是等腰三角形ABC的两条边的长，则$\triangle ABC$的周长是(　　)

A. 12　　B. 10　　C. 8　　D. 6

易错点 考虑不全造成答案不完整

12. 【2019·黄石】若式子$\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是(　　) 【导学号:9941874】

A. $x\geqslant 1$且$x\neq 2$　　B. $x\leqslant 1$

C. $x>1$且$x\neq 2$　　D. $x<1$

趣味数学　算术平方根的产生源于边长为1的正方形的对角线长度"根号二"，这个"根号二"的发现一度引起了毕达哥拉斯学派的恐慌.(待续)

Ⅱ 整合方法·提升练

(答案见141页)

考查角度1 利用二次根式的非负性求字母的值

13. 已知 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+y-2}=0$，求 x,y 的值.

考查角度2 利用二次根式被开方数的非负性求最值

14. 当 x 取什么实数时，式子 $\sqrt{3x-1}+2$ 的取值最小？并求出这个最小值.

Ⅲ 探究培优·拓展练

(答案见141页)

拔尖角度1 利用二次根式的非负性解分式化简问题

15.【2019·德州】先化简，再求值：

$\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right)\div\left(\frac{m^2+n^2}{mn}-\frac{5n}{m}\right)\cdot\left(\frac{m}{2n}+\frac{2n}{m}+2\right)$，其中 $\sqrt{m+1}+(n-3)^2=0$.

拔尖角度2 利用二次根式的非负性求含字母式子的值

16. 请认真阅读下面这道例题的解法，并完成后面两问的作答：

例：已知 $y=\sqrt{2\ 021-x}+\sqrt{x-2\ 021}+2\ 022$，求 $\frac{y}{x}$ 的值.

解：由 $\begin{cases}x-2\ 021\geqslant 0,\\2\ 021-x\geqslant 0\end{cases}$ 解得 $x=2\ 021$，$\therefore y=2\ 022$.

$\therefore \frac{y}{x}=\frac{2\ 022}{2\ 021}$.

(1) 若 x,y 为实数，且 $y>\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+2$，化简：$\frac{|1-y|}{y-1}$；

(2) 若 $y\cdot\sqrt{2x-2}+\sqrt{1-x}=y+2$，求 $\sqrt{y^2+5x}$ 的值.

因为按当时的权威解释（也就是毕达哥拉斯学派的学说），万物皆数（也就是说世界上所有的事物都可以用有理数来表示）. 对于这个无理数"根号二"，最终人们选取了用根号来表示.

趣味数学

第2课时　二次根式的性质

名师点金

$(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 的异同点

		$(\sqrt{a})^2$	$\sqrt{a^2}$
不同点	a 的取值范围不同	a 只能取非负数，即 $a\geqslant0$	a 可以取全体实数
	运算顺序不同	先求非负数 a 的算术平方根，然后再进行平方运算	先求实数 a 的平方，再求 a^2 的算术平方根
相同点	(1)都要进行平方和开平方两种运算；(2)运算的结果都是非负数，即 $(\sqrt{a})^2\geqslant0$，$\sqrt{a^2}\geqslant0$		

Ⅰ 夯实基础·逐点练

(答案见141页)

知识点1 性质1：$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$

1. 下列计算正确的是(　　)

A. $-(\sqrt{6})^2=-6$　　B. $(\sqrt{3})^2=9$

C. $(\sqrt{16})^2=\pm16$　　D. $-\left(-\sqrt{\frac{16}{25}}\right)^2=\frac{16}{25}$

2. 把 $4\frac{1}{4}$ 写成一个正数的平方的形式是(　　)

A. $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$　　B. $\left(\sqrt{\frac{17}{4}}\right)^2$

C. $\left(\pm2\frac{1}{2}\right)^2$　　D. $\left(\pm\sqrt{\frac{17}{4}}\right)^2$

3. 化简 $|a-3|+(\sqrt{1-a})^2$ 的结果为(　　)

A. -2　　B. 2　　C. $2a-4$　　D. $4-2a$

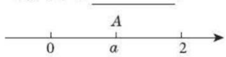
4. 【2019·常州】下列各数中与 $2+\sqrt{3}$ 的积是有理数的是(　　)

A. $2+\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$

知识点2 性质2：$\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$

5. 若 $\sqrt{(a-2)^2}=2-a$，则 a 的取值范围是________.

6. 【2018·广州】如图，数轴上点 A 表示的数为 a，化简：$a+\sqrt{a^2-4a+4}=$________.



(第6题)

7. 【2019·凉山州】下列各式正确的是(　　)

A. $2a^2+3a^2=5a^4$　　B. $a^2\cdot a=a^3$

C. $(a^2)^3=a^5$　　D. $\sqrt{a^2}=a$

8. 【2019·绵阳】若 $\sqrt{a}=2$，则 a 的值为(　　)

A. -4　　B. 4　　C. -2　　D. $\sqrt{2}$

9. 若式子 $\sqrt{(2-x)^2}+\sqrt{(x-4)^2}$ 的值是常数2，则 x 的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant4$　　B. $x\leqslant2$

C. $2\leqslant x\leqslant4$　　D. $x=2$ 或 $x=4$

10. 在 $\triangle ABC$ 中，a，b，c 为三角形的三边长，化简 $\sqrt{(a-b+c)^2}-2|c-a-b|$ 的结果为(　　)

A. $3a+b-c$　　B. $-a-3b+3c$

C. $a+3b-c$　　D. $2a$

知识点3 代数式

11. 下列式子中不是代数式的为(　　)

A. $\sqrt{x+2}(x\geqslant-2)$　　B. $5a+8=7$

C. 2　　D. $\frac{b+2}{3a-1}\left(a\neq\frac{1}{3}\right)$

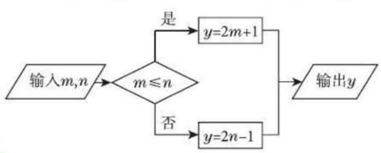
12. 【2019·天水】已知 $a+b=\frac{1}{2}$，则代数式 $2a+2b-3$ 的值是(　　)

A. 2　　B. -2　　C. -4　　D. $-3\frac{1}{2}$

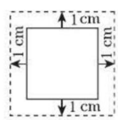
13. 【2019·重庆】按如图所示的运算程序，能使输出 y 值为1的是(　　)

A. $m=1,n=1$　　B. $m=1,n=0$

C. $m=1,n=2$　　D. $m=2,n=1$



(第13题)



(第14题)

14. 【2018·河北】用一根长为 a cm 的铁丝，首尾相接围成一个正方形，要将它按如图的方式向外等距扩1 cm得到新的正方形，则这根铁丝需增加(　　)

A. 4 cm　　B. 8 cm

C. $(a+4)$ cm　　D. $(a+8)$ cm

易错点 运用 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$ 时，忽略 $a\geqslant0$

15. 化简 $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

Ⅱ 整合方法·提升练

（答案见141页）

考查角度1 利用二次根式的性质计算

16. 计算：

(1) $\sqrt{5^2}-(-\sqrt{6})^2$；

(2) $\sqrt{2\times8}-\sqrt{(-3)^2}+3\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$；

(3) $(-1)^{101}+(\pi-3)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

考查角度2 利用二次根式的性质化简、求值

17. (1)若已知 x,y,z 为实数，且 $\sqrt{x+3}+\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{z^2-2z+1}=0$，试求 $(x+y+z)^{2021}$ 的值.

(2)若 x,y 为实数，且 $y>\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+2$，化简：$\frac{1}{2-y}\sqrt{y^2-4y+4}+\sqrt{2x}$.

Ⅲ 探究培优·拓展练

（答案见141页）

拔尖角度1 利用二次根式的性质进行类比计算

18. 【2019·枣庄】观察下列各式：

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1\times2}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right),$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2\times3}=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right),$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3\times4}=1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),$$

…

请利用你发现的规律，计算：

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2\,018^2}+\frac{1}{2\,019^2}},$$

其结果为________.

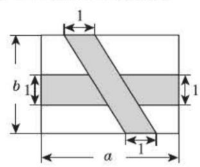
拔尖角度2 利用代数式的意义列式求值

（数形结合思想）

19. 【2019·贵阳】如图是一个长为 a，宽为 b 的矩形，两个阴影图形都是一对底边长为1，且底边在矩形对边上的平行四边形.

(1)用含字母 a,b 的代数式表示矩形中空白部分的面积；

(2)当 $a=3,b=2$ 时，求矩形中空白部分的面积.



（第19题）

谜语：八分之七（打一成语）　谜底：七上八下

趣味数学

16.2　二次根式的乘除

第1课时　二次根式的乘法

名师点金

比较两个二次根式大小的方法

1. **被开方数比较法**，即先将根号外的非负因式平方后移到根号内，当两个二次根式都是正数时，被开方数大的二次根式大；
2. **平方法**，即把两个二次根式分别平方，当两个二次根式都是正数时，平方大的二次根式大；
3. **计算器求近似值法**，即先利用计算器求出两个二次根式的近似值，再进行比较.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

(答案见141页)

知识点1 二次根式的乘法法则

1.【2019·株洲】$\sqrt{2}\times\sqrt{8}=$(　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. 4

C. $\sqrt{10}$　　D. $2\sqrt{2}$

2.【中考·海南】下列各数中，与$\sqrt{3}$的积为有理数的是(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$

3. 若等式$\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x-4}=\sqrt{(x-3)(x-4)}$成立，则$x$的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant3$　　B. $x\geqslant4$

C. $3\leqslant x\leqslant4$　　D. $x\leqslant4$

4.【中考·长沙】下列计算正确的是(　　)

A. $\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$

B. $x^8\div x^2=x^4$

C. $(2a)^3=6a^3$

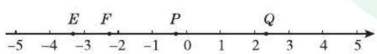
D. $3a^3\cdot2a^2=6a^6$

5.【2018·重庆】估计$(2\sqrt{30}-\sqrt{24})\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}$的值应在(　　)

A. 1和2之间　　B. 2和3之间

C. 3和4之间　　D. 4和5之间

6. 如图，在数轴上表示数$\frac{\sqrt{5}}{5}\times(-5)$的点可能是(　　)



(第6题)

A. 点E　　B. 点F

C. 点P　　D. 点Q

知识点2 积的算术平方根的性质

7.【2019·威海】计算$(\sqrt{12}-3)^0+\sqrt{27}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}$的结果是(　　)

A. $1+\frac{8}{3}\sqrt{3}$　　B. $1+2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $1+4\sqrt{3}$

8. 若$\sqrt{(x+3)(x-2)}=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-2}$，则$x$的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant-3$　　B. $x\geqslant2$

C. $x>-3$　　D. $x>2$

9.【2019·台湾】若$\sqrt{44}=2\sqrt{a}$，$\sqrt{54}=3\sqrt{b}$，则$a+b$之值为何？(　　)

A. 13　　B. 17　　C. 24　　D. 40

10. 下列计算正确的是(　　)

A. $\sqrt{(-16)\times(-9)}=\sqrt{-16}\times\sqrt{-9}$

B. $\sqrt{25a^4b^2}=5a^2b$

C. $\sqrt{8^2+5^2}=8+5$

D. $\sqrt{25^2-24^2}=7$

11. 已知$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{10}$，用含a，b的代数式表示$\sqrt{20}$，这个代数式是(　　)

A. $a+b$　　B. ab　　C. $2a$　　D. $2b$

易错点 忽视隐含条件，误直接将负数移到根号内

12. 将$a\sqrt{-\frac{1}{a}}$根号外的因式移到根号内为(　　)

A. $\sqrt{-a}$　　B. $-\sqrt{-a}$

C. $-\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{a}$

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见142页)

考查角度1 利用二次根式的乘法法则及性质进行计算

13. 计算：

(1) $(-2)^2-\sqrt{9}+(\sqrt{2}-1)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

(2) $\frac{3}{2}\sqrt{20}\times(-\sqrt{15})\times\left(-\frac{1}{3}\sqrt{48}\right)$;

(3) $\frac{2}{b}\sqrt{ab^3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\cdot 3\sqrt{\frac{a}{b}}\right)(a>0,b>0)$.

考查角度2 利用二次根式的相关性质求值

14. 已知 x 为奇数，且 $\sqrt{(10-x)(x-8)}=\sqrt{10-x}\cdot\sqrt{x-8}$，求 $\sqrt{1+2x+x^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2-6x+9}{x+1}}$ 的值.

考查角度3 利用二次根式的乘法性质比较大小

15. 比较大小：

(1) $5\sqrt{3}$ 和 $3\sqrt{5}$；　　(2) $3-6\sqrt{5}$ 和 $3-5\sqrt{6}$.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见142页)

拔尖角度1 利用二次根式的性质探究规律（从特殊到一般的思想）

16. 观察下列按一定规律排列的二次根式：

$\sqrt{2},\sqrt{6},\sqrt{12},\sqrt{20},\cdots$

(1)根据你发现的规律猜想第 n（n 是正整数）个二次根式是多少；

(2)求前6个二次根式的积.

拔尖角度2 利用二次根式的性质巧化简（配方法、类比思想）

17. 先阅读下面的解答过程，然后再解题：

形如 $\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}$ 的化简，只要我们找到两个正数 a，$b(a>b)$，使 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=m$，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{n}$，那么便有：$\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$.

例如：化简 $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$.

解：$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$，这里 $m=7,n=12$.

$\because(\sqrt{4})^2+(\sqrt{3})^2=7,\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{12}$,

$\therefore\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$.

利用上面的方法化简：$\sqrt{13-2\sqrt{42}}$.

谜语：对症下药（打一数学名词）　　谜底：开方　　趣味数学

第2课时　二次根式的除法

名师点金

利用商的算术平方根化简二次根式的方法

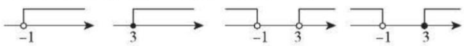
1. 若被开方数的分母是一个完全平方数(式),则可以直接利用商的算术平方根的性质将分子、分母分别开平方,然后再求商;
2. 若被开方数的分母不是完全平方数(式),则可根据分数(式)的基本性质,将分数(式)的分子、分母同时乘一个不等于零的数(整式),使分母变成一个完全平方数(式),然后利用商的算术平方根的性质进行化简.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见142页)

知识点1 二次根式的除法法则

1. 【2019·安徽】计算 $\sqrt{18}\div\sqrt{2}$ 的结果是________.

2. 【2018·绵阳】等式 $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$ 成立的 x 的取值范围在数轴上可表示为(　　)



A　　B　　C　　D

3. 计算 $\sqrt{\frac{3}{4}}\div\sqrt{\frac{1}{6}}$ 的结果是(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 【中考·包头】下列计算结果正确的是(　　)

A. $2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　B. $\sqrt{8}\div\sqrt{2}=2$

C. $(-2a^2)^3=-6a^6$　D. $(a+1)^2=a^2+1$

5. 小明的作业本上有以下四题:① $\sqrt{16a^4}=4a^2$;② $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10a}=5\sqrt{2}a$;③ $a\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a}}=\sqrt{a}$;④ $\sqrt{8a}\div\sqrt{2a}=4$. 做错的题是(　　)

A. ①　B. ②　C. ③　D. ④

6. 计算 $\sqrt{12}\div\sqrt{\frac{27}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{36}}$ 的值为(　　)

A. $\sqrt{3}$　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{9}$　D. $\frac{3}{2}$

知识点2 商的算术平方根的性质

7. 【2018·临安区】下列各式计算正确的是(　　)

A. $a^{12}\div a^6=a^2$　B. $(x+y)^2=x^2+y^2$

C. $\frac{x-2}{4-x^2}=\frac{1}{2+x}$　D. $\sqrt{\frac{3}{5}}\div\sqrt{5}=\frac{\sqrt{3}}{5}$

8. 若 $\sqrt{\frac{1-a}{a^2}}=\frac{\sqrt{1-a}}{a}$,则 a 的取值范围是(　　)

A. $a\leqslant 0$　B. $a<0$

C. $a>0$　D. $0<a\leqslant 1$

9. 【2019·达州】下列判断正确的是(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<0.5$

B. 若 $ab=0$,则 $a=b=0$

C. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

D. $3a$ 可以表示边长为 a 的等边三角形的周长

10. 【中考·南充】下列计算正确的是(　　)

A. $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$　B. $\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{-x^3}=x\sqrt{-x}$　D. $\sqrt{x^2}=x$

11. 设 $\sqrt{5}=a$,$\sqrt{6}=b$,用含 a,b 的式子表示 $\sqrt{2.7}$,则下列表示正确的是(　　)

A. $0.3ab$　B. $3ab$　C. $0.1ab^2$　D. $0.1a^2b$

知识点3 最简二次根式

12. 【2019·山西】下列二次根式是最简二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$　B. $\sqrt{\frac{12}{7}}$　C. $\sqrt{8}$　D. $\sqrt{3}$

13. 【中考·锦州】下列二次根式中属于最简二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{24}$　B. $\sqrt{36}$　C. $\sqrt{\frac{a}{b}}$　D. $\sqrt{a+4}$

14. 已知 $xy<0$,化简二次根式 $x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$ 的正确结果为(　　)

A. $\sqrt{y}$　B. $\sqrt{-y}$　C. $-\sqrt{y}$　D. $-\sqrt{-y}$

易错点 在计算过程中由于弄错运算顺序导致错误

15. 计算:$\sqrt{2^3\times3}\div\sqrt{2\times3}\times\frac{1}{\sqrt{2\times3}}$.

趣味数学　不知谁家的鸡跑到胡同里来了,一个小男孩想抓住这只鸡,在后面追,累得满头大汗也没抓住.这时,胡同的另一头来了一个小女孩,两人从两边一步一步逼近鸡,鸡无处可逃,终于被抓住了.(待续)

Ⅱ 整合方法·提升练

☞(答案见142页)

考查角度1 利用二次根式的乘除法法则计算

16. 计算：

(1) $\sqrt{45}\div\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}\times\frac{3}{2}\sqrt{5}$；

(2) $3\sqrt{2\frac{1}{3}}\times\left(-\frac{1}{8}\sqrt{15}\right)\div\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

考查角度2 利用商的算术平方根的性质求代数式的值

17. 已知 $\sqrt{\frac{x-6}{9-x}}=\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{9-x}}$，且 x 为奇数，求 $(1+x)\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}$ 的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练

☞(答案见142页)

拔尖角度1 利用二次根式的性质活用代数式表示数

18. 老师在讲解“二次根式及其性质”时，在黑板上写下了下面的一题作为练习：

已知 $\sqrt{7}=a$，$\sqrt{70}=b$，用含有 a,b 的代数式表示 $\sqrt{4.9}$.

甲的解法：$\sqrt{4.9}=\sqrt{\frac{49}{10}}=\sqrt{\frac{49\times10}{10\times10}}=\frac{\sqrt{7\times70}}{10}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{70}}{10}=\frac{ab}{10}$；

乙的解法：$\sqrt{4.9}=\sqrt{49\times0.1}=7\sqrt{0.1}$，

因为 $\sqrt{0.1}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\sqrt{\frac{7}{70}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{70}}=\frac{a}{b}$，

所以 $\sqrt{4.9}=7\sqrt{0.1}=7\cdot\frac{a}{b}=\frac{7a}{b}$.

请你解答下面的问题：

(1)甲、乙两人的解法都正确吗？

(2)请你再给出一种不同于上面两人的解法.

拔尖角度2 利用二次根式的乘除法法则进行分母有理化（类比思想）

19. 【2019·随州】“分母有理化”是我们常用的一种化简的方法，如：$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$，除此之外，我们也可以用平方之后再开方的方式来化简一些有特点的无理数，如：对于 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$，设 $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$，易知 $\sqrt{3+\sqrt{5}}>\sqrt{3-\sqrt{5}}$，故 $x>0$，由 $x^2=(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}-2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=2$，解得 $x=\sqrt{2}$，即 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}$. 根据以上方法，化简 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{6-3\sqrt{3}}-\sqrt{6+3\sqrt{3}}$ 后的结果为(　　)

A. $5+3\sqrt{6}$　　B. $5+\sqrt{6}$

C. $5-\sqrt{6}$　　D. $5-3\sqrt{6}$

我们用夹逼法求算术平方根的过程就类似胡同抓鸡．把算术数轴当成一条胡同，把算术平方根看成跑进胡同里的鸡，用夹逼法求算术平方根，必须从一大一小两边来逼近．

趣味数学

阶段核心方法专训

比较含二次根式的式子的大小的八种方法

(答案见142页)

名师点金

含二次根式的数(或式)的大小比较,是教与学的一个难点,如能根据二次根式的特征,灵活地、有针对性地采用不同的方法,将会得到简捷的解法.较常见的比较方法有:**平方法、作商法、分子有理化法、分母有理化法、作差法、倒数法、特殊值法、定义法.**

方法1 平方法

1. 比较$\sqrt{6}+\sqrt{11}$与$\sqrt{14}+\sqrt{3}$的大小.

方法2 作商法

2. 比较$\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}$与$\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$的大小.

方法3 分子有理化法

3. 比较$\sqrt{15}-\sqrt{14}$与$\sqrt{14}-\sqrt{13}$的大小.

方法4 分母有理化法

4. 比较$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$与$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$的大小.

方法5 作差法

5. 比较$\frac{\sqrt{19}-1}{3}$与$\frac{2}{3}$的大小.

方法6 倒数法

6. 已知$x=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$,$y=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$,试比较x,y的大小.

方法7 特殊值法

7. 用"<"连接x,$\frac{1}{x}$,x^2,$\sqrt{x}$.$(0<x<1)$

方法8 定义法

8. 比较$\sqrt{5-a}$与$\sqrt[3]{a-6}$的大小.

趣味数学　数学对观察自然做出重要的贡献,它解释了规律结构中简单的原始元素,而天体就是用这些原始元素建立起来的.——开普勒

16.3 二次根式的加减

第1课时 二次根式的加减

名师点金

二次根式加减运算的步骤

1. **化简**:将二次根式化成最简二次根式或整式;
2. **判别**:找出被开方数相同的最简二次根式;
3. **合并**:类似于合并同类项,将被开方数相同的最简二次根式合并.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

☞(答案见143页)

知识点1 被开方数相同的最简二次根式

1. 下列各式化成最简二次根式后被开方数与$\sqrt{3}$的被开方数相同的是(　　)

A. $\sqrt{8}$　B. $\sqrt{24}$　C. $\sqrt{125}$　D. $\sqrt{12}$

2. 【2018·曲靖】下列二次根式中能与$2\sqrt{3}$合并的是(　　)

A. $\sqrt{8}$　B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　C. $\sqrt{18}$　D. $\sqrt{9}$

3. 以下二次根式:① $\sqrt{24}$;② $\sqrt{2^2}$;③ $\sqrt{\frac{2}{3}}$;④ $\sqrt{27}$,化简后被开方数相同的是(　　)

A. ①和②　B. ②和③

C. ①和③　D. ③和④

4. 【中考·凉山州】下列根式中,不能与$\sqrt{3}$合并的是(　　)

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　B. $\frac{3}{\sqrt{3}}$　C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$　D. $\sqrt{12}$

5. 下列根式中,化简后不能与$\sqrt{ab}(a>0,b>0)$合并的是(　　)

A. $\sqrt{\frac{ab}{4}}$　B. $\sqrt{\frac{b}{a}}$　C. $\sqrt{a^2b^2}$　D. $\frac{1}{\sqrt{ab}}$

6. 若最简二次根式$4\sqrt{10-2m}$与$\sqrt{m+4}$可以进行合并,则m的值为(　　)

A. -1　B. 0　C. 1　D. 2

知识点2 二次根式的加减

7. 【2019·河南】下列计算正确的是(　　)

A. $2a+3a=6a$　B. $(-3a)^2=6a^2$

C. $(x-y)^2=x^2-y^2$　D. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

8. 【2019·兰州】计算:$\sqrt{12}-\sqrt{3}=$(　　)

A. $\sqrt{3}$　B. $2\sqrt{3}$

C. 3　D. $4\sqrt{3}$

9. 【2018·自贡】下列计算正确的是(　　)

A. $(a-b)^2=a^2-b^2$　B. $x+2y=3xy$

C. $\sqrt{18}-3\sqrt{2}=0$　D. $(-a^3)^2=-a^6$

10. 【2019·常德】下列运算正确的是(　　)

A. $\sqrt{3}+\sqrt{4}=\sqrt{7}$　B. $\sqrt{12}=3\sqrt{2}$

C. $\sqrt{(-2)^2}=-2$　D. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$

11. 【2019·聊城】下列各式不成立的是(　　)

A. $\sqrt{18}-\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{7}{3}\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$

C. $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{18}}{2}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=5$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

12. 若$\sqrt{19}$的整数部分是a,小数部分是b,则$\sqrt{19}a+b=$________.

易错点1 对二次根式的加减运算法则理解不透导致出错

13. 下列计算正确的是(　　)

A. $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{7}$　B. $2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3$　D. $\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

易错点2 忽视二次根式的隐含条件而致错

14. 化简$\sqrt{-a^3}-a\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

根号是怎样产生和演变成现在这种样子的呢？古时候，埃及人用记号“┌”表示平方根. 印度人在开平方时，在被开方数的前面写上ka.（待续）

趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练

☞(答案见143页)

考查角度 1 利用二次根式的加减法法则计算

15. 计算:

(1)【2018·大连】$(\sqrt{3}+2)^2-\sqrt{48}+2^{-2}$;

(2)$(-1)^{2n}+\sqrt{8}-|\sqrt{2}|-(\pi-3.14)^0$;($n$为正整数)

(3)$\frac{2}{3}\sqrt{9x}+6\sqrt{\frac{x}{4}}-2x\sqrt{\frac{1}{x}}$.

考查角度 2 利用二次根式的运算求分式值

16. 【2019·绵阳】先化简,再求值:$\left(\frac{a}{a^2-b^2}-\frac{1}{a+b}\right)\div\frac{b}{b-a}$,其中$a=\sqrt{2}$,$b=2-\sqrt{2}$.

Ⅲ 探究培优·拓展练

☞(答案见143页)

拔尖角度 1 利用二次根式的加减求代数式的值(整体思想)

17. 已知$x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$,$y=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$,求$x^2+y^2$的值.

拔尖角度 2 利用二次根式的整数部分和小数部分求代数式的值

18. 已知$7+\sqrt{5}$和$7-\sqrt{5}$的小数部分分别为a,b,试求代数式$ab-a+4b-3$的值.

拔尖角度 3 利用二次根式的运算解三角形问题

19. 已知a,b,c满足$|a-\sqrt{8}|+\sqrt{b-\sqrt{18}}+(c-\sqrt{32})^2=0$.

(1)求a,b,c的值.

(2)以a,b,c的值为边长的三条线段能构成三角形吗?并说明你的理由.

趣味数学　后来,德国人用一个点"."表示平方根,两个点".."表示4次方根,三个点"..."表示立方根,比如:.3、..3、...3就分别表示3的平方根、4次方根、立方根.(待续)

第2课时　二次根式的混合运算

名师点金

二次根式的混合运算与有理数运算类似，先乘方，再乘除，最后加减，有括号的先算括号里面的，运用运算定律可以改变运算顺序. 整式的运算法则在二次根式运算中仍然适用. 多项式乘法法则及乘法公式在二次根式运算中仍然适用.

整合方法 · 分类练

☞(答案见143页)

题型1 二次根式的混合运算

1.【中考·十堰】下列运算正确的是(　　)

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

C. $\sqrt{8}\div\sqrt{2}=2$　　D. $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=3$

2.【2018·聊城】下列计算正确的是(　　)

A. $3\sqrt{10}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

B. $\sqrt{\frac{7}{11}}\cdot\left(\sqrt{\frac{11}{7}}\div\sqrt{\frac{1}{11}}\right)=\sqrt{11}$

C. $(\sqrt{75}-\sqrt{15})\div\sqrt{3}=2\sqrt{5}$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{18}-3\sqrt{\frac{8}{9}}=\sqrt{2}$

3. 计算$\left(5\sqrt{\frac{1}{5}}-2\sqrt{45}\right)\div(-\sqrt{5})$的结果为(　　)

A. 5　　B. −5　　C. 7　　D. −7

4.【2018·十堰】如图是按一定规律排成的三角形数阵，按图中数阵的排列规律，第9行从左至右第5个数是(　　)

$$\begin{array}{c} 1 \\ \sqrt{2}\quad\sqrt{3} \\ 2\quad\sqrt{5}\quad\sqrt{6} \\ \sqrt{7}\quad 2\sqrt{2}\quad 3\quad\sqrt{10} \\ \cdots\cdots \end{array}$$

(第4题)

A. $2\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{41}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{51}$

5. 计算：

(1) $(-2)^2-|-3|+\sqrt{2}\times\sqrt{8}+(-6)^0$.

(2) $\sqrt{18}-\sqrt{\frac{9}{2}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}+(\sqrt{3}-2)^0+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

题型2 乘法公式在二次根式中的应用

6.【中考·滨州】下列计算：

①$(\sqrt{2})^2=2$；②$\sqrt{(-2)^2}=2$；

③$(-2\sqrt{3})^2=12$；④$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=-1$.

其中结果正确的个数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7.【2019·荆州】下列运算正确的是(　　)

A. $x-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}$　　B. $a^3\cdot(-a^2)=-a^6$

C. $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$　　D. $-(a^2)^2=a^4$

8.【中考·孝感】已知$x=2-\sqrt{3}$，则代数式$(7+4\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}$的值是(　　)

A. 0　　B. $\sqrt{3}$

C. $2+\sqrt{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$

9.【2019·益阳】观察下列等式：

①$3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$，

②$5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$，

③$7-2\sqrt{12}=(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2$，

……

请你根据以上规律，写出第6个等式：______________.

10. 计算：

(1) $(2-\sqrt{3})^{2022}\times(2+\sqrt{3})^{2021}-2\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|-(-\sqrt{2})^0$；

(2)【中考·大庆】$(\sqrt{2}+1)^2-\pi^0-|1-\sqrt{2}|$；

到16世纪初，小点上带了一条细长的尾巴. 1525年，路多尔夫在他的代数著作中首先采用了根号，比如他写√4是2，√9是3，但是这种写法未得到认可与采纳.（待续）　趣味数学

(3) $(a+2\sqrt{ab}+b)\div(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{b}-\sqrt{a})$;

(4)【中考·盐城】$(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})+\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$.

题型3 乘法公式在二次根式中的巧算

11. 已知 $a=\frac{1}{\sqrt{5}-2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{5}+2}$, 求 $\sqrt{a^2+b^2+7}$ 的值.

12. 已知 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, 求 x^3y+xy^3 的值.

题型4 整体思想在二次根式求值中的巧用

13. 利用乘法公式的变形解决下面的问题：

已知 $\sqrt{2\,017+x}+\sqrt{5+x}=1\,006$, 求 $\sqrt{2\,017+x}-\sqrt{5+x}$ 的值.

题型5 二次根式的混合运算在计算求值中的应用

14.【2019·呼和浩特】

(1) 计算: $\left(1\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\times\sqrt{12}-\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right)^{-2}$;

(2) 先化简,再求值: $\left(\frac{5x+3y}{x^2-y^2}+\frac{2x}{y^2-x^2}\right)\div\frac{x}{3(x-y)}$,

其中 $x=3\sqrt{3}$, $y=\frac{1}{2}$.

趣味数学　直到 17 世纪，法国数学家笛卡尔（1596—1650 年）第一个使用了现今用的根号“$\sqrt{\ }$”.

第3课时 二次根式运算常见的题型

名师点金

进行二次根式的运算时，
1. 先将二次根式适当化简；
2. 二次根式的乘法可以参照整式的乘法进行运算；
3. 对于二次根式的除法运算，通常先将其写成分数（或分式）的形式，然后通过分母有理化进行运算；
4. 二次根式的加减法与整式的加减法类似，即在化简的基础上去括号，合并被开方数相同的二次根式；
5. 运算结果一般要化成最简形式.

整合方法·分类练 ☞（答案见144页）

题型1 利用运算法则进行计算

1. 计算：

(1) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+|1-\sqrt{2}|-(\pi-2)^0+\sqrt{8}$；

(2) $(2-\sqrt{3})^{2\,021}\cdot(2+\sqrt{3})^{2\,022}-2\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$.

题型2 利用公式进行计算

2. 计算：

(1) $(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)$；

(2) $\frac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}-\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

题型3 利用二次根式的整数部分和小数部分求代数式的值

3. 已知 $5+\sqrt{3}$ 和 $5-\sqrt{3}$ 的小数部分分别为 a,b，试求代数式 $ab-a+4b-3$ 的值.

题型4 利用化简求值

4. 【2019·桂林】先化简，再求值：$\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\div\frac{x^2-2xy+y^2}{2xy}-\frac{1}{y-x}$，其中 $x=2+\sqrt{2}$，$y=2$.

题型5 利用整体思想巧求值

5. 已知 $x=1-\sqrt{2}$，$y=1+\sqrt{2}$，求 $x^2+y^2-xy-2x+2y$ 的值.

题型6 利用倒数法求值

6. 已知 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$，求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

趣味数学 刘徽，是中国数学史上一个非常伟大的数学家，在世界数学史上，也占有杰出的地位．他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》，是我国宝贵的数学遗产．（待续）

阶段核心技巧专训

常见二次根式化简求值的十一种技巧

(答案见144页)

名师点金

在有理数中学习的法则、性质、运算律、公式等在二次根式中仍然适用,运算的最后结果注意要化简到最简形式. 在进行化简时,一定要注意所给出的条件或题中的隐含条件,根据题目的特点,选取适当的解题方法.

技巧1 估算法

1. 估计$\sqrt{32}\times\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{18}$的运算结果应在(　　)

A. 5 到 6 之间　　B. 6 到 7 之间

C. 7 到 8 之间　　D. 8 到 9 之间

技巧2 公式法

2. 计算:$(5+\sqrt{6})\times(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$.

技巧3 拆项法

3. 计算:$\frac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$. [提示:$\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}=(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$]

技巧4 倒数法

4. 化简:$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}$.

技巧5 约分法

5. 计算:$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}$.

技巧6 配方法

6. 若 a,b 为实数,且 $b=\sqrt{3-5a}+\sqrt{5a-3}+15$,试求$\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2}-\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2}$的值.

趣味数学　《九章算术》中,解联立方程、分数四则运算、正负数运算、几何图形的体积、面积计算等,都属于世界先进之列,但解法比较原始,缺乏必要的证明,而刘徽对此均做了补充证明.(待续)

技巧7 平方法

7. 化简：$\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}+3}+\sqrt{\sqrt{10}-3}}{\sqrt{\sqrt{10}+1}}$.

技巧8 换元法

8. 已知 $n=\sqrt{2}+1$，求$\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$的值.

技巧9 整体代入法

9. 已知 $x=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$，求$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-4$ 的值.

技巧10 先判后算法

10. 已知 $a+b=-6$，$ab=5$，求 $b\sqrt{\dfrac{b}{a}}+a\sqrt{\dfrac{a}{b}}$的值.

技巧11 辅元法

11. 已知 $x:y:z=1:2:3(x>0,y>0,z>0)$，求$\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+z}+\sqrt{x+2y}}$的值.

更多提分招数详见《极速提分法》第 10 页.

在这些证明中，显示了他在众多方面的创造性贡献．他是世界上最早提出十进小数概念的人，并用十进小数来表示无理数的立方根．

趣味数学

全章热门考点整合应用

☞(答案见 144 页)

名师点金

本章内容在中考中主要考查二次根式及其性质,二次根式的计算与化简,多以填空题、选择题或计算题的形式出现,有时也与其他知识结合在一起综合考查,二次根式的内容是中考热点之一.其主要考点可概括为:三个概念,四个性质,一个运算,两个技巧.

考点1 三个概念

概念 1 二次根式

1. 若 $\sqrt{x-3}-\sqrt{3-x}=(x+y)^2$,求 $x-y$ 的值.

概念 2 代数式

2. 下列式子中属于代数式的有(　　)

①0;②a;③$x+y=2$;④$x-5$;⑤$2a$;

⑥$\sqrt{a^2+1}$;⑦$a\neq1$;⑧$x\leqslant3$.

A. 7 个　　B. 6 个

C. 5 个　　D. 4 个

3. 农民张大伯因病住院,手术费为 a 元,其他费用为 b 元,由于参加农村合作医疗,手术费报销 85%,其他费用报销 60%,则张大伯此次住院共报销____________元.(用代数式表示)

概念 3 最简二次根式

4. 二次根式 $4\sqrt{5a}$,$\sqrt{2a^3}$,$\sqrt{8a}$,$\sqrt{b}$,$\sqrt{\frac{1}{3}}$(其中 a,b 均大于或等于 0)中,是最简二次根式的有(　　)

A. 4 个　　B. 3 个

C. 2 个　　D. 1 个

考点2 四个性质

性质 1 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$

5. 下列计算正确的是(　　)

A. $-(\sqrt{7})^2=-7$　　B. $(\sqrt{5})^2=25$

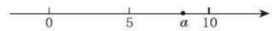
C. $(\sqrt{9})^2=\pm9$　　D. $-\left(-\sqrt{\frac{9}{16}}\right)^2=\frac{9}{16}$

6. 在实数范围内分解因式:$x^4-9=$____________.

7. 要使等式 $(\sqrt{8-x})^2=x-8$ 成立,则 $x=$________.

性质 2 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant0)$

8. 实数 a 在数轴上对应点的位置如图所示,则 $\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{(a-11)^2}$ 化简后为(　　)



(第 8 题)

A. 7　　B. -7

C. $2a-15$　　D. 无法确定

9. 已知 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长,试化简:

$\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-a-c)^2}$.

10. 先化简再求值:当 $a=5$ 时,求 $a+\sqrt{1-2a+a^2}$ 的值.甲、乙两人的解答如下:

甲的解答为:原式 $=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+(1-a)=1$;

乙的解答为:原式 $=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+(a-1)=2a-1=9$.

请问谁的解答正确?请说明理由.

性质 3 积的算术平方根

11. 化简 $\sqrt{24}$ 的结果是(　　)

A. $4\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $6\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{3}$

12. 能使得 $\sqrt{(3-a)(a+1)}=\sqrt{3-a}\cdot\sqrt{a+1}$ 成立的所有整数 a 的和是________.

趣味数学　公元 1858 年,德国数学家莫比乌斯和约翰·李斯丁发现:把一根纸条扭转 180°后,两头再粘起来做成纸带圈.(待续)

性质 4 商的算术平方根

13. 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{4\frac{4}{9}}$；　　(2) $\sqrt{\frac{121b^5}{16a^2}}(a<0,b>0)$.

考点3 一个运算——二次根式的运算

14. 计算：

(1) $(3\sqrt{3}+\sqrt{32})\times(\sqrt{27}-4\sqrt{2})$；

(2)【中考·临沂】$(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)$；

(3) $\frac{3}{10}\sqrt{\frac{5ab}{c}}\div\left(\frac{3}{5}\sqrt{\frac{b}{2ac}}\right)\times\left(-2\sqrt{\frac{15bc}{a}}\right)+\sqrt{abc}$.

考点4 两个技巧

技巧 1 倒数法比较大小

15. 比较 $\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021}$ 与 $\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}$ 的大小.

技巧 2 整体代入求值

16.【2019·菏泽】已知 $x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，那么 $x^2-2\sqrt{2}x$ 的值是________.

17. 已知 $x=\sqrt{2}-1$，$y=\sqrt{2}+1$，求$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$的值.

18. 已知 $x+y=-7$，$xy=12$，求 $y\sqrt{\frac{x}{y}}+x\sqrt{\frac{y}{x}}$的值.

19. 已知 $a-b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b-c=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求 $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$的值.

这个纸带拥有一个奇异的特点，即蚂蚁可以爬遍整个纸面却不用跨越纸张边缘，这就是神秘的莫比乌斯带。 趣味数学

17.1 勾股定理

第 1 课时 勾股定理

名师点金

1. **勾股定理的适用条件**:直角三角形,它反映了直角三角形三边的关系,即已知直角三角形两边长可求第三边长.对于非直角三角形问题,可根据图形特征构造直角三角形.
2. 由勾股定理的基本关系式:$a^2+b^2=c^2$ 可得到一些变形关系式:$c^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$;$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$等.

I 夯实基础 · 逐点练 (答案见 145 页)

知识点 1 勾股定理

1. 【2018 · 滨州】在直角三角形中,若勾为3,股为4,则弦为(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

2. 已知一个直角三角形的两条边长分别为 3 和 4,则第三条边长的平方为(　　)

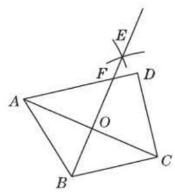
A. 25　　B. 7

C. 7 或 25　　D. 不确定

3. 【2019 · 河南】如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,$\angle D=90°$,$AD=4$,$BC=3$,分别以点 A,C 为圆心,大于$\frac{1}{2}AC$ 长为半径作弧,两弧交于点 E,作射线 BE 交 AD 于点 F,交 AC 于点 O,若点 O 是 AC 的中点,则 CD 的长为(　　)

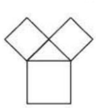
A. $2\sqrt{2}$　　B. 4

C. 3　　D. $\sqrt{10}$

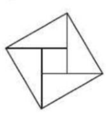


(第 3 题)

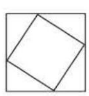
4. 【2019 · 咸宁】勾股定理是“人类最伟大的十个科学发现之一”,我国对勾股定理的证明是由汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出的,他用来证明勾股定理的图案被称为“赵爽弦图”. 2002 年在北京召开的国际数学大会选它作为会徽.下列图案中是“赵爽弦图”的是(　　)



A



B

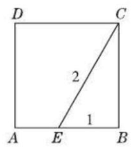


C

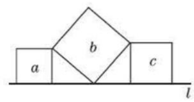
D

知识点 2 勾股定理与图形的面积

5. 【2019 · 黔东南州】如图,点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 AB 上,若 $EB=1$,$EC=2$,那么正方形 $ABCD$ 的面积为________.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图,直线 l 上有三个正方形 a,b,c,若 a,c 的面积分别为 3 和 4,则 b 的面积为(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 7

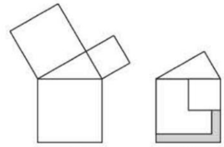
7. 【2019 · 宁波】勾股定理是人类最伟大的科学发现之一,在我国古算书《周髀算经》中早有记载,如图①,以直角三角形的各边为边分别向外作正方形,再把较小的两张正方形纸片按图②的方式放置在最大正方形内.若知道图中阴影部分的面积,则一定能求出(　　)

A. 直角三角形的面积

B. 最大正方形的面积

C. 较小两个正方形重叠部分的面积

D. 最大正方形与直角三角形的面积和



①　　②

(第 7 题)

易错点 ! 受思维定式的影响,误认为在 Rt$\triangle ABC$ 中,c 总表示斜边而致错

8. 在$\triangle ABC$ 中,若$\angle B=90°$,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$ 的对边分别是 a,b,c,且 $a=7$,$b=25$,则 c 的长为________.

趣味数学 几何学是数学中最古老的分支之一,也是数学这个领域里最基础的分支之一.古代中国、古巴比伦、古埃及、古印度、古希腊都是几何学的重要发源地.

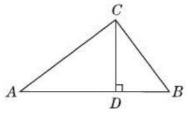
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见145页)

考查角度1 利用勾股定理求直角三角形中的边长

9. 如图，在△ABC 中，$CD\perp AB$ 于点 D，$AC=4$，$BC=3$，$BD=\frac{9}{5}$，求：

(1) CD 的长；

(2) AB 的长.



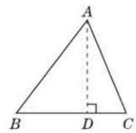
(第9题)

考查角度2 利用勾股定理求三角形的面积

10. 【中考·益阳】在△ABC 中，$AB=15$，$BC=14$，$AC=13$，求△ABC 的面积.

某学习小组经过合作交流，给出了下面的解题思路，请你按照他们的解题思路完成解答过程.

如图，作 $AD\perp BC$ 于点 D，设 $BD=x$，用含 x 的代数式表示 CD	→	根据勾股定理，利用 AD 作为"桥梁"，建立方程模型求出 x	→	利用勾股定理求出 AD 的长，再计算三角形面积

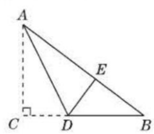


(第10题)

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见145页)

拔尖角度1 利用勾股定理求折叠中线段的长（折叠法）

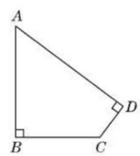
11. 如图，有一张直角三角形纸片，两直角边 $AC=6$ cm，$BC=8$ cm，现将直角边 AC 沿 AD 折叠，使得点 C 落在斜边 AB 上的点 E 处，试求 CD 的长.



(第11题)

拔尖角度2 利用勾股定理求四边形的面积（分割法）

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90°$，$AB=20$ m，$BC=15$ m，$CD=7$ m，求四边形 $ABCD$ 的面积.



(第12题)

第2课时 勾股定理在求距离中的应用

名师点金

在直线上找一点使其到直线同侧的两点的距离之和最短的方法

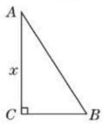
先找到其中一个点关于这条直线的对称点，连接对称点与另一个点的线段与该直线的交点即为所找的点，对称点与另一个点的线段长就是最短距离之和. 以连接对称点与另一个点的线段为斜边，构造出一个两条直角边已知的直角三角形，然后利用勾股定理即可求出最短距离之和.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

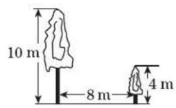
(答案见146页)

知识点1 长度的计算

1. 【2018·湘潭】《九章算术》是我国古代最重要的数学著作之一，在"勾股"章中记载了一道"折竹抵地"问题："今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺，问折者高几何？"翻译成数学问题是：如图所示，$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC+AB=10$，$BC=3$，求AC的长. 如果设$AC=x$，则可列方程为________.



（第1题）

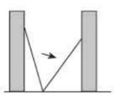


（第2题）

2. 【中考·安顺】如图，有两棵树，一棵高10 m，另一棵高4 m，两树相距8 m，一只小鸟从一棵树的树顶飞到另一棵树的树顶，小鸟至少飞行(　　)

A. 8 m　　B. 10 m　　C. 12 m　　D. 14 m

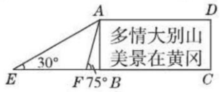
3. 【中考·绍兴】如图，小巷左右两侧是竖直的墙，一架梯子斜靠在左墙时，梯子底端到左墙脚的距离为0.7 m，顶端距离地面2.4 m，如果保持梯子底端位置不动，将梯子斜靠在右墙时，顶端距离地面2 m，则小巷的宽度为(　　)



（第3题）

A. 0.7 m　　B. 1.5 m　　C. 2.2 m　　D. 2.4 m

4. 【中考·黄冈】在黄冈长江大桥的东端一处空地上，有一块长方形的标语牌$ABCD$(如图所示)，已知标语牌的高$AB=5$ m，在地面的点E处，测得标语牌点A的仰角(即$\angle AEB$)为30°，在地面的点F处，测得标语牌点A的仰角(即$\angle AFB$)为75°，且点E，F，B，C在同一直线上，求点E与点F之间的距离.(计算结果精确到0.1 m，参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$)

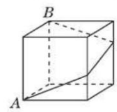


（第4题）

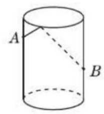
知识点2 最短距离的计算

类型1　展开法求最短距离

5. 如图，一只蚂蚁沿着棱长为2的正方体表面从点A出发，经过3个面爬到点B，如果它运动的路径是最短的，那么最短路径长为________.



（第5题）



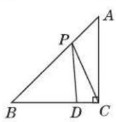
（第6题）

6. 【2018·黄冈】如图，圆柱形玻璃杯高为14 cm，底面周长为32 cm，在杯内壁离杯底5 cm的点B处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在杯外壁，离杯上沿3 cm与蜂蜜相对的A处，则蚂蚁从外壁A处到内壁B处的最短距离为________cm.(杯壁厚度不计)

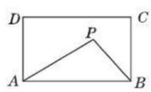
类型2　利用对称法求最短距离

7. 【中考·营口】如图，在$\triangle ABC$中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，点D在BC上，$BD=3$，$DC=1$，点P是AB上的动点，则$PC+PD$的最小值为(　　)

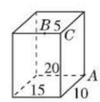
A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7



（第7题）



（第8题）



（第9题）

8. 【中考·安徽】如图，在长方形$ABCD$中，$AB=5$，$AD=3$，动点P满足$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}S_{长方形ABCD}$，则点$P$到$A$、$B$两点距离之和$PA+PB$的最小值为(　　)

A. $\sqrt{29}$　　B. $\sqrt{34}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{41}$

易错点 求最短路径时对立体图形展开情况考虑不全面导致错解

9. 如图，长方体的长为15，宽为10，高为20，点B离点C的距离为5，一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点A爬到点B，需要爬行的最短距离是(　　)

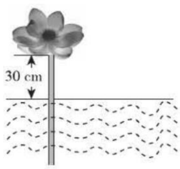
A. $5\sqrt{29}$　　B. 25　　C. $10\sqrt{5}+5$　　D. 35

趣味数学　有人提出过这样的建议：在地球上建造一个大型装置，以便向可能会来访的"天外来客"表明地球上存在有智慧的生命，最适当的装置就是一个象征勾股定理的巨大图形.(待续)

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见 146 页)

考查角度1 利用勾股定理借助水中物体变化情况求水深（方程思想）

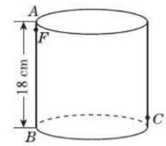
10. 在波平如镜的湖面上，有一朵盛开的美丽的红莲，它高出水面 30 cm（如图）. 突然一阵大风吹过，红莲被吹至一边，花朵刚好齐及水面，如果知道红莲移动的水平距离为 60 cm，请问水深多少？



（第 10 题）

考查角度2 利用勾股定理求圆柱中最短距离（化曲为直法）

11. 如图，圆柱形无盖玻璃容器，高为 18 cm，底面周长为 60 cm，在外侧距下底 1 cm 的点 C 处有一蜘蛛，与蜘蛛相对的圆柱形容器的上口外侧距开口 1 cm 的 F 处有一苍蝇，试求急于捕获苍蝇充饥的蜘蛛所走的最短路线的长度.



（第 11 题）

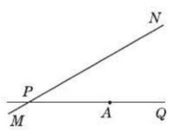
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见 146 页)

拔尖角度1 利用勾股定理解答实际生活中综合应用问题

12. 如图，公路 MN 和公路 PQ 在点 P 处交会，且 $\angle QPN=30°$. 点 A 处有一所中学，$AP=160$ m. 假设一拖拉机在公路 MN 上沿 PN 方向行驶，周围 100 m 以内（包括 100 m）会受到噪音的影响.

(1) 该学校是否会受到噪音的影响？请说明理由.

(2) 若受影响，已知拖拉机的速度为 18 km/h，则学校受到影响的时间有多长？



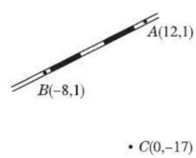
（第 12 题）

拔尖角度2 利用勾股定理解设计实际应用问题（对称法）

13. 【2019·河北】勘测队按实际需要构建了平面直角坐标系，并标示了 A，B，C 三地的坐标，数据如图（单位：km）. 笔直铁路经过 A，B 两地.

(1) A，B 间的距离为________ km；

(2) 计划修一条从 C 到铁路 AB 的最短公路 l，并在 l 上建一个维修站 D，使 D 到 A，C 的距离相等，则 C，D 间的距离为________ km.



（第 13 题）

更多提分招数详见《极速提分法》第 1 页.

可以设在撒哈拉大沙漠、西伯利亚或其他广阔的荒原上，因为一切有智慧的生物都必定知道这个非凡的定理，所以以它为标志最容易被外来者所识别！ 趣味数学

第3课时　勾股定理在几何中的应用

名师点金

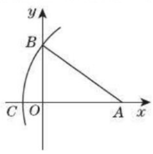
应用勾股定理解题的方法

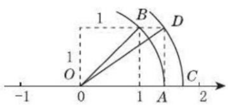
1. **添线应用**,即题中无直角三角形,可以通过作垂线,构造直角三角形,应用勾股定理求解;
2. **借助方程应用**,即题中虽有直角三角形,但已知线段的长不完全是直角三角形的边长,可通过设未知数,构建方程,解答计算问题;
3. **建模应用**,即将实际问题建立直角三角形模型,通过勾股定理解决实际问题.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见146页)

知识点1 用勾股定理在数轴上表示实数

1.【2018·吉林】如图,在平面直角坐标系中,$A(4,0)$,$B(0,3)$,以点 A 为圆心,AB 长为半径画弧,交 x 轴的负半轴于点 C,则点 C 的坐标为________.


(第1题)

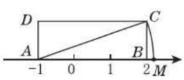

(第2题)

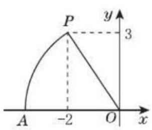
2. 如图,点 C 表示的数是(　　)

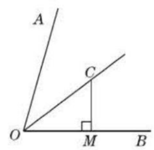
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1.5　　D. $\sqrt{3}$

3. 如图,在长方形 $ABCD$ 中,$AB=3$,$AD=1$,AB 在数轴上,若以点 A 为圆心,对角线 AC 的长为半径作弧交数轴于点 M,则点 M 表示的数为(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{5}-1$　　C. $\sqrt{10}-1$　　D. $\sqrt{5}$


(第3题)


(第4题)


(第5题)

4. 如图,在平面直角坐标系中,点 P 的坐标为$(-2,3)$,以点 O 为圆心,以 OP 的长为半径画弧,交 x 轴的负半轴于点 A,则点 A 的横坐标介于(　　)

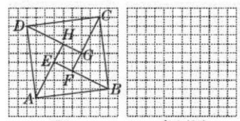
A. -4 和 -3 之间　　B. 3 和 4 之间

C. -5 和 -4 之间　　D. 4 和 5 之间

知识点2 用勾股定理解几何问题

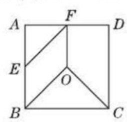
5.【2018·德州】如图,OC 为 $\angle AOB$ 的平分线,$CM\perp OB$,$OC=5$,$OM=4$,则点 C 到射线 OA 的距离为________.

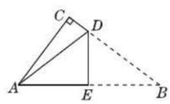
6.【2018·湖州】在每个小正方形的边长为1的网格图中,每个小正方形的顶点称为格点,以顶点都是格点的正方形 $ABCD$ 的边为斜边,向内作四个全等的直角三角形,使四个直角顶点 E,F,G,H 都是格点,且四边形 $EFGH$ 为正方形,我们把这样的图形称为格点弦图. 例如,在图①所示的格点弦图中,正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{65}$ 时,正方形 $EFGH$ 的面积的所有可能值是________(不包括5).


①　　备用图

(第6题)

7.【2019·绍兴】把边长为2的正方形纸片 $ABCD$ 分割成如图的四块,其中点 O 为正方形的中心,点 E,F 分别为 AB,AD 的中点. 用这四块纸片拼成与此正方形不全等的四边形 $MNPQ$(要求这四块纸片不重叠无缝隙),则四边形 $MNPQ$ 的周长是____________.


(第7题)

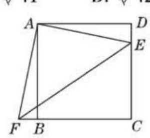

(第8题)

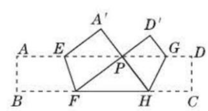
8. 如图是一张直角三角形的纸片,两直角边 $AC=6$ cm,$BC=8$ cm,现将△ABC 折叠,使点 B 与点 A 重合,折痕为 DE,则 BE 的长为(　　)

A. 4 cm　　B. 5 cm　　C. 6 cm　　D. 10 cm

9.【2019·宜宾】如图,四边形 $ABCD$ 是边长为5的正方形,E 是 DC 上一点,$DE=1$,将△ADE 绕点 A 顺时针旋转到与△ABF 重合,则 $EF=$(　　)

A. $\sqrt{41}$　　B. $\sqrt{42}$　　C. $5\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{13}$


(第9题)


(第10题)

易错点 忽视题目中条件而求不出答案

10. 如图,把长方形纸条 $ABCD$ 沿 EF,GH 同时折叠,B,C 两点恰好落在 AD 边的 P 点处,若 $\angle FPH=90°$,$PF=8$,$PH=6$,则长方形 $ABCD$ 的面积为________.

趣味数学　有个学生请教爱因斯坦逻辑学有什么用,爱因斯坦问他:"两个人从烟囱里爬出来,一个满脸烟灰,一个干干净净,你认为哪个会去洗澡?""当然是脏的那个."学生说.(待续)

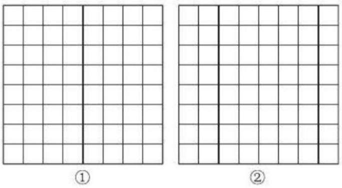
Ⅱ 整合方法 · 提升练
☞(答案见147页)

考查角度1 利用勾股定理作长度为$\sqrt{n}$的线段

11. 如图,正方形网格中的每个小正方形的边长都是1,每个小正方形的顶点叫做格点.以格点为顶点画三角形.

(1)使三角形的三边长分别为$3,2\sqrt{2},\sqrt{5}$.

(2)使三角形的周长为$\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{17}$.



(第11题)

考查角度2 利用勾股定理求线段长(构造法)

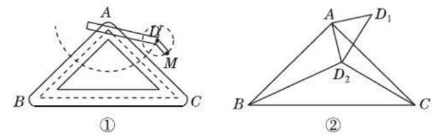
12.【2019·绍兴】如图①是实验室中的一种摆动装置,BC在地面上,支架ABC是底边为BC的等腰直角三角形,摆动臂AD可绕点A旋转,摆动臂DM可绕点D旋转,$AD=30$,$DM=10$.

(1)在旋转过程中,

①当A,D,M三点在同一直线上时,求AM的长;

②当A,D,M三点为同一直角三角形的顶点时,求AM的长.

(2)若摆动臂AD顺时针旋转$90°$,点D的位置由$\triangle ABC$外的点D_1转到其内的点D_2处,连接D_1D_2,如图②,此时$\angle AD_2C=135°$,$CD_2=60$,求BD_2的长.



(第12题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练
☞(答案见147页)

拔尖角度1 利用勾股定理探究三角形三边关系

13.[阅读理解]

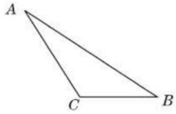
如图,在$\triangle ABC$中,$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$.

(1)若$\angle C$为直角,则$a^2+b^2=c^2$;

(2)若$\angle C$为锐角,则a^2+b^2与c^2的关系为$a^2+b^2>c^2$;

(3)若$\angle C$为钝角,试推导a^2+b^2与c^2的关系.

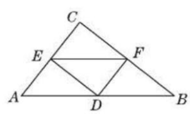
[探究问题]在$\triangle ABC$中,$BC=a=3$,$CA=b=4$,$AB=c$,若$\triangle ABC$是钝角三角形,求第三边c的取值范围.



(第13题)

拔尖角度2 利用勾股定理证明平方关系(线段转移法)

14. 如图,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,点D是AB的中点,点E,F分别为AC,BC的中点,$DE\perp DF$.求证:$AE^2+BF^2=EF^2$.



(第14题)

更多提分招数详见《极速提分法》第3页.

“不对,脏的那个看到对方干干净净,以为自己也不脏,哪里会去洗澡?”从这个故事中可以看到逻辑推理在我们日常生活中经常用到.同样,数学也离不开逻辑推理. 趣味数学

17.2　勾股定理的逆定理

第1课时　勾股定理的逆定理

名师点金

勾股定理及其逆定理的联系与区别

联系:1. 两者都与三角形三边的数量关系有关;2. 两者都与直角三角形有关.

区别:要区分勾股定理与其逆定理的题设与结论,不要混淆,勾股定理是已知直角,得三边关系,它是直角三角形的重要性质之一;而勾股定理的逆定理是已知三角形的三边关系,得直角,它是直角三角形的判定方法之一,也是用来证明两条线段互相垂直的方法之一.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见147页)

知识点1 逆命题、逆定理

1. 下列说法正确的是(　　)

A. 每个定理都有逆定理

B. 每个命题都有逆命题

C. 原命题是假命题,则它的逆命题也是假命题

D. 真命题的逆命题是真命题

2. 已知下列命题:①若 $a>b$,则 $ac>bc$;②若 $a=1$,则 $\sqrt{a}=a$;③内错角相等. 其中原命题与逆命题均为真命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 下列定理中,没有逆定理的是(　　)

A. 直角三角形的两锐角互余

B. 若三角形三边长 a,b,c(其中 $a<c,b<c$)满足 $a^2+b^2=c^2$,则该三角形是直角三角形

C. 全等三角形的对应角相等

D. 互为相反数的两数之和为0

知识点2 勾股定理的逆定理

4. 【2018·南通】下列长度的三条线段能组成直角三角形的是(　　)

A. 3,4,5　　B. 2,3,4

C. 4,6,7　　D. 5,11,12

5. 在△ABC 中,∠A,∠B,∠C 的对边分别为 a,b,c,且 $(a+b)(a-b)=c^2$,则(　　)

A. ∠A 为直角　　B. ∠B 为直角

C. ∠C 为直角　　D. △ABC 不是直角三角形

6. 【2019·益阳】已知 M,N 是线段 AB 上的两点,$AM=MN=2$,$NB=1$,以点 A 为圆心,AN 长为半径画弧;再以点 B 为圆心,BM 长为半径画弧,两弧交于点 C,连接 AC,BC,则△ABC 一定是(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

7. △ABC 的三边长分别为 a,b,c,下列条件:

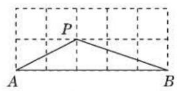
①$\angle A=\angle B-\angle C$;②$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$;

③$a^2=(b+c)(b-c)$;④$a:b:c=5:12:13$.

其中能判定△ABC 是直角三角形的有(　　)

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

8. 【2019·北京】如图所示的网格是正方形网格,则 $\angle PAB+\angle PBA=$ ________(点 A,B,P 是网格线的交点).



(第8题)

知识点3 勾股数

9. 下面几组数中,为勾股数的一组是(　　)

A. 4,5,6　　B. 12,16,20

C. −10,24,26　　D. 2.4,4.5,5.1

10. 下列几组数:①9,12,15;②8,15,17;③7,24,25;④$n^2-1,2n,n^2+1$(n 是大于1的整数),其中是勾股数的有(　　)

A. 1组　　B. 2组　　C. 3组　　D. 4组

11. 给出下列命题:

①如果 a,b,c 为一组勾股数,那么 $4a,4b,4c$ 仍是一组勾股数;

②如果直角三角形的两边长分别是3和4,那么第三边长的平方必为25;

③如果一个三角形的三边长分别是12,25,21,那么此三角形必是直角三角形;

④一个等腰直角三角形的三边长分别是 a,b,c,其中 a 是斜边长,那么 $a^2:b^2:c^2=2:1:1$.

其中是真命题的是(　　)

A. ①②　　B. ①③　　C. ①④　　D. ②④

易错点 忽视勾股数是正整数这一条件

12. 下列各组数能构成勾股数的是________.(填序号)

①6,8,10;　②7,8,10;　③$\frac{3}{5},\frac{4}{5},1$.

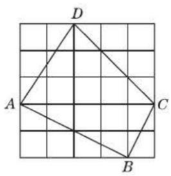
趣味数学　美国哥伦比亚大学图书馆收藏着一块编号为“普林顿322”的古巴比伦泥板. 泥板上的一些神秘符号揭示了什么奥秘呢?　(待续)

Ⅱ 整合方法 · 提升练

(答案见147页)

考查角度1 利用三角形三边的数量关系求网格中三角形的面积和角度

13. 如图，每个小方格都是边长为1的正方形，(1)求四边形 $ABCD$ 的面积；(2)求 $\angle ABC$ 的度数.



(第13题)

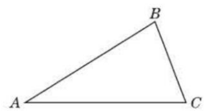
考查角度2 利用勾股定理逆定理判定直角三角形

14. 【2019 · 呼和浩特】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边分别为 a，b，c.

(1)若 $a=6$，$b=8$，$c=12$，请直接写出 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的和与 $\angle C$ 的大小关系；

(2)求证：$\triangle ABC$ 的内角和等于 $180°$；

(3)若 $\frac{a}{a-b+c}=\frac{\frac{1}{2}(a+b+c)}{c}$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.



(第14题)

Ⅲ 探究培优 · 拓展练

(答案见147页)

拔尖角度1 利用勾股数的特征求整式值

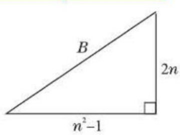
15. 【2019 · 河北】已知：整式 $A=(n^2-1)^2+(2n)^2$，整式 $B>0$.

尝试：化简整式 A.

发现：$A=B^2$，求整式 B.

联想：由上可知，$B^2=(n^2-1)^2+(2n)^2$，当 $n>1$ 时，n^2-1，$2n$，B 为直角三角形的三边长，如图所示，填写下表中 B 的值.

直角三角形三边	n^2-1	$2n$	B
勾股数组Ⅰ		8	
勾股数组Ⅱ	35		



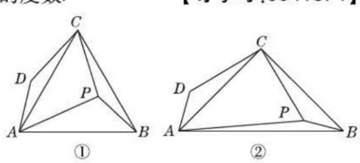
(第15题)

拔尖角度2 利用勾股定理的逆定理求角的度数

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$CA=CB$，$\angle ACB=\alpha$，点 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，将 CP 绕点 C 顺时针旋转 α 得到 CD，连接 AD.

(1)如图①，当 $\alpha=60°$，$PA=10$，$PB=6$，$PC=8$ 时，求 $\angle BPC$ 的度数；

(2)如图②，当 $\alpha=90°$，$PA=3$，$PB=1$，$PC=2$ 时，求 $\angle BPC$ 的度数. 【导学号:9941874】



(第16题)

经过专家的潜心研究，发现这块泥板文书实际是一张表格，表格里的数组都是勾股数.

趣味数学

第2课时　勾股定理及其逆定理的应用

名师点金

勾股定理及其逆定理的应用

单一应用：先由勾股定理的逆定理得出直角三角形，再求这个直角三角形的角和面积.

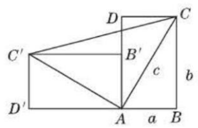
综合应用：先由勾股定理求出三角形的边长，再由勾股定理的逆定理确定三角形的形状，进而解决其他问题.

逆向应用：如果一个三角形两条较小边长的平方和不等于最大边长的平方，那么这个三角形不是直角三角形.

整合方法·分类练 ☞(答案见148页)

类型1 勾股定理的验证

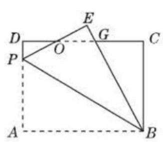
1. 一个直立的火柴盒在桌面上倒下，启迪人们发现了一种新的验证勾股定理的方法. 如图，火柴盒的一个侧面四边形 $ABCD$ 倒下到四边形 $AB'C'D'$ 的位置，连接 AC，AC'，CC'，设 $AB=a$，$BC=b$，$AC=c$. 请利用四边形 $BCC'D'$ 的面积证明勾股定理：$a^2+b^2=c^2$.



(第1题)

类型2 勾股定理在折叠中的应用

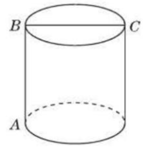
2. 【中考·泰州】如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$BC=6$，P 为 AD 上一点，将 $\triangle ABP$ 沿 BP 翻折至 $\triangle EBP$，PE，BE 分别与 CD 相交于点 O，G，且 $OE=OD$，求 AP 的长.



(第2题)

类型3 勾股定理在最短路径中的应用

3. 【2018·东营】如图，圆柱的高 $AB=3$，底面直径 $BC=3$，现有一只蚂蚁想从 A 处沿圆柱表面爬到对角 C 处捕食，则它爬行的最短距离是(　　)



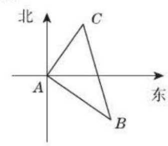
(第3题)

A. $3\sqrt{1+\pi}$　　B. $3\sqrt{2}$

C. $\dfrac{3\sqrt{4+\pi^2}}{2}$　　D. $3\sqrt{1+\pi^2}$

类型4 勾股定理的逆定理在判断方向中的应用

4. 如图，甲、乙两船从港口 A 同时出发，甲船以每小时 30 n mile 的速度向北偏东 35°方向航行，乙船以每小时 40 n mile 的速度向另一方向航行，1 小时后，甲船到达 C 岛，乙船到达 B 岛. 若 C、B 两岛相距 50 n mile，请你求出乙船的航行方向.



(第4题)

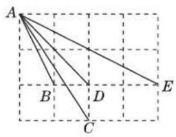
趣味数学　今天，在世界上几乎没有人不知道七巧板和七巧图，它在国外被称为“唐图”，意思是中国图（不是唐代发明的图）. 七巧板的历史也许应该追溯到我国先秦的古籍《周髀算经》.（待续）

类型5 勾股定理的逆定理在判断构成直角三角形条件中的应用

5. 如图，在 4×3 的正方形网格中有从点 A 出发的四条线段 AB,AC,AD,AE，它们的另一个端点 B,C,D,E 均在格点（正方形网格的交点）上.

(1)若每个小正方形的边长都是 1，分别求出 AB,AC,AD,AE 的长度.（结果保留根号）.

(2)在 AB,AC,AD,AE 四条线段中，是否存在三条线段，使它们能构成直角三角形？如果存在，请指出是哪三条线段，并说明理由.



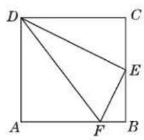
（第 5 题）

类型6 勾股定理与它的逆定理的综合应用

6. 如图，已知在正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，F 在 AB 上，且 $AF:FB=3:1$.

(1)请你判断 EF 与 DE 的位置关系，并说明理由；

(2)若此正方形的面积为 16，求 DF 的长.



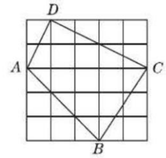
（第 6 题）

类型7 勾股定理及其逆定理在网格中的应用

7. 如图是由边长为 1 的小正方形组成的网格，点 A,B,C,D 均在格点上.

(1)求四边形 $ABCD$ 的面积.

(2)你能判断 AD 与 CD 的位置关系吗？请说出你的理由.



（第 7 题）

类型8 勾股定理的逆定理的实际应用

8. 【2018·长沙】我国南宋著名数学家秦九韶的著作《数书九章》里记载有这样一道题目："问有沙田一块，有三斜，其中小斜五里，中斜十二里，大斜十三里，欲知为田几何？"这道题讲的是：有一块三角形沙田，三条边长分别为 5 里，12 里，13 里，问这块沙田面积有多大？题中的"里"是我国市制长度单位，1 里 =500 米，则该沙田的面积为(　　)

A. 7.5 平方千米　　B. 15 平方千米

C. 75 平方千米　　D. 750 平方千米

9. 王伟准备用一段长 30 m 的篱笆围成一个三角形形状的小圈，用于饲养家兔. 已知第一条边长为 a m，由于受地势限制，第二条边长比第一条边长的 2 倍多 2 m.

(1)请用 a 表示第三条边长.

(2)问第一条边长可以为 7 m 吗？请说明理由，并求出 a 的取值范围.

(3)能否使得围成的小圈是直角三角形形状，且各边长均为整数？若能，说明你的围法；若不能，请说明理由.

其中有正方形切割术，并由之证明了勾股定理. 而当时是将大正方形切割成四个同样的三角形和一个小正方形，还不是七巧板. 现在的七巧板是经过一段历史演变而得到的. 趣味数学

阶段核心题型专训

勾股定理解题的十种常见题型

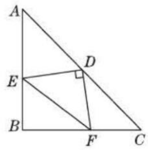
(答案见148页)

名师点金

勾股定理建立起了“数”与“形”的完美结合，应用勾股定理可以解与直角三角形有关的计算问题，说明含有平方关系的几何问题，解决实际应用问题及最短路径问题、折叠问题等．在解题过程中往往利用勾股定理列方程，有时需要通过作辅助线来构造直角三角形，**化斜为直**来解决问题．

题型1 利用勾股定理求线段长

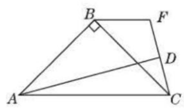
1. 如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle ABC=90°$，点 D 为 AC 边的中点，过 D 点作 $DE\perp DF$，交 AB 于 E，交 BC 于 F．若 $AE=4$，$FC=3$，求 EF 的长．



（第1题）

题型2 利用勾股定理说明线段相等

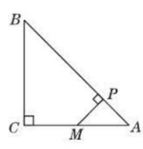
2. 如图，在四边形 $ABFC$ 中，$\angle ABC=90°$，$CD\perp AD$，$AD^2=2AB^2-CD^2$．试说明：$AB=BC$．



（第2题）

题型3 利用勾股定理说明线段之间的平方关系

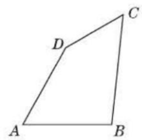
3. 如图，$\angle C=90°$，$AM=CM$，$MP\perp AB$ 于点 P．
试说明：$BP^2=BC^2+AP^2$．



（第3题）

题型4 利用勾股定理求四边形中线段长（构造法）

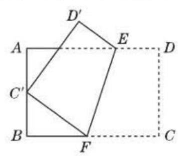
4. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=8$，$\angle A=60°$，$\angle D=150°$，四边形 $ABCD$ 的周长为32，求 BC 和 CD 的长度．



（第4题）

题型5 利用勾股定理求折叠中线段长（方程思想）

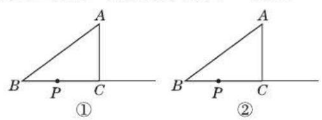
5. 如图，将长方形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使顶点 C 恰好落在 AB 边的中点 C' 处．若 $AB=6$，$BC=9$，求 BF 的长．



（第5题）

题型6 利用勾股定理求动点中线段长

6. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=5$ cm，$AC=3$ cm，动点 P 从点 B 出发沿射线 BC 以1 cm/s的速度移动，设运动的时间为 t s．
(1)求 BC 边的长；
(2)当$\triangle ABP$ 为直角三角形时，借助图①求 t 的值；
(3)当$\triangle ABP$ 为等腰三角形时，借助图②求 t 的值．

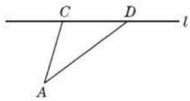


（第6题）

趣味数学　关于勾股定理的发现，《周髀算经》上说：“故禹之所以治天下者，此数之所由生也．”“此数”指的是“勾三股四弦五”．（待续）

题型7 利用勾股定理求实际中的距离

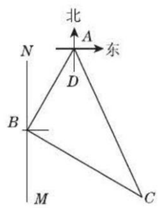
7. 如图,某学校(A 点)到公路(直线 l)的距离为 300 m,到公交站(D 点)的距离为 500 m. 现要在公路边上建一个商店(C 点),使之到学校 A 及公交站 D 的距离相等,求商店 C 与公交站 D 之间的距离.



(第 7 题)

题型8 利用直角三角形的判定求实际中的方向角

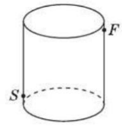
8. 如图,小明家位于一条南北走向的河流 MN 的东侧 A 处,某一天小明从家出发沿南偏西 30°方向走 60 m 到达河边 B 处取水,然后沿另一方向走 80 m 到达菜地 C 处浇水,最后沿第三方向走 100 m 回到家 A 处. 问小明在河边 B 处取水后是沿哪个方向行走的?并说明理由.



(第 8 题)

题型9 利用勾股定理求最短距离

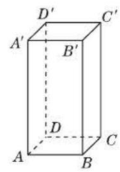
9. 如图,圆柱形玻璃容器高 10 cm,底面周长为 30 cm,在外侧距下底 1 cm 的点 S 处有一只蚂蚁,与蚂蚁相对的圆柱形容器的上口外侧距开口处 1 cm 的点 F 处有食物,求蚂蚁要吃到食物所走最短路线的长度.



(第 9 题)

题型10 利用勾股定理求解最短距离(分类讨论思想)

10. 如图,已知长方体的长为 4 cm、宽为 2 cm、高为 8 cm. 一只蟑螂如果沿长方体的表面从 A 点爬到 C' 点,那么最短的路程是多少?



(第 10 题)

更多提分招数详见《极速提分法》第 7 页.

这句话的意思是:勾三股四弦五的关系是在大禹治水时发现的.

趣味数学

全章热门考点整合应用

☞(答案见149页)

名师点金

本章主要学习了勾股定理、勾股定理的逆定理及其应用,勾股定理揭示了直角三角形三边长之间的数量关系.它把直角三角形的"形"的特点转化为三边长的"数"的关系,是数形结合的典范,是直角三角形的重要性质之一,也是今后判定直角三角形的依据之一.本章的考点可概括为:两个概念,两个定理,四种方法,两个应用.

考点1 两个概念

概念1 互逆命题

1. 有下列命题:①直角都相等;②内错角相等,两直线平行;③如果 $a+b>0$,那么 $a>0,b>0$;④相等的角都是直角;⑤如果 $a>0,b>0$,那么 $ab>0$;⑥两直线平行,内错角相等.

(1)③和⑤是互逆命题吗?

(2)你能说出③和⑤的逆命题各是什么吗?

(3)请指出哪几个命题是互逆命题.

概念2 互逆定理

2. 下列三个定理中,存在逆定理的有(　　)个.

(1)有两个角相等的三角形是等腰三角形;

(2)全等三角形的对应角相等;

(3)同位角相等,两直线平行.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 写出下列各命题的逆命题,并判断是不是互逆定理.

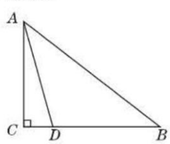
(1)全等三角形的对应边相等;

(2)同角的补角相等.

考点2 两个定理

定理1 勾股定理

4. 如图,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,点 D 是 BC 上一点,$AD=BD$.若 $AB=8$,$BD=5$,求 CD 的长.



(第4题)

定理2 勾股定理的逆定理

5. 在△ABC 中,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,设 c 为最长边.当 $a^2+b^2=c^2$ 时,△ABC 是直角三角形;当 $a^2+b^2\neq c^2$ 时,利用代数式 a^2+b^2 和 c^2 的大小关系,可以判断△ABC 的形状.(按角分类)

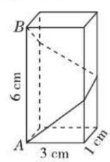
(1)请你通过画图探究并判断:当△ABC 三边长分别为6,8,9时,△ABC 为________三角形;当△ABC 三边长分别为6,8,11时,△ABC 为________三角形.

(2)小明同学根据上述探究,有下面的猜想:"当 $a^2+b^2>c^2$ 时,△ABC 为锐角三角形;当 $a^2+b^2<c^2$ 时,△ABC 为钝角三角形."请你根据小明的猜想解答下面的问题:当 $a=2$,$b=4$ 时,最长边 c 在什么范围内取值时,△ABC 是锐角三角形、直角三角形、钝角三角形?

考点3 四种方法

方法1 化曲(折)为直法

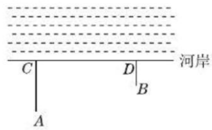
6. 如图,长方体的底面相邻两边的长分别为1 cm和3 cm,高为6 cm,如果用一根细线从点 A 开始经过4个侧面缠绕一圈到达 B,那么所用细线最短需要多长?如果从点 A 开始经过4个侧面缠绕 n 圈到达点 B,那么所用细线最短时,其长度的平方是多少?



(第6题)

方法 2 对称找点法

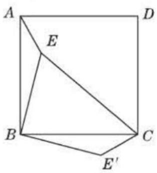
7. 如图，牧童在 A 处放牛，其家在 B 处，A，B 到河岸的距离分别为 $AC=400$ m，$BD=200$ m，且 $CD=800$ m，牧童从 A 处把牛牵到河边饮水后回家，在何处饮水所走总路程最短？最短路程是多少？



（第 7 题）

方法 3 旋转法

8. 如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 内一点，连接 AE，BE，CE，将 $\triangle ABE$ 绕点 B 顺时针旋转 $90°$ 到 $\triangle CBE'$ 的位置．若 $AE=1$，$BE=2$，$CE=3$，求 $\angle BE'C$ 的度数．



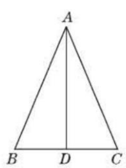
（第 8 题）

方法 4 化斜为直法

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=13$，$BC=10$，BC 边上的中线 $AD=12$．求：

(1) AC 的长度；

(2) $\triangle ABC$ 的面积．

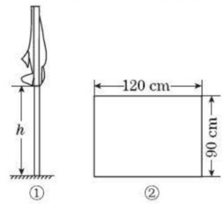


（第 9 题）

考点 4 两个应用

应用 1 勾股定理的应用

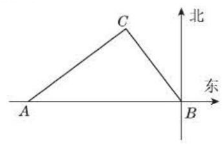
10. 将穿好彩旗的旗杆垂直插在操场上，旗杆顶到地面的高度为 320 cm，在无风的天气里，彩旗自然下垂，如图①所示．求彩旗下垂时最低处离地面的最小高度 h．（彩旗完全展开时的尺寸是如图②所示的长方形）



（第 10 题）

应用 2 判定直角三角形的应用

11. 如图，在我国沿海有一艘不明国籍的轮船进入我国海域，我海军甲、乙两艘巡逻艇立即从相距 5 n mile 的 A，B 两个基地前去拦截，6 min 后同时到达 C 地将其拦截．已知甲巡逻艇的速度为 40 n mile/h，乙巡逻艇的速度为 30 n mile/h，且乙巡逻艇的航向为北偏西 $37°$，求甲巡逻艇的航向．



（第 11 题）

从勾股定理出发逐渐发展了开平方、开立方，用勾股定理求圆周率．据称金字塔底座的四个直角就是应用这一关系确定的．至今在建筑工地上，还在用它来放线进行“归方”，即放“成直角”的线．

趣味数学

平行四边形

18.1 平行四边形

第1课时 平行四边形的边、角性质

名师点金

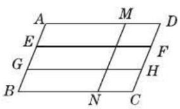
1. 平行四边形的定义既可当性质用,又可当判定用.
2. 平行四边形的边、角性质为证明线段的平行和相等、角的互补和相等提供了很重要的依据.常和全等三角形一起综合运用.
3. 平行线间的距离是指垂线段的长度,平行线的位置确定了,它们之间的距离就是定值,不随着垂线段的位置的改变而改变.

I 夯实基础·逐点练 ☞(答案见150页)

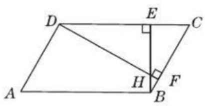
知识点1 平行四边形的定义

1. 如图,▱ABCD中,EF∥GH∥BC,MN∥AB,则图中平行四边形的个数是(　　)

A. 13　　B. 14　　C. 15　　D. 18



(第1题)



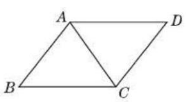
(第2题)

2. 【2019·梧州】如图,▱ABCD中,∠ADC=119°,BE⊥DC于点E,DF⊥BC于点F,BE与DF交于点H,则∠BHF=________.

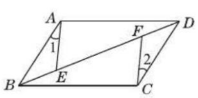
知识点2 平行四边形的性质——对边相等

3. 【2018·黔东南】如图,在▱ABCD中,已知AC=4 cm,若△ACD的周长为13 cm,则▱ABCD的周长为(　　)

A. 26 cm　　B. 24 cm　　C. 20 cm　　D. 18 cm



(第3题)



(第4题)

4. 如图,在平行四边形ABCD中,E,F是对角线BD上的两点,如果添加一个条件使△ABE≌△CDF,则添加的条件不能是(　　)

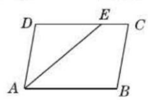
A. AE=CF　　B. BE=FD

C. BF=DE　　D. ∠1=∠2

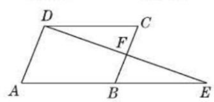
知识点3 平行四边形的性质——对角相等

5. 如图,在平行四边形ABCD中,AE平分∠DAB,∠B=100°,则∠DAE等于(　　)

A. 100°　　B. 80°　　C. 60°　　D. 40°



(第5题)



(第6题)

6. 如图,在▱ABCD中,延长AB到点E,使BE=AB,连接DE交BC于点F,则下列结论不一定成立的是(　　)

A. ∠E=∠CDF　　B. EF=DF

C. AD=2BF　　D. BE=2CF

知识点4 平行线之间的距离

7. 直线a上有一点A,直线b上有一点B,且a∥b.点P在直线a,b之间,若PA=3,PB=4,则直线a,b之间的距离(　　)

A. 等于7　　B. 小于7

C. 不小于7　　D. 不大于7

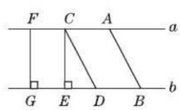
8. 如图,a∥b,AB∥CD,CE⊥b,FG⊥b,E,G为垂足,则下列说法不正确的是(　　)

A. AB=CD

B. EC=FG

C. A,B两点间的距离就是线段AB的长度

D. a与b之间的距离就是线段CD的长度



(第8题)

易错点 不注意分情况讨论,造成漏解

9. 在▱ABCD中,∠DAB的平分线分边BC为3 cm和4 cm两部分,则▱ABCD的周长为(　　)

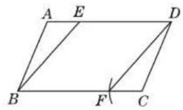
A. 20 cm　　B. 22 cm　　C. 10 cm　　D. 20 cm或22 cm

趣味数学 几何学的发展史:几何学和算术一样是在实践中产生的,也可以说几何学产生的历史和算术是相似的.在远古时代,人们在实践中积累了十分丰富的各种平面、直线、方、圆、长、短、宽、窄、厚、薄等概念.(待续)

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见150页)

考查角度 1 利用平行四边形的性质证全等

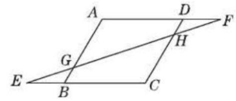
10.【2019·吉林】如图，在▱$ABCD$中，点E在边AD上，以C为圆心，AE长为半径画弧，交边BC于点F，连接BE，DF. 求证：$\triangle ABE\cong\triangle CDF$.



（第10题）

考查角度 2 利用平行四边形边的性质证边的关系

11.【2018·宿迁】如图，在▱$ABCD$中，点E，F分别在边CB，AD的延长线上，且$BE=DF$，EF分别与AB，CD交于点G，H，求证：$AG=CH$.



（第11题）

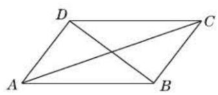
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见150页)

拔尖角度 1 利用平行四边形的性质证线段的垂直关系

12.【2019·荆门】如图，已知平行四边形$ABCD$中，$AB=5$，$BC=3$，$AC=2\sqrt{13}$.

(1)求平行四边形$ABCD$的面积；

(2)求证：$BD\perp BC$.



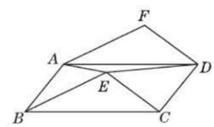
（第12题）

拔尖角度 2 利用平行四边形的性质求面积的比值关系

13.【2019·安徽】如图，点E在▱$ABCD$内部，$AF\parallel BE$，$DF\parallel CE$.

(1)求证：$\triangle BCE\cong\triangle ADF$；

(2)设▱$ABCD$的面积为S，四边形$AEDF$的面积为T，求$\frac{S}{T}$的值.



（第13题）

并且逐步认识了这些概念之间的关系及各种位置关系和数量关系，这些后来就成了几何学的基本概念.

趣味数学

第2课时　平行四边形的对角线性质

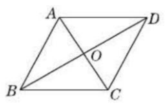
名师点金

1. 平行四边形的每一条对角线将平行四边形分成两个全等的三角形，两条对角线将平行四边形分成四对全等的三角形. 对角线是把四边形转化为三角形的桥梁，可将平行四边形问题转化为三角形问题来解决. 平行四边形的对角线性质是证明两条线段互相平分的重要依据.
2. 若一条直线过平行四边形对角线的交点，则该直线平分平行四边形的周长和面积.

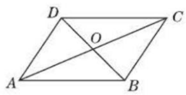
Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 (答案见151页)

知识点 1 平行四边形的性质——对角线互相平分

1. 【2018 · 泰州】如图，▱$ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，若 $AD=6$，$AC+BD=16$，则△BOC 的周长为________.



（第 1 题）



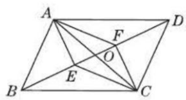
（第 2 题）

2. 【2019 · 柳州】如图，在▱$ABCD$ 中，全等三角形的对数共有(　　)

A. 2 对　　B. 3 对　　C. 4 对　　D. 5 对

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$AE\perp BD$ 于点 E，$CF\perp BD$ 于点 F，连接 AF，CE，则下列结论：

①$CF=AE$；
②$OE=OF$；
③$DE=BF$；
④图中共有 4 对全等三角形.



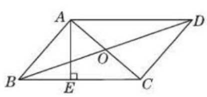
（第 3 题）

其中正确结论的个数是(　　)

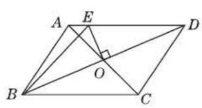
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

4. 【中考 · 青岛】如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp BC$，垂足为 E，$AB=\sqrt{3}$，$AC=2$，$BD=4$，则 AE 的长为(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　　D. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 【2019 · 遂宁】如图，▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，$OE\perp BD$ 交 AD 于点 E，连接 BE. 若▱$ABCD$ 的周长为 28，则△ABE 的周长为(　　)

A. 28　　B. 24　　C. 21　　D. 14

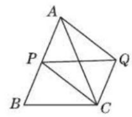
6. 如图，在△ABC 中，$\angle BAC=45°$，$AB=AC=8$，P 为 AB 边上一动点，以 PA，PC 为边作平行四边形 $PAQC$，则对角线 PQ 长度的最小值为(　　)

A. 6

B. 8

C. $2\sqrt{2}$

D. $4\sqrt{2}$

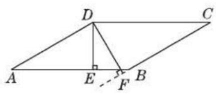


（第 6 题）

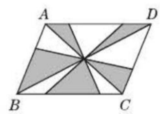
知识点 2 平行四边形的面积

7. 如图，若▱$ABCD$ 的周长为 36 cm，过点 D 分别作 AB，BC 边上的高 DE，DF，且 $DE=4$ cm，$DF=5$ cm，▱$ABCD$ 的面积为(　　)

A. 40 cm^2　　B. 32 cm^2　　C. 36 cm^2　　D. 50 cm^2



（第 7 题）



（第 8 题）

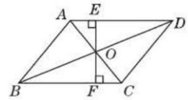
8. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，AC，BD 为对角线，$BC=6$，BC 边上的高为 4，则图中阴影部分的面积为(　　)

A. 3　　B. 6　　C. 12　　D. 24

易错点 容易把未知条件当作已知条件使用

9. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 和 BD 相交于点 O，$OE\perp AD$ 于点 E，$OF\perp BC$ 于点 F.

试说明：$OE=OF$.



（第 9 题）

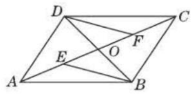
趣味数学　华罗庚小时候帮助父亲做生意，打算盘、记账，那时华罗庚站在柜台前，顾客一走就又埋头看书演算起数学题来. 华罗庚就是这样抓住时间，为数学事业的发展做出了卓越贡献.

Ⅱ 整合方法·提升练

☞(答案见151页)

考查角度1 利用平行四边形的对角线性质证明线段相等

10.【2018·大连】如图，▱ABCD的对角线AC，BD相交于点O，点E，F在AC上，且AF=CE. 求证：BE=DF.



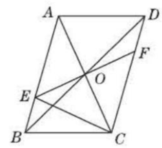
（第10题）

考查角度2 利用平行四边形对角线性质求线段的和

11.【中考·本溪】如图，▱ABCD的对角线AC，BD相交于点O，EF过点O且与AB，CD分别相交于点E，F，连接EC.

(1)求证：OE=OF；

(2)若EF⊥AC，△BEC的周长是10，求▱ABCD的周长.



（第11题）

Ⅲ 探究培优·拓展练

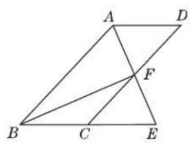
☞(答案见151页)

拔尖角度1 利用平行四边形的性质求面积

12.【中考·永州】如图，四边形ABCD为平行四边形，∠BAD的平分线AE交CD于点F，交BC的延长线于点E.

(1)求证：BE=CD；

(2)连接BF，若BF⊥AE，∠BEA=60°，AB=4，求▱ABCD的面积.



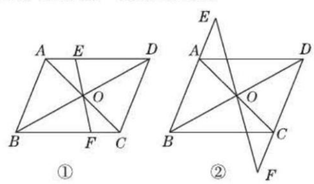
（第12题）

拔尖角度2 利用平行四边形对角线性质探究线段关系

13. 如图①，四边形ABCD是平行四边形，对角线AC，BD相交于点O，过点O作直线EF分别交AD，BC于点E，F.

(1)求证：OE=OF.

(2)如图②，若过O点的直线EF与BA，DC的延长线分别交于点E，F，能得到(1)中的结论吗？由此你能得到什么样的一般性结论？



（第13题）

第3课时　平行四边形的判定

名师点金

证明一个四边形是平行四边形的方法

1. 如果已知一组对边平行，则可通过证明另一组对边平行，或证明这组对边相等的方法判定该四边形是平行四边形；
2. 如果已知一组对边相等，则可通过证明另一组对边相等，或证明这组对边平行的方法判定该四边形是平行四边形；
3. 如果已知一组对角相等，则可通过证明另一组对角相等的方法判定该四边形是平行四边形；
4. 如果已知对角线的条件，则可通过证明对角线互相平分的方法判定该四边形是平行四边形.

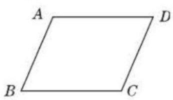
Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见151页)

知识点1 由两组对边分别平行或相等判定平行四边形

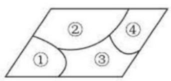
1.【2018·绥化】如图，下列选项中，不能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是(　　)

A. $AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$　　B. $AB\parallel CD$，$AB=CD$

C. $AD\parallel BC$，$AB=DC$　　D. $AB=DC$，$AD=BC$



(第1题)



(第2题)

2. 小敏不慎将一块平行四边形玻璃打碎成如图所示的四块，为了能在商店配到一块与原来相同的平行四边形玻璃，她带了两块碎玻璃，其编号应该是(　　)

A. ①②　　B. ①④　　C. ③④　　D. ②③

知识点2 由两组对角分别相等判定平行四边形

3. 顺次连接平面上 A,B,C,D 四点得到一个四边形，从①$AB\parallel CD$，②$BC=AD$，③$\angle A=\angle C$，④$\angle B=\angle D$ 四个条件中任取两个，可以得出"四边形 $ABCD$ 是平行四边形"这一结论的情况共有(　　)

A. 5种　　B. 4种　　C. 3种　　D. 1种

4. 下列给出的条件中，能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是(　　)

A. $AB\parallel CD$，$AD=BC$　　B. $AB=AD$，$CB=CD$

C. $AB=CD$，$AD=BC$　　D. $\angle B=\angle C$，$\angle A=\angle D$

知识点3 由对角线互相平分判定平行四边形

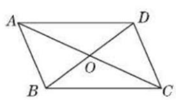
5.【2019·泸州】四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，下列四组条件中，一定能判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是(　　)

A. $AD\parallel BC$

B. $OA=OC$，$OB=OD$

C. $AD\parallel BC$，$AB=DC$

D. $AC\perp BD$

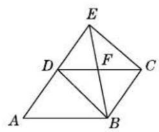


(第5题)

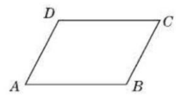
6.【2019·威海】如图，E 是▱$ABCD$ 的边 AD 延长线上一点，连接 BE，CE，BD，BE 交 CD 于点 F. 添加以下条件，不能判定四边形 $BCED$ 为平行四边形的是(　　)

A. $\angle ABD=\angle DCE$　　B. $DF=CF$

C. $\angle AEB=\angle BCD$　　D. $\angle AEC=\angle CBD$



(第6题)



(第7题)

知识点4 由一组对边平行且相等判定平行四边形

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，在不添加任何辅助线的情况下，请你添加一个条件________，使四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

8.【2018·安徽】▱$ABCD$ 中，E，F 是对角线 BD 上不同的两点，下列条件中，不能得出四边形 $AECF$ 一定为平行四边形的是(　　)

A. $BE=DF$　　B. $AE=CF$

C. $AF\parallel CE$　　D. $\angle BAE=\angle DCF$

易错点 混淆平行四边形的判定方法导致判断错误

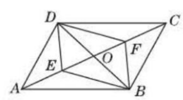
9. 已知：如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于 O，E，F 是对角线 AC 上的两点，给出下列四个条件：

①$OE=OF$；

②$DE=BF$；

③$\angle ADE=\angle CBF$；

④$\angle ABE=\angle CDF$.



(第9题)

其中不能判定四边形 $DEBF$ 是平行四边形的有(　　)

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

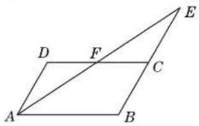
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见151页)

考查角度1 利用边的关系判定平行四边形

10.【2019·遂宁】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，延长 BC 到 E，使 $CE = BC$，连接 AE 交 CD 于点 F，点 F 是 CD 的中点，求证：

(1) $\triangle ADF \cong \triangle ECF$；

(2)四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



(第10题)

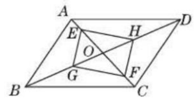
考查角度2 利用对角线的关系判定平行四边形

11.已知：如图，在▱$ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，点 E，F 在 AC 上，点 G，H 在 BD 上，且 $AE = CF$，$BG = DH$.

(1)若 $AC = 6$，$BD = 8$，试求 AD 的取值范围；

(2)若 $AC = AD$，$\angle CAD = 50°$，试求 $\angle ABC$ 的度数；

(3)求证：四边形 $EHFG$ 是平行四边形.



(第11题)

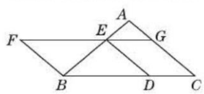
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见152页)

拔尖角度1 利用平行四边形的判定和性质求线段的长

12.【中考·大庆】如图，以 BC 为底边的等腰三角形 ABC，点 D，E，G 分别在 BC，AB，AC 上，且 $EG \parallel BC$，$DE \parallel AC$，延长 GE 至点 F，使得 $BF = BE$.

(1)求证：四边形 $BDEF$ 为平行四边形；

(2)当 $\angle C = 45°$，$BD = 2$ 时，求 D，F 两点间的距离.



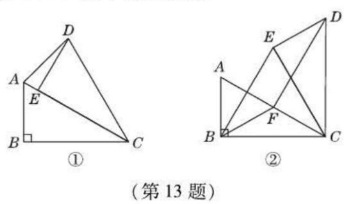
(第12题)

拔尖角度2 利用平行四边形的判定判定旋转中的平行四边形

13.【2019·福建】在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 90°$，$\angle ACB = 30°$，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转一定的角度 α 得到 $\triangle DEC$，点 A，B 的对应点分别是 D，E.

(1)当点 E 恰好在 AC 上时，如图①，求 $\angle ADE$ 的大小；

(2)若 $\alpha = 60°$ 时，点 F 是边 AC 的中点，如图②，求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形.



(第13题)

王老汉因病去世，临死前嘱托两个儿子把自家的田地分了，要求两人分的田地必须一样，且田地里那口井不能分. 王老汉家的田地的形状是平行四边形.（待续）

趣味数学

第 4 课时　平行四边形的性质和判定的应用

名师点金

平行四边形的性质与判定方法的区别与联系

1. **联系**：平行四边形的性质的题设和结论正好与判定的题设和结论相反，它们构成互逆的关系.
2. **区别**：由平行四边形这一条件得到边、角或对角线的关系，这是平行四边形的性质；反之，由边、角或对角线的关系得到平行四边形，这是平行四边形的判定.

整合方法 · 分类练

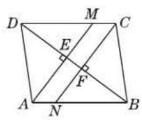
(答案见 152 页)

类型 1　利用平行四边形的性质和判定判定平行四边形

1.【中考 · 鄂州】如图，在▱$ABCD$ 中，BD 是它的一条对角线，过 A，C 两点作 $AE\perp BD$，$CF\perp BD$，垂足分别为 E，F，延长 AE，CF 分别交 CD，AB 于 M，N.

(1)求证：四边形 $CMAN$ 是平行四边形；

(2)已知 $DE=4$，$FN=3$，求 BN 的长.



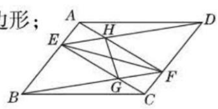
(第 1 题)

类型 2　利用平行四边形的性质和判定说明线段平分关系

2. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 AB，CD 上，$AE=CF$，连接 AF，BF，DE，CE，分别交于 H，G. 求证：

(1)四边形 $AECF$ 是平行四边形；

(2)EF 与 GH 互相平分.



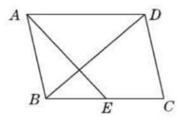
(第 2 题)

类型 3　利用平行四边形的性质和判定说明线段的垂直关系

3. 如图，▱$ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，$AE=9$，$BD=12$，$AD=10$.

(1)求证：$AE\perp BD$；

(2)求▱$ABCD$ 的面积.



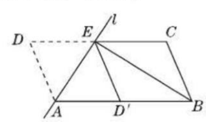
(第 3 题)

类型 4　利用平行四边形的性质和判定证明线段间的平方关系

4.【中考 · 扬州】如图，将▱$ABCD$ 沿过点 A 的直线 l 折叠，使点 D 落到 AB 边上的点 D' 处，折痕 l 交 CD 边于点 E，连接 BE.

(1)求证：四边形 $BCED'$ 是平行四边形；

(2)若 BE 平分 $\angle ABC$，求证：$AB^2=AE^2+BE^2$.



(第 4 题)

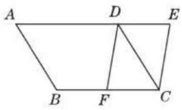
趣味数学　那口井在靠近一边的左下角位置，二人不知如何分，于是去找孔明先生. 先生沉吟片刻，说道：“你们按照我说的做，定能平分这块田地，并且不分掉那口井.”（待续）

类型5 利用平行四边形的性质和判定求线段的长

5.【中考·毕节】如图，将▱$ABCD$ 的 AD 边延长至点 E，使 $DE=\frac{1}{2}AD$，连接 CE，F 是 BC 边的中点，连接 FD.

(1)求证：四边形 $CEDF$ 是平行四边形；

(2)若 $AB=3$，$AD=4$，$\angle A=60°$，求 CE 的长.



（第 5 题）

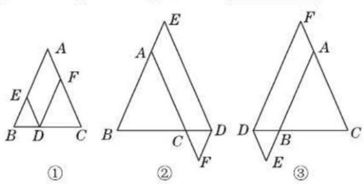
类型6 利用平行四边形的性质和判定探究线段的和差关系（归一法）

6. 在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 在边 BC 所在的直线上，过点 D 作 $DE/\!/AC$ 交直线 AB 于点 E，$DF/\!/AB$ 交直线 AC 于点 F.

(1)当点 D 在边 BC 上时，如图①，求证：$DE+DF=AC$.

(2)当点 D 在边 BC 的延长线上时，如图②；当点 D 在边 BC 的反向延长线上时，如图③. 请分别写出图②、图③中 DE，DF，AC 之间的数量关系，不需要证明.

(3)若 $AC=6$，$DE=4$，则 $DF=$________.



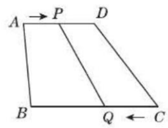
（第 6 题）

类型7 利用平行四边形的性质和判定探究动点问题

7. 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$BC=18$ cm，$CD=15$ cm，$AD=10$ cm，$AB=12$ cm，动点 P，Q 分别从点 A，C 同时出发，点 P 以 2 cm/s 的速度由 A 向 D 运动，点 Q 以 3 cm/s 的速度由 C 向 B 运动.（当其中一个点停止运动时，另一个点也随之停止运动）

(1)几秒后，四边形 $ABQP$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $ABQP$ 的周长.

(2)几秒后，四边形 $PDCQ$ 为平行四边形？并求出此时四边形 $PDCQ$ 的周长.



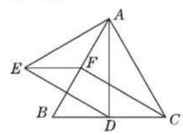
（第 7 题）

类型8 利用平行四边形的性质和判定探究条件问题

8. 如图，△ABC 为等边三角形，D，F 分别为 BC，AB 上的点，且 $CD=BF$，以 AD 为边作等边三角形 ADE.

(1)求证：△ACD≌△CBF；

(2)点 D 在线段 BC 上何处时，四边形 $CDEF$ 是平行四边形且 $\angle DEF=30°$？请说明理由.



（第 8 题）

他首先让兄弟两人到田地里画出这块田地的对角线，然后将其交点与井的位置相连并延长，从而得到了两块面积相等的田地. 众人看到，纷纷赞叹孔明先生才智过人. 趣味数学

第5课时　三角形的中位线

名师点金

运用三角形中位线定理证明线段相等或计算线段长度的方法

当题目中有中点时，特别是有两个中点时，如果中点都在一个三角形中，直接用三角形中位线定理，如果不在一个三角形中，就需要作辅助线取某边的中点，构造三角形的中位线，然后利用三角形中位线定理及相关的知识解决问题.

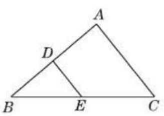
Ⅰ 夯实基础·逐点练

(答案见153页)

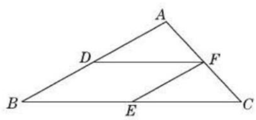
知识点1 三角形中位线定理

1.【2019·盐城】如图，点 D,E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BA,BC 的中点，$AC=3$，则 DE 的长为(　　)

A. 2　　B. $\frac{4}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$



(第1题)



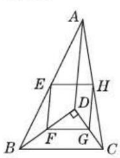
(第2题)

2.【中考·梧州】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$AC=2$，D,E,F 分别为 AB,BC,AC 的中点，连接 DF，FE，则四边形 $DBEF$ 的周长是(　　)

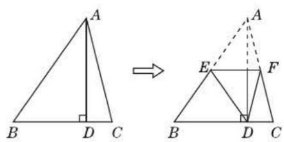
A. 5　　B. 7　　C. 9　　D. 11

3.【2019·铜仁】如图，D 是 $\triangle ABC$ 内一点，$BD\perp CD$，$AD=7$，$BD=4$，$CD=3$，E,F,G,H 分别是 AB,BD,CD,AC 的中点，则四边形 $EFGH$ 的周长为(　　)

A. 12　　B. 14　　C. 24　　D. 21



(第3题)



(第4题)

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=12$，$AC=10$，$BC=9$，AD 是 BC 边上的高. 将 $\triangle ABC$ 按如图所示的方式折叠，使点 A 与点 D 重合，折痕为 EF，则 $\triangle DEF$ 的周长为(　　)

A. 9.5　　B. 10　　C. 11　　D. 15.5

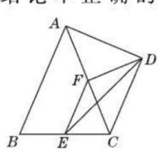
5.【中考·营口】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，E,F 分别是 BC,AC 的中点，以 AC 为斜边作 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$，若 $\angle CAD=\angle CAB=45°$，则下列结论不正确的是(　　)

A. $\angle ECD=112.5°$

B. DE 平分 $\angle FDC$

C. $\angle DEC=30°$

D. $AB=\sqrt{2}CD$



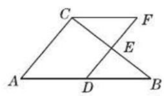
(第5题)

知识点2 三角形中位线在四边形中的应用

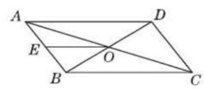
6.【2019·河池】如图，在 $\triangle ABC$ 中，D,E 分别是 AB，BC 的中点，点 F 在 DE 延长线上，添加一个条件使四边形 $ADFC$ 为平行四边形，则这个条件是(　　)

A. $\angle B=\angle F$　　B. $\angle B=\angle BCF$

C. $AC=CF$　　D. $AD=CF$



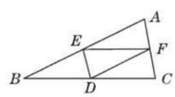
(第6题)



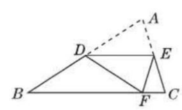
(第7题)

7.【2019·达州】如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O，点 E 是 AB 的中点，$\triangle BEO$ 的周长是8，则 $\triangle BCD$ 的周长为________.

8.【2018·济宁】如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 E,F 分别是边 AB,AC 的中点，点 D 在 BC 边上，连接 DE,DF,EF，请你添加一个条件______________，使 $\triangle BED$ 与 $\triangle FDE$ 全等.



(第8题)



(第9题)

易错点 缺乏由折叠转化为中位线的手段，导致判断错误

9. 如图，在 $\triangle ABC$(纸片)中，$AB=BC>AC$，点 D 是 AB 边的中点，点 E 在边 AC 上，将纸片沿 DE 折叠，使点 A 落在 BC 边上的点 F 处. 则下列结论成立的个数有(　　)

①$\triangle BDF$ 是等腰直角三角形；②$\angle DFE=\angle CFE$；

③DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线；④$BF+CE=DF+DE$.

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

趣味数学　有个孩子，小时候父亲叫他画静物写生，对象是插满秋菊的花瓶. 孩子很快就交上作业. 在孩子的笔下，花瓶是梯形，菊花成了大大小小的圆圈，叶子则是奇怪的三角形.（待续）

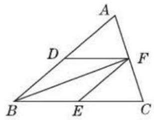
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见153页)

考查角度 1 利用三角形的中位线求线段的长

10.【2019·湖州】如图，已知在$\triangle ABC$中，D,E,F分别是AB,BC,AC的中点，连接DF,EF,BF.

(1)求证：四边形$BEFD$是平行四边形；

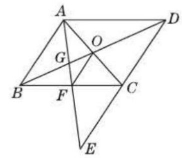
(2)若$\angle AFB=90°$，$AB=6$，求四边形$BEFD$的周长.



(第10题)

考查角度 2 利用三角形的中位线巧证线段间的数量关系

11. 如图，E为▱$ABCD$中DC边的延长线上一点，且$CE=DC$，连接AE，分别交BC,BD于点F,G，连接AC交BD于O，连接OF，判断AB与OF的位置关系和数量关系，并证明你的结论.

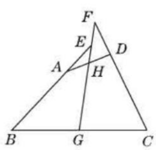


(第11题)

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见153页)

拔尖角度 1 利用三角形中位线巧证角相等（构造中位线法）

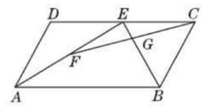
12. 如图，四边形$ABCD$中，$AB=CD$，G,H分别是BC,AD的中点，BA,CD的延长线分别交GH的延长线于点E,F. 求证：$\angle AEH=\angle F$.



(第12题)

拔尖角度 2 利用三角形中位线巧证线段相等（构造平行四边形法）

13. 已知：如图，在▱$ABCD$中，E是CD的中点，F是AE的中点，FC与BE交于G. 求证：$GF=GC$.



(第13题)

更多提分招数详见《极速提分法》第9页.

然而父亲并没有向儿子发火，他告诉儿子什么是梯形，什么是三角形……并从此开始教他几何和代数. 这个孩子长大后成了著名的数学家、物理学家，他就是麦克斯韦.

趣味数学

阶段核心方法专训

判定平行四边形的五种常用方法

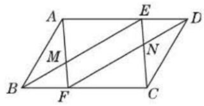
(答案见153页)

名师点金

判定平行四边形的方法通常有五种，即定义和四种判定定理，选择判定方法时，一定要结合题目的条件，选择恰当的方法，从而简化解题过程.

方法1 利用两组对边分别平行判定平行四边形

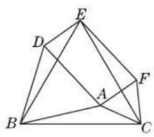
1. 如图，在▱$ABCD$中，E，F分别为AD，BC上的点，且$BF=DE$，连接AF，CE，BE，DF，AF与BE相交于M点，DF与CE相交于N点. 求证：四边形$FMEN$为平行四边形.



(第1题)

方法2 利用两组对边分别相等判定平行四边形

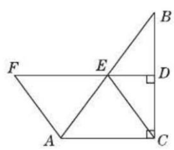
2. 如图，已知△ABD，△BCE，△ACF都是等边三角形. 求证：四边形$ADEF$是平行四边形.



(第2题)

方法3 利用一组对边平行且相等判定平行四边形

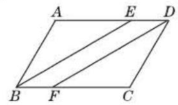
3. 如图，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，点E为AB上一点，连接CE，过点E作$ED\perp BC$于点D，在DE的延长线上取一点F，使$AF=CE$. 求证：四边形$ACEF$是平行四边形.



(第3题)

方法4 利用两组对角分别相等判定平行四边形

4. 如图，在▱$ABCD$中，BE平分$\angle ABC$，交AD于点E，DF平分$\angle ADC$，交BC于点F，那么四边形$BFDE$是平行四边形吗？请说明理由.



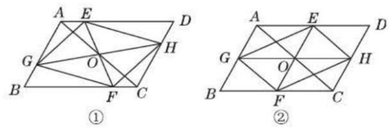
(第4题)

方法5 利用对角线互相平分判定平行四边形

5. 【中考·哈尔滨】如图①，▱$ABCD$中，点O是对角线AC的中点，EF过点O，与AD，BC分别相交于点E，F，GH过点O，与AB，CD分别相交于点G，H，连接EG，FG，FH，EH.

(1)求证：四边形$EGFH$是平行四边形；

(2)如图②，若$EF/\!/AB$，$GH/\!/BC$，在不添加任何辅助线的情况下，请直接写出图②中与四边形$AGHD$面积相等的所有平行四边形.(四边形$AGHD$除外)



(第5题)

趣味数学　潘洛斯三角由三个截面为正方形的长方体所构成，三个长方体组合成为一个三角形，但两长方体之间的夹角似乎又是直角.

18.2 特殊的平行四边形

第1课时 矩形及其性质

名师点金

1. 矩形是特殊的平行四边形，具有平行四边形的所有性质，它的特殊性就是四个角都是直角和对角线相等.
2. 矩形的两条对角线将矩形分为两对全等的等腰三角形. 在解题的时候常用到等腰三角形的性质.
3. 矩形既是中心对称图形又是轴对称图形，有两条对称轴.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

(答案见154页)

知识点1 矩形的定义

1. 下列说法不正确的是( )

A. 矩形是平行四边形

B. 矩形不一定是平行四边形

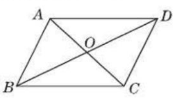
C. 有一个角是直角的平行四边形是矩形

D. 平行四边形具有的性质矩形都具有

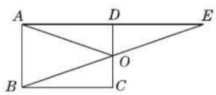
2. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，要使它变为矩形，需要添加的条件是( )

A. $AB=CD$　　B. $AD=BC$

C. $\angle AOB=45°$　　D. $\angle ABC=90°$



(第2题)



(第3题)

知识点2 矩形的边角性质

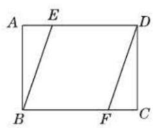
3. 如图，点 E 是矩形 $ABCD$ 的边 AD 延长线上的一点，且 $DE=AD$，连接 BE 交 CD 于点 O，连接 AO，下列结论中不正确的是( )

A. $\triangle AOB\cong\triangle BOC$　　B. $\triangle BOC\cong\triangle EOD$

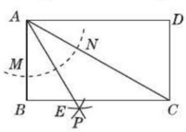
C. $\triangle AOD\cong\triangle EOD$　　D. $\triangle AOD\cong\triangle BOC$

4. 【2018·兰州】如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，$EB /\!/ DF$ 且 BE 与 DF 之间的距离为3，则 AE 的长是( )

A. $\sqrt{7}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{7}{8}$　　D. $\frac{5}{8}$



(第4题)



(第5题)

5. 【2019·兰州】如图，矩形 $ABCD$ 中，$\angle BAC=60°$，以点 A 为圆心，以任意长为半径作弧分别交 AB，AC 于 M，N 两点，再分别以点 M，N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧交于点 P，作射线 AP 交 BC 于点 E，若 $BE=1$，则矩形 $ABCD$ 的面积等于________.

知识点3 矩形的对角线性质

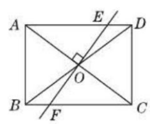
6. 【2019·十堰】矩形具有而平行四边形不一定具有的性质是( )

A. 对边相等　　B. 对角相等

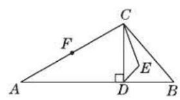
C. 对角线相等　　D. 对角线互相平分

7. 【2019·眉山】如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，过对角线交点 O 作 $EF\perp AC$ 交 AD 于点 E. 交 BC 于点 F，则 DE 的长是( )

A. 1　　B. $\frac{7}{4}$　　C. 2　　D. $\frac{12}{5}$



(第7题)



(第8题)

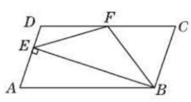
知识点4 直角三角形斜边上中线的性质

8. 【2019·黄石】如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=50°$，$CD\perp AB$ 于点 D，$\angle BCD$ 和 $\angle BDC$ 的平分线相交于点 E，F 为边 AC 的中点，$CD=CF$，则 $\angle ACD+\angle CED=$( )

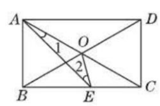
A. 125°　　B. 145°　　C. 175°　　D. 190°

9. 【2018·眉山】如图，在▱$ABCD$ 中，$CD=2AD$，$BE\perp AD$ 于点 E，F 为 DC 的中点，连接 EF，BF，下列结论：①$\angle ABC=2\angle ABF$；②$EF=BF$；③$S_{四边形DEBC}=2S_{\triangle EFB}$；④$\angle CFE=3\angle DEF$，其中正确结论的个数共有( )

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个



(第9题)



(第10题)

易错点 不能灵活运用矩形的性质进行计算

10. 如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，点 E 是 BC 上一点，且 $AB=BE$，$\angle 1=15°$，则 $\angle 2=$________.

谜语：对门一个样，邻居话短长. 角落都一样，邻居与邻居，难说不一样.（打一几何图形）谜底：矩形

趣味数学

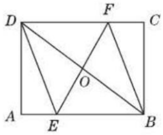
Ⅱ 整合方法·提升练 (答案见154页)

考查角度1 利用矩形的边角性质求线段长

11.【2019·鄂州】如图,矩形 $ABCD$ 中,$AB=8$,$AD=6$,点 O 是对角线 BD 的中点,过点 O 的直线分别交 AB,CD 边于点 E,F.

(1)求证:四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

(2)当 $DE=DF$ 时,求 EF 的长.

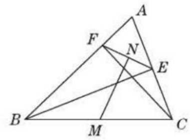


(第11题)

考查角度2 利用直角三角形斜边上中线证两线段的垂直关系

12. 如图,在锐角三角形 ABC 中,BE,CF 分别是高,点 M,N 分别是 BC,EF 的中点.

求证:$MN\perp EF$.



(第12题)

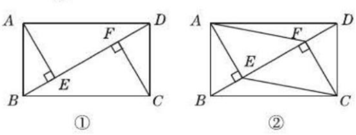
Ⅲ 探究培优·拓展练 (答案见154页)

拔尖角度1 利用矩形的边角性质证面积的数量关系

13.【2019·哈尔滨】已知:在矩形 $ABCD$ 中,BD 是对角线,$AE\perp BD$ 于点 E,$CF\perp BD$ 于点 F.

(1)如图①,求证 $AE=CF$.

(2)如图②,当 $\angle ADB=30°$ 时,连接 AF,CE,在不添加任何辅助线的情况下,请直接写出图②中四个三角形,使写出的每个三角形的面积都等于矩形 $ABCD$ 的 $\frac{1}{8}$.



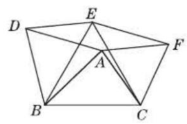
(第13题)

考查角度2 利用矩形的定义探究矩形的条件

14. 如图,以△ABC 的三边为边在 BC 的同侧分别作三个等边三角形,即△ABD,△BCE,△ACF,连接 DE,EF.请回答下列问题:

(1)四边形 $ADEF$ 是什么四边形?并说明理由.

(2)当△ABC 满足什么条件时,四边形 $ADEF$ 是矩形?



(第14题)

趣味数学　谜语:虽说是方块,却长四个角,四角一样大,对面一样长,邻边等不等,不必计长短.(打一几何图形)谜底:矩形

第2课时　矩形的判定

名师点金

矩形的判定方法有三种

第一种是有三个角是直角的四边形为矩形；

第二种是定义，有一个角是直角的平行四边形是矩形；

第三种是对角线相等的平行四边形是矩形.

后面两种判定方法一定要满足两个条件，一个是这个四边形是平行四边形，这个条件不能漏掉，另一个是一个角为直角或对角线相等.

注意：对角线相等的四边形不一定是矩形，但是对角线互相平分且相等的四边形是矩形.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

(答案见154页)

知识点① 由对角线的关系判定矩形

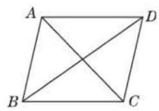
1. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，要使它变为矩形，需要添加的条件是(　　)

A. $AB=CD$

B. $AC=BC$

C. $AB=BC$

D. $AC=BD$



(第1题)

2. 下列关于矩形的说法中正确的是(　　)

A. 对角线相等的四边形是矩形

B. 矩形的对角线相等且互相平分

C. 对角线互相平分的四边形是矩形

D. 矩形的对角线互相垂直且平分

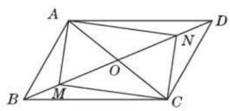
3. 【2019·临沂】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，M，N 是 BD 上两点，$BM=DN$，连接 AM，MC，CN，NA，添加一个条件，使四边形 $AMCN$ 是矩形，这个条件是(　　)

A. $OM=\dfrac{1}{2}AC$

B. $MB=MO$

C. $BD\perp AC$

D. $\angle AMB=\angle CND$



(第3题)

知识点② 由直角的个数判定矩形

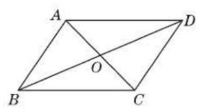
4. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，下列结论中不一定正确的是(　　)

A. $AB=CD$

B. $AC=BD$

C. 当 $\angle ABC=90°$ 时，它是矩形

D. AC 与 BD 互相平分



(第4题)

5. 【2018·上海】已知平行四边形 $ABCD$，下列条件中，不能判定这个平行四边形为矩形的是(　　)

A. $\angle A=\angle B$　　B. $\angle A=\angle C$

C. $AC=BD$　　D. $AB\perp BC$

6. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，下列各组条件中，不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的为(　　)

A. $AB=CD$，$AD=BC$，$AC=BD$

B. $AO=CO$，$BO=DO$，$\angle BAD=90°$

C. $AO=CO$，$BO=DO$，$\angle AOB=90°$

D. $\angle BAD=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA$

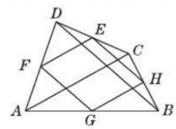
7. 如图，顺次连接四边形 $ABCD$ 各边中点得到四边形 $EFGH$，要使四边形 $EFGH$ 为矩形，应添加的条件是(　　)

A. $AB\parallel DC$

B. $AC=BD$

C. $AC\perp BD$

D. $AB=DC$



(第7题)

8. 在▱$ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，当▱$ABCD$ 的面积最大时，下列结论正确的是(　　)

①$AC=5$；

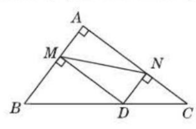
②$\angle A+\angle C=180°$；

③$AC\perp BD$；

④$AC=BD$.

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①③④

9. 【2019·安顺】如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，且 $BA=3$，$AC=4$，点 D 是斜边 BC 上的一个动点，过点 D 分别作 $DM\perp AB$ 于点 M，$DN\perp AC$ 于点 N，连接 MN，则线段 MN 的最小值为________.



(第9题)

易错点！ 对矩形的判定方法理解错误导致出错

10. 在一组对边平行的四边形中，添加下列条件中的哪一个，可判定这个四边形是矩形(　　)

A. 另一组对边相等，对角线相等

B. 另一组对边相等，对角线互相垂直

C. 另一组对边平行，对角线相等

D. 另一组对边平行，对角线互相垂直

人生就像一个长方形，人生的意义就是长和宽的乘积．生命是它的长，自我的奉献和价值是它的宽；生命的长我们不能改变，但人生的宽取决于我们自己．

趣味数学

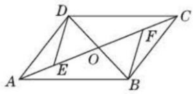
Ⅱ 整合方法·提升练 (答案见155页)

考查角度① 利用对角线的关系判定矩形

11.【2018·新疆】如图,▱$ABCD$的对角线AC,BD相交于点O,E,F是AC上的两点,并且$AE=CF$,连接DE,BF.

(1)求证:$\triangle DOE\cong\triangle BOF$;

(2)若$BD=EF$,连接EB,DF,判断四边形$EBFD$的形状,并说明理由.



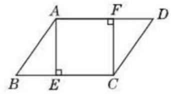
(第11题)

考查角度② 利用直角的个数判定矩形

12.【2019·怀化】已知:如图,在▱$ABCD$中,$AE\perp BC$,$CF\perp AD$,E,F分别为垂足.

(1)求证:$\triangle ABE\cong\triangle CDF$;

(2)求证:四边形$AECF$是矩形.

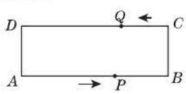


(第12题)

Ⅲ 探究培优·拓展练 (答案见155页)

拔尖角度① 利用矩形的性质和判定探究运动时间

13.如图,在矩形$ABCD$中,$AB=24$ cm,$BC=8$ cm,点P从A开始沿折线$A\to B\to C\to D$以4 cm/s的速度移动,点Q从C开始沿CD边以2 cm/s的速度移动,如果点P,Q分别从A,C同时出发,当其中一点到达D时,另一点也随之停止运动,设运动时间为t s.当t为何值时,四边形$QPBC$为矩形?



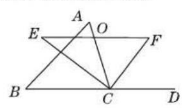
(第13题)

拔尖角度② 利用矩形的判定探究动点的位置(逆向思维法)

14.【中考·达州】如图,在$\triangle ABC$中,点O是边AC上一个动点,过点O作直线$EF\parallel BC$分别交$\angle ACB$,外角$\angle ACD$的平分线于点E,F.

(1)若$CE=8$,$CF=6$,求OC的长;

(2)连接AE,AF.问:当点O在边AC上运动到什么位置时,四边形$AECF$是矩形?并说明理由.



(第14题)

第3课时　菱形及其性质

名师点金

1. **菱形的性质**：菱形具有平行四边形的一切性质.菱形的性质还有：
   (1)菱形的每一条对角线平分一组对角.
   (2)菱形的四条边相等.
   (3)菱形是轴对称图形.
   (4)菱形的对角线互相垂直.
2. 利用菱形的对角线计算线段的长度时，通常要借助勾股定理进行求解.
3. 菱形面积等于两对角线乘积的一半.

注意：菱形的对角线互相垂直平分，但不一定相等.

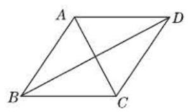
Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见155页)

知识点1 菱形的定义

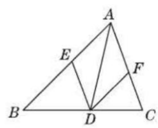
1. 如图，若要使▱$ABCD$成为菱形，则需要添加的条件是(　　)

A. $AB=CD$　　B. $AD=AC$

C. $AB=BC$　　D. $AC=BD$



(第1题)



(第2题)

2. 如图，在△ABC中，$AB\neq AC$，D是BC上一点，$DE/\!/AC$交AB于点E，$DF/\!/AB$交AC于点F，要使四边形$AEDF$是菱形，只需添加的条件是(　　)

A. $AD\perp BC$　　B. $\angle BAD=\angle CAD$

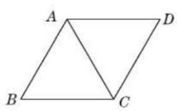
C. $BD=DC$　　D. $AD=BD$

知识点2 菱形边的性质

3. 【2019·贵阳】如图，菱形$ABCD$的周长是4 cm，$\angle ABC=60°$，那么这个菱形的对角线AC的长是(　　)

A. 1 cm　　B. 2 cm

C. 3 cm　　D. 4 cm



(第3题)

知识点3 菱形对角线的性质

4. 【2019·无锡】下列结论中，矩形具有而菱形不一定具有的性质是(　　)

A. 内角和为360°

B. 对角线互相平分

C. 对角线相等

D. 对角线互相垂直

5. 【2019·泸州】一个菱形的边长为6，面积为28，则该菱形的两条对角线的长度之和为(　　)

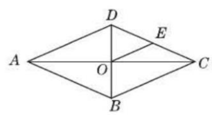
A. 8　　B. 12

C. 16　　D. 32

6. 【2019·赤峰】如图，菱形$ABCD$的周长为20，对角线AC，BD相交于点O，E是CD的中点，则OE的长是(　　)

A. 2.5　　B. 3

C. 4　　D. 5



(第6题)

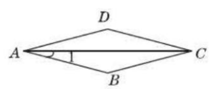
知识点4 菱形的对称性

7. 菱形是轴对称图形，其对称轴的条数为(　　)

A. 2条　　B. 4条

C. 6条　　D. 8条

8. 【2019·河北】如图，菱形$ABCD$中，$\angle D=150°$，则$\angle 1=$(　　)



(第8题)

A. 30°　　B. 25°

C. 20°　　D. 15°

易错点！ 考虑问题不全导致漏解

9. 【中考·杭州】在菱形$ABCD$中，$\angle A=30°$.在同一平面内，以对角线BD为底边作顶角为120°的等腰三角形BDE，则$\angle EBC$的度数为________.

欧氏几何、罗氏几何、黎曼几何是三种各有区别的几何，这三种几何各自所有的命题都构成了一个严密的公理体系，各公理之间满足和谐性、完备性和独立性，都是正确的.（待续） 趣味数学

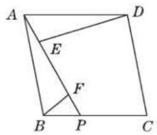
Ⅱ 整合方法·提升练
(答案见155页)

考查角度1 利用菱形边的性质证边的关系

10.【2019·聊城】如图,在菱形 $ABCD$ 中,点 P 是 BC 边上一点,连接 AP,点 E,F 是 AP 上的两点,连接 DE,BF,使得 $\angle AED=\angle ABC$, $\angle ABF=\angle BPF$.

求证:(1) $\triangle ABF\cong\triangle DAE$.

(2) $DE=BF+EF$.



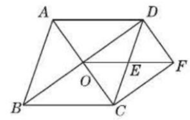
(第10题)

考查角度2 利用菱形对角线的性质证矩形

11.【2019·新疆】如图,在菱形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,E 是 CD 的中点,连接 OE.过点 C 作 $CF\parallel BD$ 交 OE 的延长线于点 F,连接 DF.求证:

(1) $\triangle ODE\cong\triangle FCE$;

(2)四边形 $OCFD$ 是矩形.



(第11题)

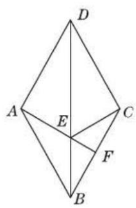
Ⅲ 探究培优·拓展练
(答案见155页)

拔尖角度1 利用菱形的性质探究点的位置

12.已知:如图,在菱形 $ABCD$ 中,F 是 BC 上任意一点,连接 AF 交对角线 BD 于点 E,连接 EC.

(1)求证: $AE=EC$;

(2)当 $\angle ABC=60°$, $\angle CEF=60°$ 时,点 F 在线段 BC 上的什么位置?并说明理由.



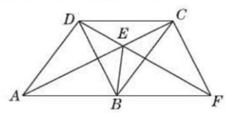
(第12题)

拔尖角度2 利用菱形的性质解决有关角的问题

13.如图,四边形 $ABCD$ 是菱形,点 E 为对角线 AC 上一点,连接 DE 并延长交 AB 的延长线于点 F.连接 CF,BD,BE.

(1)求证: $\angle AFD=\angle EBC$;

(2)若 E 为 $\triangle BCD$ 的重心,求 $\angle ACF$ 的度数.



(第13题)

第4课时 菱形的判定

名师点金

判定一个四边形是菱形的方法

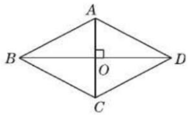
1. 若已知邻边相等，要证明一个四边形是菱形，有两种方法：
(1)证明四条边都相等；(2)先证明该四边形是平行四边形，再利用有一组邻边相等的平行四边形是菱形证明.
2. 若条件中出现两条对角线，要证明一个四边形是菱形，可考虑利用：
(1)对角线互相垂直且平分的四边形是菱形；(2)对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

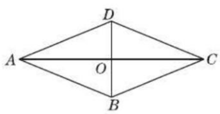
Ⅰ 夯实基础·逐点练

(答案见155页)

知识点1 由对角线的位置关系判定菱形

1. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直，且 $OB=OD$，请你添加一个适当的条件________，使四边形 $ABCD$ 成为菱形.（只需添加一个即可）


(第1题)


(第2题)

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，AC，BD 交于点 O，$AB=13$，$AC=24$，$DB=10$，则四边形 $ABCD$ 是(　　)

A. 一般的平行四边形　　B. 长方形

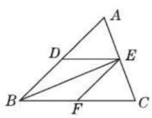
C. 菱形　　D. 形状不能确定

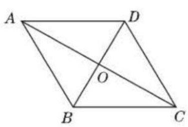
知识点2 由边的关系判定菱形

3. 如图，在△ABC 中，点 D，E，F 分别是边 AB，AC，BC 的中点，要判定四边形 $DBFE$ 是菱形，下列所添加条件不正确的是(　　)

A. $AB=AC$　　B. $AB=BC$

C. BE 平分∠ABC　　D. $EF=CF$


(第3题)


(第4题)

4.【2019·宁夏】如图，四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O，且互相平分，添加下列条件，仍不能判定四边形 $ABCD$ 为菱形的是(　　)

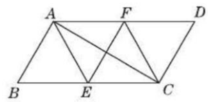
A. $AC\perp BD$　　B. $AB=AD$

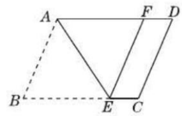
C. $AC=BD$　　D. $\angle ABD=\angle CBD$

5. 如图，在▱$ABCD$ 中，AE，CF 分别是∠BAD 和∠BCD 的平分线，添加一个条件，仍无法判定四边形 $AECF$ 为菱形的是(　　)

A. $AE=AF$　　B. $EF\perp AC$

C. $\angle B=60°$　　D. AC 是∠EAF 的平分线


(第5题)

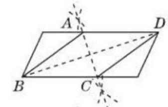

(第6题)

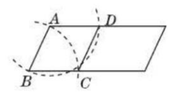
6.【中考·遵义】如图，将▱$ABCD$ 沿 AE 翻折，使点 B 恰好落在 AD 上的点 F 处，则下列结论不一定成立的是(　　)

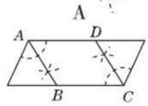
A. $AF=EF$　　B. $AB=EF$

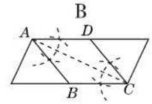
C. $AE=AF$　　D. $AF=BE$

7.【2018·舟山】用尺规在一个平行四边形内作菱形 $ABCD$，下列作法中错误的是(　　)


A


B

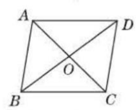

C


D

8.【2019·永州】如图，四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，且点 O 是 BD 的中点，若 $AB=AD=5$，$BD=8$，$\angle ABD=\angle CDB$，则四边形 $ABCD$ 的面积为(　　)

A. 40　　B. 24

C. 20　　D. 15


(第8题)

易错点 臆造菱形的判定方法导致出错

9. 下列命题：

①四边都相等的四边形是菱形；

②两组邻边分别相等的四边形是菱形；

③对角线互相垂直的平行四边形是菱形；

④对角线相等的四边形是菱形；

⑤一条对角线平分一组对角的平行四边形是菱形.

其中正确的是__________(填序号).

脑筋急转弯：两个相邻的菱形移动两条线怎样变成一个菱形？（待续）

趣味数学

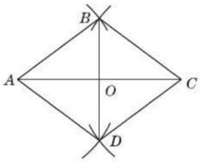
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见156页)

考查角度 1 利用平行四边形边的关系判定菱形

10.【2019·兰州】如图，$AC=8$，分别以 A，C 为圆心，以长度5为半径作弧，两条弧分别相交于点 B 和 D，依次连接 A，B，C，D，连接 BD 交 AC 于点 O.

(1)判断四边形 $ABCD$ 的形状并说明理由；

(2)求 BD 的长.



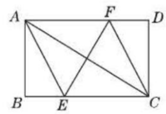
(第10题)

考查角度 2 利用平行四边形对角线的位置关系判定菱形

11.【2019·贺州】如图，在矩形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，AD 边上的点，且 $AE=CF$.

(1)求证：$\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

(2)当 $AC\perp EF$ 时，四边形 $AECF$ 是菱形吗？请说明理由.



(第11题)

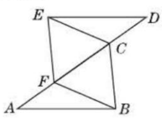
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见156页)

拔尖角度 1 利用菱形的判定和性质探究菱形的条件(逆向思维法)

12.【2018·呼和浩特】如图，已知 A，F，C，D 四点在同一条直线上，$AF=CD$，$AB\parallel DE$，且 $AB=DE$.

(1)求证：$\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

(2)若 $EF=3$，$DE=4$，$\angle DEF=90^\circ$，请直接写出使四边形 $EFBC$ 为菱形时 AF 的长度.



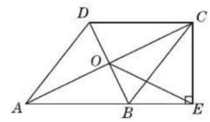
(第12题)

拔尖角度 2 利用菱形的判定和性质求边长

13.【2018·北京】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$AB=AD$，对角线 AC，BD 交于点 O，AC 平分 $\angle BAD$，过点 C 作 $CE\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 E，连接 OE.

(1)求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)若 $AB=\sqrt{5}$，$BD=2$，求 OE 的长.



(第13题)

趣味数学　两个菱形放一起，形成◇◇，移动左边的◇的下半部分的两条线，移动成“一”和“个”的字样，然后组合到一起就成了“一个◇”的图案了.

第5课时　矩形的性质与判定的六种应用

名师点金

矩形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质，同时还具有一些独特的性质. 它的性质可归纳为三个方面：一是**从边看**，矩形的对边平行且相等. 二是**从角看**，矩形的四个角都是直角. 三是**从对角线看**，矩形的对角线互相平分且相等.

判定一个四边形是矩形可从两个角度考虑：一是证明它有三个角为直角；二是先证明它为平行四边形，再证明它有一个角为直角或两条对角线相等.

整合方法 · 分类练

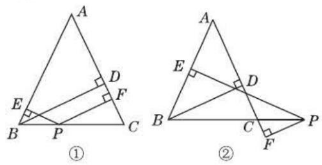
☞(答案见156页)

应用1　利用矩形的判定和性质解和差问题

1. 如图①，在△*ABC* 中，*AB* = *AC*，点 *P* 是 *BC* 上任意一点（不与 *B*，*C* 重合），*PE*⊥*AB*，*PF*⊥*AC*，*BD*⊥*AC*，垂足分别为 *E*，*F*，*D*.

(1)求证：*BD* = *PE* + *PF*.

(2)当点 *P* 在 *BC* 的延长线上时，其他条件不变. 如图②，*BD*，*PE*，*PF* 之间的上述关系还成立吗？若不成立，请说明理由.



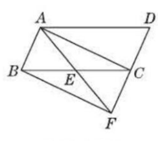
（第1题）

应用2　利用矩形的判定和性质解面积问题

2. 如图，已知点 *E* 是▱*ABCD* 中 *BC* 边的中点，连接 *AE* 并延长交 *DC* 的延长线于点 *F*.

(1)连接 *AC*，*BF*，若∠*AEC* = 2∠*ABC*，求证：四边形 *ABFC* 为矩形；

(2)在(1)的条件下，若△*AFD* 是等边三角形，且边长为4，求四边形 *ABFC* 的面积.



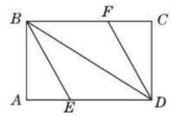
（第2题）

应用3　利用矩形的性质判定菱形

3.【中考·盐城】如图，在矩形 *ABCD* 中，∠*ABD*，∠*CDB* 的平分线 *BE*，*DF* 分别交边 *AD*，*BC* 于点 *E*，*F*.

(1)求证：四边形 *BEDF* 是平行四边形.

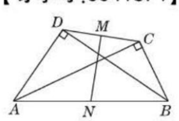
(2)当∠*ABE* 为多少度时，四边形 *BEDF* 是菱形？请说明理由.



（第3题）

应用4　利用直角三角形斜边上中线性质判断直线位置关系

4. 如图，已知∠*ACB* = ∠*ADB* = 90°，*N*，*M* 分别是 *AB*，*CD* 的中点，判断 *MN* 与 *CD* 的位置关系，并说明理由.　　【导学号:9941874】



（第4题）

山东省嘉祥县一座古建筑石室造像中，有两位古代神话中我们远古祖先的形象，一位是伏羲，一位是女娲. 伏羲手中物体叫规，与圆规相似；女娲手中物体叫矩，呈直角拐尺形.

趣味数学

应用5　利用矩形的性质探究与菱形相关的折叠问题

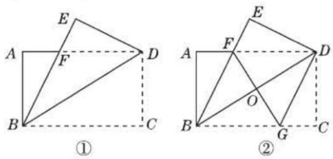
5.【中考·兰州】如图①,将一张矩形纸片 $ABCD$ 沿着对角线 BD 向上折叠,顶点 C 落到点 E 处,BE 交 AD 于点 F.

(1)求证:$\triangle BDF$ 是等腰三角形;

(2)如图②,过点 D 作 $DG // BE$,交 BC 于点 G,连接 FG 交 BD 于点 O.

①判断四边形 $BFDG$ 的形状,并说明理由;

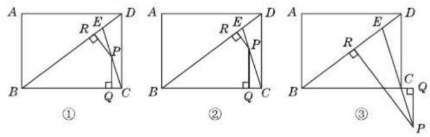
②若 $AB=6$,$AD=8$,求 FG 的长.



(第5题)

应用6　利用矩形的性质探究动点问题

6. 已知点 E 是矩形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的一点,且 $BE=BC$,$AB=3$,$BC=4$,点 P 是 EC 上的一动点,且 $PQ\perp BC$ 于点 Q,$PR\perp BD$ 于点 R.



(第6题)

(1)如图①,当点 P 为线段 EC 的中点时,

求证:$PR+PQ=\dfrac{12}{5}$.

(2)如图②,当点 P 为线段 EC 上任意一点(不与点 E、点 C 重合)时,其他条件不变,则(1)中的结论是否仍成立?若成立,请给予证明;若不成立,请说明理由.

(3)如图③,当点 P 为线段 EC 的延长线上任意一点时,其他条件不变,则 PR 与 PQ 之间又具有怎样的数量关系?请直接写出你的猜想.

第6课时　菱形的性质与判定的四种应用

名师点金

菱形具有一般平行四边形的所有性质，同时又具有一些特性，可以归纳为三个方面：一是**从边看**，对边平行，四边相等. 二是**从角看**，对角相等，邻角互补. 三是**从对角线看**，对角线互相垂直平分，并且每一条对角线平分一组对角.

判定一个四边形是菱形，可先证明这个四边形是平行四边形，再证明一组邻边相等或对角线互相垂直，也可直接证明四边相等.

整合方法 · 分类练

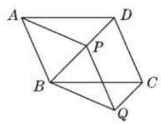
☞（答案见157页）

应用1 利用菱形的判定判断图形的形状

1.【2018 · 毕节】如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，P 是对角线 BD 上的一点，过点 C 作 $CQ \parallel DB$，且 $CQ = DP$，连接 AP，BQ，PQ.

(1)求证：$\triangle APD \cong \triangle BQC$；

(2)若 $\angle ABP + \angle BQC = 180°$，求证：四边形 $ABQP$ 为菱形.



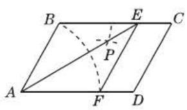
（第1题）

应用2 利用菱形的性质与判定求角的度数

2.【2017 · 滨州】如图，在▱$ABCD$ 中，以点 A 为圆心，AB 长为半径画弧交 AD 于点 F，再分别以点 B，F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BF$ 的相同长为半径画弧，两弧交于点 P，连接 AP 并延长交 BC 于点 E，连接 EF，则所得四边形 $ABEF$ 是菱形.

(1)根据以上尺规作图的过程，求证：四边形 $ABEF$ 是菱形；

(2)若菱形 $ABEF$ 的周长为16，$AE = 4\sqrt{3}$，求 $\angle C$ 的大小.



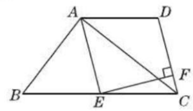
（第2题）

应用3 利用菱形的性质与判定求线段长

3.【2018 · 乌鲁木齐】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC = 90°$，E 是 BC 的中点，$AD \parallel BC$，$AE \parallel DC$，$EF \perp CD$ 于点 F.

(1)求证：四边形 $AECD$ 是菱形；

(2)若 $AB = 6$，$BC = 10$，求 EF 的长.



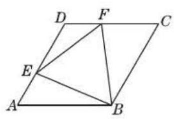
（第3题）

应用4 利用菱形的性质求最值

4. 如图，在边长为 m 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB = 60°$，E 是 AD 上不同于 A，D 两点的一动点，F 是 CD 上一动点，且 $AE + CF = m$.

(1)证明：无论 E，F 怎样移动，$\triangle BEF$ 总是等边三角形；

(2)求 $\triangle BEF$ 面积的最小值.



（第4题）

欧几里得是一位温良敦厚的教育家，也是一位治学严谨的学者，他反对在做学问时投机取巧和追求名利，反对专走捷径、急功近利的作风.（待续）

趣味数学

第7课时　正方形及其性质

名师点金

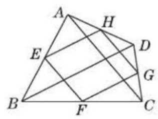
正方形同时具备平行四边形、菱形、矩形的所有性质，因此，正方形的四个角都是直角，四条边都相等，对角线互相垂直平分且相等，每一条对角线平分一组对角，正方形是轴对称图形，有四条对称轴. 这些性质为证明线段相等、垂直及角相等提供了重要的依据.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见157页)

知识点① 正方形的定义

1.【2018·临沂】如图，点 E,F,G,H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 的中点，则下列说法中正确的个数是(　　)

①若 $AC=BD$，则四边形 $EFGH$ 为矩形；②若 $AC\perp BD$，则四边形 $EFGH$ 为菱形；③若四边形 $EFGH$ 是平行四边形，则 AC 与 BD 互相平分；④若四边形 $EFGH$ 是正方形，则 AC 与 BD 互相垂直且相等.



(第1题)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

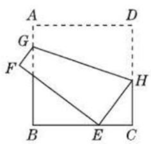
知识点② 正方形边的性质

2. 正方形具有而矩形不一定具有的性质是(　　)

A. 四个角都相等　　B. 四条边都相等

C. 对角线相等　　D. 对角线互相平分

3.【中考·毕节】如图，正方形 $ABCD$ 的边长为9，将正方形折叠，使顶点 D 落在 BC 边上的点 E 处，折痕为 GH. 若 $BE:EC=2:1$，则线段 CH 的长是(　　)

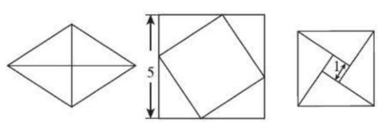


(第3题)

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

4.【2019·北京】把图①中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形，将这四个直角三角形分别拼成如图②、图③所示的正方形，则图①中菱形的面积为________.

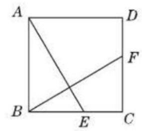


(第4题)

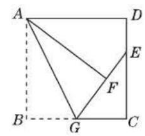
知识点③ 正方形角的性质

5.【2019·河池】如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别在 BC,CD 上，$BE=CF$，则图中与 $\angle AEB$ 相等的角的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4



(第5题)



(第6题)

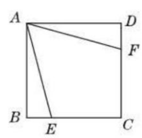
6.【2018·仙桃】如图，正方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，G 是 BC 的中点. 将 $\triangle ABG$ 沿 AG 折叠至 $\triangle AFG$ 处，延长 GF 交 DC 于点 E，则 DE 的长是(　　)

A. 1　　B. 1.5　　C. 2　　D. 2.5

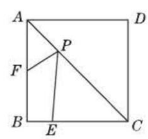
7.【2019·包头】如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=1$，点 E,F 分别在边 BC 和 CD 上，$AE=AF$，$\angle EAF=60°$，则 CF 的长是(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\frac{2}{3}$



(第7题)



(第8题)

易错点 不能将两线段和转化为一条线段而致错

8.【中考·安顺】如图，正方形$ABCD$的边长为4，E 为 BC 上的一点，$BE=1$，F 为 AB 上的一点，$AF=2$，P 为 AC 上一个动点，则 $PF+PE$ 的最小值为________.

趣味数学　尽管欧几里得简化了他的几何学，国王（托勒密王）还是不理解，希望找一条学习几何学的捷径. 欧几里得说："在几何学里，大家只能走一条路，没有专为国王铺设的大道."（待续）

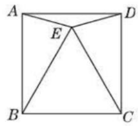
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见158页)

考查角度① 利用正方形的性质求角的度数

9.【2017·怀化】如图,四边形 $ABCD$ 是正方形,$\triangle EBC$ 是等边三角形.

(1)求证:$\triangle ABE\cong\triangle DCE$;

(2)求$\angle AED$ 的度数.



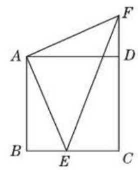
(第9题)

考查角度② 利用正方形的性质求线段的长

10.【2019·内江】如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 E 是 BC 上的一点,点 F 是 CD 延长线上的一点,且 $BE=DF$,连接 AE,AF,EF.

(1)求证:$\triangle ABE\cong\triangle ADF$;

(2)若 $AE=5$,请求出 EF 的长.



(第10题)

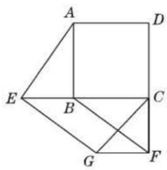
Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见158页)

命题角度① 利用正方形的性质判定平行四边形

11.【2019·天门】如图,E,F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CB,DC 延长线上的点,且 $BE=CF$,过点 E 作 $EG/\!/BF$,交正方形外角的平分线 CG 于点 G,连接 GF,求证:

(1)$AE\perp BF$;

(2)四边形 $BEGF$ 是平行四边形.



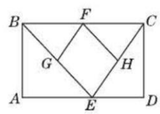
(第11题)

命题角度② 利用正方形的性质求图形的面积

12.【2018·陇南】如图,已知矩形 $ABCD$ 中,E 是 AD 边上的一个动点,点 F,G,H 分别是 BC,BE,CE 的中点.

(1)求证:$\triangle BGF\cong\triangle FHC$;

(2)设 $AD=a$,当四边形 $EGFH$ 是正方形时,求矩形 $ABCD$ 的面积.



(第12题)

这句话成为千古传诵的学习箴言.一次,他的一个学生问他,“学习几何学有什么好处?”他幽默地对仆人说:“给他三个钱币,因为他想从学习中获取实利.” 趣味数学

第8课时 正方形的判定

名师点金

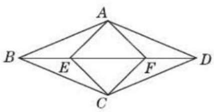
正方形的判定方法:要判定一个四边形是正方形,最常用的方法是先证明它是菱形(或矩形),再证明这个菱形(或矩形)有一个角是直角(或有一组邻边相等),其实质就是根据正方形的定义来判定.当然也可以先证四边形是平行四边形,再证有一组邻边相等且有一个角是直角,或证这个平行四边形的对角线相等并且互相垂直.

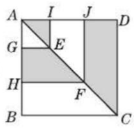
Ⅰ 夯实基础·逐点练

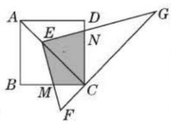
(答案见158页)

知识点1 正方形的对称性

1. 如图,菱形 $ABCD$ 的面积为 120 cm^2,对角线 $BD=24$ cm,则正方形 $AECF$ 的边长为________.


(第1题)


(第2题)


(第3题)

2. 【2018·宜昌】如图,正方形 $ABCD$ 的边长为1,点 E,F 分别是对角线 AC 上的两点,$EG\perp AB$,$EI\perp AD$,$FH\perp AB$,$FJ\perp AD$,垂足分别为 G,I,H,J,则图中阴影部分的面积等于( )

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

3. 如图,点 E 在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上,且 $EC=2AE$,Rt△FEG 的两条直角边 EF,EG 分别交 BC,DC 于点 M,N,若正方形 $ABCD$ 的边长为 a,则阴影部分即四边形 $EMCN$ 的面积为( )

A. $\frac{2}{3}a^2$　　B. $\frac{1}{4}a^2$

C. $\frac{5}{9}a^2$　　D. $\frac{4}{9}a^2$

4. 【中考·台州】小红用次数最少的对折方法验证了一条四边形丝巾的形状是正方形,她对折了( )

A. 1次　　B. 2次

C. 3次　　D. 4次

知识点2 正方形的判定

5. 【2018·常州】下列命题中,假命题是( )

A. 一组对边相等的四边形是平行四边形

B. 三个角是直角的四边形是矩形

C. 四边相等的四边形是菱形

D. 有一个角是直角的菱形是正方形

6. 【2018·湘西州】下列说法中,正确的个数有( )

①对顶角相等;

②两直线平行,同旁内角相等;

③对角线互相垂直的四边形为菱形;

④对角线互相垂直平分且相等的四边形为正方形.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

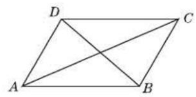
7. 【中考·日照】小明在学习了正方形之后,给同桌小文出了道题,从下列四个条件:①$AB=BC$;②$\angle ABC=90°$;③$AC=BD$;④$AC\perp BD$ 中选两个作为补充条件,使▱$ABCD$ 为正方形(如图),现有下列四种选法,你认为其中错误的是( )

A. ①②

B. ②③

C. ①③

D. ②④


(第7题)

8. 【2019·北京】在矩形 $ABCD$ 中,M,N,P,Q 分别为边 AB,BC,CD,DA 上的点(不与端点重合),对于任意矩形 $ABCD$,下面四个结论中,

①存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形;

②存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形;

③存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形;

④至少存在一个四边形 $MNPQ$ 是正方形.

所有正确结论的序号是________.

易错点 将特殊四边形的判定相混淆导致出错

9. 四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于点 O,假设有下列条件:①$AB=AD$;

②$\angle DAB=90°$;

③$AO=CO,BO=DO$;

④四边形 $ABCD$ 为矩形;

⑤四边形 $ABCD$ 为菱形;

⑥四边形 $ABCD$ 为正方形.

则下列推理不成立的是( )

A. ①④⇒⑥　　B. ①③⇒⑤

C. ①②⇒⑥　　D. ②③⇒④

趣味数学 球面三角形:把球面上的三个点用三个大圆弧连接起来,所围成的图形叫做球面三角形.球面三角是研究球面三角形的边、角关系的一门学科.

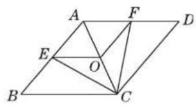
Ⅱ 整合方法 · 提升练
☞（答案见158页）

考查角度1 以菱形为基础判定正方形

10.【2017 · 青岛】如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E,O,F 分别为 AB,AC,AD 的中点，连接 CE,CF,OE,OF.

(1)求证：$\triangle BCE\cong\triangle DCF$.

(2)当 AB 与 BC 满足什么关系时，四边形 $AEOF$ 是正方形？请说明理由.



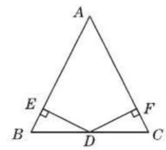
（第10题）

考查角度2 以矩形为基础判定正方形

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 BC 边的中点，过点 D 作 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为 E,F.

(1)求证：$\triangle BED\cong\triangle CFD$；

(2)若 $\angle A=90°$，求证：四边形 $DFAE$ 是正方形.



（第11题）

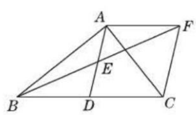
Ⅲ 探究培优 · 拓展练
☞（答案见159页）

拔尖角度1 利用特殊四边形的判定说明四边形的形状

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，AD 是中线，E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF/\!/BC$ 交 BE 的延长线于点 F，连接 CF.

(1)求证：$AD=AF$；

(2)如果 $AB=AC$，试判断四边形 $ADCF$ 的形状，并证明你的结论.



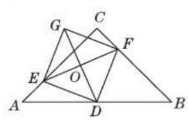
（第12题）

拔尖角度2 利用正方形的判定探究面积的最值问题

13.【2017 · 玉林】如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，D 是 AB 的中点，E,F 分别是 AC,BC 上的点（点 E 不与端点 A,C 重合），且 $AE=CF$，连接 EF 并取 EF 的中点 O，连接 DO 并延长至点 G，使 $GO=DO$，连接 DE,DF,GE,GF.

(1)求证：四边形 $EDFG$ 是正方形；

(2)当点 E 在什么位置时，四边形 $EDFG$ 的面积最小？并求四边形 $EDFG$ 面积的最小值.



（第13题）

更多提分招数详见《极速提分法》第15页.

瑞士数学家雅谷 · 伯努利生前对螺线（被誉为生命之线）有研究，他死之后，墓碑上就刻着一条对数螺线.（待续）

趣味数学

第9课时　正方形的性质与判定的综合应用

名师点金

正方形既是菱形，又是矩形，它具有菱形、矩形的所有性质，判定一个四边形是正方形，只需保证它既是菱形又是矩形即可.

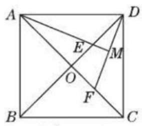
整合方法·分类练

(答案见159页)

类型1　利用正方形的性质证明线段的位置关系

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，E，F 分别在 OD，OC 上，且 $DE=CF$，连接 DF，AE，并延长 AE 交 DF 于点 M.

求证：$AM\perp DF$.



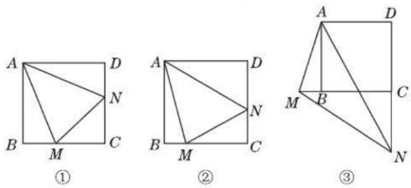
(第1题)

类型2　利用正方形的性质解决线段和差倍分问题

2. 在正方形 $ABCD$ 中，$\angle MAN=45°$，$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB，DC（或它们的延长线）于点 M，N.

(1) 如图①，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时，易证：$BM+DN=MN$. 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM\neq DN$ 时，如图②，请问图①中的结论是否还成立？如果成立，请给予证明；如果不成立，请说明理由.

(2) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图③所示的位置时，线段 BM，DN 和 MN 之间有怎样的数量关系？请写出你的猜想，并说明理由.



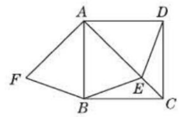
(第2题)

类型3　利用正方形的判定和性质探究动点问题

3. 如图，正方形 $ABCD$ 中，动点 E 在 AC 上，$AF\perp AC$，且 $AF=AE$，连接 BF，BE，DE.

(1) 求证：$BF=DE$.

(2) 当点 E 运动到 AC 的中点时（其他条件都保持不变），四边形 $AFBE$ 是正方形吗？请说明理由.



(第3题)

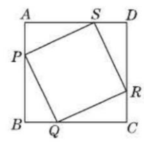
类型4　正方形的性质与判定的综合运用

4. 如图，P，Q，R，S 四个小球分别从正方形的四个顶点 A，B，C，D 同时出发，以同样的速度分别沿 AB，BC，CD，DA 的方向滚动，其终点分别是 B，C，D，A.

(1) 求证：不管滚动多长时间，连接四个小球所得的四边形 $PQRS$ 总是正方形.

(2) 四边形 $PQRS$ 在什么时候面积最大？

(3) 四边形 $PQRS$ 在什么时候面积为正方形 $ABCD$ 面积的一半？



(第4题)

更多提分招数详见《极速提分法》第4页.

趣味数学　同时碑文上还写着："我虽然改变了，但却和原来一样."这是一句既刻画螺线性质又象征他对数学热爱的双关语.

阶段核心归类专训

特殊平行四边形性质与判定的灵活运用

(答案见159页)

名师点金

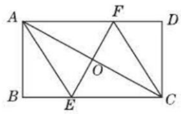
特殊平行四边形的性质主要从边、角及对角线三个方面进行区分；而判定主要从建立在其他特殊四边形的基础上再附加什么条件方面进行判定.

类型1 矩形的综合性问题

a. 矩形性质的应用

1.【中考·贺州】如图，AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线，过 AC 的中点 O 作 $EF\perp AC$，交 BC 于点 E，交 AD 于点 F，连接 AE，CF.

求证：四边形 $AECF$ 是菱形.



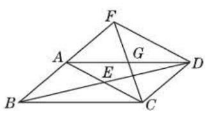
（第1题）

b. 矩形判定的应用

2.【2018·青岛】已知：如图，▱$ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 E，点 G 为 AD 的中点，连接 CG，CG 的延长线交 BA 的延长线于点 F，连接 FD.

(1)求证：$AB=AF$；

(2)若 $AG=AB$，$\angle BCD=120°$，判断四边形 $ACDF$ 的形状，并证明你的结论.



（第2题）

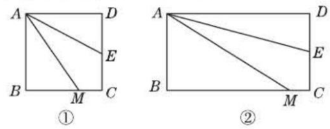
c. 矩形性质和判定的应用

3. 如图①，四边形 $ABCD$ 是正方形，M 是 BC 边上的一点，E 是 CD 边的中点，AE 平分 $\angle DAM$.

(1)求证：$AM=AD+MC$.

(2)$AM=DE+BM$ 是否成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.

(3)若四边形 $ABCD$ 是长与宽不相等的矩形，其他条件不变，如图②，探究展示(1)(2)中的结论是否成立. 请分别做出判断，不需要证明.



（第3题）

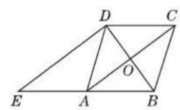
类型2 菱形的综合性问题

a. 菱形性质的应用

4.【中考·苏州】如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 D 作对角线 BD 的垂线交 BA 的延长线于点 E.

(1)求证：四边形 $ACDE$ 是平行四边形；

(2)若 $AC=8$，$BD=6$，求 $\triangle ADE$ 的周长.



（第4题）

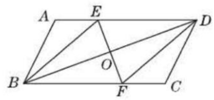
更多提分招数详见《极速提分法》第12页.

欧几里得汇集了前人的成果，采用前所未有的独特编写方式，先提出定义、公理、公设，然后由简到繁地证明了一系列定理，讨论了平面图形和立体图形，还讨论了整数、分数、比例等，终于完成了《几何原本》这部巨著.（待续）

趣味数学

b. 菱形判定的应用

5.【2018·郴州】如图,在▱$ABCD$ 中,作对角线 BD 的垂直平分线 EF,垂足为 O,分别交 AD,BC 于 E,F,连接 BE,DF. 求证:四边形 $BFDE$ 是菱形.



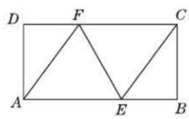
(第 5 题)

c. 菱形性质和判定的应用

6.【2019·宿迁】如图,矩形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$BC=2$,点 E,F 分别在 AB,CD 上,且 $BE=DF=\dfrac{3}{2}$.

(1)求证:四边形 $AECF$ 是菱形.

(2)求线段 EF 的长.



(第 6 题)

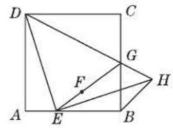
类型3 正方形的综合性问题

a. 正方形性质的应用

7. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,E 是边 AB 上的一动点(不与点 A,B 重合),连接 DE,点 A 关于直线 DE 的对称点为 F,连接 EF 并延长交 BC 于点 G,连接 DG,过点 E 作 $EH\perp DE$ 交 DG 的延长线于点 H,连接 BH.

(1)求证:$GF=GC$.

(2)用等式表示线段 BH 与 AE 的数量关系,并证明.

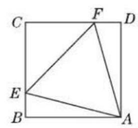


(第 7 题)

b. 正方形判定的应用

8.【2018·舟山】如图,等边△AEF 的顶点 E,F 在矩形 $ABCD$ 的边 BC,CD 上,且 $\angle CEF=45°$.

求证:矩形 $ABCD$ 是正方形.



(第 8 题)

更多提分招数详见《极速提分法》第 11 页.

趣味数学　这本书是历史上曾经出现过的最成功的教科书,刚一问世就取代了所有以前的几何教科书,从此以后一直使用了 2 000 多年. 1482 年印刷发行后,重版了大约一千版次,还被译为世界各主要语种.

全章热门考点整合应用

☞(答案见160页)

名师点金

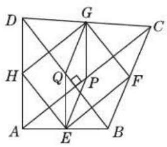
本章内容是中考的必考内容，主要考查与平行四边形、矩形、菱形、正方形有关的计算和证明等问题. 近几年又出现了许多与平行四边形有关的开放探索题、操作题以及与其他知识相结合的综合题. 其主要考点可概括为：一个定理，一个性质，四个图形，四个判定与性质，四个技巧，两种思想.

考点1 一个定理——三角形的中位线定理

1. 如图，已知在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$ 且 $AC\perp BD$，点 E,F,G,H,P,Q 分别是 AB,BC,CD,DA,AC,BD 的中点. 求证：

(1)四边形 $EFGH$ 是矩形；

(2)四边形 $EQGP$ 是菱形.



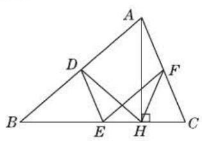
（第1题）

考点2 一个性质——直角三角形斜边上的中线性质

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D,E,F 分别是 AB,BC,CA 的中点，AH 是边 BC 上的高. 求证：

(1)四边形 $ADEF$ 是平行四边形；

(2) $\angle DHF=\angle DEF$.



（第2题）

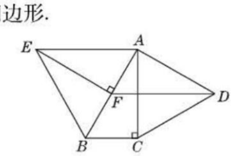
考点3 四个图形

图形1 平行四边形

3. 【中考·凉山州】如图，分别以 $Rt\triangle ABC$ 的直角边 AC 及斜边 AB 为边向外作等边三角形 ACD 及等边三角形 ABE. 已知 $\angle BAC=30°$，$EF\perp AB$，垂足为点 F，连接 DF. 求证：

(1) $AC=EF$；

(2)四边形 $ADFE$ 是平行四边形.



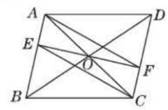
（第3题）

图形2 矩形

4. 如图，在▱$ABCD$ 中，点 O 是 AC 与 BD 的交点，过点 O 的直线与 BA,DC 分别交于点 E,F.

(1)求证：$\triangle AOE\cong\triangle COF$.

(2)连接 EC,AF，则 EF 与 AC 满足什么数量关系时，四边形 $AECF$ 是矩形？请说明理由.



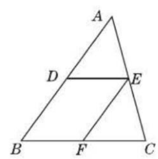
（第4题）

图形3 菱形

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D,E 分别是 AB,AC 的中点，过点 E 作 $EF/\!/AB$，交 BC 于点 F.

(1)求证：四边形 $DBFE$ 是平行四边形.

(2)当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $DBFE$ 是菱形？为什么？



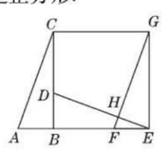
（第5题）

图形4 正方形

6. 如图，已知在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，先把 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 $90°$ 后至 $\triangle DBE$，再把 $\triangle ABC$ 沿射线 AB 平移至 $\triangle FEG$，DE,FG 相交于点 H.

(1)判断线段 DE,FG 的位置关系，并说明理由；

(2)连接 CG，求证：四边形 $CBEG$ 是正方形.



（第6题）

聪明的马克·吐温：在一个社交舞会上，一个慈善家得意洋洋地告诉马克·吐温：“上个星期我根据困难程度将50枚银元施舍给了10个穷人，他们得到的数目各不相同.”（待续） 趣味数学

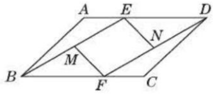
考点4 四个判定与性质

判定与性质1 平行四边形

7. 如图，E，F 分别是▱$ABCD$ 的 AD，BC 边上的点，且 $AE=CF$.

(1)求证：$\triangle ABE\cong\triangle CDF$；

(2)若 M，N 分别是 BE，DF 的中点，连接 MF，EN，试判断四边形 $MFNE$ 是怎样的四边形，并证明你的结论.



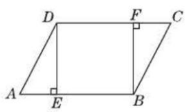
(第7题)

判定与性质2 矩形

8.【中考·湘西州】如图，在▱$ABCD$ 中，$DE\perp AB$，$BF\perp CD$，垂足分别为 E，F. 求证：

(1)$\triangle ADE\cong\triangle CBF$；

(2)四边形 $DEBF$ 为矩形.



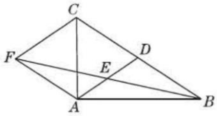
(第8题)

判定与性质3 菱形

9.【2018·安顺】如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的中线，E 是 AD 的中点，过点 A 作 BC 的平行线交 BE 的延长线于点 F，连接 CF.

(1)求证：$AF=DC$；

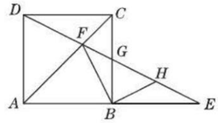
(2)若 $AB\perp AC$，试判断四边形 $ADCF$ 的形状，并证明你的结论.



(第9题)

判定与性质4 正方形

10. 如图，E 为正方形 $ABCD$ 的边 AB 的延长线上一点，DE 交 AC 于点 F，交 BC 于点 G，H 为 GE 的中点.
求证：$FB\perp BH$.

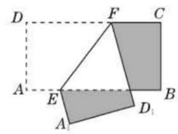


(第10题)

考点5 四个技巧

技巧1 解与四边形有关的折叠问题的技巧(轴对称变换法)

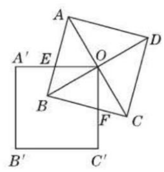
11. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=10$，$BC=5$，点 E，F 分别在 AB，CD 上，将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使点 A，D 分别落在矩形 $ABCD$ 外部的点 A_1，D_1 处，求阴影部分图形的周长.



(第11题)

技巧2 解与四边形有关的旋转问题的技巧(特殊位置法)

12. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 也是正方形 $A'B'C'O$ 的一个顶点，如果两个正方形的边长都等于1，那么正方形 $A'B'C'O$ 绕顶点 O 转动，两个正方形重叠部分的面积大小有什么规律？请说明理由.



(第12题)

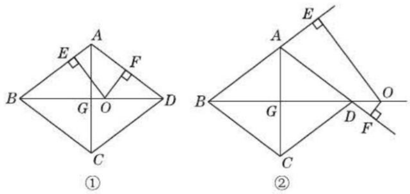
技巧 3 解与四边形有关的动点问题的技巧（固定位置法）

13. 如图，在边长为 10 的菱形 $ABCD$ 中，对角线 $BD=16$，对角线 AC，BD 相交于点 G，点 O 是直线 BD 上的动点，$OE\perp AB$ 于 E，$OF\perp AD$ 于 F.

(1) 求对角线 AC 的长及菱形 $ABCD$ 的面积.

(2) 如图①，当点 O 在对角线 BD 上运动时，$OE+OF$ 的值是否发生变化？请说明理由.

(3) 如图②，当点 O 在对角线 BD 的延长线上时，$OE+OF$ 的值是否发生变化？若不变，请说明理由；若变化，请探究 OE，OF 之间的数量关系.



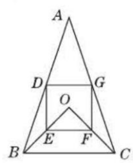
（第 13 题）

技巧 4 解中点四边形的技巧

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部，$\angle BOC=90°$，$OB=OC$，D，E，F，G 分别是 AB，OB，OC，AC 的中点.

(1) 求证：四边形 $DEFG$ 是矩形；

(2) 若 $DE=2$，$EF=3$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

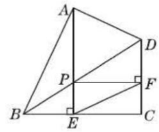


（第 14 题）

考点 6 两种思想

思想 1 转化思想

15. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle C=90°$，$\angle ABD=\angle CBD$，$AB=CB$，P 是 BD 上一点，$PE\perp BC$，$PF\perp CD$，垂足分别为点 E，F. 求证：$PA=EF$.



（第 15 题）

思想 2 数形结合思想

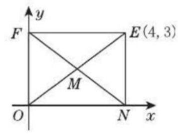
16. 阅读：

在平面直角坐标系中，以任意两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 为端点的线段的中点坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

运用：

(1) 如图，矩形 $ONEF$ 的对角线相交于点 M，ON，OF 分别在 x 轴和 y 轴上，O 为坐标原点，点 E 的坐标为 $(4,3)$，则点 M 的坐标为________；

(2) 在平面直角坐标系中，有 $A(-1,2)$，$B(3,1)$，$C(1,4)$ 三点，另有一点 D 与点 A，B，C 构成平行四边形的顶点，求点 D 的坐标.



（第 16 题）

更多提分招数详见《极速提分法》第 19 页.

答案：每人得到数目各不相同的银元，至少要 $1+2+3+\cdots+10=55$（枚）.

趣味数学

第十九章 一次函数

19.1 函 数

第1课时 变 量

名师点金

判断一个量是常量还是变量的方法

看这个量所在的变化过程中，该量的值是否发生改变(或者说是否会取不同的数值)，其中在变化过程中，数值始终不变的量是常量，可以取不同数值的量是变量.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见162页)

知识点1 常量与变量

1. 一辆汽车以 50 km/h 的速度行驶，行驶的路程 s(km)与行驶的时间 t(h)之间的关系式为 $s=50t$，其中变量是(　　)

A. 速度与路程　　B. 速度与时间

C. 路程与时间　　D. 三者均为变量

2. 要画一个面积为 15 cm^2 的长方形，其长为 x cm，宽为 y cm，在这一变化过程中，常量与变量分别是(　　)

A. 常量为 15；变量为 x，y

B. 常量为 15，y；变量为 x

C. 常量为 15，x；变量为 y

D. 常量为 x，y；变量为 15

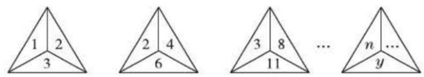
知识点2 两个变量之间的关系

3. 某种报纸的价格是每份 0.4 元，买 x 份报纸的总价为 y 元，先填写下表，再用含 x 的式子表示 y.

份数/份	1	2	3	4	…
价钱/元	0.4			1.6	…

y 与 x 之间的关系是________，其中，________是常量，________是变量.

4. 【中考·邵阳】如图所示，下列各三角形中的三个数之间均具有相同的规律，根据此规律，最后一个三角形中 y 与 n 之间的关系是(　　)



(第4题)

A. $y=2n+1$　　B. $y=2^n+n$

C. $y=2^{n+1}+n$　　D. $y=2^n+n+1$

Ⅱ 整合方法·提升练 (答案见162页)

考查角度1 利用表格信息用关系式表示变量间的关系

5. 声音在空气中传播的速度 y(m/s)与气温 x(℃)有如下表所示的关系：

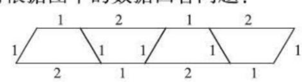
气温 x/℃	0	5	10	15	20	25	30	…
音速 y/(m/s)	331	334	337	340	343	346	349	…

(1)当气温是 35 ℃时，音速是多少？

(2)这一变化过程中，反映了哪两个变量之间的关系？写出这个关系的关系式.

考查角度2 利用图形信息用关系式表示变量间的关系(数形结合思想)

6. 观察图，根据图中的数据回答问题：



(第6题)

(1)设图形的周长为 l，梯形的个数为 n，试写出 l 与 n 的关系式；

(2)在上述变化过程中，变量、常量分别是什么？

趣味数学 17世纪，在伽利略的《两门新科学》一书中，几乎从头到尾包含着函数的思想，他用文字和比例的语言表述函数关系.(待续)

第2课时　函　数

名师点金

1. 判断变量之间具有函数关系的三个要素：
   (1)一个变化过程；(2)有两个变量；
   (3)一个变量的值确定后，另一个变量就有唯一确定的值和它对应.
2. 确定自变量的取值范围的方法：
   (1)整式和奇次根式中，自变量的取值范围是全体实数；
   (2)偶次根式中，被开方式大于或等于0；
   (3)分式中，分母不能为0；
   (4)零指数幂、负整数指数幂中，底数不为0；
   (5)实际(几何)问题中，自变量除了满足解析式有意义外，还要考虑使实际(几何)问题有意义.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见162页)

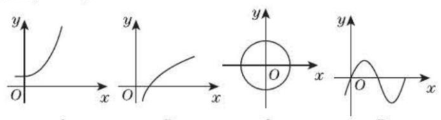
知识点1 函数的定义

1. 下列解析式中，y不是x的函数的是(　　)

A. $y=-x^2$　　B. $y^2=x$

C. $y=|x|$　　D. $y=-x^2+1$

2. 【中考·泸州】下列曲线中不能表示y是x的函数的是(　　)



A　　B　　C　　D

3. 在下表中，设x表示乘公共汽车的站数，y表示应付的票价(元)：

x/站	1	2	3	4	5
y/元	1	1	2	2	2
x/站	6	7	8	9	10
y/元	3	3	3	4	4

根据此表，下列说法正确的是(　　)

A. y是x的函数　　B. y不是x的函数

C. x是y的函数　　D. 以上说法都不对

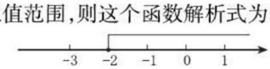
知识点2 自变量的取值范围

4. 【2019·眉山】函数$y=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$中自变量x的取值范围是(　　)

A. $x\geqslant-2$且$x\neq1$　　B. $x\geqslant-2$

C. $x\neq1$　　D. $-2\leqslant x<1$

5. 【中考·广安】如图，数轴上表示的是某个函数自变量的取值范围，则这个函数解析式为(　　)



(第5题)

A. $y=x+2$　　B. $y=x^2+2$

C. $y=\sqrt{x+2}$　　D. $y=\frac{1}{x+2}$

知识点3 函数值

6. 下列关系式中，当自变量$x=-1$时，函数值$y=6$的是(　　)

A. $y=3x+3$　　B. $y=-3x+3$

C. $y=3x-3$　　D. $y=-3x-3$

7. 【中考·百色】已知函数$y=\begin{cases}2x+1(x\geqslant0),\\4x(x<0),\end{cases}$当$x=2$时，函数值$y$为(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

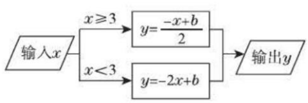
8. 【中考·甘南州】若函数$y=\begin{cases}x^2+2(x\leqslant2),\\2x(x>2),\end{cases}$则当函数值$y=8$时，自变量$x$的值是(　　)

A. $\pm\sqrt{6}$　　B. 4

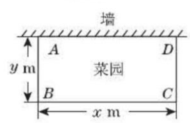
C. $\pm\sqrt{6}$或4　　D. 4或$-\sqrt{6}$

9. 【2019·重庆】根据如图所示的程序计算函数y的值，若输入x的值是7，则输出y的值是-2，若输入x的值是-8，则输出y的值是(　　)

A. 5　　B. 10　　C. 19　　D. 21



(第9题)



(第10题)

易错点 用函数关系式表示实际问题时弄错自变量的取值范围

10. 李大爷要围成一个长方形菜园，菜园的一边利用足够长的墙，用篱笆围成的另外三边总长恰好为24 m，要围成的菜园是如图所示的长方形$ABCD$. 设BC边的长为x m，AB边的长为y m，则y与x之间的函数关系式$y=-\frac{1}{2}x+12$中，x的取值范围是____________.

1637年前后，笛卡尔在他的解析几何中，已注意到一个变量对另一个变量的依赖关系，但当时尚未意识到要提炼函数概念.(待续)　趣味数学

Ⅱ 整合方法 · 提升练

☞(答案见162页)

考查角度1 利用函数的定义识别函数

11. x,y之间的对应关系如下表所示,你能根据函数定义判断y是x的函数吗?x是y的函数吗?为什么?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	0	3	8	15

考查角度2 利用函数关系式表示实际中的数量关系

12. 某学校组织学生到离校6 km的光明科技馆去参观,学生小明因事没能乘上学校的包车,于是准备在学校门口改乘出租车去光明科技馆,出租车的收费标准如下表:

路程	收费
3 km以下(含3 km)	8.00元
3 km以上每1 km	1.8元

(1)写出出租车行驶的路程x(km)($x\geqslant3$)与收费y(元)之间的函数关系式.

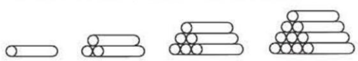
(2)小明身上仅有14元钱,乘出租车到科技馆的车费够不够?请说明理由.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练

☞(答案见162页)

拔尖角度1 利用图表信息求函数关系式及函数值(从特殊到一般的思想)

13. 木材加工厂堆放木料的方式按如图所示的那样堆放,随着层数的增加,物体总数也在变化.



(第13题)

(1)根据变化规律填写下表:

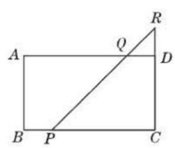
层数n	1	2	3	4
物体总数y				

(2)求出y与n的函数关系式;

(3)当物体堆放的层数为10时,物体总数为多少?

拔尖角度2 利用函数关系式表示几何中的数量关系

14. 如图,在矩形$ABCD$中,$AB=4$,$BC=7$,点P是BC边上与点B不重合的动点,过点P的直线交CD的延长线于点R,交AD于点Q(点Q与点D不重合),且$\angle RPC=45°$.设$BP=x$,梯形$ABPQ$的面积为y,求y与x之间的函数关系式,并求出自变量x的取值范围.



(第14题)

趣味数学　直到17世纪后期,牛顿、莱布尼兹建立微积分时还没有人明确函数的一般意义,大部分函数是被当成曲线来研究的.(待续)

第3课时 函数的图象

名师点金

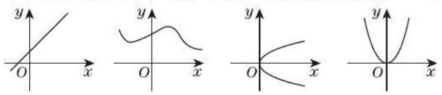
图象的识别方法

一般是根据题目的描述，从函数值随着自变量的变化而变化的情况来判断的，函数值随着自变量的增大而增大时，函数图象呈上升趋势，反之呈下降趋势. 当自变量增大，函数值不变时，这部分图象与横轴平行(或重合).

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 (答案见162页)

知识点1 函数的图象

1. 下列各图象中，不表示 y 是 x 的函数的是(　　)



A　　B　　C　　D

2. 已知点 $A(2,3)$ 在函数 $y=ax^2-x+1$ 的图象上，则 a 等于(　　)

A. 1　　B. −1　　C. 2　　D. −2

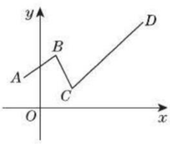
3. 【2018 · 绍兴】如图，一个函数的图象由射线 BA、线段 BC、射线 CD 组成，其中点 $A(-1,2)$，$B(1,3)$，$C(2,1)$，$D(6,5)$，则此函数(　　)

A. 当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大

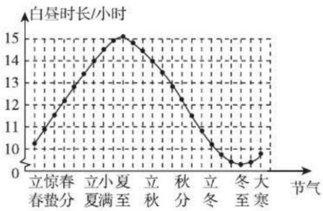
B. 当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小

C. 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大

D. 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小



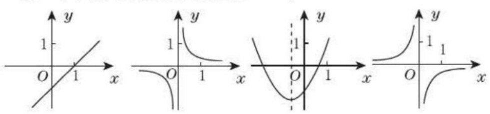
(第3题)



(第5题)

知识点2 从函数图象中获取信息

4. 【中考 · 衢州】下列四个函数图象中，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小的是(　　)

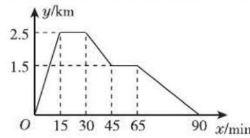


A　　B　　C　　D

5. 【2018 · 呼和浩特】二十四节气是中国古代劳动人民长期经验积累的结晶，它与白昼时长密切相关. 当春分、秋分时，昼夜时长大致相等；当夏至时，白昼时长最长，根据上图，在下列选项中指出白昼时长低于11小时的节气是(　　)

A. 惊蛰　　B. 小满　　C. 立秋　　D. 大寒

6. 【2019 · 黄冈】已知林茂的家、体育场、文具店在同一直线上，图中的信息反映的过程是：林茂从家跑步去体育场，在体育场锻炼了一阵后又走到文具店买笔，然后再走回家，图中 x 表示时间，y 表示林茂离家的距离，依据图中的信息，下列说法错误的是(　　)



(第6题)

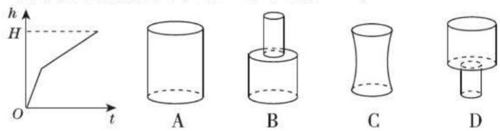
A. 体育场离林茂家 2.5 km

B. 体育场离文具店 1 km

C. 林茂从体育场出发到文具店的平均速度是50 m/min

D. 林茂从文具店回家的平均速度是60 m/min

7. 【2019 · 自贡】均匀的向一个容器内注水，在注满水的过程中，水面的高度 h 与时间 t 的函数关系如图所示，则该容器是下列四个中的(　　)



(第7题)

知识点3 用描点法画函数的图象

8. 如图，画出函数 $y=2x-1$ 的图象.

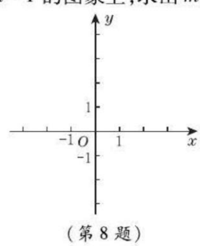
(1)列表：

x	…	−1	0	1	…
y	…		−1		…

(2)描点并连线；

(3)判断点 $A(-3,-5)$，$B(2,-3)$，$C(3,5)$ 是否在函数 $y=2x-1$ 的图象上；

(4)若点 $P(m,9)$ 在函数 $y=2x-1$ 的图象上，求出 m 的值.



(第8题)

1673年，莱布尼兹首次用“function”表示“幂”，后来他用该词表示曲线上点的横、纵坐标等曲线上点的有关几何量. 与此同时，牛顿在微积分的讨论中，使用“流量”来表示变量间的关系. (待续) 趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练

(答案见162页)

考查角度1 利用画函数的图象说明函数的性质

9.【2018·乌鲁木齐】小明根据学习函数的经验,对函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象与性质进行了探究.

下面是小明的探究过程,请补充完整:

(1)函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的自变量 x 的取值范围是________.

(2)下表列出了 y 与 x 的几组对应值,请写出 m,n 的值:$m=$________,$n=$________.

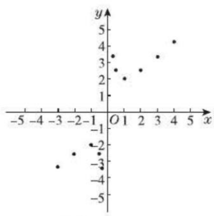
x	…	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	…
y	…	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{10}{3}$	m	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	n	$\frac{17}{4}$	…

(3)如图,在平面直角坐标系 xOy 中,描出了以上表中各对对应值为坐标的点.根据描出的点,画出该函数的图象.

(4)结合函数的图象,请完成:

①当 $y=-\frac{17}{4}$ 时,$x=$________;

②写出该函数的一条性质:________.



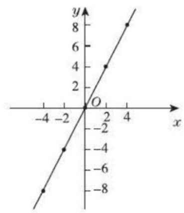
(第9题)

考查角度2 利用函数的图象表示实际问题

10. 某粮店玉米的售价是每千克2元,写出玉米的总售价 y(元)与所售玉米的质量 x(千克)之间的函数解析式,并画出这个函数的图象.小明是这样解答的,解:y 与 x 之间的函数解析式为 $y=2x$,列表得,

x	…	-4	-2	0	2	4	…
y	…	-8	-4	0	4	8	…

在平面直角坐标系中,描出以上表中各对对应值为坐标的点,并用平滑的曲线连接各点,即得到 $y=2x$ 的图象,如图所示.你认为小明的解答正确吗?如果不正确,请说明理由.



(第10题)

Ⅲ 探究培优·拓展练

(答案见163页)

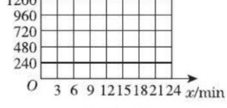
拔尖角度1 利用函数图象表示实际意义中的数量关系

11.【2019·咸宁】小慧家与文具店相距960 m,小慧从家出发,沿笔直的公路匀速步行12 min来到文具店买笔记本,停留3 min,因家中有事,便沿着原路匀速跑步6 min返回家中.

(1)小慧返回家中的速度比去文具店的速度快多少?

(2)请你在图中画出这个过程中,小慧离家的距离 y 与时间 x 的函数图象;

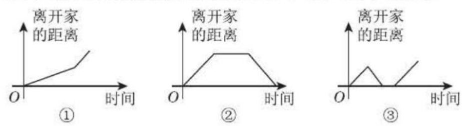
(3)根据图象回答,小慧从家出发后多少分钟离家的距离为720 m?



(第11题)

拔尖角度2 利用图象与情境间的关系互化

12.【中考·吉林】在如图所示的三个函数图象中,有两个函数图象能近似地刻画如下 a,b 两个情境:



(第12题)

情境 a:小芳离开家不久,发现把作业本忘在家里,于是返回家里找到了作业本再去学校;

情境 b:小芳从家出发,走了一段路程后,为了赶时间,以更快的速度前进.

(1)情境 a,b 所对应的函数图象分别为________;(填写序号)

(2)请你为剩下的函数图象写出一个适合的情境.

趣味数学 1821年,柯西给出了定义:"在某些变数间存在着一定的关系,当给定其中某一变数的值,其他变数的值可随之确定时,则将最初的变数叫自变量,其他各变数叫函数".

第4课时　函数的表示法

名师点金

1. 函数的表示方法共有三种：**列表法**、**解析式法**、**图象法**，它们分别从数、式和形的角度反映了函数的本质.
2. 根据图象读取信息时要把握三个方面：
 (1)横轴和纵轴的意义及横轴、纵轴分别表示的量；
 (2)对于某个具体点，可向横、纵轴作垂线，从而求得该点的坐标；
 (3)在实际问题中，要注意图象与横、纵轴的交点坐标代表的具体意义.

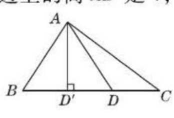
Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见163页)

知识点1 函数的表示法

a. 解析式法

1. 若每上6个台阶就升高1米，则上升高度h(米)与上的台阶数m(个)之间的函数解析式是(　　)
A. $h=6m$　　B. $h=6+m$
C. $h=m-6$　　D. $h=\frac{m}{6}$

2. 如图，$\triangle ABC$的边BC长是8，BC边上的高AD'是4，点D在BC上运动(不与C点重合)，设BD长为x，则$\triangle ACD$的面积y与x之间的函数关系式为__________.



(第2题)

b. 列表法

3. 已知某品牌东北大米6元/千克，请你根据条件完成下表：

购买该品牌东北大米的质量x/千克	1	2	3	4	5	6	…
付款金额y/元							…

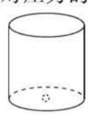
4. 某学习小组做了一个实验：从一幢100 m高的楼顶随手放下一只苹果，测得有关数据如下：

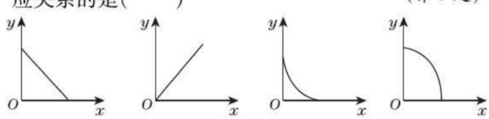
下落时间t/s	1	2	3	4
下落高度h/m	5	20	45	80

则下列说法错误的是(　　)
A. 苹果每秒下落的路程越来越长
B. 苹果每秒下落的路程不变
C. 苹果下落的速度越来越快
D. 可以推测，苹果落到地面的时间不超过5 s

c. 图象法

5. 【2019·武汉】“漏壶”(如图)是一种古代计时器，在它内部盛一定量的水，不考虑水量变化对压力的影响，水从壶底小孔均匀漏出，壶内壁有刻度，人们根据壶中水面的位置计算时间，用x表示漏水时间，y表示壶底到水面的高度，下列图象适合表示y与x的对应关系的是(　　)


(第5题)



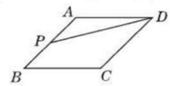
A　　B　　C　　D

知识点2 三种函数表示法间的关系

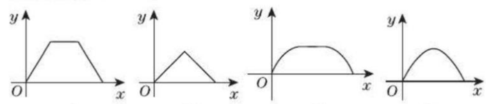
6. 要形象、直观地表示某市某天的气温与时间的函数关系，适宜用(　　)
A. 列表法　　B. 解析式法
C. 图象法　　D. 以上都可以

7. 下面说法中正确的是(　　)
A. 两个变量间的关系只能用解析式表示
B. 图象不能直观地表示两个变量间的数量关系
C. 借助表格可以反映出因变量随自变量的变化情况
D. 以上说法都不对

8. 【2019·广元】如图，点P是菱形$ABCD$边上的动点，它从点A出发沿$A\to B\to C\to D$路径匀速运动到点D. 设$\triangle PAD$的面积为y，P点的运动时间为x，则y关于x的函数图象大致为(　　)



(第8题)



A　　B　　C　　D

9. 某下岗职工购进一批苹果，到集贸市场零售，已知卖出的苹果质量x(千克)与收入y(元)的关系如下表：

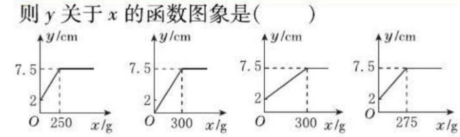
质量x/千克	1	2	3	4	5	…
收入y/元	$2+0.1$	$4+0.2$	$6+0.3$	$8+0.4$	$10+0.5$	…

则收入y(元)与卖出的苹果质量x(千克)之间的函数解析式为(　　)
A. $y=2x+0.1$　　B. $y=2x$
C. $y=2x+0.5$　　D. $y=2.1x$

10. 八年级(1)班同学在探究弹簧长度与砝码质量的关系时，实验得到的相应数据如下表所示：

砝码质量x/g	0	50	100	150	200	250	300	400	500
弹簧长度y/cm	2	3	4	5	6	7	7.5	7.5	7.5

则y关于x的函数图象是(　　)



A　　B　　C　　D

地球自转一周，在人们的视觉假象中，太阳好像绕地球旋转了360°. 与此同时，手表的时针走了24小时，绕表芯旋转了720°.(待续)
趣味数学

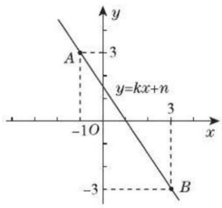
Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见163页)

考查角度1 利用函数解析式表示函数图象的意义

11. 如图,已知函数 $y=kx+n$ 的图象是一条直线,且图象经过两点,两点坐标分别是 $A(-1,3)$ 与 $B(3,-3)$.

(1)试确定 k 和 n 的值;

(2)判断函数图象是否经过点 $C(-5,9)$,$D(-6,10)$,并说明原因.



(第11题)

考查角度2 利用函数解析式表示表格函数的意义

12. 已知函数 y 与自变量 x 之间成反比例关系,下表给出了 x 与 y 的一些值:

x	…	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…
y	…	$\frac{2}{3}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	…

(1)写出这个函数的解析式;

(2)根据函数解析式计算当 x 的取值分别是 -6 和 5 时的函数值,计算函数值分别是 -12 和 36 时的自变量的值.

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见163页)

拔尖角度1 利用函数的表示方法进行三种表示方法的互化

13. 一个小球由静止开始从一个斜坡上向下滚动,滚动的距离 s(m)与时间 t(s)之间的函数解析式为 $s=2t^2(t\geqslant 0)$.

(1)根据解析式完成下表,并画出图象;

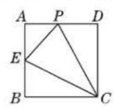
时间 t/s	1	2	3	4
距离 s/m				

(2)当小球滚动6.5 s时,其滚动的距离是多少?

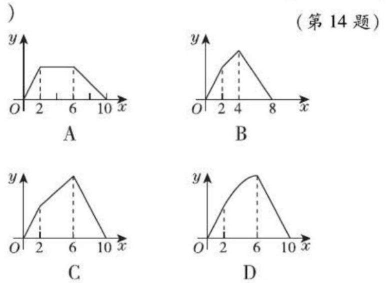
(3)经过多少秒,小球滚动的距离是128 m?

拔尖角度2 利用函数的图象表示几何中面积变化情况

14. 【2019·衢州】如图,正方形 $ABCD$ 的边长为4,点 E 是 AB 的中点,点 P 从点 E 出发,沿 $E\to A\to D\to C$ 移动至终点 C. 设 P 点经过的路径长为 x,$\triangle CPE$ 的面积为 y,则下列图象能大致反映 y 与 x 函数关系的是(　　)



(第14题)



趣味数学 由于以上两者的转动都是均匀的,从而在理论上太阳绕地球旋转的角度 y 与手表的时针旋转的角度 x 的一半是同步的.

19.2 一次函数

第1课时 正比例函数

名师点金

1. 理解正比例函数的定义时应注意三点：
(1)自变量 x 的指数为1；(2)比例系数 k 不等于0；(3)函数解析式等号右边的式子为整式.
2. 求正比例函数解析式的步骤：
(1)设函数解析式为 $y=kx(k\neq0)$；(2)把已知条件代入函数解析式，列方程求出 k 的值；
(3)将求得的待定系数 k 的值代回所设的函数解析式.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见163页)

知识点1 正比例函数的定义

1.【中考·凉山州】已知函数 $y=2x^{2a+b}+a+2b$ 是正比例函数，则 $a=$________，$b=$________.

2.【2019·梧州】下列函数中，正比例函数是(　　)

A. $y=-8x$　　B. $y=\dfrac{8}{x}$

C. $y=8x^2$　　D. $y=8x-4$

3. 下列说法中不正确的是(　　)

A. 在 $y=3x-1$ 中，$y+1$ 与 x 成正比例函数关系

B. 在 $y=-\dfrac{x}{2}$ 中，y 与 x 成正比例函数关系

C. 在 $y=2(x+1)$ 中，y 与 $x+1$ 成正比例函数关系

D. 在 $y=x+3$ 中，y 与 x 成正比例函数关系

知识点2 求正比例函数的解析式

4. 根据下表，写出 y 与 x 之间的函数解析式：________，这个函数是________函数.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	6	3	0	-3	-6	-9

5. 如果每盒圆珠笔有12支，每盒的售价是18元，那么圆珠笔的总售价 y(元)与数量 x(支)之间的函数解析式为(　　)

A. $y=12x$　B. $y=18x$　C. $y=\dfrac{2}{3}x$　D. $y=\dfrac{3}{2}x$

易错点 忽略比例系数不为零的限制造成错解

6. 已知函数 $y=(k-2)x^{|k|-1}$(k 为常数)是正比例函数，则 k 的值是________.

Ⅱ 整合方法·提升练 (答案见163页)

考查角度1 利用求正比例函数解析式解实际问题

7. 写出下列各题中 y 与 x 的函数解析式，并判断 y 是否为 x 的正比例函数.

(1)每千克橘子4.5元，买 x 千克共花 y 元；

(2)一棵1.6米高的小树，每年长0.5米，x 年后小树高 y 米；

(3)某公园的门票为每张 x 元，上周五共有 y 人进入公园，当天的门票收入为8 000元；

(4)半径为 x 的圆的周长为 y.

考查角度2 利用求正比例函数解析式解几何问题

8. $\triangle ABC$ 的底边 $BC=8$ cm，当 BC 边上的高从小到大改变时，$\triangle ABC$ 的面积也随之变化.

(1)写出 $\triangle ABC$ 的面积 $y(\text{cm}^2)$ 与 BC 边上的高 x(cm)之间的函数解析式，并指明它是什么函数；

(2)列表格表示当 x 由5 cm变到10 cm时(每次增加1 cm)，y 的相应值；

(3)观察表格，请回答：当 x 每增加1 cm时，面积 y 如何变化？

正比例函数图象是一条神奇的直线，它的美在于无限延伸，像生活一样给人以憧憬和无限的遐想，具有不受限制的无限的美.

趣味数学

第2课时　正比例函数的图象和性质

名师点金

画正比例函数图象的技巧

1. 由于两点确定一条直线,因此画正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图象时,我们一般选 $(0,0)$ 和 $(1,k)$ 这两点;

2. 列表时,点 (x,y) 可任意选取适合 $y=kx$ 的点,但为方便描点,坐标通常取整数.

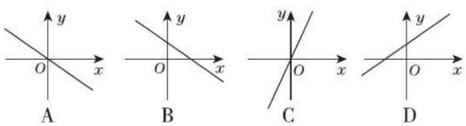
注意:有些图象根据自变量取值范围的不同而有所变化,或是一条射线,或是一条线段,或是直线上的一些点. 例如正比例函数 $y=2x(x\geqslant0)$ 的图象是一条射线.

Ⅰ 夯实基础 · 逐点练 (答案见163页)

知识点1 正比例函数的图象

1.【2019 · 本溪】函数 $y=5x$ 的图象经过的象限是________.

2. 正比例函数 $y=2x$ 的大致图象是(　　)



A　　　B　　　C　　　D

3.【2018 · 常州】一个正比例函数的图象经过点 $(2,-1)$,则它的解析式为(　　)

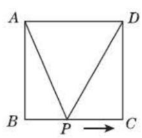
A. $y=-2x$　　B. $y=2x$

C. $y=-\frac{1}{2}x$　　D. $y=\frac{1}{2}x$

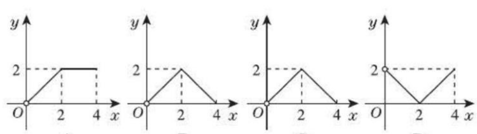
4.【2019 · 陕西】若正比例函数 $y=-2x$ 的图象经过点 $O(a-1,4)$,则 a 的值为(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5.【中考 · 荆门】如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 2 cm,动点 P 从点 A 出发,在正方形的边上沿 $A\to B\to C$ 的方向运动到点 C 停止,设点 P 的运动路程为 x(cm),在下列图象中,能表示 $\triangle ADP$ 的面积 y(cm^2)关于 x(cm)的函数关系的图象是(　　)



(第5题)



A　　　B　　　C　　　D

知识点2 正比例函数的性质

6. 已知正比例函数 $y=(k+5)x$,且 y 随 x 的增大而减小,则 k 的取值范围是(　　)

A. $k>5$　　B. $k<5$

C. $k>-5$　　D. $k<-5$

7. 已知函数 $y=kx$ 的函数值 y 随 x 的增大而增大,则函数的图象经过(　　)

A. 第一、二象限　　B. 第一、三象限

C. 第二、三象限　　D. 第二、四象限

8. 关于函数 $y=-2x$,下列判断正确的是(　　)

A. 图象经过第一、三象限

B. y 随 x 的增大而增大

C. 若 (x_1,y_1),(x_2,y_2) 是该函数图象上的两点,则当 $x_1<x_2$ 时,$y_1>y_2$

D. 不论 x 为何值,总有 $y<0$

9. 若正比例函数 $y=(1-2m)x$ 的图象经过点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$,当 $x_1<x_2$ 时,$y_1>y_2$,则 m 的取值范围是(　　)

A. $m<0$　　B. $m>0$　　C. $m<\frac{1}{2}$　　D. $m>\frac{1}{2}$

易错点 不能深刻领会正比例函数 $y=kx$ 中 k 的作用

10. 对于函数 $y=-k^2x$(k 是常数,$k\neq0$),下列说法不正确的是(　　)

A. 图象是一条直线

B. 图象过点 $\left(\frac{1}{k},-k\right)$

C. 图象经过第一、三象限或第二、四象限

D. y 随着 x 的增大而减小

趣味数学　1748 年欧拉提出"一个变量的函数是由该变量和一些数即常量以任何一种方式构成的解析表达式".(待续)

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见163页)

考查角度1 利用正比例函数的定义和性质求解析式

11. 若正比例函数 $y=(2m+1)x^{2-m^2}$，y 随 x 的增大而增大，求正比例函数的解析式.

考查角度2 利用正比例关系求函数关系式

12. 已知 y 与 x 成正比例，且当 $x=3$ 时，$y=-9$.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2)画出函数图象；

(3)点 $P(-1,3)$ 和 $Q(-6,3)$ 是否在此函数图象上？

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见164页)

拔尖角度1 利用正比例函数的图象与性质解相关问题

13. 已知正比例函数 $y=(1-2a)x$.

(1)若函数的图象经过原点和第一、三象限，试求 a 的取值范围；

(2)若点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 为函数图象上的两点，且 $x_1<x_2$，$y_1>y_2$，试求 a 的取值范围；

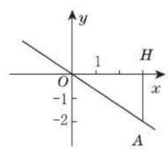
(3)若函数的图象经过点$(-1,2)$，①求此函数关系式并作出其图象；②如果 x 的取值范围是 $-1<x<5$，求 y 的取值范围.

拔尖角度2 利用正比例函数的图象和性质解与几何相关的问题(数形结合思想)

14. 如图，已知正比例函数 $y=kx$ 的图象经过点 A，点 A 在第四象限，过点 A 作 $AH\perp x$ 轴，垂足为点 H，点 A 的横坐标为3，且 $\triangle AOH$ 的面积为3.

(1)求正比例函数的解析式.

(2)在 x 轴上是否存在一点 P，使 $\triangle AOP$ 的面积为5？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



(第14题)

1755年，他提出"如果某些变量以某种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随着变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数". 趣味数学

第3课时　一次函数

名师点金

一次函数和正比例函数

一般地,形如 $y=kx+b$(k,b 为常数,$k\neq0$)的函数,叫做一次函数,其中 x 是自变量,y 是 x 的函数.特别地,当 $b=0$ 时,$y=kx$(k 为常数,$k\neq0$),y 叫做 x 的正比例函数.

说明:1. 正比例函数是特殊的一次函数,一次函数包括正比例函数;

2. 判断一个函数是否是一次函数,必须将其化成最简形式.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见164页)

知识点1 一次函数的定义

1. 下列函数中,y 是 x 的一次函数的是(　　)

A. $y=x^2+2x$　　B. $y=-\frac{3}{x}$

C. $y=x$　　D. $y=\sqrt{2x}+1$

2. 下列函数:①$y=2x-1$;②$y=\pi x$;③$y=\frac{1}{x}$;④$y=x^2$中,一次函数的个数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知 $y=(m-3)x^{|m|-2}+1$ 是 y 关于 x 的一次函数,则 m 的值是(　　)

A. -3　　B. 3　　C. ±3　　D. ±2

4. 下列说法正确的是(　　)

A. 正比例函数是一次函数

B. 一次函数是正比例函数

C. 对于变量 x 与 y,y 是 x 的函数,x 不是 y 的函数

D. 正比例函数不是一次函数,一次函数也不是正比例函数

5. 若 $3y-4$ 与 $2x-5$ 成正比例,则 y 是 x 的(　　)

A. 正比例函数　　B. 一次函数

C. 没有函数关系　　D. 以上均不正确

知识点2 确定应用问题中的一次函数解析式

6. 【2019·柳州】已知 A,B 两地相距 3 km,小黄从 A 地到 B 地,平均速度为 4 km/h,若用 x 表示行走的时间(h),y 表示余下的路程(km),则 y 关于 x 的函数解析式是(　　)

A. $y=4x(x\geqslant0)$　　B. $y=4x-3\left(x\geqslant\frac{3}{4}\right)$

C. $y=3-4x(x\geqslant0)$　　D. $y=3-4x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right)$

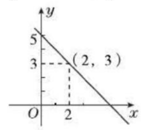
7. 如图,图象表示的一次函数解析式为(　　)

A. $y=-x-5$

B. $y=x-5$

C. $y=x+5$

D. $y=-x+5$



(第7题)

Ⅱ 整合方法·提升练 (答案见164页)

考查角度1 利用数量关系求一次函数解析式

8. 【中考·益阳】我们知道,海拔高度每上升 1 km,温度下降 6 ℃. 某时刻,益阳地面温度为 20 ℃,设高出地面 x km 处的温度为 y ℃.

(1)写出 y 与 x 之间的函数解析式;

(2)已知益阳碧云峰高出地面约 500 m,求这时山顶的温度大约是多少?

(3)此刻,有一架飞机飞过益阳上空,若机舱内仪表显示飞机外面的温度为 -34 ℃,求飞机离地面的高度为多少千米?

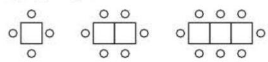
考查角度2 利用图表信息求一次函数解析式

9. 学校阅览室有能坐 4 人的方桌,如果多于 4 人,就把方桌拼成一行,2 张方桌拼成一行能坐 6 人,如图所示,请你结合这个规律,填写下表并回答问题:

拼成一行的方桌数(x)	1	2	3	4	…
人数(y)	4	6	8		…

(1)写出 y 与 x 之间的函数解析式,并判断 y 是不是 x 的一次函数;

(2)若八年级(1)班有 42 人去阅览室看书,则需要多少张这样的方桌拼成一行?



(第9题)

趣味数学　一次函数是人类思维的产物,属意识范畴.它所研究的是客观事物在变化过程中的量与量之间的关系.

第4课时　一次函数的图象与性质

名师点金

一次函数图象的平移规律

1. **上、下平移**：直线 $y=kx+b$ 向上平移 $n(n>0)$ 个单位长度得到直线 $y=kx+b+n$；直线 $y=kx+b$ 向下平移 $n(n>0)$ 个单位长度得到直线 $y=kx+b-n$. 简记为：上加下减（只改变 b）.
2. **左、右平移**：直线 $y=kx+b$ 向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度得到直线 $y=k(x+m)+b$；直线 $y=kx+b$ 向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度得到直线 $y=k(x-m)+b$. 简记为：左加右减（只改变 x）.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 （答案见164页）

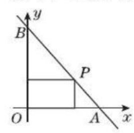
知识点1 一次函数 $y=kx+b$ 的图象

1. 【2019·广安】一次函数 $y=2x-3$ 的图象经过的象限是（　　）

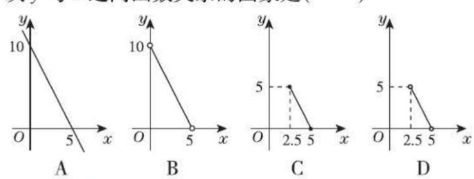
A. 一、二、三　　B. 二、三、四
C. 一、三、四　　D. 一、二、四

2. 【2019·枣庄】如图，一直线与两坐标轴的正半轴交于 A，B 两点，P 是线段 AB 上任意一点（不包括端点），过点 P 分别作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形的周长为8，则该直线的函数解析式是（　　）

A. $y=-x+4$　　B. $y=x+4$
C. $y=x+8$　　D. $y=-x+8$


（第2题）

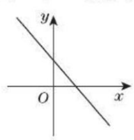
3. 【中考·齐齐哈尔】已知等腰三角形的周长是10，底边长 y 是腰长 x 的函数，则下列图象中，能正确反映 y 与 x 之间函数关系的图象是（　　）



知识点2 直线 $y=kx+b$ 的位置与系数 k，b 的关系

4. 【2019·沈阳】已知一次函数 $y=(k+1)x+b$ 的图象如图所示，则 k 的取值范围是（　　）

A. $k<0$　　B. $k<-1$　　C. $k<1$　　D. $k>-1$

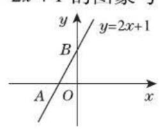

（第4题）

5. 【2019·毕节】已知一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq0$）的图象经过第一、三、四象限，则下列结论正确的是（　　）

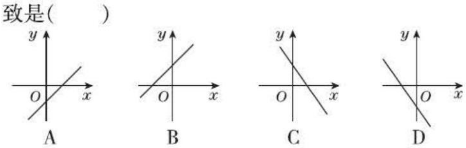
A. $kb>0$　　B. $kb<0$　　C. $k+b>0$　　D. $k+b<0$

6. 【2019·锦州】如图，一次函数 $y=2x+1$ 的图象与坐标轴分别交于 A，B 两点，O 为坐标原点，则 $\triangle AOB$ 的面积为（　　）

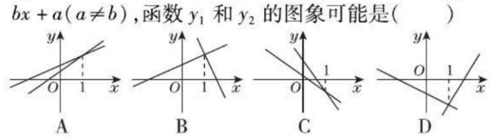
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$
C. 2　　D. 4


（第6题）

7. 【2019·大庆】正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的函数值 y 随着 x 增大而减小，则一次函数 $y=x+k$ 的图象大致是（　　）



8. 【2019·杭州】已知一次函数 $y_1=ax+b$ 和 $y_2=bx+a(a\neq b)$，函数 y_1 和 y_2 的图象可能是（　　）



知识点3 一次函数 $y=kx+b$ 的性质

9. 【2018·常德】若一次函数 $y=(k-2)x+1$ 的函数值 y 随 x 的增大而增大，则（　　）

A. $k<2$　　B. $k>2$　　C. $k>0$　　D. $k<0$

10. 【中考·温州】已知点 $(-1,y_1)$，$(4,y_2)$ 在一次函数 $y=3x-2$ 的图象上，则 y_1，y_2，0的大小关系是（　　）

A. $0<y_1<y_2$　　B. $y_1<0<y_2$
C. $y_1<y_2<0$　　D. $y_2<0<y_1$

11. 【2019·临沂】下列关于一次函数 $y=kx+b(k<0,b>0)$ 的说法，错误的是（　　）

A. 图象经过第一、二、四象限
B. y 随 x 的增大而减小
C. 图象与 y 轴交于点 $(0,b)$
D. 当 $x>-\frac{b}{k}$ 时，$y>0$

易错点 考虑问题不全面造成错解

12. 【2019·荆门】如果函数 $y=kx+b$（k，b 是常数）的图象不经过第二象限，那么 k，b 应满足的条件是（　　）

A. $k\geq0$ 且 $b\leq0$　　B. $k>0$ 且 $b\leq0$
C. $k\geq0$ 且 $b<0$　　D. $k>0$ 且 $b<0$

趣味谜语（各猜一成语）：（1）$1\,000^2=100\times100\times100$；（2）$40\div6$；（3）3.4；（4）$1\times1=1$；（5）$0+0=0$.（待续）
趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练

☞(答案见164页)

考查角度1 利用一次函数的图象与性质求字母的值或范围

13. 已知一次函数 $y=(2m+4)x+m-3$，求：

(1)当 m 为何值时，y 随 x 的增大而增大；

(2)当 m 为何值时，函数图象与 y 轴的交点在 x 轴下方；

(3)当 m 为何值时，函数图象经过原点；

(4)当 m 为何值时，这条直线平行于直线 $y=-x$.

考查角度2 利用一次函数图象的特征解新定义问题

14. 【2019·北京】在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y=kx+1(k\neq0)$ 与直线 $x=k$，直线 $y=-k$ 分别交于点 A，B，直线 $x=k$ 与直线 $y=-k$ 交于点 C.

(1)求直线 l 与 y 轴的交点坐标；

(2)横、纵坐标都是整数的点叫做整点，记线段 AB，BC，CA 围成的区域(不含边界)为 W.

①当 $k=2$ 时，结合函数图象，求区域 W 内的整点个数；

②若区域 W 内没有整点，直接写出 k 的取值范围.

Ⅲ 探究培优·拓展练

☞(答案见164页)

拔尖角度1 利用一次函数的性质求字母的值

15. 一次函数的解析式为 $y=ax-a+1$(a 为常数，且 $a\neq0$).

(1)若点 $\left(-\frac{1}{2},3\right)$ 在一次函数 $y=ax-a+1$ 的图象上，求 a 的值；

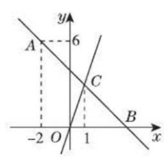
(2)当 $-1\leqslant x\leqslant2$ 时，函数有最大值 2，请求出 a 的值.

拔尖角度2 利用一次函数图象上点的坐标求其解析式

16. 【2018·淮安】如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(-2,6)$，且与 x 轴相交于点 B，与正比例函数 $y=3x$ 的图象相交于点 C，点 C 的横坐标为 1.

(1)求 k，b 的值；

(2)若点 D 在 y 轴负半轴上，且满足 $S_{\triangle COD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BOC}$，求点 D 的坐标.



(第16题)

趣味数学 谜底：(1)千方百计；(2)陆续不断(陆同6)；(3)不三不四；(4)一成不变；(5)一无所有.

第5课时　一次函数解析式的求法

名师点金

用待定系数法求一次函数的解析式要明确两点

1. **具备条件**：一次函数 $y=kx+b$ 中有两个不确定的系数 k,b，需要两个独立的条件确定两个关于 k,b 的方程，解方程求得 k,b 的值.这两个条件通常是两个点的坐标或两对 x,y 的值.
2. **确定方法**：将两对已知变量的对应值分别代入 $y=kx+b$ 中，建立关于 k,b 的两个方程，通过解方程，求出 k,b 的值，从而确定其解析式.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见164页)

知识点1 由点的坐标求正比例函数的解析式

1. 一个正比例函数的图象经过点(3，-1)，则它的解析式为(　　)

A. $y=-3x$　　B. $y=3x$

C. $y=-\frac{1}{3}x$　　D. $y=\frac{1}{3}x$

2. 【中考·陕西】若一个正比例函数的图象经过 $A(3,-6)$，$B(m,-4)$ 两点，则 m 的值为(　　)

A. 2　　B. 8　　C. -2　　D. -8

知识点2 用待定系数法求一次函数的解析式

3. 【2019·杭州】某函数满足当自变量 $x=1$ 时，函数值 $y=0$，当自变量 $x=0$ 时，函数值 $y=1$，写出一个满足条件的函数解析式：__________.

4. 【2019·绍兴】若三点(1，4)，(2，7)，$(a,10)$ 在同一直线上，则 a 的值等于(　　)

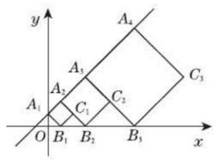
A. -1　　B. 0　　C. 3　　D. 4

5. 【中考·苏州】若点 $A(m,n)$ 在一次函数 $y=3x+b$ 的图象上，且 $3m-n>2$，则 b 的取值范围为(　　)

A. $b>2$　　B. $b>-2$　　C. $b<2$　　D. $b<-2$

知识点3 由直线的位置求一次函数的解析式

6. 【2019·攀枝花】正方形 $A_1B_1C_1A_2$，$A_2B_2C_2A_3$，$A_3B_3C_3A_4$，…按如图所示的方式放置，点 A_1,A_2,A_3，…和点 B_1,B_2,B_3，…分别在直线 $y=kx+b(k>0)$ 和 x 轴上，已知点 $A_1(0,1)$，点 $B_1(1,0)$，则 C_5 的坐标是________.



(第6题)

7. 【中考·怀化】一次函数 $y=-2x+m$ 的图象经过点 $P(-2,3)$，且与 x 轴，y 轴分别交于点 A,B，则 $\triangle AOB$ 的面积是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 4　　D. 8

8. 【2019·陕西】在平面直角坐标系中，将函数 $y=3x$ 的图象向上平移6个单位长度，则平移后的图象与 x 轴的交点坐标为(　　)

A. (2，0)　　B. (-2，0)　　C. (6，0)　　D. (-6，0)

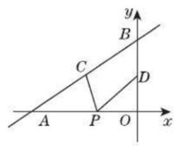
9. 【中考·枣庄】如图，直线 $y=\frac{2}{3}x+4$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 A 和点 B，点 C,D 分别是线段 AB,OB 的中点，点 P 为 OA 上一动点，当 $PC+PD$ 最小时，点 P 的坐标为(　　)

A. (-3，0)

B. (-6，0)

C. $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

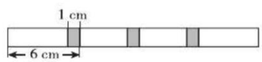
D. $\left(-\frac{5}{2},0\right)$



(第9题)

知识点4 由数量关系求一次函数的解析式

10. 用每张长6 cm的纸条，重叠1 cm粘贴成一条纸带，如图.纸带的长度 y(cm)与纸条的张数 x 之间的函数解析式是(　　)



(第10题)

A. $y=6x+1$　　B. $y=4x+1$

C. $y=4x+2$　　D. $y=5x+1$

11. 已知 $y+2$ 与 $x-1$ 成正比例，且当 $x=3$ 时，$y=4$.

(1)求 y 与 x 之间的函数解析式；

(2)当 $y=1$ 时，求 x 的值.

易错点 考虑问题不全面导致丢解

12. 已知直线 $y=-2x-b$ 与 y 轴的交点到原点的距离为5，则直线 $y=-2x-b$ 对应的函数解析式为__________.

数学是以数量关系和空间形式为主要研究对象的科学，数量关系和空间形式是从现实世界中抽象出来的，函数是研究运动变化的重要模型，它来源于客观实际又服务于客观实际.

趣味数学

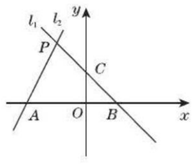
Ⅱ 整合方法·提升练
(答案见165页)

考查角度1 利用待定系数法求一次函数解析式

13.【2019·乐山】如图,已知过点$B(1,0)$的直线l_1与直线$l_2:y=2x+4$相交于点$P(-1,a)$.

(1)求直线l_1的解析式;

(2)求四边形$PAOC$的面积.



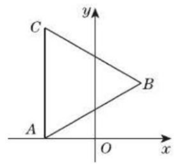
(第13题)

考查角度2 利用待定系数法解与几何相关的函数解析式

14.【2019·江西】如图,在平面直角坐标系中,点A,B的坐标分别为$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$,连接$AB$,以$AB$为边向上作等边三角形$ABC$.

(1)求点C的坐标;

(2)求线段BC所在直线的解析式.



(第14题)

Ⅲ 探究培优·拓展练
(答案见165页)

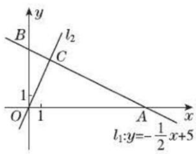
拔尖角度1 利用直线的位置关系求一次函数的解析式(分类讨论思想)

15.【2018·河北】如图,在平面直角坐标系xOy中,一次函数$y=-\frac{1}{2}x+5$的图象l_1分别与x,y轴交于A,B两点,正比例函数的图象l_2与l_1交于点$C(m,4)$.

(1)求m的值及l_2的解析式;

(2)求$S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC}$的值;

(3)一次函数$y=kx+1$的图象为l_3,且l_1,l_2,l_3不能围成三角形,直接写出k的值.



(第15题)

拔尖角度2 利用图象信息求实际问题的函数解析式

16.【2019·宁夏】如图,在综合与实践活动中,活动小组对学校400米的跑道进行规划设计,跑道由两段直道和两端是半圆弧的跑道组成,其中400米跑道最内圈为400米,两端半圆弧的半径为36米.(π取3.14)

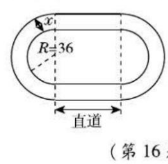
(1)求400米跑道中一段直道的长度;

(2)在活动中发现跑道周长(单位:米)随跑道宽度(距最内圈的距离,单位:米)的变化而变化,请完成下表.

跑道宽度/米	0	1	2	3	4	5	…
跑道周长/米	400						…

若设x表示跑道宽度(单位:米),y表示该跑道周长(单位:米),试写出y与x的函数关系式;

(3)将446米的跑道周长作为400米跑道场地的最外沿,那么它与最内圈(跑道周长400米)形成的区域最多能铺设道宽为1.2米的跑道多少条?



(第16题)

趣味数学　一个邮递员掀起了信箱的盖子,在清点有多少信件,你能根据这一情况猜出三个数学名词吗?(答案:开立方、函数、几何)

第6课时 含一个一次函数（图象）的应用

名师点金

任何一元一次方程都可以转化为 $ax+b=0$（a,b 为常数，$a\neq0$）的形式，所以解一元一次方程可以转化为当某个一次函数的函数值为 0 时，求相应的自变量的值. 从图象上看，相当于已知直线 $y=ax+b$，确定它与 x 轴的交点的横坐标，即“形”题用“数”解，“数”题用“形”解，充分体现了**数形结合**的思想.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

(答案见165页)

知识点1 一次函数的实际应用

1.【2019·威海】甲、乙施工队分别从两端修一段长度为 380 米的公路. 在施工过程中，乙队曾因技术改进而停工一天，之后加快了施工进度并与甲队共同按期完成了修路任务. 下表是根据每天工程进度绘制而成的.

施工时间/天	1	2	3	4	5	6	7	8	9
累计完成施工量/米	35	70	105	140	160	215	270	325	380

下列说法错误的是(　　)

A. 甲队每天修路 20 米

B. 乙队第一天修路 15 米

C. 乙队技术改进后每天修路 35 米

D. 前 7 天甲、乙两队修路长度相等

2.【中考·北京】一家游泳馆的游泳收费标准为 30 元/次，若购买会员年卡，可享受如下优惠：

会员年卡类型	办卡费用/元	每次游泳收费/元
A 类	50	25
B 类	200	20
C 类	400	15

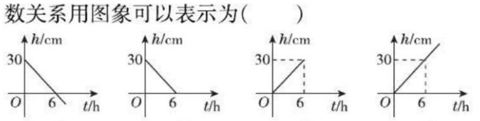
例如，购买 A 类会员年卡，一年内游泳 20 次，消费 $50+25\times20=550$（元），若一年内在该游泳馆游泳的次数介于 45～55 次之间，则最省钱的方式为(　　)

A. 购买 A 类会员年卡　　B. 购买 B 类会员年卡

C. 购买 C 类会员年卡　　D. 不购买会员年卡

知识点2 图象信息的实际应用

3. 一根蜡烛长 30 cm，点燃后每小时燃烧 5 cm，燃烧时蜡烛剩余的长度 h(cm) 和燃烧时间 t(h) 之间的函数关系用图象可以表示为(　　)



A　　B　　C　　D

4.【2016·巴彦淖尔】小刚家、公交车站、学校在一条笔直的公路旁(小刚家、学校到这条公路的距离忽略不计). 一天，小刚从家出发去上学，沿这条公路步行到公交车站恰好乘上一辆公交车，公交车沿这条公路匀速行驶，小刚下车时发现还有 4 min 上课，于是他沿着这条公路跑步赶到学校(上、下车时间忽略不计)，小刚与学校的距离 s(单位：m) 与他所用的时间 t(单位：min) 之间的函数关系如图所示. 已知小刚从家出发 7 min 时与家的距离是 1 200 m，从上公交车到他到达学校共用 10 min. 下列说法：

①公交车的速度为 400 m/min；

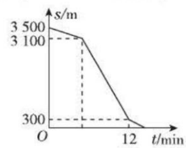
②小刚从家出发 5 min 时乘上公交车；

③小刚下公交车后跑向学校的速度是 100 m/min；

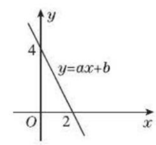
④小刚上课迟到了 1 min.

其中正确的个数是(　　)

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个



(第 4 题)

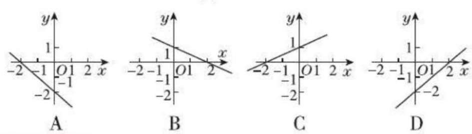


(第 5 题)

知识点3 一次函数与一元一次方程的关系

5.【2018·邵阳】如图，一次函数 $y=ax+b$ 的图象与 x 轴相交于点 $(2,0)$，与 y 轴相交于点 $(0,4)$，结合图象可知，关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解是________.

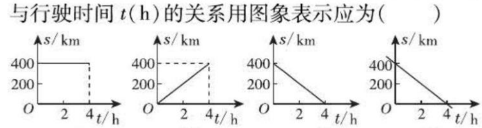
6.【中考·合肥】已知方程 $\frac{1}{2}x+b=0$ 的解是 $x=-2$，下列可能为函数 $y=\frac{1}{2}x+b$ 的图象的是(　　)



A　　B　　C　　D

易错点 对自变量或函数值代表的实际意义理解不准确而造成错误

7. 汽车由 A 地驶往相距 400 km 的 B 地，如果汽车的平均速度是 100 km/h，那么汽车距 B 地的距离 s(km) 与行驶时间 t(h) 的关系用图象表示应为(　　)



A　　B　　C　　D

一位农夫请了工程师、物理学家和数学家来，想用最少的篱笆围出最大的面积. 工程师用篱笆围出一个圆，宣称这是最优设计.（待续）

趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见165页)

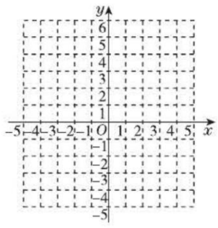
考查角度1 利用一次函数的图象解与方程有关的应用

8. 在如图所示的直角坐标系中画出函数 $y=2x+6$ 的图象,利用图象:

(1)求方程 $2x+6=0$ 的解;

(2)求满足 $2x+6>0$ 的 x 的取值范围;

(3)若 $-2\leqslant y\leqslant 2$,请直接写出 x 的取值范围.



(第8题)

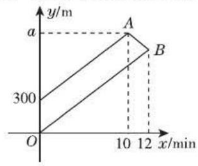
考查角度2 利用一次函数的图象求实际中函数的解析式

9.【2019·龙东地区】小明放学后从学校回家,出发5 min时,同桌小强发现小明的数学作业卷忘记拿了,立即拿着数学作业卷按照同样的路线去追赶小明,小强出发10 min时,小明才想起没拿数学作业卷,马上以原速原路返回,在途中与小强相遇,两人离学校的路程 y(m)与小强所用时间 x(min)之间的函数图象如图所示.

(1)求函数图象中 a 的值;

(2)求小强的速度;

(3)求线段 AB 的函数解析式,并写出自变量的取值范围.

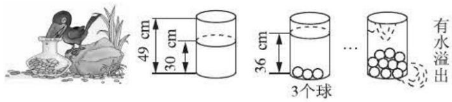


(第9题)

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见165页)

拔尖角度1 利用一次函数解与不等式相关的实际问题

10. 小明受"乌鸦喝水"故事的启发,利用水桶和体积相同的小球进行了如下操作:



(第10题)

请根据图中给出的信息,解答下列问题.

(1)放入一个小球,水桶中水面升高________;

(2)求放入小球后水桶中水面的高度 y(cm)关于小球个数 x(个)的一次函数解析式(水未溢出,不要求写出自变量的取值范围);

(3)水桶中至少放入几个小球时有水溢出?

拔尖角度2 利用一次函数解与不等式相关的问题

11.【2019·襄阳】襄阳市某农谷生态园响应国家发展有机农业政策,大力种植有机蔬菜.某超市看好甲、乙两种有机蔬菜的市场价值,经调查,这两种蔬菜的进价和售价如下表所示:

有机蔬菜种类	进价/(元/千克)	售价/(元/千克)
甲	m	16
乙	n	18

(1)该超市购进甲种蔬菜10千克和乙种蔬菜5千克需要170元;购进甲种蔬菜6千克和乙种蔬菜10千克需要200元,求 m,n 的值;

(2)该超市决定每天购进甲、乙两种蔬菜共100千克进行销售,其中甲种蔬菜的数量不少于20千克,且不多于70千克,实际销售时,由于多种因素的影响,甲种蔬菜超过60千克的部分,当天需要打5折才能售完,乙种蔬菜能按售价卖完,求超市当天售完这两种蔬菜获得的利润额 y(元)与购进甲种蔬菜的数量 x(千克)之间的函数关系式,并写出 x 的取值范围;

(3)在(2)的条件下,超市在获得的利润额 y(元)取得最大值时,决定售出的甲种蔬菜每千克捐出 $2a$ 元,乙种蔬菜每千克捐出 a 元给当地福利院,若要保证捐款后的盈利率不低于20%,求 a 的最大值.

趣味数学 物理学家将篱笆拉开成一条长长的直线,假设篱笆有无限长,认为围起半个地球总够大了.数学家好好嘲笑了他们一番,他用很少的篱笆把自己围起来,然后说:"我现在是在外面."

第7课时　含两个一次函数（图象）的应用

名师点金

运用一次函数解决实际问题的方法

在日常生活和生产实践中有不少问题的数量关系可以用一次函数来表示. 在运用一次函数解决实际问题时，首先判断问题中的两个变量之间是不是一次函数关系，当确定是一次函数关系时，求出函数解析式，并运用一次函数的图象和性质进一步求得所需的结果.

说明：在应用一次函数的过程中，要注意结合实际，确定自变量的取值范围，也要结合实际情况舍去不符合题意的解.

I 夯实基础 · 逐点练 (答案见166页)

知识点 1 从图表中获取信息的应用

1. 一旅游团来到某旅游景点，看到售票处旁边的公告栏如图所示，请根据公告栏内容回答下列问题：

公告栏
各位游客，本景点门票价格如下：
1. 一次购买10张以下(含10张)，每张门票180元；
2. 一次购买10张以上，超过10张的部分，每张门票六折优惠.

(第1题)

(1)若旅游团人数为9人，门票费用是________元；若旅游团人数为30人，门票费用是________元.

(2)设旅游团人数为x人，写出该旅游团门票费用y(单位：元)与人数x(单位：人)的函数关系式(直接填写在下面的横线上).

$$y=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & (x=0,1,2,\cdots,10),\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & (x>10,\text{且}x\text{为整数}).\end{cases}$$

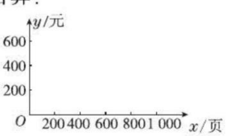
2. 某学校的复印任务原来由甲复印社承接，其收费y(元)与复印页数x(页)的关系如下表：

x/页	100	200	400	1 000	…
y/元	40	80	160	400	…

(1)已知y与x满足一次函数关系，求该函数的解析式；

(2)现在乙复印社表示：若学校先按每月付给200元的承包费，则可按每页0.15元收费，则乙复印社每月收费y(元)与复印页数x(页)之间的函数解析式为__________(不需要写出自变量的取值范围)；

(3)在如图所示的直角坐标系内画出(1)(2)中的函数图象，并回答每月复印页数在1 200页左右时，选择哪个复印社更合算？



(第2题)

知识点 2 从图象中获取信息的应用

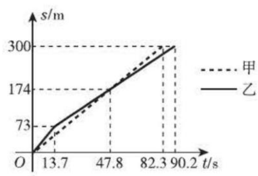
3. 【2019 · 东营】甲、乙两队参加了“端午情，龙舟韵”赛龙舟比赛，两队在比赛时的路程s(m)与时间t(s)之间的函数图象如图所示，请你根据图象判断，下列说法正确的是(　　)

A. 乙队率先到达终点

B. 甲队比乙队多走了126 m

C. 在47.8 s时，两队所走路程相等

D. 从出发到13.7 s的时间段内，乙队的速度慢

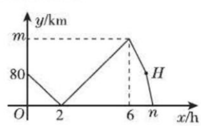


(第3题)

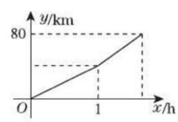
4. 【2018 · 天门】甲、乙两车从A地出发，匀速驶向B地，甲车以80 km/h的速度行驶1 h后，乙车才沿相同路线行驶. 乙车先到达B地并停留1 h后，再以原速按原路返回，直至与甲车相遇. 在此过程中，两车之间的距离y(km)与乙车行驶时间x(h)之间的函数关系如图所示. 下列说法：①乙车的速度是120 km/h；②$m=160$；③点H的坐标是(7，80)；④$n=7.5$. 其中说法正确的是(　　)

A. ①②③　　B. ①②④

C. ①③④　　D. ①②③④



(第4题)



(第5题)

5. 【2018 · 镇江】甲、乙两地相距80 km，一辆汽车上午9:00从甲地出发驶往乙地，匀速行驶了一半的路程后将速度提高了20 km/h，并继续匀速行驶至乙地，汽车行驶的路程y(km)与时间x(h)之间的函数关系如图所示，该车到达乙地的时间是当天上午(　　)

A. 10:35　　B. 10:40　　C. 10:45　　D. 10:50

在圆周上均匀地放4枚围棋子，然后做如下操作：若原来相邻的2枚棋子同色，就在其中间放1枚黑子，若异色，就在其中间放1枚白子.（待续）　趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见166页)

考查角度 1 方案选择问题

a. 表格信息题

6.【2019·天津】甲、乙两个批发店销售同一种苹果，在甲批发店，不论一次购买数量是多少，价格均为6元/千克，在乙批发店，一次购买数量不超过50千克时，价格为7元/千克；一次购买数量超过50千克时，其中有50千克的价格仍为7元/千克，超过50千克部分的价格为5元/千克. 设小王在同一个批发店一次购买苹果的数量为 x 千克($x>0$).

(Ⅰ)根据题意填表：

一次购买数量/千克	30	50	150
甲批发店花费/元	____	300	____
乙批发店花费/元	____	350	____

(Ⅱ)设在甲批发店花费 y_1 元，在乙批发店花费 y_2 元，分别求 y_1, y_2 关于 x 的函数解析式；

(Ⅲ)根据题意填空：

①若小王在甲批发店和在乙批发店一次购买苹果的数量相同，且花费相同，则他在同一个批发店一次购买苹果的数量为________kg；

②若小王在同一个批发店一次购买苹果的数量为120 kg，则他在甲、乙两个批发店中的______批发店购买花费少；

③若小王在同一个批发店一次购买苹果花费了360元，则他在甲、乙两个批发店中的________批发店购买数量多.

b. 文字信息题

7.【2019·山西】某游泳馆推出了两种收费方式.

方式一：顾客先购买会员卡，每张会员卡200元，仅限本人一年内使用，凭卡游泳，每次游泳再付费30元.

方式二：顾客不购买会员卡，每次游泳付费40元.

设小亮在一年内来此游泳馆的次数为 x 次，选择方式一的总费用为 y_1(元)，选择方式二的总费用为 y_2(元).

(1)请分别写出 y_1, y_2 与 x 之间的函数表达式.

(2)小亮一年内在此游泳馆游泳的次数 x 在什么范围时，选择方式一比方式二省钱？

考查角度 2 行程问题

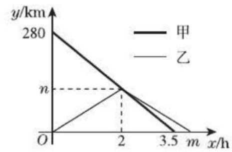
a. 图象信息题

8.【2019·吉林】甲、乙两车分别从 A, B 两地同时出发，沿同一条公路相向行驶，相遇后，甲车继续以原速行驶到 B 地，乙车立即以原速原路返回到 B 地，甲、乙两车距 B 地的路程 y(km)与各自行驶的时间 x(h)之间的关系如图所示.

(1) $m=$________, $n=$________；

(2)求乙车距 B 地的路程 y 关于 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围；

(3)当甲车到达 B 地时，求乙车距 B 地的路程.



(第8题)

b. 文字信息题

9.【中考·滨州】星期天，李玉刚同学随爸爸妈妈回老家探望爷爷奶奶，爸爸8:30骑自行车先走，平均每小时骑行20 km；李玉刚同学和妈妈9:30乘公交车后走，公交车的平均速度是40 km/h. 爸爸的骑行路线与李玉刚同学和妈妈的乘车路线相同，路程均为40 km. 设爸爸骑行时间为 x h.

(1)请分别写出爸爸的骑行路程 y_1(km)、李玉刚同学和妈妈的乘车路程 y_2(km)与 x(h)之间的函数解析式，并注明自变量的取值范围；

(2)请在同一个平面直角坐标系中画出(1)中两个函数的图象；

(3)请回答谁先到达老家.

趣味数学　然后将原来的4枚棋子取走，以上算一次操作. 不论原来4枚棋子的黑白颜色如何排列，最多只需做4次操作，就可使剩下的4枚棋子全是黑子.

阶段核心方法专训

五种常见确定函数解析式的方法 (答案见 166 页)

名师点金

确定一次函数解析式的常用方法

1. 直接利用**定义**确定 k 和 b 的值;2. 利用**待定系数法**求解析式;3. 根据图形性质确定函数解析式;
4. 根据实际问题中**变量间的数量关系**列解析式;5. 根据**函数图象**确定解析式.

方法1 根据函数定义确定解析式

1. 已知函数 $y=(k+5)x^{k^2-24}$ 是关于 x 的正比例函数，则解析式为__________.

2. 当 m 为何值时，函数 $y=(m-3)x^{m^2-8}+3m$ 是关于 x 的一次函数？并求其函数解析式.

方法2 用待定系数法确定解析式

3. 一个一次函数的图象平行于直线 $y=-2x$，且过点 $A(-4,2)$，求这个函数的解析式.

方法3 根据图形性质确定函数解析式

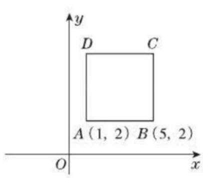
4. 在如图所示的平面直角坐标系中，四边形 $ABCD$ 是正方形，且顶点 A,B 的坐标分别为(1,2)，(5,2).

(1)点 C 的坐标为______，点 D 的坐标为______；

(2)若一次函数 $y=ax-4(a\neq0)$ 的图象经过点 C，求函数解析式；

(3)若第(2)问中函数的图象与 x 轴交于 E 点，画出图象，并求$\triangle OCE$ 的面积；

(4)若直线 $y=kx+b$ 与第(2)问中的函数图象平行且位于 B,D 两点之间(包含 B,D 两点)，求 b 的范围.



(第 4 题)

方法4 根据实际问题中变量间的数量关系列解析式

5. “黄金 1 号”玉米种子的价格为 5 元/千克. 如果一次购买 2 千克以上的种子，超过 2 千克部分的种子的价格打八折.

(1)根据题意，填写下表：

购买种子质量/千克	1.5	2	3.5	4	…
付款金额/元	7.5		16		…

(2)设购买种子质量为 x 千克，付款金额为 y 元，求 y 关于 x 的函数解析式；

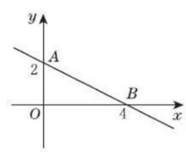
(3)若小张一次购买该种子花费了 30 元，求他购买种子的质量.

方法5 根据函数图象确定解析式

6. 如图，直线 AB 与 y 轴交于点 A，与 x 轴交于点 B，点 A 的纵坐标、点 B 的横坐标如图所示.

(1)求直线 AB 对应的函数解析式；

(2)点 P 在直线 AB 上，是否存在点 P，使得$\triangle AOP$ 的面积为 1，如果存在，求出所有满足条件的点 P 的坐标.



(第 6 题)

更多提分招数详见《极速提分法》第 16 页.

数学主要的目标是公众的利益和自然现象的解释. ——傅立叶

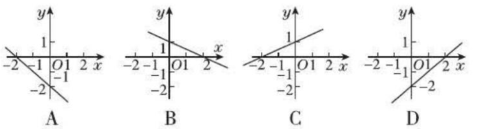
趣味数学

第8课时　一次函数与一元一次方程、不等式

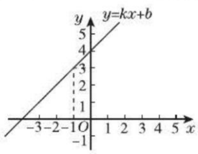
Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见166页)

知识点1 一次函数与一元一次方程(不等式)的关系

1. 已知方程$\frac{1}{2}x+b=0$的解是$x=-2$,下列可能为函数$y=x+b$的图象的是(　　)



2. 【2019·通辽】如图,直线$y=kx+b(k\neq0)$经过点$(-1,3)$,则不等式$kx+b\geq3$的解集为(　　)



(第2题)

A. $x>-1$　　B. $x<-1$

C. $x\geq3$　　D. $x\geq-1$

3. 【2019·苏州】若一次函数$y=kx+b$(k,b为常数,且$k\neq0$)的图象经过点$A(0,-1)$,$B(1,1)$,则不等式$kx+b>1$的解集为(　　)

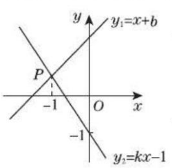
A. $x<0$　B. $x>0$　C. $x<1$　D. $x>1$

4. 【2018·资阳】已知直线$y_1=kx+1(k<0)$与直线$y_2=mx(m>0)$的交点坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}m\right)$,则不等式$mx-2<kx+1<mx$的解集为(　　)

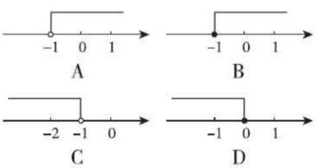
A. $x>\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

C. $x<\frac{3}{2}$　　D. $0<x<\frac{3}{2}$

5. 如图,直线$y_1=x+b$与$y_2=kx-1$相交于点P,点P的横坐标为-1,则关于x的不等式$x+b>kx-1$的解集在数轴上表示正确的是(　　)

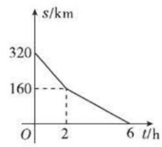


(第5题)



知识点2 一次函数的实际应用

6. 【中考·阜新】一辆汽车由A地开往B地,它距离B地的路程s(km)与行驶时间t(h)的关系如图所示,如果汽车一直快速行驶,那么可以提前________h到达B地.

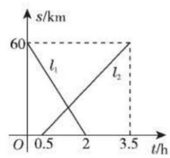


(第6题)

7. 【中考·青岛】A,B两地相距60 km,甲、乙两人从两地出发相向而行,甲先出发,如图,l_1,l_2表示两人离A地的距离s(km)与时间t(h)的关系,结合图象回答下列问题:

(1)表示乙离A地的距离与时间关系的图象是______(填l_1或l_2),甲的速度是________ km/h,乙的速度是________ km/h;

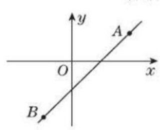
(2)甲出发后多少小时,两人恰好相距5 km?



(第7题)

易错点 利用函数图象解不等式时,对函数值和点的坐标的关系不理解导致出错(数形结合思想)

8. 如图,直线$y=kx+b$经过$A(2,1)$,$B(-1,-2)$两点,则不等式$-2<kx+b<1$的解集为__________.



(第8题)

趣味数学　物理学家、天文学家和数学家在苏格兰看到一只黑羊,天文学家说:苏格兰的羊是黑的.物理学家说:只能说那只黑羊在苏格兰被发现.数学家道:只能说从我们观察的角度看此时这只羊有一侧是黑的.

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见167页)

考查角度 1 利用一次函数的图象解与不等式有关的应用

9.【2019·南京】已知一次函数 $y_1=kx+2$（k 为常数，$k\neq0$）和 $y_2=x-3$.

(1)当 $k=-2$ 时，若 $y_1>y_2$，求 x 的取值范围；

(2)当 $x<1$ 时，$y_1>y_2$，结合图象，直接写出 k 的取值范围.

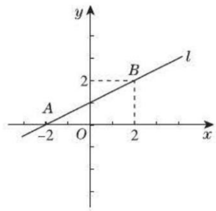
考查角度 2 利用一次函数的图象解与不等式有关的应用

10. 如图，直线 l 是一次函数 $y=kx+b$ 的图象，点 A,B 在直线 l 上，根据图象回答下列问题：

(1)写出方程 $kx+b=0$ 的解；

(2)写出不等式 $kx+b>1$ 的解集；

(3)若直线 l 上的点 $P(m,n)$ 在线段 AB 上移动，则 m,n 应如何取值.



(第10题)

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见167页)

拔尖角度 1 利用一次函数文字信息解实际应用中的方案问题

11.【2019·龙东地区】为庆祝中华人民共和国70周年华诞，某校举行书画大赛，准备购买甲、乙两种文具，奖励在活动中表现优秀的师生，已知购买2个甲种文具、1个乙种文具共需花费35元；购买1个甲种文具，3个乙种文具共需花费30元.

(1)购买一个甲种文具、一个乙种文具各需要多少元？

(2)若学校计划购买这两种文具共120个，投入资金不少于955元又不多于1 000元，设购买甲种文具 x 个，有多少种购买方案？

(3)设学校投入资金 W 元，在(2)的条件下，哪种购买方案需要的资金最少？最少资金是多少元？

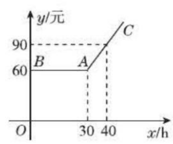
拔尖角度 2 利用一次函数图象信息解实际问题

12.【2018·临安】某市推出电脑上网包月制，每月收取费用 y(元)与上网时间 x(h)的函数关系如图所示，其中 BA 是线段，且 $BA\parallel x$ 轴，AC 是射线.

(1)当 $x\geqslant30$ 时，求 y 与 x 之间的函数解析式；

(2)若小李4月份上网20 h，他应付多少元的上网费用？

(3)若小李5月份上网费用为75元，则他在该月份的上网时间是多少？



(第12题)

陈景润（1933—1996），当代著名数学家.1950年，仅以高二学历考入厦门大学，1953年毕业后，分配到北京四中任教.1957年调入中国科学院数学研究所，后任研究员.（待续） 趣味数学

第9课时　一次函数与二元一次方程(组)

名师点金

二元一次方程与一次函数之间的区别和联系

区别:

1. 二元一次方程有两个未知数,而一次函数有两个变量;
2. 二元一次方程是用一个等式表示两个未知数的关系,而一次函数既可以用一个等式表示两个变量之间的关系,又可以用列表或图象来表示两个变量之间的关系.

联系: 在平面直角坐标系中分别描出以二元一次方程的解为坐标的点,这些点都在相应的一次函数的图象上.

Ⅰ 夯实基础·逐点练

(答案见167页)

知识点1 二元一次方程与一次函数的关系

1. 若二元一次方程 $3x-2y=1$ 所对应的直线是 l,则下列各点不在直线 l 上的是(　　)

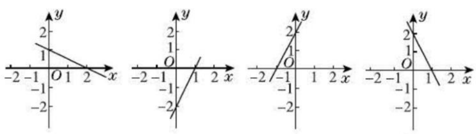
A. $(1,1)$　　B. $(-1,1)$

C. $(-3,-5)$　　D. $\left(2,\frac{5}{2}\right)$

2. 【2018·呼和浩特】若以二元一次方程 $x+2y-b=0$ 的解为坐标的点 (x,y) 都在直线 $y=-\frac{1}{2}x+b-1$ 上,则常数 $b=$(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. -1　　D. 1

3. 以方程 $y-2x-2=0$ 的解为坐标的点组成的图象是(　　)



A　　B　　C　　D

4. 把方程 $x+y=2$ 的两个解 $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$ 组成有序数对 $(1,1)$, $(0,2)$,过这两点画直线 l,下列各点不在直线 l 上的是(　　)

A. $(4,-2)$　　B. $(2,1)$

C. $(-2,4)$　　D. $(-4,6)$

知识点2 二元一次方程组与一次函数的关系

5. 已知直线 $l_1: y=-3x+b$ 与直线 $l_2: y=-kx+3$ 在同一坐标系中交于点 $(1,-2)$,那么方程组 $\begin{cases}3x+y=b,\\kx+y=3\end{cases}$ 的解是(　　)

A. $\begin{cases}x=1,\\y=-2\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=-1,\\y=-2\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=-1,\\y=2\end{cases}$

6. 【中考·贵阳】若直线 $y=-x+a$ 与直线 $y=x+b$ 的交点坐标为 $(2,8)$,则 $a-b$ 的值为(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

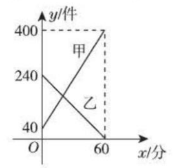
7. 若一次函数 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$ 的图象没有交点,则方程组 $\begin{cases}k_1x-y+b_1=0,\\k_2x-y+b_2=0\end{cases}$ 的解的情况是(　　)

A. 有无数个解　　B. 有两个解

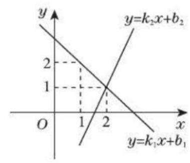
C. 只有一个解　　D. 没有解

8. 【2019·聊城】某快递公司每天上午 9:00－10:00 为集中揽件和派件时段,甲仓库用来揽收快件,乙仓库用来派发快件,该时段内甲、乙两仓库的快件数量 y(件)与时间 x(分)之间的函数图象如图所示,那么当两仓库快递件数相同时,此刻的时间为(　　)

A. 9:15　　B. 9:20　　C. 9:25　　D. 9:30



(第8题)



(第9题)

9. 【2019·贵阳】在平面直角坐标系内,一次函数 $y=k_1x+b_1$ 与 $y=k_2x+b_2$ 的图象如图所示,则关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}y-k_1x=b_1\\y-k_2x=b_2\end{cases}$ 的解是________.

10. 【中考·大连】在平面直角坐标系中,点 A,B 的坐标分别为 $(m,3)$, $(3m-1,3)$,若线段 AB 与直线 $y=2x+1$ 相交,则 m 的取值范围为____________.

易错点 审题不仔细,没有按照要求解题

11. 用图象法解方程组 $\begin{cases}x+2y=4,\\x-y=1.\end{cases}$

趣味数学　1980年当选为中国科学院物理学数学部委员(中国科学院院士). 他研究哥德巴赫猜想和其他数论问题的成就,至今仍然在世界上遥遥领先,被称为哥德巴赫猜想第一人.(待续)

Ⅱ 整合方法·提升练

(答案见167页)

考查角度1 利用直线交点坐标求方程组中字母的值

12. 已知一次函数 $y=3x+6$ 与 $y=2x+b$ 的图象的交点为 $P(-10,-24)$. 求方程组 $\begin{cases} y=3x+6, \\ y=2x+b \end{cases}$ 的解和 b 的值.

考查角度2 利用图象法解二元一次方程组

13. 在同一平面直角坐标系内画出二元一次方程 $2x-y-2=0$ 和 $x-y+3=0$ 所对应的一次函数的图象. 利用图象求：

(1)方程 $2x-2=x+3$ 的解；

(2)方程组 $\begin{cases} 2x-y-2=0, \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 的解.

Ⅲ 探究培优·拓展练

(答案见167页)

拔尖角度1 利用二元一次方程组与一次函数解决实际问题

14. 【2019·深圳】有 A,B 两个发电厂,每焚烧 1 t 垃圾,A 发电厂比 B 发电厂多发 40 kW·h 电,A 发电厂焚烧 20 t 垃圾比 B 发电厂焚烧 30 t 垃圾少发 1 800 kW·h电.

(1)求焚烧 1 t 垃圾,A 和 B 发电厂各发电多少千瓦时?

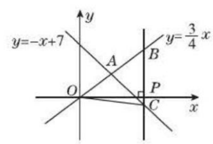
(2)A,B 两个发电厂共焚烧 90 t 的垃圾,A 发电厂焚烧的垃圾不多于 B 发电厂焚烧的垃圾的两倍,求 A 发电厂和 B 发电厂总发电量的最大值.

拔尖角度2 利用二元一次方程组与一次函数的关系解决几何问题

15. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,已知正比例函数 $y=\frac{3}{4}x$ 与一次函数 $y=-x+7$ 的图象交于点 A.

(1)求点 A 的坐标；

(2)设 x 轴上有一点 $P(a,0)$,过点 P 作 x 轴的垂线(垂线位于点 A 的右侧),分别交 $y=\frac{3}{4}x$ 和 $y=-x+7$ 的图象于点 B,C,连接 OC,若 $BC=7$,求三角形OBC 的面积.



(第15题)

1996年3月19日下午1点10分，陈景润在北京医院去世，年仅63岁. 他为科学事业做出的最后一次奉献是：捐赠遗体供医院解剖.

趣味数学

19.3　课题学习　选择方案

名师点金

利用一次函数解实际问题，首先，要建立函数模型，求函数解析式．求函数解析式可以根据题目中所给出的两个变量之间的关系列出函数解析式，也可以根据两个变量之间满足的图象关系用**待定系数法**求函数解析式．其次，把已知自变量的值代入函数解析式中求函数值或把已知函数值代入函数解析式中求自变量的值，从而解决实际问题．

注意：对于分段函数容易忽略自变量的取值范围而导致错误．

整合方法·分类练

(答案见167页)

题型1 租车方案

1.【中考·天津】公司有330台机器需要一次性运送到某地，计划租用甲、乙两种货车共8辆，已知每辆甲种货车一次最多运送机器45台、租车费用为400元，每辆乙种货车一次最多运送机器30台、租车费用为280元．

(1)设租用甲种货车x辆(x为非负整数)，试填写表格．

表一：

租用甲种货车的数量/辆	3	7	x
租用的甲种货车最多运送机器的数量/台	135	______	______
租用的乙种货车最多运送机器的数量/台	150	______	______

表二：

租用甲种货车的数量/辆	3	7	x
租用甲种货车的费用/元	______	2 800	______
租用乙种货车的费用/元	______	280	______

(2)给出能完成此项运送任务的最节省费用的租车方案，并说明理由．

题型2 购买方案

2.【2019·河南】学校计划为“我和我的祖国”演讲比赛购买奖品，已知购买3个A奖品和2个B奖品共需120元；购买5个A奖品和4个B奖品共需210元．

(1)求A,B两种奖品的单价；

(2)学校准备购买A,B两种奖品共30个，且A奖品的数量不少于B奖品数量的$\frac{1}{3}$，请设计出最省钱的购买方案，并说明理由．

题型3 生产方案

3.【中考·郴州】某工厂有甲种原料130千克，乙种原料144千克．现用这两种原料生产出A,B两种产品共30件．已知生产每件A产品需甲种原料5千克，乙种原料4千克，且每件A产品可获利700元；生产每件B产品需甲种原料3千克，乙种原料6千克，且每件B产品可获利900元．设生产A产品x件(产品件数为整数件)，根据以上信息解答下列问题：

(1)生产A,B两种产品的方案有哪几种？

(2)设生产这30件产品可获利y元，写出y关于x的函数解析式，写出(1)中利润最大的方案，并求出最大利润．

趣味数学　在中国古代水钟又叫“刻漏”或“漏壶”，水从上面的贮水壶慢慢漏入下面的受水壶中，受水壶中的浮子上竖直放置一根标尺(漏箭)．(待续)

题型4 利润方案

4. “世界那么大，我想去看看”一句话红遍网络，骑自行车旅行越来越受人们的喜欢，各种品牌的山地自行车相继投放市场. 顺风车行经营的 A 型车 2018 年 6 月份销售总额为 3.2 万元，2019 年经过改造升级后 A 型车每辆销售价比 2018 年增加 400 元，若 2019 年 6 月份与 2018 年 6 月份卖出的 A 型车数量相同，则 2019 年 6 月份 A 型车销售总额将比 2018 年 6 月份销售总额增加 25%.

(1)求 2019 年 6 月份 A 型车每辆销售价为多少元；(用列方程的方法解答)

(2)该车行计划 2019 年 7 月份新进一批 A 型车和 B 型车共 50 辆，且 B 型车的进货数量不超过 A 型车数量的两倍，应如何进货才能使这批车获利最多？

A、B 两种型号车的进货和销售价格如表：

	A 型车	B 型车
进货价格/(元/辆)	1 100	1 400
销售价格/(元/辆)	2019 年的销售价格	2 400

题型5 选择方案

5.【中考·甘孜州】某学校计划组织 500 人参加社会实践活动，与某公交公司接洽后，得知该公司有 A，B 型两种客车，它们的载客量和租金如表所示：

	A 型客车	B 型客车
载客量/(人/辆)	45	28
租金/(元/辆)	400	250

经测算，租用 A，B 型客车共 13 辆较为合理，设租用 A 型客车 x 辆，根据要求回答下列问题：

(1)用含 x 的代数式填写下表：

	车辆数/辆	载客量/人	租金/元
A 型客车	x	$45x$	$400x$
B 型客车	$13-x$	______	______

(2)采用怎样的租车方案可以使总的租车费用最低，最低为多少？

6. 为了推动“龙江经济带”建设，我省某蔬菜企业决定通过加大种植面积、增加种植种类，促进经济发展，2019 年春，预计种植西红柿、马铃薯、青椒共 100 公顷(三种蔬菜的种植面积均为整数)，青椒的种植面积是西红柿种植面积的 2 倍，经预算，种植西红柿的利润可达 1 万元/公顷，青椒 1.5 万元/公顷，马铃薯 2 万元/公顷，设种植西红柿 x 公顷，总利润为 y 万元.

(1)求总利润 y(万元)与种植西红柿的面积 x(公顷)之间的关系式.

(2)若预计总利润不低于 180 万元，西红柿的种植面积不低于 8 公顷，有多少种种植方案？

(3)在(2)的前提下，该企业决定投资不超过获得最大利润的 $\frac{1}{8}$，在冬季同时建造 A、B 两种类型的温室大棚，开辟新的经济增长点，经测算，投资 A 种类型的大棚 5 万元/个，B 种类型的大棚 8 万元/个，请直接写出有哪几种建造方案？

假设水量是均匀的，受水壶中的浮子就会均匀升高，也就是说浮子升高的高度与所经历的时间成正比，利用这一关系，在漏箭上标上适当的刻度，就可以用来计时了.(待续)

趣味数学

阶段核心归类专训

一次函数的两种常见应用

(答案见 168 页)

名师点金

一次函数的两种常见应用主要体现在解决实际问题和几何问题上.能够从函数图象中得到需要的信息,并求出函数解析式从而解决实际问题和几何问题,是一次函数应用价值的体现,这种题型常与一些热点问题结合,考查学生综合分析问题、解决问题的能力.

应用1 利用一次函数解决实际问题

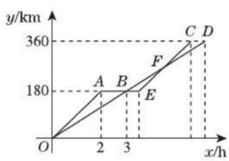
a. 行程问题

1.【2019·淮安】快车从甲地驶向乙地,慢车从乙地驶向甲地,两车同时出发并且在同一条公路上匀速行驶,途中快车休息 1.5 h,慢车没有休息.设慢车行驶的时间为 x h,快车行驶的路程为 y_1 km,慢车行驶的路程为 y_2 km.如图中折线 $OAEC$ 表示 y_1 与 x 之间的函数关系,线段 OD 表示 y_2 与 x 之间的函数关系.请解答下列问题:

(1)求快车和慢车的速度;

(2)求图中线段 EC 所表示的 y_1 与 x 之间的函数解析式;

(3)线段 OD 与线段 EC 相交于点 F,直接写出点 F 的坐标,并解释点 F 的实际意义.



(第 1 题)

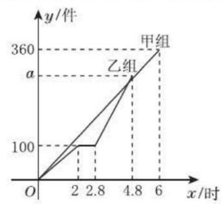
b. 工程问题

2. 甲、乙两组工人同时加工某种零件,乙组在工作中有一段时间停产更换设备,更换设备后,乙组的工作效率是原来的 2 倍.两组各自加工零件的数量 y(件)与时间 x(时)之间的函数图象如图所示.

(1)求甲组加工零件的数量 y 与时间 x 之间的函数解析式.

(2)求乙组加工零件总量 a 的值.

(3)甲、乙两组加工出的零件合在一起装箱,每够 300 件装 1 箱,零件装箱的时间忽略不计,经过多长时间恰好装满第 1 箱?再经过多长时间恰好装满第 2 箱?



(第 2 题)

更多提分招数详见《极速提分法》第 17 页.

c. **实际问题中的分段函数**

3 某种铂金饰品在甲、乙两个商店销售. 甲店标价为477 元/克,按标价出售,不优惠;乙店标价为 530 元/克,但若买的铂金饰品质量超过 3 克,则超出部分可打八折.

(1)分别写出到甲、乙两个商店购买该种铂金饰品所需费用 y(元)和质量 x(克)之间的函数解析式;(请直接写出)

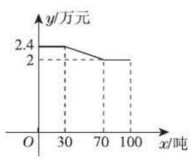
(2)李阿姨要买一个质量不少于 4 克且不超过 10 克的此种铂金饰品,到哪个商店购买合算?

4.【2019 · 黄冈】某县积极响应市政府加大产业扶贫力度的号召,决定成立草莓产销合作社,负责扶贫对象户种植草莓的技术指导和统一销售,所获利润年底分红. 经市场调研发现,草莓销售单价 y(万元)与产量 x(吨)之间的关系如图所示($0\leqslant x\leqslant 100$). 已知草莓的产销投入总成本 p(万元)与产量 x(吨)之间满足 $p=x+1$.

(1)直接写出草莓销售单价 y(万元)与产量 x(吨)之间的函数关系式;

(2)求该合作社所获利润 w(万元)与产量 x(吨)之间的函数关系式;

(3)为提高农民种植草莓的积极性,合作社决定按 0.3 万元/吨的标准奖励扶贫对象种植户,为确保合作社所获利润 w'(万元)不低于 55 万元,产量至少要达到多少吨?



（第 4 题）

应用 2 利用一次函数解几何问题

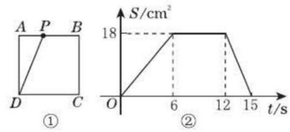
a. **利用图象解几何问题**

5. 如图①所示,正方形 $ABCD$ 的边长为 6 cm,动点 P 从点 A 出发,在正方形的边上沿 $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow D$ 运动,设运动的时间为 t(s),三角形 APD 的面积为 $S(\text{cm}^2)$,S 与 t 的函数图象如图②所示,请回答下列问题:

(1)点 P 在 AB 上运动的时间为________ s,在 CD 上运动的速度为________ cm/s,三角形 APD 的面积 S 的最大值为________ cm^2;

(2)求出点 P 在 CD 上运动时 S 与 t 之间的函数解析式;

(3)当 t 为何值时,三角形 APD 的面积为 10 cm^2?



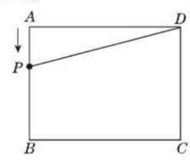
（第 5 题）

b. **利用分段函数解几何问题(分类讨论思想、数形结合思想)**

6. 在长方形 $ABCD$ 中,$AB=3$,$BC=4$,动点 P 从点 A 开始按 $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow D$ 的方向运动到点 D. 如图,设动点 P 所经过的路程为 x,$\triangle APD$ 的面积为 y.(当点 P 与点 A 或 D 重合时,$y=0$)

(1)写出 y 与 x 之间的函数解析式;

(2)画出此函数的图象.



（第 6 题）

更多提分招数详见《极速提分法》第 6 页.

数与形,本是相依倚,焉能分作两边飞? 数缺形时少直观,形少数时难入微. 数形结合百般好,隔离分家万事休,切莫忘,几何代数统一体,永远联系,切莫分离. ——华罗庚

趣味数学

全章热门考点整合应用

☞(答案见169页)

名师点金

本章内容是中考的必考内容,主要考查一次函数的图象与性质,求函数解析式及建立一次函数模型解决利润大小、方案选择等实际问题,题型涉及选择题、填空题与解答题.其热门考点可概括为三个概念,两个图象,一个性质,四个关系,一个方法,两个应用.

考点1 三个概念

概念1 变量与常量

1.(1)设圆柱的底面半径 R 不变,圆柱的体积 V 与圆柱的高 h 的关系式是 $V=\pi R^2h$,在这个变化过程中,常量和变量分别是什么?

(2)设圆柱的高 h 不变,在圆柱的体积 V 与圆柱的底面半径 R 的关系式 $V=\pi R^2h$ 中,常量和变量分别又是什么?

概念2 函数

2. 两个变量之间存在的关系式是 $y^2=x+1$(其中 x 是非负整数),y 是不是 x 的函数?如果变为用含 y 的代数式表示 x 的形式,x 是不是 y 的函数?请说明原因.

3. 求下列函数中自变量的取值范围:

(1)$y=-\frac{1}{2}x^2-x+6$;

(2)$y=-\frac{1}{12x-3}$;

(3)$y=\frac{\sqrt{16x-9}}{3x-2}$.

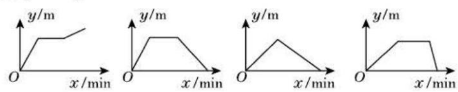
概念3 一次函数

4. 当 m,n 为何值时,$y=(5m-3)x^{2-n}+(m+n)$ 是关于 x 的一次函数?当 m,n 为何值时,y 是关于 x 的正比例函数?

考点2 两个图象

图象1 函数的图象

5.【中考·巴中】小张的爷爷每天坚持体育锻炼,星期天爷爷从家里跑步到公园,打了一会儿太极拳,然后沿原路慢步走到家,下面能反映当天爷爷离家的距离 y(m)与时间 x(min)之间关系的大致图象是(　　)



A　　B　　C　　D

图象2 一次函数的图象

6.【中考·阜新】对于一次函数 $y=kx+k-1(k\neq0)$,下列叙述正确的是(　　)

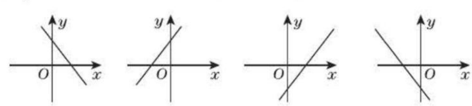
A. 当 $0<k<1$ 时,函数图象经过第一、二、三象限

B. 当 $k>0$ 时,y 随 x 的增大而减小

C. 当 $k<1$ 时,函数图象一定交于 y 轴的负半轴

D. 函数图象一定经过点$(-1,-2)$

7. 若有理数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$,且 $a<b<c$,则函数 $y=ax+c$ 的图象可能是(　　)



A　　B　　C　　D

考点3 一个性质

8. 已知点 $M(1,a)$ 和点 $N(2,b)$ 是一次函数 $y=-2x+1$ 的图象上的两点,则 a 与 b 的大小关系是(　　)

A. $a>b$　　B. $a=b$

C. $a<b$　　D. 以上都不对

更多提分招数详见《极速提分法》第21页.

趣味数学　数学家拉格朗日说:“只要代数与几何分道扬镳,它们的进展就缓慢,它们的应用就狭窄.但是,当这两者结合成伴侣时,它们就互相吸取新鲜的活力,从那以后,就以快速的步伐走向完善.”

9. 已知一次函数的解析式是 $y=(k-2)x+12-3k$.

(1)当其图象与 y 轴的交点位于原点下方时，判断函数值随着自变量的增大而变化的趋势；

(2)如果函数值随着自变量的增大而增大，且函数图象与 y 轴的交点位于原点上方，确定满足条件的正整数 k 的值.

考点4 四个关系

关系1 一次函数与正比例函数的关系

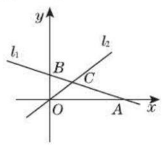
10. 【2018 · 包头】如图，在平面直角坐标系中，直线 $l_1: y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A 和点 B，直线 $l_2: y=kx(k\neq 0)$ 与直线 l_1 在第一象限交于点 C. 若 $\angle BOC=\angle BCO$，则 k 的值为(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$



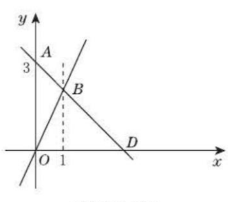
(第 10 题)

11. 如图，过 A 点的一次函数的图象与正比例函数 $y=2x$ 的图象相交于点 B.

(1)求一次函数的解析式；

(2)判断点 $C(4,-2)$ 是否在该一次函数的图象上，说明理由；

(3)若该一次函数的图象与 x 轴交于 D 点，求 $\triangle BOD$ 的面积.



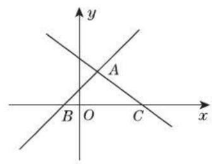
(第 11 题)

关系2 一次函数与一元一次方程的关系

12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=x+1$ 与 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 交于点 $A\left(\frac{8}{7},\frac{15}{7}\right)$，两直线分别交 x 轴于点 B 和点 C. 求：

(1)点 B,C 的坐标；

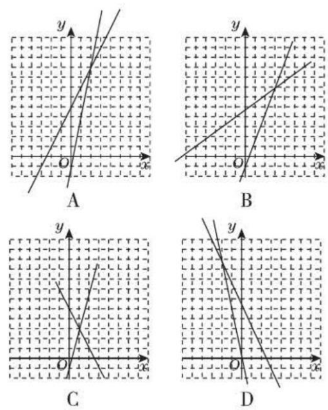
(2)$\triangle ABC$ 的面积.



(第 12 题)

关系3 一次函数与二元一次方程(组)的关系

13. 下列各个选项中的网格都是边长为 1 的小正方形，利用函数的图象解方程 $5x-1=2x+5$，其中正确的是(　　)



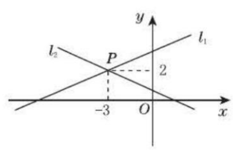
14. 如图，一次函数 $y=k_1x+b_1$ 的图象 l_1 与 $y=k_2x+b_2$ 的图象 l_2 相交于点 P，则方程组 $\begin{cases}y=k_1x+b_1,\\y=k_2x+b_2\end{cases}$ 的解是(　　)

A. $\begin{cases}x=-3,\\y=2\end{cases}$

B. $\begin{cases}x=2,\\y=-3\end{cases}$

C. $\begin{cases}x=3,\\y=2\end{cases}$

D. $\begin{cases}x=-3,\\y=-2\end{cases}$



(第 14 题)

更多提分招数详见《极速提分法》第 24 页.

1822 年傅立叶提出："一般地，函数 $f(x)$ 代表一系列的值或纵坐标，它们中的每一个都是任意的. 对于无限多个给定的横坐标 x 的值，有同样多个纵坐标 $f(x)$.（待续） 趣味数学

关系 4　一次函数与不等式(组)的关系

15. 【中考·武汉】已知一次函数 $y=kx+3$ 的图象经过点(1,4).

(1)求这个一次函数的解析式;

(2)求关于 x 的不等式 $kx+3\leqslant 6$ 的解集.

16. 在同一平面直角坐标系中,画出一次函数 $y_1=2x-4$,$y_2=x+1$ 的图象,根据图象求解下列问题:

(1)二元一次方程组 $\begin{cases}y=2x-4,\\y=x+1\end{cases}$ 的解;

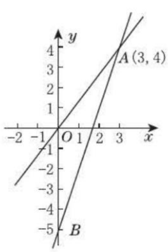
(2)一元一次不等式组 $\begin{cases}2x-4>0,\\x+1>0\end{cases}$ 的解集.

考点5　一个方法——待定系数法

17. 如图,一个正比例函数图象与一个一次函数图象交于点 $A(3,4)$,且一次函数的图象与 y 轴相交于点 $B(0,-5)$.

(1)求这两个函数的解析式;

(2)求三角形 AOB 的面积.



(第 17 题)

考点6　两个应用

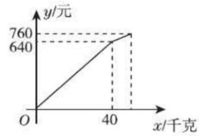
应用 1　给出解析式(或图象)解实际问题

18. 【2019·新疆】某水果店以每千克 8 元的价格购进苹果若干千克,销售了部分苹果后,余下的苹果每千克降价 4 元销售,全部售完,销售金额 y(元)与销售量 x(千克)之间的关系如图所示,请根据图象提供的信息完成下列问题:

(1)降价前苹果的销售单价是________元/千克;

(2)求降价后销售金额 y(元)与销售量 x(千克)之间的函数解析式,并写出自变量的取值范围;

(3)该水果店这次销售苹果盈利了多少元?



(第 18 题)

应用 2　只给语言叙述或图表情境解实际问题

19. 为改善生态环境,防止水土流失,某村计划在河堤坡面种植白杨树苗,现有甲、乙两家林场可提供相同质量的白杨树苗,其具体销售方案如下:

甲林场		乙林场	
购买树苗数量	销售价格	购买树苗数量	销售价格
不超过 1 000 棵时	4 元/棵	不超过 2 000 棵时	4 元/棵
超过 1 000 棵的部分	3.8 元/棵	超过 2 000 棵的部分	3.6 元/棵

设购买白杨树苗 x 棵,到两家林场购买所需费用分别为 $y_{甲}$ 元、$y_{乙}$ 元.

(1)该村需要购买 1 500 棵白杨树苗,若都在甲林场购买所需费用为________元,若都在乙林场购买所需费用为________元;

(2)分别求出 $y_{甲}$、$y_{乙}$ 与 x 之间的函数关系式;

(3)如果你是该村的负责人,应该选择到哪家林场购买树苗合算,为什么?

更多提分招数详见《极速提分法》第 25 页.

趣味数学　所有的纵坐标都有具体的数值,或是正数,或是负数,或是零.我们不假定这些纵坐标要服从一个共同的规律;它们以任意一种方式一个接一个地出现,其中的每一个对象是作为单独的量而给定的.

数据的分析

20.1 数据的集中趋势

第1课时 算术平均数

名师点金

平均数的特点

1. 一组数据的平均数是唯一的，它不一定是数据中的某个数据；
2. 平均数是反映数据集中趋势的一个统计量，是反映数据的平均水平的一个特征量；
3. 一般情况下，平均数能体现一组数据的整体性质.

I 夯实基础 · 逐点练 (答案见170页)

知识点1 算术平均数的计算

1.【2019 · 贺州】一组数据2,3,4,x,6的平均数是4，则x是(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 已知一组数据a_1,a_2,a_3,a_4,a_5的平均数为8，则另一组数据$a_1+10,a_2-10,a_3+10,a_4-10,a_5+10$的平均数为(　　)

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

3. 已知数据$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$的平均数为m，则数据$5x_1,5x_2,5x_3,\cdots,5x_n$的平均数为(　　)

A. m　　B. $5m$　　C. $\frac{m}{5}$　　D. $10m$

4. 已知一个班级有40人，数学老师第一次统计这个班的平均成绩为85分，在复查时发现漏记了一个学生的成绩80分，那么这个班的实际平均成绩应为(　　)

A. 85分　　B. 84.875分　　C. 87分　　D. 84.5分

5.【中考 · 深圳】已知一组数据x_1,x_2,x_3,x_4的平均数是5，则数据x_1+3,x_2+3,x_3+3,x_4+3的平均数是________.

知识点2 用计算器求平均数

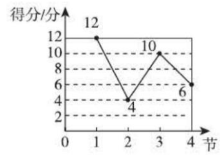
6. 利用计算器求一组数据的平均数时，一般步骤可分为三步：①选择统计模式，进入________状态；②依次输入各________；③按求平均数的功能键，显示________结果.

7. 某同学使用计算器求30个数据的平均数时，错将其中的一个数据105输入为15，那么由此求出的平均数与实际平均数的差是(　　)

A. -3.5　　B. 3　　C. 0.5　　D. -3

知识点3 算术平均数的应用

8.【2018 · 南宁】某球员参加一场篮球比赛，比赛分4节进行，该球员每节得分如图所示，则该球员平均每节得分为(　　)



(第8题)

A. 7分　　B. 8分

C. 9分　　D. 10分

9.【中考 · 淄博】张老师买了一辆启辰R50X汽车，为了掌握车的油耗情况，在连续两次加油时做了如下工作：

①把油箱加满油；

②记录了两次加油时的累计里程(注："累计里程"指汽车从出厂开始累计行驶的路程)，以下是张老师连续两次加油时的记录：

加油时间	加油量/L	加油时的累计里程/km
2016年4月28日	18	6 200
2016年5月16日	30	6 600

则在这段时间内，该车每100 km的平均耗油量为(　　)

A. 3 L　　B. 5 L　　C. 7.5 L　　D. 9 L

10. 已知某组10名学生的平均成绩为x分，如果另外5名学生每人得84分，那么整个组的平均成绩是(　　)

A. $\frac{x+84}{2}$分　　B. $\frac{10x+420}{15}$分

C. $\frac{10x+84}{15}$分　　D. $\frac{10+420}{15}$分

易错点 对平均数的概念理解不透彻而致错

11. 某汽车从甲地以速度v_1匀速行驶至乙地后，又从乙地以速度v_2匀速返回甲地，则汽车在整个行驶过程中的平均速度是(　　)

A. $\frac{v_1+v_2}{v_1v_2}$　　B. $\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}$　　C. $\frac{v_1+v_2}{2}$　　D. $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$

狐狸开公司招聘员工，说："本公司平均工资1 800元，名额有限，欲报从速."小老虎心想一个月1 800元工资还不错，于是到公司报名.狐狸马上录用了它，签订了1年的工作合同.(待续)

趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练 (答案见170页)

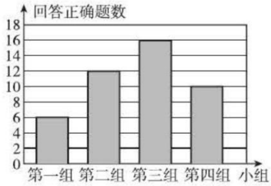
考查角度1 利用算术平均数求字母式子的值

12. (1)已知2,4,2x,4y四个数的平均数是5,且5,7,4x,6y四个数的平均数是9,求x^2+y^3的值;

(2)如果x_1与x_2的平均数是4,求x_1+1与x_2+5的平均数.　　【导学号:9941874】

考查角度2 利用条形图信息求平均数

13.【中考·柳州】在一次"社会主义核心价值观"知识竞赛中,四个小组回答正确题数情况如图,求这四个小组回答正确题数的平均数.

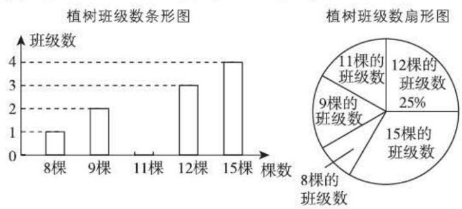


(第13题)

Ⅲ 探究培优·拓展练 (答案见170页)

拔尖角度1 利用图表信息求平均数

14.【2018·湘潭】今年我市将创建全国森林城市,提出了"共建绿色城"的倡议.某校积极响应,在3月12日植树节这天组织全校学生开展了植树活动,校团委对全校各班的植树情况进行了统计,绘制了如图所示的两幅不完整的统计图.



(第14题)

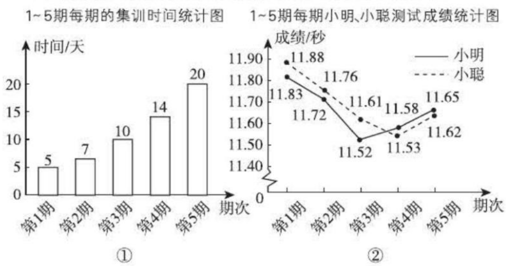
(1)求该校的班级总数;

(2)将条形统计图补充完整;

(3)求该校各班在这一活动中植树的平均棵数.

拔尖角度2 利用求平均数分析数据

15.【2019·绍兴】小明、小聪参加了100 m跑的5期集训,每期集训结束时进行测试,根据他们的集训时间、测试成绩绘制成如图所示的两个统计图.



(第15题)

根据图中信息,解答下列问题:

(1)这5期的集训共有多少天?小聪5次测试的平均成绩是多少?

(2)根据统计数据,结合体育运动的实际,从集训时间和测试成绩这两方面,说说你的想法.

趣味数学　第一个月,小老虎干得非常卖力,到了月底,小老虎高兴地去领工资,却只领到800元.狐狸狡猾地一笑说:"我说的是员工平均工资是1 800元呀!既然是平均数,那自然就有高有低了."(待续)

第2课时　加权平均数

名师点金

算术平均数与加权平均数的联系与区别

联系：若各个数据的权相同，则加权平均数就是算术平均数，因而算术平均数实质上是加权平均数的一种特例.

区别：算术平均数是指一组数据的和除以数据个数，在实际问题中，一组数据中各个数据的“重要程度”未必相同，即各个数据的权未必相同，因而加权平均数在计算上与算术平均数有所不同.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见170页)

知识点1 加权平均数的计算

1.【中考·呼伦贝尔】从一组数据中取出 a 个 x_1，b 个 x_2，c 个 x_3 组成一个样本，那么这个样本的平均数是(　　)

A. $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$　　B. $\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$

C. $\dfrac{ax_1+bx_2+cx_3}{3}$　　D. $\dfrac{a+b+c}{3}$

2. 已知一组数据，其中有4个数的平均数为20，另有16个数的平均数为15，则这20个数的平均数是(　　)

A. 16　　B. 17.5　　C. 18　　D. 20

知识点2 加权平均数的应用

a. 用比表示的“权”

3.【2018·资阳】某单位定期对员工的专业知识、工作业绩、出勤情况三个方面进行考核(考核的满分均为100分)，三个方面的重要性之比依次为3∶5∶2. 小王经过考核后所得的分数依次为(单位：分)：90，88，83，那么小王的最后得分是(　　)

A. 87分　　B. 87.5分　　C. 87.6分　　D. 88分

4. 某校广播站要招聘一名记者，小亮和小丽报名参加了三项素质测试，成绩如下：

	写作能力	普通话水平	计算机水平
小亮	90分	75分	51分
小丽	60分	84分	72分

将写作能力、普通话水平、计算机水平这三项的总分由原来按3∶5∶2计算，变成按5∶3∶2计算，总分变化情况是(　　)

A. 小丽增加得多　　B. 小亮增加得多

C. 两人成绩不变化　　D. 变化情况无法确定

b. 用百分数表示的“权”

5.【中考·南宁】某校规定学生的学期数学成绩满分为100分，其中研究性学习成绩占40%，期末卷面成绩占60%，小明的两项成绩(百分制)依次是80分，90分，则小明这学期的数学成绩是(　　)

A. 80分　　B. 82分　　C. 84分　　D. 86分

c. 用频(次)数表示单一数据的“权”

6.【2019·临沂】小明记录了临沂市五月份某周每天的最高气温，列成下表：

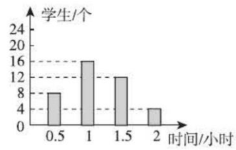
天数/天	1	2	1	3
最高气温/℃	22	26	28	29

则这周最高气温的平均值是(　　)

A. 26.25 ℃　　B. 27 ℃

C. 28 ℃　　D. 29 ℃

7.【2019·宁夏】为了解某班学生体育锻炼的用时情况，收集了该班学生一天用于体育锻炼的时间(单位：小时)，整理成如图的统计图. 则该班学生这天用于体育锻炼的平均时间为________小时.



(第7题)

d. 用频数表示组中值的“权”

8. 下列各组数据中，组中值不是10的是(　　)

A. $0\leqslant x<20$　　B. $8\leqslant x<12$

C. $7\leqslant x<13$　　D. $3\leqslant x<7$

9. 对一组数据进行了整理，结果如下表：

分组	$0\leqslant x<10$	$10\leqslant x<20$
频数	8	12

则这组数据的平均数约是(　　)

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 16

易错点 求加权平均数时，忽视数据与权的关系导致出错

10. 宾馆客房的标价影响入住百分率. 下表是某宾馆在近几年旅游周统计的平均数据. 在旅游周，要使宾馆客房收入最大，客房标价应选(　　)

客房标价/元	160	140	120	100
入住百分率	63.8%	74.3%	84.1%	95%

A. 160元　　B. 140元　　C. 120元　　D. 100元

小老虎迷惑了：“难道平均工资1 800元不是每个工人1 800元吗？”同学们，你能给小老虎讲讲吗？ 趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练

☞(答案见170页)

考查角度① 利用算术平均数及加权平均数做决策

11.【中考·呼和浩特】学校准备从甲、乙两位选手中选择一位选手代表学校参加所在地区的汉字听写大赛,学校对两位选手从表达能力、阅读理解、综合素质和汉字听写四个方面进行了测试,他们各自的成绩(百分制)如下表:

选手	表达能力	阅读理解	综合素质	汉字听写
甲	85	78	85	73
乙	73	80	82	83

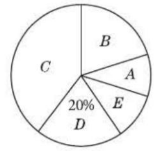
(1)由表中成绩已算得甲的平均成绩为80.25,请计算乙的平均成绩,从他们的这一成绩看,应选派谁?

(2)如果表达能力、阅读理解、综合素质和汉字听写分别赋予它们2,1,3和4的权,请分别计算两位选手的平均成绩,从他们的这一成绩看,应选派谁?

考查角度② 利用组中值估计加权平均数

12.【2019·大庆】某校为了解七年级学生的体重情况,随机抽取了七年级m名学生进行调查,将抽取学生的体重情况绘制如下不完整的频数分布表和扇形统计图.

组别	体重/千克	人数
A	$37.5\leq x\leq 42.5$	10
B	$42.5\leq x<47.5$	n
C	$47.5\leq x<52.5$	40
D	$52.5\leq x<57.5$	20
E	$57.5\leq x<62.5$	10



(第12题)

请根据图表信息回答下列问题:

(1)填空:①$m=$________,②$n=$________,③在扇形统计图中,C组所在扇形的圆心角的度数等于________;

(2)若把每组中各个体重值用这个组数据的中间值代替(例如:A组数据中间值为40千克),则被调查学生的平均体重是多少千克?

(3)如果该校七年级有1 000名学生,请估算七年级体重低于47.5千克的学生大约有多少人?

Ⅲ 探究培优·拓展练 ☞(答案见170页)

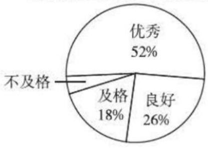
拔尖角度 1 利用图表信息求平均数分析数据

13.【2019·无锡】《国家学生体质健康标准》规定：体质测试成绩达到90.0分及以上的为优秀；达到80.0分至89.9分的为良好；达到60.0分至79.9分的为及格；59.9分以下为不及格.某校为了了解九年级学生体质健康状况，从该校九年级学生中随机抽取了10%的学生进行体质测试，测试结果如下面的统计表和如图所示的扇形统计图.

各等级学生平均分统计表

等级	优秀	良好	及格	不及格
平均分/分	92.1	85.0	69.2	41.3

各等级学生人数分布扇形统计图



（第13题）

(1)扇形统计图中“不及格”所占的百分比是________；

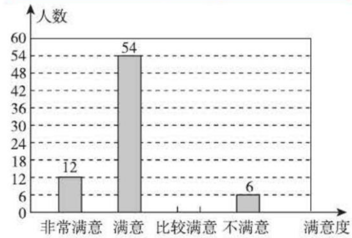
(2)计算所抽取的学生的测试成绩的平均分；

(3)若所抽取的学生中所有不及格等级学生的总分恰好等于某一个良好等级学生的分数，请估计该九年级学生中约有多少人达到优秀等级.

拔尖角度 2 利用图表信息补图求数据

14.【2018·成都】为了给游客提供更好的服务，某景区随机对部分游客进行了关于“景区服务工作满意度”的调查，并根据调查结果绘制成如下的统计表和如图的统计图(均不完整).

满意度	人数	所占百分比
非常满意	12	10%
满意	54	m
比较满意	n	40%
不满意	6	5%



（第14题）

根据图表信息，解答下列问题：

(1)本次调查的总人数为________人，表中m的值为________；

(2)请补全条形图；

(3)据统计，该景区平均每天接待游客约3 600人，若将“非常满意”和“满意”作为游客对景区服务工作的肯定，请你估计该景区服务工作平均每天得到多少名游客的肯定.

营养学家：你们这些死心眼的人，“派”是一种既好吃又健康的甜点！ 趣味数学

第3课时 加权平均数的应用

整合方法·分类练

(答案见171页)

类型1 权为百分比的加权平均数的应用

1.【2018·宜宾】某校拟招聘一名优秀数学教师，现有甲、乙、丙三名教师入围，三名教师笔试、面试成绩如下表所示，综合成绩按照笔试占60%、面试占40%进行计算，学校录取综合成绩得分最高者，则被录取教师的综合成绩为________.

成绩＼教师	甲	乙	丙
笔试	80分	82分	78分
面试	76分	74分	78分

类型2 权为整数比的加权平均数的应用

2. 某单位需招聘一名技术员，对甲、乙、丙三名候选人进行了笔试和面试两项测试，其成绩如表所示，根据录用程序，该单位又组织了100名评议人员对三人进行投票测评，三人得票率如图所示，每票1分.(没有弃权票，每人只能投1票)

测试项目	测试成绩/分		
	甲	乙	丙
笔试	80	85	95
面试	98	75	73

(1)请算出三人的民主评议得分.

(2)该单位将笔试、面试、民主评议三项测试得分按2:2:1的比确定综合成绩，谁将被录用？请说明理由.

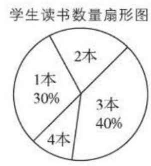
(第2题)

类型3 权为频数的加权平均数的应用

3.【2018·武汉】某校七年级共有500名学生，在“世界读书日”前夕，开展了“阅读助我成长”的读书活动. 为了解该年级学生在此次活动中课外阅读情况，从中随机抽取m名学生，调查他们课外阅读书籍的数量，将收集的数据整理成如下统计表和如图的扇形图.

学生读书数量统计表

阅读量/本	学生人数
1	15
2	a
3	b
4	5



(第3题)

(1)直接写出m,a,b的值；

(2)估计该年级全体学生在这次活动中课外阅读书籍的总量大约是多少本.

类型4 与组中值有关的加权平均数的应用

4. 为了解某校九年级学生的体能，随机抽取部分学生进行1 min的跳绳测试，并指定甲、乙、丙、丁四名学生对这次测试结果的数据进行整理，下面是这四名学生提供的部分信息：

甲：将全体测试数据分成6组绘成频数分布直方图(如图)；

乙：跳绳次数不少于105次的学生占96%；

丙：第①②两组所占的百分比之和为12%，且第②组与第⑥组的频数都是12；

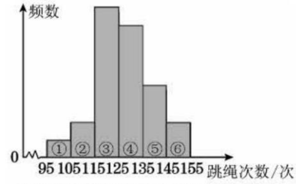
丁：第②③④组的频数之比为4：17：15.

根据这四名学生提供的信息，请解答如下问题：

(1)这次跳绳测试共抽取学生多少名？各组有多少人？

(2)如果跳绳次数不少于135次为优秀，则这次跳绳测试中达到优秀的人数为多少？

(3)以每组的组中值(每组的中点对应的数据)作为这组跳绳次数的代表，估计这批学生1 min跳绳次数的平均数.



(每组数据含左端点值，不含右端点值)

(第4题)

第4课时 中位数和众数

名师点金

平均数、中位数、众数之间的关系

联系：平均数、中位数、众数都是描述一组数据集中趋势的量.

区别：1. 平均数的大小与一组数据里的每个数据均有关系，任何一个数据的变动都会引起平均数的变动；

2. 中位数与数据大小的排列顺序有关，某些数据的变动对中位数没有影响，当一组数据中的个别数据变动较大时，可用中位数来描述其集中趋势；

3. 众数主要研究各数据出现的频数，其大小只与这组数据中的某些数据有关，当一组数据中某些数据多次重复出现时，我们往往关心众数.

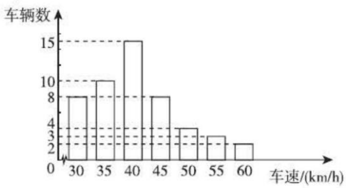
Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见171页)

知识点1 中位数

1.【2019·宜昌】李大伯前年在驻村扶贫工作队的帮助下种了一片果林，今年收获一批成熟的果子. 他选取了5棵果树，采摘后分别称重，每棵果树果子总质量(单位:kg)分别为90，100，120，110，80. 这五个数据的中位数是(　　)

A. 120　　B. 110　　C. 100　　D. 90

2.【2019·安徽】在某时段有50辆车通过一个雷达测速点，工作人员将测得的车速绘制成如图所示的条形统计图，则这50辆车的车速的众数(单位:km/h)为(　　)



(第2题)

A. 60　　B. 50　　C. 40　　D. 15

3.【2019·眉山】某班七个兴趣小组人数如下:5，6，6，x，7，8，9，已知这组数据的平均数是7，则这组数据的中位数是(　　)

A. 6　　B. 6.5　　C. 7　　D. 8

4.【中考·镇江】根据下表中的信息解决问题:

数据	37	38	39	40	41
频数	8	4	5	a	1

若该组数据的中位数不大于38，则符合条件的正整数a的取值共有(　　)

A. 3个　　B. 4个　　C. 5个　　D. 6个

知识点2 众数

5.【2019·辽阳】某校七年级举办"诵读大赛"，10名学生的参赛成绩分别为85分，90分，94分，85分，90分，95分，90分，96分，95分，100分，则这10名学生成绩的众数是(　　)

A. 85分　　B. 90分　　C. 92分　　D. 95分

6.【2019·铜仁】某班17名女同学的跳远成绩如下表所示:

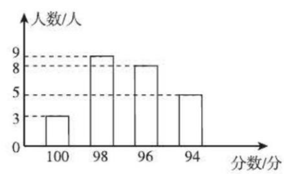
成绩/m	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
人数	2	3	2	3	4	1	1	1

这些女同学跳远成绩的众数和中位数分别是(　　)

A. 1.70 m，1.75 m　　B. 1.75 m，1.70 m

C. 1.70 m，1.70 m　　D. 1.75 m，1.725 m

7.【2019·聊城】在光明中学组织的全校师生迎"五四"诗词大赛中，来自不同年级的25名参赛同学的得分情况如图所示. 这些成绩的中位数和众数分别是(　　)



(第7题)

A. 96分、98分　　B. 97分、98分

C. 98分、96分　　D. 97分、96分

8.【2019·十堰】一次数学测试，某小组5名同学的成绩统计如下(有两个数据被遮盖):

组员	甲	乙	丙	丁	戊	平均成绩	众数
得分	81	77	■	80	82	80	■

则被遮盖的两个数据依次是(　　)

A. 80，80　　B. 81，80

C. 80，82　　D. 81，82

易错点 误以为众数是唯一的，造成漏解

9. 给出一组数据:5，2，1，5，3，5，2，2，则这组数据的众数是________.

如果比尔·盖茨和十几个穷光蛋在一个房间里，那么这个房间里十几个人的平均收入都超过了亿元，这是因为比尔·盖茨和穷光蛋的收入差距过大，导致平均数值缺乏实际参考意义.(待续) 趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练 (答案见171页)

考查角度 1 利用统计表中的信息分析数据

10.【中考·宜昌】宜昌市首批一次性投放公共自行车700辆供市民租用出行，由于投入数量不够，导致出现需要租用却未租到车的现象，现将随机抽取的某五天在同一时段的调查数据绘成如下表格.

时间	第一天 7:00~8:00	第二天 7:00~8:00	第三天 7:00~8:00	第四天 7:00~8:00	第五天 7:00~8:00
需要租用自行车却未租到车的人数/人	1 500	1 200	1 300	1 300	1 200

请回答下列问题：

(1)表格中的五个数据(人数)的中位数是多少？

(2)由随机抽样估计，平均每天在7:00~8:00需要租用公共自行车的人数是多少？

考查角度 2 利用统计表中的信息说明中位数、众数的意义

11.【中考·南京】某公司共有25名员工，下表是他们月收入的资料.

月收入/元	45 000	18 000	10 000	5 500	4 800	3 400	3 000	2 200
人数	1	1	1	3	6	1	11	1

(1)该公司员工月收入的中位数是________元，众数是________元.

(2)根据上表，可以算得该公司员工月收入的平均数为6 276元，你认为用平均数、中位数和众数中的哪一个反映该公司全体员工月收入水平较为合适？说明理由.

Ⅲ 探究培优·拓展练 (答案见171页)

拔尖角度 1 利用统计表的信息分析数据

12.【2019·温州】车间有20名工人，某一天他们生产的零件个数统计如下表.

车间20名工人某一天生产的零件个数统计表

生产零件的个数/个	9	10	11	12	13	15	16	19	20
工人人数/人	1	1	6	4	2	2	2	1	1

(1)求这一天20名工人生产零件的平均个数.

(2)为了提高大多数工人的积极性，管理者准备实行“每天定额生产，超产有奖”的措施. 如果你是管理者，从平均数、中位数、众数的角度进行分析，你将如何确定这个“定额”？

拔尖角度 2 利用图表信息分析数据

13.【2018·连云港】随着我国经济社会的发展，人民对于美好生活的追求越来越高. 某社区为了了解家庭对于文化教育的消费情况，随机抽取部分家庭，对每户家庭的文化教育年消费金额进行问卷调查，根据调查结果绘制成下面的统计表和如图的统计图(均不完整).

组别	家庭年文化教育消费金额 x/元	户数/户
A	$x \leqslant 5\ 000$	36
B	$5\ 000 < x \leqslant 10\ 000$	m
C	$10\ 000 < x \leqslant 15\ 000$	27
D	$15\ 000 < x \leqslant 20\ 000$	15
E	$x > 20\ 000$	30

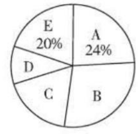
请你根据统计图表提供的信息，解答下列问题：

(1)本次被调查的家庭有______户，表中 $m=$______.

(2)本次调查数据的中位数出现在________组；扇形图中，D组所在扇形的圆心角的度数是________.

(3)这个社区有2 500户家庭，请你估计家庭年文化教育消费10 000元以上的家庭有多少户.

家庭年文化教育消费金额扇形图



(第13题)

趣味数学　但如果用中位数来衡量，中位数为0，就知道这个房间里起码有一半人是穷光蛋. 由此可见，中位数有助于了解普通民众的收入水平. 而中位数与平均数的差异，则有助于了解全体民众的收入集中度.

第5课时　应用中位数、众数及平均数分析数据

名师点金

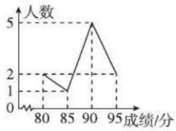
统计图中觅“三数”：平均数、中位数和众数，它们是描述一组数据的集中趋势的基本特征量，“三数”在实际问题中有着广泛的应用，是中考的热门考点．题目中经常出现给出统计图，根据统计图求“三数”，这时要充分从统计图中获取信息，根据各统计图的特点求“三数”．

Ⅰ 夯实基础·逐点练 ☞(答案见171页)

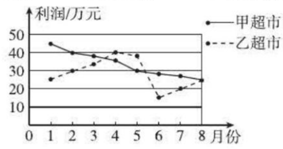
知识点1 从折线图中获取数据信息

1.【中考·邵阳】在学校演讲比赛中，10名选手的成绩统计图如图所示，则这10名选手成绩的众数是(　　)

A. 95分　　B. 90分　　C. 85分　　D. 80分



(第1题)



(第2题)

2.【2018·郴州】甲、乙两超市在1月至8月间的盈利情况统计图如图所示，下面结论不正确的是(　　)

A. 甲超市的利润逐月减少

B. 乙超市的利润在1月至4月间逐月增加

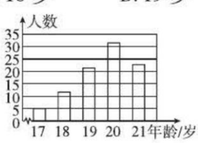
C. 8月份两家超市利润相同

D. 乙超市在9月份的利润必超过甲超市

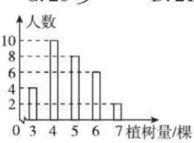
知识点2 从条形图中获取数据信息

3.【中考·宜昌】在6月26日“国际禁毒日”来临之际，华明中学围绕“珍爱生命，远离毒品”主题，组织师生到当地戒毒所开展相关问题的问卷调查活动，其中“初次吸毒时的年龄”在17至21岁的统计结果如图所示，则这些年龄的众数是(　　)

A. 18岁　　B. 19岁　　C. 20岁　　D. 21岁



(第3题)



(第4题)

4.【2017·宜宾】某单位组织职工开展植树活动，植树量与人数之间的关系如图所示，下列说法不正确的是(　　)

A. 参加本次植树活动的共有30人

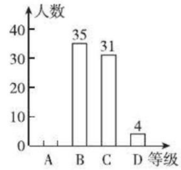
B. 每人植树量的众数是4棵

C. 每人植树量的中位数是5棵

D. 每人植树量的平均数是5棵

5.【2018·张家界】今年是我市全面推进中小学校“社会主义核心价值观”教育年，某校对全校学生进行了中期检测评价，检测结果分为A(优秀)，B(良好)，C(合格)，D(不合格)四个等级，并随机抽取若干名学生的检测结果作为样本进行数据处理，制作了如下所示不完整的统计表和如图所示不完整的统计图．

等级	频数	频率
A	a	0.3
B	35	0.35
C	31	b
D	4	0.04



(第5题)

请根据统计图和统计表提供的信息，解答下列问题：

(1)本次随机抽取的样本容量为________；

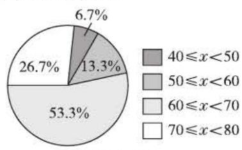
(2)$a=$________，$b=$________；

(3)请补全条形图；

(4)若该校共有学生800人，据此估算，该校学生在本次检测中达到“A(优秀)”等级的学生人数为______人.

知识点3 从扇形图中获取数据信息

6.【2018·柳州】如图是某年参加国际教育评估的15个国家学生的数学平均成绩(x)的统计图，由图可知，学生的数学平均成绩在$60\leq x<70$之间的国家占(　　)



(第6题)

A. 6.7%　　B. 13.3%　　C. 26.7%　　D. 53.3%

7.【中考·河北】甲、乙两组各有12名学生，组长绘制了本组五月份家庭用水量的统计图(如图)和统计表(如下).

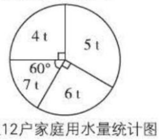
甲组12户家庭用水量统计表

用水量/t	4	5	6	9
户数	4	5	2	1

比较五月份两组家庭用水量的中位数，下列说法正确的是(　　)

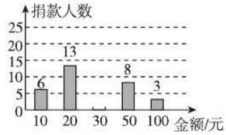
A. 甲组比乙组大　　B. 甲、乙两组相同

C. 乙组比甲组大　　D. 无法判断



乙组12户家庭用水量统计图

(第7题)



(第8题)

易错点 对众数的概念认识模糊

8. 某校八年级(3)班50名学生自发组织献爱心捐款活动．班长将捐款情况进行了统计，并绘制成了如图所示的统计图(不完整)．根据图中提供的信息，捐款金额的众数是(　　)

A. 20元　　B. 30元　　C. 50元　　D. 100元

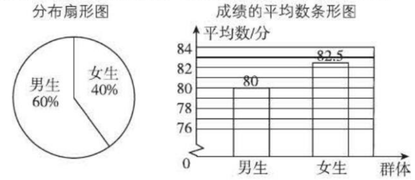
三个统计学家出去打猎，遇到一只很大的鹿．第一个统计学家开枪，但没打中，偏离左边1 cm．第二个统计学家开枪，也没打中，偏离右边1 cm．(待续)　趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练 (答案见 171 页)

考查角度 1 利用统计图中平均数信息分析数据

9. 【中考·南京】某校九年级有 24 个班,共 1 000 名学生,他们参加了一次数学测试,学校统计了所有学生的成绩,得到如图所示的统计图.

某校九年级男、女生的人数分布扇形图　　某校九年级数学测试男、女生成绩的平均数条形图



(第 9 题)

(1)求该校九年级学生本次数学测试成绩的平均数;

(2)下列关于本次数学测试说法正确的是(　　)

A. 九年级学生成绩的众数与平均数相等

B. 九年级学生成绩的中位数与平均数相等

C. 随机抽取一个班,该班学生成绩的平均数等于九年级学生成绩的平均数

D. 随机抽取 300 名学生,可以用他们成绩的平均数估计九年级学生成绩的平均数

考查角度 2 利用统计图信息分析数据

10. 【2018·镇江】某班 50 名学生的身高如下(单位:cm):

160	163	152	161	167	154	158	171	156	168
178	151	156	158	165	160	148	155	162	175
158	167	157	153	164	172	153	159	174	155
169	163	158	150	177	155	166	161	159	164
171	154	157	165	152	167	157	162	155	160

(1)小丽用简单随机抽样的方法从这 50 个数据中抽取一个容量为 5 的样本:161,155,174,163,152,请你计算小丽所抽取的这个样本的平均数;

(2)小丽将这 50 个数据按身高相差 4 cm 分组,并制作了如下的表格:

身高/cm	频数	频率
147.5~151.5	______	0.06
151.5~155.5	______	______
155.5~159.5	11	m
159.5~163.5	______	0.18
163.5~167.5	8	0.16
167.5~171.5	4	______
171.5~175.5	n	0.06
175.5~179.5	2	______
合计	50	1

①$m=$ ________,$n=$ ________;

②这 50 名学生身高的中位数落在哪个身高段内?身高在哪一段的学生数最多?

Ⅲ 探究培优·拓展练 (答案见 171 页)

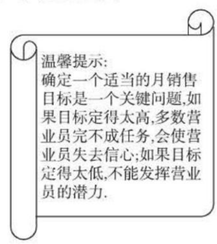
拔尖角度 ✓ 利用统计表信息分析"三数"

11. 【2019·云南】某公司销售部有营业员 15 人,该公司为了调动营业员的积极性,决定实行目标管理,根据目标完成的情况对营业员进行适当的奖励,为了确定一个适当的月销售目标,公司有关部门统计了这 15 人某月的销售量,如下表所示:

月销售量/件	1 770	480	220	180	120	90
人数	1	1	3	3	3	4

(1)直接写出这 15 名营业员该月销售量的平均数、中位数和众数;

(2)如图,如果想让一半左右的营业员都能达到月销售目标,你认为(1)中的平均数、中位数、众数中,哪个最适合作为月销售目标?请说明理由.



(第 11 题)

趣味数学　第三个统计学家没有开枪,却欢呼雀跃大声喊:"从平均意义上说我们打中了.

阶段核心归类专训

平均数、中位数、众数实际应用的五种类型

(答案见171页)

名师点金

利用统计量中“三数”的实际意义解决实际生活中的一些问题时，关键要理解“三数”的特征，然后根据题目中的已知条件或统计图表中的相关信息，通过计算相关数据解答.

类型1 平均数的应用

a. 平均数在商业营销中的决策作用

1. 一种什锦糖果是由甲、乙、丙三种不同价格的糖果混合而成的，已知甲种糖果的价格为9元/千克，乙种糖果的价格为10元/千克，丙种糖果的价格为12元/千克.

(1)若甲、乙、丙三种糖果的质量按2:5:3的比混合，则混合后得到的什锦糖果的价格定为每千克多少元才能保证获得的利润不变?

(2)若甲、乙、丙三种糖果的质量按6:3:1的比混合，则混合后得到的什锦糖果的价格定为每千克多少元才能保证获得的利润不变?

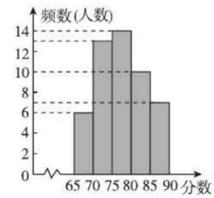
b. 平均数在人员招聘中的决策作用

2. 【中考·呼伦贝尔】某市招聘教师，对应聘者分别进行教学能力、科研能力、组织能力三项测试，其中甲、乙两人的成绩(单位:分)如下表:

项目/人员	教学能力	科研能力	组织能力
甲	86	93	73
乙	81	95	79

(1)根据实际需要，将教学能力、科研能力、组织能力三项测试得分按5:3:2的比确定最后成绩，若按此成绩在甲、乙两人中录用一人，谁将被录用?

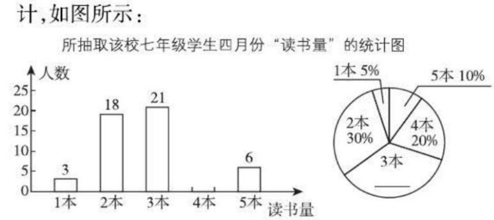
(2)按照(1)中的成绩计算方法，将每位应聘者的最后成绩绘制成如图所示的频数直方图(每组分数段均包含左端数值，不包含右端数值)，并决定由高分到低分录用8人. 甲、乙两人能否被录用? 请说明理由.



(第2题)

c. 平均数在样本估计总体中的作用

3. 【2019·陕西】本学期初，某校为迎接中华人民共和国成立70周年，开展了以“不忘初心，缅怀革命先烈，奋斗新时代”为主题的读书活动，校德育处对本校七年级学生四月份阅读该主题相关书籍的读书量(下面简称:“读书量”)进行了随机抽样调查，并对所有随机抽取学生的“读书量”(单位:本)进行了统计，如图所示:



(第3题)

数据分析的数学基础在20世纪早期就已确立，但直到计算机的出现才使得实际操作成为可能，并使得数据分析得以推广.(待续)

趣味数学

根据以上信息,解答下列问题:

(1)补全上面两幅统计图,填出本次所抽取学生四月份“读书量”的众数为________.

(2)求本次所抽取学生四月份“读书量”的平均数;

(3)已知该校七年级有1 200名学生,请你估计该校七年级学生中,四月份“读书量”为5本的学生人数.

类型2 平均数和中位数在人员招聘中的应用

4.【2018·包头】某公司招聘职员两名,对甲、乙、丙、丁四名候选人进行了笔试和面试,各项成绩满分均为100分,然后再按笔试占60%,面试占40%计算候选人的综合成绩(满分为100分).

他们的各项成绩如下表所示:

候选人	笔试成绩/分	面试成绩/分
甲	90	88
乙	84	92
丙	x	90
丁	88	86

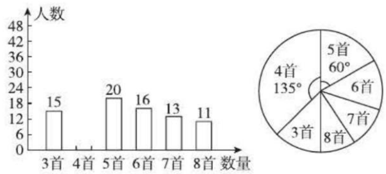
(1)直接写出这四名候选人面试成绩的中位数;

(2)现得知候选人丙的综合成绩为87.6分,求表中x的值;

(3)求出其余三名候选人的综合成绩,并以综合成绩排序确定所要招聘的前两名的人选.

类型3 中位数和众数的应用

5.【2018·威海】为积极响应“弘扬传统文化”的号召,某学校倡导全校1 200名学生进行经典诗词诵背活动,并在活动之后举办经典诗词大赛.为了解本次系列活动的持续效果,学校团委在活动启动之初,随机抽取部分学生调查“一周诗词诵背数量”,根据调查结果绘制成的统计图(部分)如图所示.



(第5题)

大赛结束后一个月,再次抽查这部分学生“一周诗词诵背数量”,绘制成如下统计表:

一周诗词诵背数量	3首	4首	5首	6首	7首	8首
人数	10	10	15	40	25	20

请根据调查的信息分析:

(1)活动启动之初学生“一周诗词诵背数量”的中位数为________;

(2)估计大赛后一个月该校学生一周诗词诵背6首(含6首)以上的人数;

(3)选择适当的统计量,从两个不同的角度分析两次调查的相关数据,评价该校经典诗词诵背系列活动的效果.

趣味数学　数据分析是数学与计算机科学相结合的产物.很长一个时期,我们常听到平均工资,房屋均价,平均寿命,平均就业率.(待续)

类型4 平均数和中位数的综合应用

6.【2018·贵阳】在6月26日“国际禁毒日”到来之际，贵阳市教育局为了普及禁毒知识，提高禁毒意识，举办了“关爱生命，拒绝毒品”的知识竞赛. 某校初一、初二年级分别有300人，现从中各随机抽取20名学生的测试成绩进行调查分析，成绩的数据如下：

初一	68	88	100	100	79	94	89	85	100	88
	100	90	98	97	77	94	96	100	92	67
初二	69	97	96	89	98	100	99	100	95	100
	99	69	97	100	99	94	79	99	98	79

(1)根据上述数据，将下列表格补充完整.

整理、描述数据：

分数段	$60\leq x\leq69$	$70\leq x\leq79$	$80\leq x\leq89$	$90\leq x\leq100$
初一人数	2	2	4	12
初二人数	2	2	1	15

分析数据：样本数据的平均数、中位数、满分率如下表：

年级	平均数	中位数	满分率
初一	90.1	93	25%
初二	92.8		20%

得出结论：

(2)估计该校初一、初二年级学生在本次测试成绩中可以得到满分的人数共________人；

(3)你认为哪个年级掌握禁毒知识的总体水平较好，说明理由.

类型5 平均数、中位数和众数的综合应用

7.【2019·广西】红树林学校在七年级新生中举行了全员参加的“防溺水”安全知识竞赛，试卷题目共10题，每题10分. 现分别从三个班中各随机取10名同学的成绩(单位：分)，收集数据如下：

1班：90,70,80,80,80,80,80,90,80,100；

2班：70,80,80,80,60,90,90,90,100,90；

3班：90,60,70,80,80,80,80,90,100,100.

整理数据：

班级 \ 人数 \ 分数	60	70	80	90	100
1班	0	1	6	2	1
2班	1	1	3	a	1
3班	1	1	4	2	2

分析数据：

	平均数	中位数	众数
1班	83	80	80
2班	83	c	d
3班	b	80	80

根据以上信息回答下列问题：

(1)请直接写出表格中a,b,c,d的值；

(2)比较这三组样本数据的平均数、中位数和众数，你认为哪个班的成绩比较好？请说明理由；

(3)为了让学生重视安全知识的学习，学校将给竞赛成绩满分的同学颁发奖状，该校七年级新生共570人，试估计需要准备多少张奖状？

然而，人们常常感到，统计公布的平均数与自己的实际相距甚远，很多人抱怨自己是处于“被平均”的尴尬境地.

趣味数学

20.2　数据的波动程度

第1课时　方　差

名师点金

1. **计算一组数据方差的一般方法**：(1)计算这组数据的平均数；(2)计算各数据相对于平均数的差的平方；(3)求(2)中各数的平均数，即为所求的方差.
2. **方差的意义**：方差反映了一组数据的波动程度(或离散程度)，一组数据的方差越大，说明各数据与平均数的偏差越大，即各数据的波动程度越大；反之，越小.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见172页)

知识点1 方差的计算

1.【2019·台州】方差是刻画数据波动程度的量，对于一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，可用如下算式计算方差：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+(x_3-5)^2+\cdots+(x_n-5)^2]$，其中"5"是这组数据的(　　)

A. 最小值　B. 平均数　C. 中位数　D. 众数

2.【2019·梧州】某校九年级模拟考试中，(1)班的六名学生的数学成绩如下：96，108，102，110，108，82. 下列关于这组数据的描述不正确的是(　　)

A. 众数是108　　B. 中位数是105

C. 平均数是101　　D. 方差是93

3.【2019·鄂州】已知一组数据为7，2，5，x，8，它们的平均数是5，则这组数据的方差为(　　)

A. 3　B. 4.5　C. 5.2　D. 6

4.【中考·遵义】如果一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差是4，则另一组数据 $x_1+3,x_2+3,\cdots,x_n+3$ 的方差是(　　)

A. 4　B. 7　C. 8　D. 19

5.【2019·潍坊】小莹同学10个周综合素质评价成绩统计如下：

成绩/分	94	95	97	98	100
周数/个	1	2	2	4	1

这10个周的综合素质评价成绩的中位数和方差分别是(　　)

A. 97.5　2.8　　B. 97.5　3

C. 97　2.8　　D. 97　3

知识点2 方差的应用

6.【2019·湘西州】从甲、乙、丙、丁四人中选一人参加射击比赛，经过三轮初赛，他们的平均成绩都是9环，方差分别是 $s_{甲}^2=0.25$，$s_{乙}^2=0.3$，$s_{丙}^2=0.4$，$s_{丁}^2=0.35$，你认为派谁去参赛更合适(　　)

A. 甲　B. 乙　C. 丙　D. 丁

7.【2019·烟台】某班有40人，一次体能测试后，老师对测试成绩进行了统计. 由于小亮没有参加本次集体测试，因此计算其他39人的平均分为90分，方差 $s^2=41$，后来小亮进行了补测，成绩为90分，关于该班40人的测试成绩，下列说法正确的是(　　)

A. 平均分不变，方差变大　B. 平均分不变，方差变小

C. 平均分和方差都不变　D. 平均分和方差都改变

8.【2019·攀枝花】如图，比较A组、B组两组数据的平均数及方差，以下说法正确的是(　　)

(第8题)

A. A组、B组平均数及方差分别相等

B. A组、B组平均数相等，B组方差大

C. A组比B组的平均数、方差都大

D. A组、B组平均数相等，A组方差大

9.【2018·新疆】甲、乙两班举行电脑汉字输入比赛，参赛学生每分钟输入汉字个数的统计结果如下表：

班级	参赛人数	平均数/个	中位数/个	方差
甲班	55	135	149	191
乙班	55	135	151	110

某同学分析该表后得出如下结论：

①甲、乙两班学生的平均成绩相同；

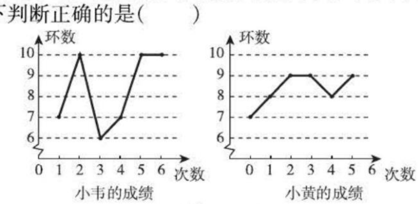
②乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数(每分钟输入汉字的个数≥150为优秀)；

③甲班成绩的波动比乙班大；

上述结论中，正确的是(　　)

A. ①②　B. ②③　C. ①③　D. ①②③

10.【2019·百色】小韦和小黄进行射击比赛，各射击6次，根据成绩绘制的两幅折线统计图如图所示，以下判断正确的是(　　)



(第10题)

A. 小黄的成绩比小韦的成绩更稳定

B. 两人成绩的众数相同

C. 小韦的成绩比小黄的成绩更稳定

D. 两人的平均成绩不相同

易错点 对方差的意义理解不透导致出错

11. 小明等五位同学以他们的年龄为一组数据，计算出这组数据的方差是0.5，则10年后小明等五位同学年龄的方差(　　)

A. 增大　B. 不变　C. 减小　D. 无法确定

趣味数学　方差在艺术欣赏中的应用：白居易《琵琶行》"大弦嘈嘈如急雨，小弦切切如私语. 嘈嘈切切错杂弹，大珠小珠落玉盘."生动地描述出艺术的特性，即方差大就是波动性强.

Ⅱ 整合方法 · 提升练

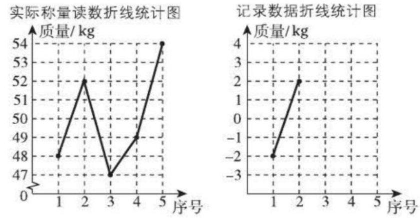
☞(答案见172页)

考查角度 1 利用方差公式求方差

12.【2019 · 杭州】称量五筐水果的质量，若每筐以50 kg为基准，超过基准部分的千克数记为正数，不足基准部分的千克数记为负数，甲组为实际称量读数，乙组为记录数据，并把所得数据整理成如下统计表(单位:kg)和如图所示的未完成的统计图.

实际称量读数和记录数据统计表

序号 / 数据	1	2	3	4	5
甲组	48	52	47	49	54
乙组	−2	2	−3	−1	4



(第12题)

(1)补充完整乙组数据的折线统计图.

(2)①甲，乙两组数据的平均数分别为$\bar{x}_{甲}$，$\bar{x}_{乙}$，写出$\bar{x}_{甲}$与$\bar{x}_{乙}$之间的等量关系；

②甲，乙两组数据的方差分别为$s_{甲}^2$，$s_{乙}^2$，比较$s_{甲}^2$与$s_{乙}^2$的大小，并说明理由.

考查角度 2 利用方差分析数据

13.【2019 · 南京】如图是某市连续五天的天气情况.

(第13题)

(1)利用方差判断该市这5天的日最高气温波动大还是日最低气温波动大；

(2)根据如图提供的信息，请再写出两个不同类型的结论.

Ⅲ 探究培优 · 拓展练

☞(答案见172页)

拔尖角度 利用统计表数据信息分析数据

14.【2018 · 吉林】为了调查甲、乙两台包装机分装标准质量为400 g奶粉的情况，质检员进行了抽样调查，过程如下：请补全表一、表二中的空白，并回答提出的问题.

收集数据：

从甲、乙包装机分装的奶粉中各自随机抽取10袋，测得实际质量(单位:g)如下：

甲:400,400,408,406,410,409,400,393,394,395

乙:403,404,396,399,402,402,405,397,402,398

整理数据：

表一

质量/g 频数 种类	$393\leq x<396$	$396\leq x<399$	$399\leq x<402$	$402\leq x<405$	$405\leq x<408$	$408\leq x<411$
甲	3	0	____	0	1	3
乙	0	____	1	5	____	0

分析数据：

表二

种类	平均数	中位数	众数	方差
甲	401.5	____	400	36.85
乙	400.8	402	____	8.56

得出结论：

包装机分装情况比较好的是________(填“甲”或“乙”)，说明你的理由.

第2课时　数据分析的应用

名师点金

数据分析的方法

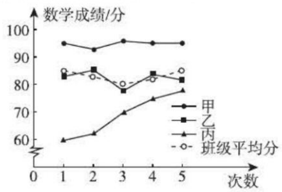
1. 理解平均数、中位数、众数反映的是数据的集中趋势，方差反映的是数据的波动程度.
2. 在具体问题中，根据实际问题灵活选择合适的数据解决相关问题.

整合方法 · 分类练

(答案见172页)

类型1　利用方差与平均数分析数据

1. 【2019 · 福建】如图是某班甲、乙、丙三位同学最近5次数学成绩及其所在班级相应平均分的折线统计图，则下列判断错误的是(　　)



(第1题)

A. 甲的数学成绩高于班级平均分，且成绩比较稳定

B. 乙的数学成绩在班级平均分附近波动，且比丙好

C. 丙的数学成绩低于班级平均分，但成绩逐次提高

D. 就甲、乙、丙三个人而言，乙的数学成绩最不稳

类型2　利用方差与中位数分析数据

2. 某校八年级学生开展踢毽子比赛活动，每个班派5名学生参加，按团体总分多少排列名次，在规定时间内每人踢100个以上(含100个)为优秀，下表是成绩最好的甲班和乙班5名学生的比赛成绩(单位:个)：

	1号	2号	3号	4号	5号	总成绩
甲班	100	98	110	89	103	500
乙班	89	100	95	119	97	500

经统计发现两个班总成绩相等，此时有学生建议，可以通过考察数据中的其他信息作为参考.

请你回答下列问题：

(1)计算甲、乙两个班的优秀率.

(2)求两个班比赛成绩的中位数.

(3)估计两个班比赛成绩的方差哪个班较小.

(4)根据以上信息，你认为应该把冠军奖状发给哪个班？简述理由.

类型3　利用方差与统计表的信息分析数据

3. 【2018 · 荆州】为了参加“荆州市中小学生首届诗词大会”，某校八年级的2个班学生进行了预选，其中班上前5名学生的成绩(百分制)分别为：

八年级(1)班　86,85,77,92,85；

八年级(2)班　79,85,92,85,89.

通过数据分析，列表如下：

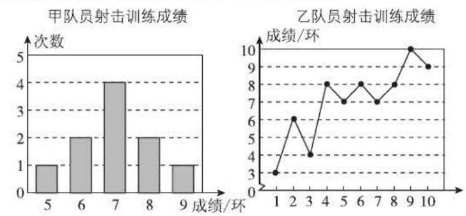
班级	平均分	中位数	众数	方差
八(1)	85	b	c	22.8
八(2)	a	85	85	19.2

(1)直接写出表中a,b,c的值.

(2)根据以上数据分析，你认为哪个班前5名学生的成绩较好？说明理由.

类型4　利用方差与统计图表的信息分析数据

4. 【中考 · 青岛】甲、乙两名队员参加射击训练，成绩分别被制成如图所示的两个统计图：



(第4题)

根据以上信息，整理分析数据如下：

	平均成绩/环	中位数/环	众数/环	方差
甲	a	7	7	1.2
乙	7	b	8	c

(1)写出表中a,b,c的值.

(2)分别运用表中的四个统计量，简要分析这两名队员的射击训练成绩. 若选派其中一名参赛，你认为应选哪名队员？

趣味数学　从几何学的角度出发，标准差可以理解为一个从n维空间的一个点到一条直线的距离的函数.

20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析

名师点金

1. 调查学生的体质健康状况一般分为收集数据、整理数据、描述数据、分析数据、撰写调查报告、交流六个步骤.
2. 描述数据一般可以画条形图、扇形图、折线图、直方图等.
3. 分析数据一般要计算各组数据的平均数、中位数、众数、方差等,通过分析图表和计算结果得出结论.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (答案见172页)

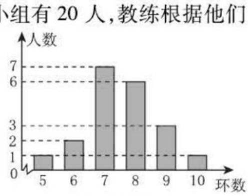
知识点1 调查收集数据的过程与方法

1. 调查活动一般分为收集数据、________、描述数据、________、撰写调查报告与交流六个步骤.

2. 【2019·河北】某同学要统计本校图书馆最受学生欢迎的图书种类,以下是排乱的统计步骤:
①从扇形图中分析出最受学生欢迎的种类;
②去图书馆收集学生借阅图书的记录;
③绘制扇形图来表示各个种类所占的百分比;
④整理借阅图书记录并绘制频数分布表;
正确统计步骤的顺序是(　　)
A. ②→③→①→④　　B. ③→④→①→②
C. ①→②→④→③　　D. ②→④→③→①

知识点2 表示数据的方法

3. 【中考·大庆】某射击小组有20人,教练根据他们某次射击的数据绘制如图所示的统计图,则这组数据的众数和中位数分别是(　　)
A. 7,7　　B. 8,7.5
C. 7,7.5　　D. 8,6



(第3题)

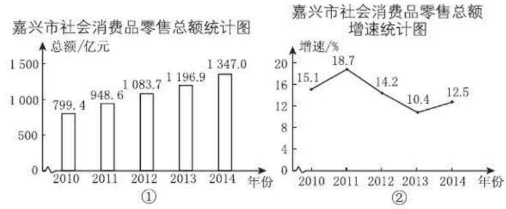
4. 记录一个人的体温变化情况,最好选用(　　)
A. 条形图　　B. 折线图　　C. 扇形图　　D. 统计表

5. 能清楚地看出每个项目的具体数量的统计图是(　　)
A. 扇形图　　B. 折线图
C. 条形图　　D. 以上三种均可

6. 【2019·威海】为配合全科大阅读活动,学校团委对全校学生阅读兴趣调查的数据进行整理,欲反映学生感兴趣的各类图书所占百分比,最适合的统计图是(　　)
A. 条形统计图　　B. 频数直方图
C. 折线统计图　　D. 扇形统计图

知识点3 用适当方法分析数据

7. 【中考·嘉兴】嘉兴市2010—2014年社会消费品零售总额及增速统计图如图所示:
请根据图中信息,解答下列问题:
(1)求嘉兴市2010—2014年社会消费品零售总额增速这组数据的中位数;
(2)求嘉兴市2012—2014年社会消费品零售总额这组数据的平均数;



(第7题)

(3)用适当的方法预测嘉兴市2015年社会消费品零售总额(只要求列出算式,不必计算出结果).

8. 【2019·泰州】PM2.5是指空气中直径小于或等于2.5 μm的颗粒物,它对人体健康和大气环境造成不良影响,下表是根据《全国城市空气质量报告》中的部分数据制作的统计表.根据统计表回答下列问题:

2017、2018年7~12月全国338个地级及以上城市PM2.5平均浓度统计表(单位:$\mu g/m^3$)

年份＼月份	7	8	9	10	11	12
2017年	27	24	30	38	51	65
2018年	23	24	25	36	49	53

(1)2018年7~12月PM2.5平均浓度的中位数为________$\mu g/m^3$;
(2)"扇形统计图"和"折线统计图"中,更能直观地反映2018年7~12月PM2.5平均浓度变化过程和趋势的统计图是______________;
(3)某同学观察统计表后说:"2018年7~12月与2017年同期相比,空气质量有所改善",请你用一句话说明该同学得出这个结论的理由.

数据分析有极广泛的应用范围,如:在产品的整个寿命周期,包括从市场调研到售后服务和最终处置的各个过程,都需要适当的数据分析,以提升有效性.(待续)　趣味数学

Ⅱ 整合方法·提升练 ☞(答案见173页)

考查角度1 利用收集数据的过程与方法分析数据

9. 以下是某省2015年教育发展情况的有关数据：
全省共有各级各类学校25 000所，其中小学12 500所，初中2 000所，高中450所，其他学校10 050所；全省共有在校学生995万人，其中小学生440万人，初中生200万人，高中生75万人，其他学生280万人；全省共有在职教师48万人，其中小学教师20万人，初中教师12万人，高中教师5万人，其他教师11万人.
请将上述资料中的数据按下列步骤进行统计分析.
(1)整理数据：请设计一个统计表，将以上数据填入表格中；
(2)描述数据：如图是描述全省各级各类学校所数的扇形图，请将它补充完整；
(3)分析数据：
①分析统计表中的相关数据，小学、初中、高中三个学段的师生比，最小的是哪个学段？(师生比＝在职教师数：在校学生数)
②根据统计表中的相关数据，你还能从其他角度分析得出什么结论吗？(写出一个即可)
③从扇形图中，你能得出什么结论？(写出一个即可)

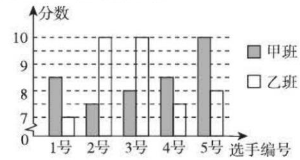
(第9题)

考查角度2 利用收集整理的数据分析数据

10. 某校积极开展国防知识教育，九年级甲、乙两个班分别选5名同学参加“国防知识”比赛，其预赛成绩如图所示：
(1)根据图填写下表：

	平均数	中位数	众数	方差
甲班	8.5	8.5	______	______
乙班	8.5	______	10	1.6

(2)根据上表数据，分别从平均数、中位数、众数、方差的角度分析哪个班的成绩较好.



(第10题)

趣味数学 再如开普勒通过分析行星位置的观测数据，找出了行星运动规律. 又如，一个企业的领导人要通过市场调查，分析所得数据以判断市场动向，从而制订合适的生产及销售计划.

阶段核心归类专训

方差的几种常见应用

(答案见173页)

名师点金

用方差解决实际应用问题，主要是通过计算实际问题中数据的离散程度，从而得出哪个稳定性更好，进行“择优选用”.

应用1 工业方面的应用

1. 为了比较市场上甲、乙两种电子钟每日走时误差的情况，从这两种电子钟中，各随机抽取十台进行测试，两种电子钟走时误差(单位:s)如下表：

类型＼编号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
甲种电子钟	1	−3	−4	4	2	−2	2	−1	−1	2
乙种电子钟	4	−3	−1	2	−2	1	−2	2	−2	1

(1)计算甲、乙两种电子钟走时误差的平均数.

(2)计算甲、乙两种电子钟走时误差的方差.

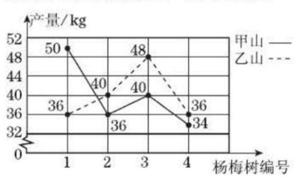
(3)根据经验，走时稳定性较好的电子钟质量更优.若两种类型的电子钟价格相同，请问：你会买哪种电子钟？为什么？

应用2 农业方面的应用

2. 王大伯几年前承包了甲、乙两片荒山，各栽100棵杨梅树，成活率为98%，现已挂果，经济效益初步显现.为了分析收成情况，他分别从两片山上随意各采摘了4棵树上的杨梅，每棵树的产量如图所示.

(1)分别计算甲、乙两片山样本的平均数，并估算出甲、乙两片山杨梅的产量总和；

(2)试通过计算估计，哪片山上的杨梅产量较稳定.



(第2题)

应用3 教育科技方面的应用

3. 七年级(1)班和(2)班各推选10名同学进行投篮比赛，按照比赛规则，每人各投了10个球，两个班选手的进球数统计如下表，请根据表中数据回答下列问题.

进球数/个	10	9	8	7	6	5
一班人数/人	1	1	1	4	0	3
二班人数/人	0	1	2	5	0	2

(1)分别求(1)班和(2)班选手进球数的平均数、众数、中位数.

(2)如果要从这两个班中选出一个班代表本年级参加学校的投篮比赛，争取夺得总进球数团体第1名，你认为应该选择哪个班？如果要争取个人进球数进入学校前3名，你认为应该选择哪个班？

应用4 社会生活方面的应用

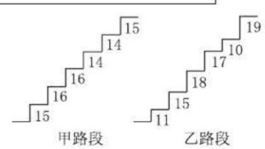
4. 在某旅游景区上山的一条小路上，有一些断断续续的台阶.如图是其中的甲、乙两段台阶路的示意图.请你用所学过的有关统计知识(平均数、中位数、方差)回答下列问题：

(1)两段台阶路有哪些相同点和不同点？

(2)哪段台阶路走起来更舒服？为什么？

(3)为方便游客行走，需要重新整修上山的小路.对于这两段台阶路，在台阶数不变的情况下，请你提出合理的整修建议.

图中的数字表示每一级台阶的高度(单位:cm)，并且数据15,16,16,14,14,15的方差 $s^2_{甲}=\frac{2}{3}$，数据11,15,18,17,10,19的方差 $s^2_{乙}=\frac{35}{3}$.



(第4题)

更多提分招数详见《极速提分法》第18页.

一向与人无争、对人和善的平均数这几天突然和众数、中位数争吵起来了，在整个数王国引起了轩然大波.三人都认为自己在统计中表示的量才是最公平、最可靠的！平均数、众数、中位数各不相让.(待续)

趣味数学

全章热门考点整合应用

☞(答案见 173 页)

名师点金

分析数据主要是根据数据的特征，恰当选择平均数、中位数、众数做出符合实际需要的分析，善于利用样本的数据估算总体的数据. 本章的主要考点可概括为四个概念，三个应用.

考点1 四个概念

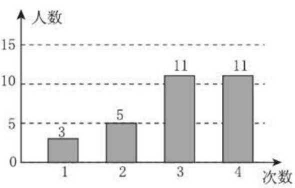
概念 1 平均数

1.【中考·无锡】某种蔬菜按品质分成三个等级销售，销售情况如下表：

等级	价格/(元/千克)	销售量/千克
一等	5.0	20
二等	4.5	40
三等	4.0	40

则售出蔬菜的平均价格为________元/千克.

2.【中考·防城港】学校抽查了 30 名学生参加“学雷锋社会实践”活动的次数，并根据数据绘成了条形图(如图)，则 30 名学生参加活动的平均次数是(　　)



(第 2 题)

A. 2　　B. 2.8　　C. 3　　D. 3.3

概念 2 中位数

3. 学校团委组织“阳光助残”捐款活动，九年级(1)班学生捐款情况如下表：

捐款金额/元	5	10	20	50
人数/人	10	13	12	15

则学生捐款金额的中位数是(　　)

A. 13 元　　B. 12 元　　C. 10 元　　D. 20 元

概念 3 众数

4.【2019·荆州】在一次体检中，甲、乙、丙、丁四位同学的平均身高为 1.65 m，而甲、乙、丙三位同学的平均身高为 1.63 m，下列说法一定正确的是(　　)

A. 四位同学身高的中位数一定是其中一位同学的身高

B. 丁同学的身高一定高于其他三位同学的身高

C. 丁同学的身高为 1.71 m

D. 四位同学身高的众数一定是 1.65 m

概念 4 方差

5. 在一次数学测试中，某小组五名同学的成绩(单位：分)如下表(有两个数据被遮盖).

组员	甲	乙	丙	丁	戊	方差	平均成绩
得分	81	79	■	80	82	■	80

那么被遮盖的两个数据依次是(　　)

A. 80，2　　B. 80，10　　C. 78，2　　D. 78，10

6.【中考·莆田】在一次定点投篮训练中，五位同学投中的个数分别为 3，4，4，6，8，则关于这组数据的说法不正确的是(　　)

A. 平均数是 5　　B. 中位数是 6

C. 众数是 4　　D. 方差是 3.2

考点2 三个应用

应用 1 平均数、中位数、众数的应用

7. 某乡镇企业生产部有技术工人 15 人，生产部为了合理确定产品的每月生产定额，统计了这 15 人某月的加工零件个数：

每人加工零件个数/个	540	450	300	240	210	120
人数	1	1	2	6	3	2

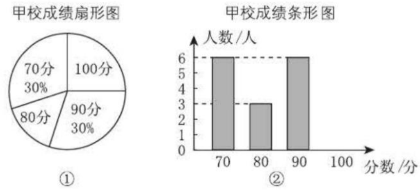
(1)直接写出这 15 人该月加工零件个数的平均数、中位数和众数.

(2)假如生产部负责人把每位工人的月加工零件个数定为 260 个，你认为这个定额是否合理？为什么？　　【导学号:9941874】

趣味数学　数王国老国王说：“平均数受数据中所有数的影响，尤其出现较大或较小数据时，它也会偏大或偏小. 如果个别数据较大或较小，中位数却不受影响，那么用中位数表示就比较合适.(待续)

应用 2 方差的应用

8.【中考·贵港】某市团委举办以“我的中国梦”为主题的知识竞赛，甲、乙两所学校参赛人数相等，比赛结束后，发现学生成绩分别为 70 分、80 分、90 分、100 分，并根据统计数据绘制了如图的统计图与如下的统计表（均不完整）：



（第 8 题）

乙校成绩统计表

分数/分	人数/人
70	7
80	
90	1
100	8

(1) 在图①中，“80 分”所在扇形的圆心角度数为________；

(2) 请你将图②补充完整；

(3) 求乙校成绩的平均分；

(4) 经计算知 $s^2_{甲}=135$，$s^2_{乙}=175$，请你根据这两个数据，对甲、乙两校成绩做出合理评价.

应用 3 用样本估计总体的应用

9. 随着我市社会经济的发展和交通状况的改善，我市的旅游业得到了高速发展，某旅游公司对我市一企业个人旅游年消费情况进行问卷调查，随机抽查部分员工，记录每个人年消费金额，并将调查数据适当整理，绘制成尚不完整的统计表和统计图（如图）.

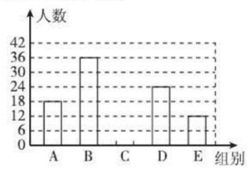
组别	个人年消费金额 x/元	频数（人数）	所占百分比
A	$x\leqslant 2\ 000$	18	15%
B	$2\ 000<x\leqslant 4\ 000$	a	b
C	$4\ 000<x\leqslant 6\ 000$		
D	$6\ 000<x\leqslant 8\ 000$	24	20%
E	$x>8\ 000$	12	10%
	合计	c	100%

根据以上信息回答下列问题：

(1) $a=$________，$b=$________，$c=$________，并将条形图补充完整；

(2) 在这次调查中，个人年消费金额的中位数出现在________组；

(3) 若这个企业有 3 000 名员工，请你估计个人旅游年消费金额在 6 000 元以上的人数.



（第 9 题）

如果个别数据较大或较小，也不影响众数，且某些数据出现次数较多，毫无疑问，用众数来表示数据特征比较合适
所以你们各有所长，也各有所短！”听了老国王的话，平均数和众数、中位数都明白了，三人的手紧紧握在了一起 趣味数学

荣德基 主编

综合应用创新题 典中点

达标检测卷

含参考答案及点拨

八年级数学

下（R版）

陕西新华出版传媒集团
陕西人民教育出版社

第十六章达标检测卷

(120 分,90 分钟)

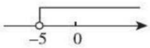
题号	一	二	三	总分
得分				

一、选择题(每题 3 分,共 30 分)

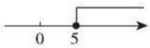
1. 下列的式子一定是二次根式的是(　　)

A. $\sqrt{a}$　　B. $\sqrt[3]{a}$　　C. $-\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{a^2}$

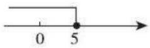
2. 若二次根式 $\sqrt{x-5}$ 有意义,则 x 的取值范围在数轴上表示正确的是(　　)



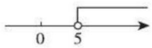
A



B



C



D

3. 下列二次根式中,最简二次根式是(　　)

A. $\sqrt{25a}$　　B. $\sqrt{a^2+b^2}$　　C. $\sqrt{\frac{a}{2}}$　　D. $\sqrt{0.5}$

4. 下列计算正确的是(　　)

A. $5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2$　　B. $2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3$　　D. $3\sqrt{3}\div\sqrt{3}=3$

5. 下列根式:① $\sqrt{18}$;② $\sqrt{2}$;③ $\sqrt{\frac{3}{2}}$;④ $\sqrt{3}$,化为最简二次根式后,被开方数相同的是(　　)

A. ①和②　　B. ②和③　　C. ③和④　　D. ①和④

6. $\sqrt{11}$ 的整数部分是 x,小数部分是 y,则 $y(x+\sqrt{11})$ 的值为(　　)

A. $3-\sqrt{11}$　　B. $9-3\sqrt{11}$　　C. -2　　D. 2

7. 已知 $a=3+2\sqrt{2}$,$b=3-2\sqrt{2}$,则 a^2b-ab^2 的值为(　　)

A. 1　　B. 17　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $-4\sqrt{2}$

8. 已知 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三边长,且 $\sqrt{a^2-2ab+b^2}+|b-c|=0$,则 $\triangle ABC$ 的形状是(　　)

A. 等腰三角形　　B. 等边三角形　　C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

9. 已知 x,y 为实数,且 $\sqrt{3x+4}+y^2-6y+9=0$. 若 $axy-3x=y$,则实数 a 的值为(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{7}{4}$　　D. $-\frac{7}{4}$

10. 已知实数 x,y 满足:$y=\frac{\sqrt{x^2-16}+\sqrt{16-x^2}+24}{x-4}$,则 $\sqrt{xy+13}$ 的值为(　　)

A. 0　　B. $\sqrt{37}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. 5

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

11. 计算:$\sqrt{24}-3\sqrt{\frac{2}{3}}=$________.

12. 若最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{2a+3}$ 可以合并,则 a 的值为________.

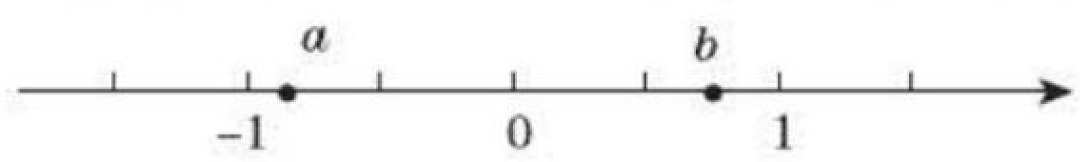
13. 已知 $x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{6}$,则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$________.

14. 当 $x=\sqrt{5}-1$ 时,代数式 x^2+2x+3 的值是________.

15. 三角形的三边长分别为 3,m,5,化简 $\sqrt{(2-m)^2}-\sqrt{(m-8)^2}=$________.

16. 已知 x,y 为实数,且 $y=\sqrt{x^2-9}-\sqrt{9-x^2}+4$,则 $x-y$ 的值为________.

17. 实数 a,b 在数轴上的位置如图所示,化简 $\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}$ 的结果是________.



(第 17 题)

18. 若实数 m 满足 $\sqrt{(m-2)^2}=m+1$,且 $0<m<\sqrt{3}$,则 m 的值为________.

19. 若 $xy>0$,则二次根式 $x\sqrt{-\dfrac{y}{x^2}}$ 化简的结果为________.

20. 观察下列式子:$\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}=1\dfrac{1}{2}$;$\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}=1\dfrac{1}{6}$;$\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}=1\dfrac{1}{12}$;…根据此规律,若 $\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}=1\dfrac{1}{90}$,则 a^2+b^2 的值为________.

三、**解答题**(21 题 12 分,26,27 题每题 10 分,其余每题 7 分,共 60 分)

21. 计算:

(1) $(\sqrt{6}+\sqrt{8})\times\sqrt{3}\div 3\sqrt{2}$;　　(2) $\sqrt{48}\div\sqrt{3}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt{12}+\sqrt{24}$;

(3) $(3+2\sqrt{5})^2-(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})$;

(4) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt{12}+(1-\sqrt{2})^0-|\sqrt{3}-2|$.

22. 先化简,再求值:$\frac{a^2-b^2}{a}\div\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)$,其中 $a=\sqrt{5}+2,b=\sqrt{5}-2$.

23. 已知 a,b,c 是$\triangle ABC$ 的三边长,化简:$\sqrt{(a+b+c)^2}-\sqrt{(b+c-a)^2}+\sqrt{(c-b-a)^2}$.

24. 已知 $a+b=-2,ab=\frac{1}{2}$,求$\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$的值.

25. 观察下列各式:

①$\sqrt{2-\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{8}{5}}=2\sqrt{\frac{2}{5}}$;②$\sqrt{3-\frac{3}{10}}=\sqrt{\frac{27}{10}}=3\sqrt{\frac{3}{10}}$;③$\sqrt{4-\frac{4}{17}}=\sqrt{\frac{64}{17}}=4\sqrt{\frac{4}{17}}$.

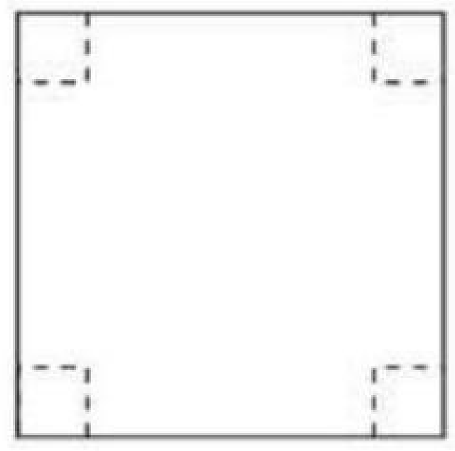
(1)根据你发现的规律填空:$\sqrt{5-\frac{5}{26}}=$________$=$________;

(2)猜想$\sqrt{n-\frac{n}{n^2+1}}$($n\geqslant2,n$ 为自然数)等于什么?并通过计算证实你的猜想.

26. 如图,有一张边长为 $6\sqrt{2}$ cm 的正方形纸板,现将该纸板的四个角剪掉,制作一个有底无盖的长方体盒子,剪掉的四个角是面积相等的小正方形,且小正方形的边长为$\sqrt{2}$ cm. 求:

(1)剪掉四个角后,制作长方体盒子的纸板的面积;

(2)长方体盒子的体积.



(第 26 题)

27. 阅读材料:

小明在学习完二次根式后,发现一些式子可以写成另一个式子的平方,如 $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$. 善于思考的小明进行了如下探索:

设 $a+b\sqrt{2}=(m+n\sqrt{2})^2$(其中 a,b,m,n 均为正整数),则有 $a+b\sqrt{2}=m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$,

故 $a=m^2+2n^2$,$b=2mn$.

这样小明就找到了把类似 $a+b\sqrt{2}$ 的式子化为完全平方式的方法.

请你仿照小明的方法探索并解决下列问题:

(1)当 a,b,m,n 均为正整数时,若 $a+b\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$,用含 m,n 的式子分别表示 a,b,得:$a=$________,$b=$________;

(2)利用所探索的结论,找一组正整数 a,b,m,n 填空:________ + ________$\sqrt{3}$ = (________ + ________$\sqrt{3}$)^2;

(3)若 $a+4\sqrt{3}=(m+n\sqrt{3})^2$,且 a,m,n 均为正整数,求 a 的值.

第十七章达标检测卷

（120 分,90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

一、选择题（每题 3 分,共 30 分）

1. 下列每一组数据中的三个数值分别为三角形的三边长,其中不能构成直角三角形的是(　　)

A. 3,4,5　　B. 6,8,10　　C. $\sqrt{3}$,2,$\sqrt{5}$　　D. 5,12,13

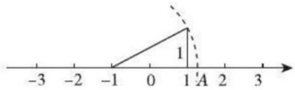
2. 在平面直角坐标系中,点 $P(3,4)$ 到原点的距离是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. ±5

3. 如图所示,数轴上点 A 所表示的数为 a,则 a 的值是(　　)

A. $\sqrt{5}+1$　　B. $-\sqrt{5}+1$

C. $\sqrt{5}-1$　　D. $\sqrt{5}$



（第 3 题）

4. 下列命题中,其逆命题成立的是(　　)

A. 对顶角相等

B. 等边三角形是等腰三角形

C. 如果 $a>0,b>0$,那么 $ab>0$

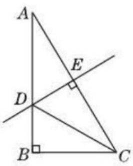
D. 如果三角形的三边长 a,b,c(其中 $a<c,b<c$)满足 $a^2+b^2=c^2$,那么这个三角形是直角三角形

5. 已知直角三角形两边的长分别为 3 和 4,则此三角形的周长为(　　)

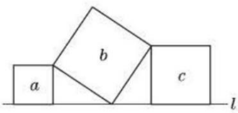
A. 12　　B. $7+\sqrt{7}$　　C. 12 或 $7+\sqrt{7}$　　D. 以上都不对

6. 如图,在 Rt△ABC 中,$\angle A=30°$,DE 垂直平分斜边 AC 交 AB 于点 D,E 是垂足,连接 CD,若 $BD=1$,则 AC 的长是(　　)

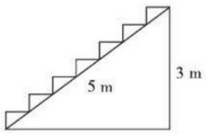
A. $2\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 4



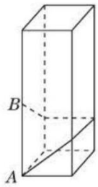
（第 6 题）



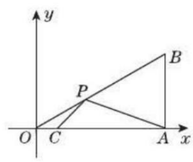
（第 7 题）



（第 8 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

7. 如图,直线 l 上有三个正方形 a,b,c,若 a,c 的面积分别为 5 和 11,则 b 的面积为(　　)

A. 4　　B. 16　　C. 22　　D. 55

8. 如图为某楼梯,测得楼梯的长为 5 m,高为 3 m,计划在楼梯表面铺地毯,则地毯的长度至少需要(　　)

A. 5 m　　B. 7 m　　C. 8 m　　D. 12 m

9. 如图,长方体的底面邻边长分别是 5 cm 和 7 cm,高为 20 cm,如果用一根细线从点 A 开始经过 4 个侧面缠绕一圈到达点 B(点 B 为棱的中点),那么所用细线最短为(　　)

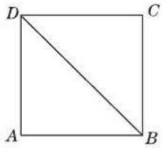
A. 20 cm　　B. 24 cm　　C. 26 cm　　D. 28 cm

10. 如图,在平面直角坐标系中,Rt△OAB 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上,顶点 B 的坐标为$(3,\sqrt{3})$,点 C 的坐标为$\left(\frac{1}{2},0\right)$,点 P 为斜边 OB 上的一个动点,则 $PA+PC$ 的最小值为(　　)

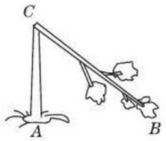
A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{31}}{2}$　　C. $\frac{3+\sqrt{19}}{2}$　　D. $2\sqrt{7}$

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

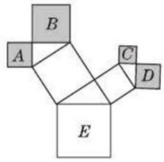
11. 如图,已知正方形 $ABCD$ 的面积为 8,则对角线 BD 的长为________.



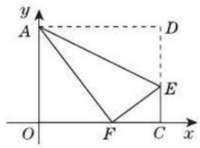
(第 11 题)



(第 12 题)



(第 14 题)



(第 16 题)

12. 如图,一棵树在离地面 9 m 处断裂,树的顶部落在离底部 12 m 处,则树折断之前高________ m.

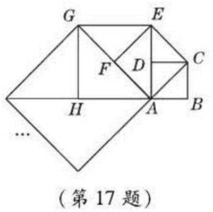
13. 若一个三角形的三边之比为 3 : 4 : 5,且周长为 24 cm,则它的面积为________cm^2.

14. 如图是一株美丽的勾股树,其中所有的四边形都是正方形,所有的三角形都是直角三角形,若正方形 A,B,C,D 的面积分别为 2,5,1,2,则最大的正方形 E 的面积是________.

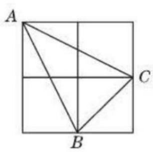
15. 若三角形的三边长满足关系式 $|a-5|+(a+b-17)^2+\sqrt{c-13}=0$,则这个三角形的形状为________.

16. 如图,在平面直角坐标系中,将长方形 $AOCD$ 沿直线 AE 折叠(点 E 在边 DC 上),折叠后顶点 D 恰好落在边 OC 上的点 F 处. 若点 D 的坐标为(10,8),则点 E 的坐标为________.

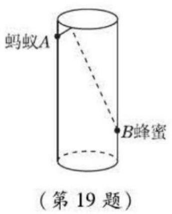
17. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 1,以对角线 AC 为边作第二个正方形 $ACEF$,再以对角线 AE 为边作第三个正方形 $AEGH$,如此下去,第 n 个正方形的边长为________.



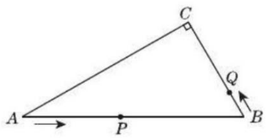
(第 17 题)



(第 18 题)



(第 19 题)



(第 20 题)

18. 如图,由四个边长为 1 的小正方形构成一个大正方形,连接小正方形的三个顶点,可得到△ABC,则△ABC 中 BC 边上的高是________.

19. 如图,圆柱形无盖容器高 18 cm,底面周长为 24 cm,在容器内壁离容器底 4 cm 的点 B 处有一滴蜂蜜,此时蚂蚁正好在容器外壁,离容器上沿 2 cm 与蜂蜜相对的 A 处,则蚂蚁从外壁 A 处到达内壁 B 处的最短距离为________ cm.

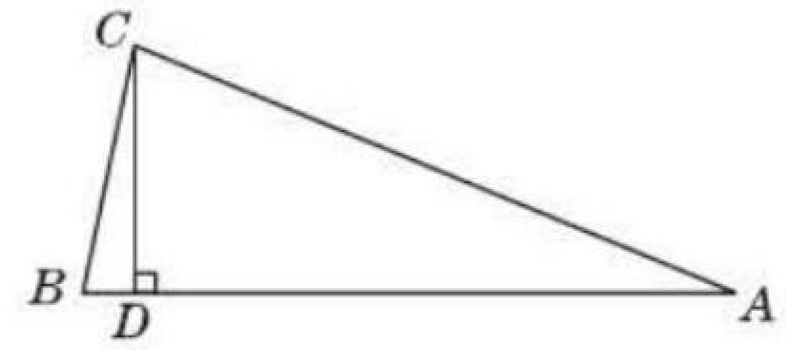
20. 如图,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$\angle A=30°$,$BC=6$,若点 P 是边 AB 上的一个动点,以每秒 3 个单位长度的速度沿从 $A\to B\to A$ 的方向运动,同时点 Q 沿从 $B\to C$ 的方向以每秒 1 个单位长度的速度运动,当一个动点到达终点时,另一个动点也随之停止运动. 在运动过程中,设运动时间为 t 秒,若△BPQ 为直角三角形,则 t 的值为________.

三、解答题(26,27 题每题 10 分,其余每题 8 分,共 60 分)

21. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$CD\perp AB$,$AB=AC=13$,$BD=1$.

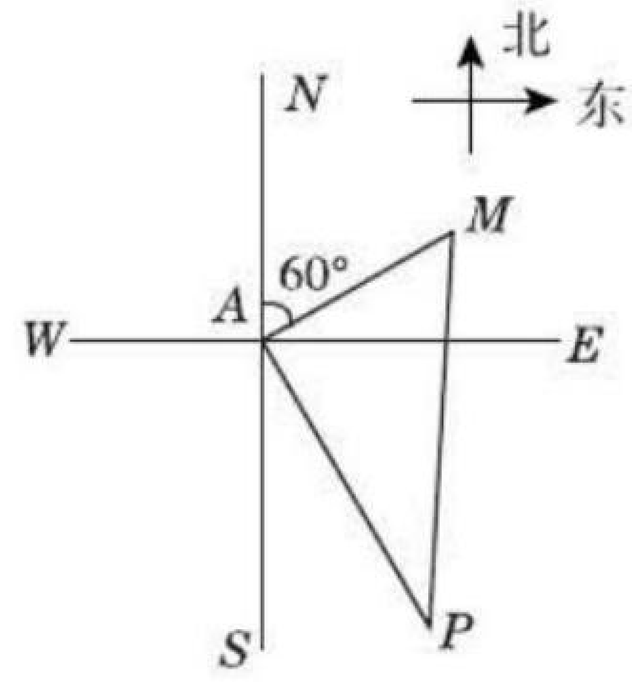
(1)求 CD 的长;

(2)求 BC 的长.



(第 21 题)

22. 如图,某港口 A 有甲、乙两艘渔船,若甲船沿北偏东 $60°$ 方向以每小时 8 n mile 的速度前进,乙船沿南偏东某个角度以每小时 15 n mile 的速度前进,2 小时后,甲船到达 M 岛,乙船到达 P 岛,两岛相距 34 n mile,你知道乙船是沿哪个方向航行的吗?



(第 22 题)

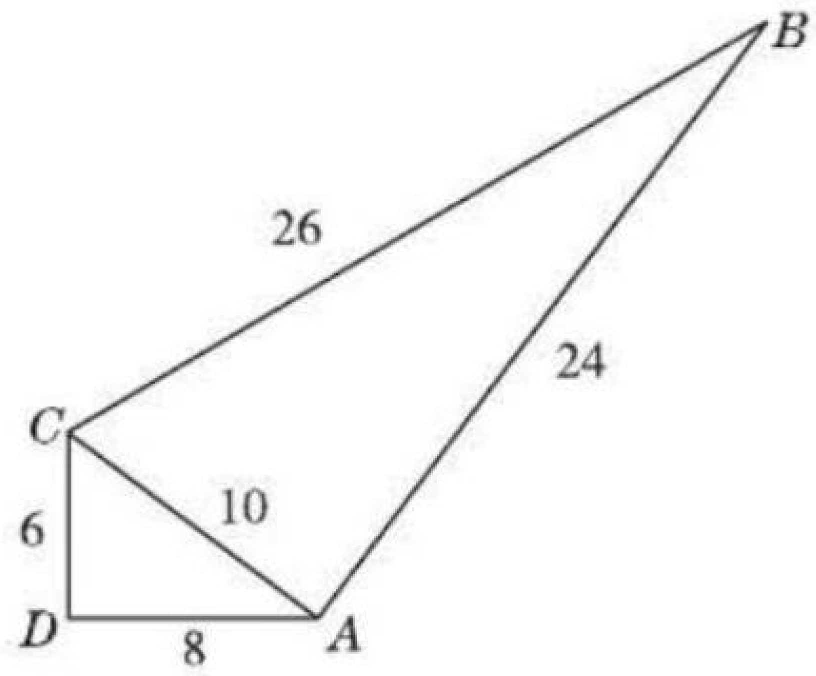
23. 若 $\triangle ABC$ 的三边长 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2+50=6a+8b+10c$,判断 $\triangle ABC$ 的形状.

24. 我们把满足方程 $x^2+y^2=z^2$ 的正整数解 (x,y,z) 叫做勾股数,如 $(3,4,5)$ 就是一组勾股数.

(1)请你再写出两组勾股数:(________,________,________),(________,________,________);

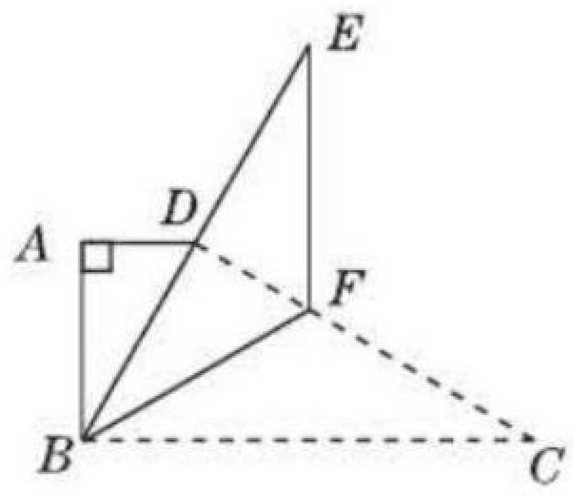
(2)在研究勾股数时,古希腊的哲学家柏拉图曾指出:如果 n 表示大于 1 的整数,$x=2n$,$y=n^2-1$,$z=n^2+1$,那么以 x,y,z 为三边长的三角形为直角三角形(即 x,y,z 为勾股数),请你加以证明.

25. 一个零件的形状如图所示,按规定这个零件中$\angle BAC$与$\angle ADC$都应为直角,工人师傅量得零件各边尺寸(单位:cm)为:$AD=8$,$AC=10$,$CD=6$,$AB=24$,$BC=26$,请你判断这个零件是否符合要求,并说明理由.



(第 25 题)

26. 如图,在梯形纸片$ABCD$中,$AD\parallel BC$,$\angle A=90°$,$\angle C=30°$,折叠纸片使BC经过点D,点C落在点E处,BF是折痕,且$BF=CF=8$. 求AB的长.



(第 26 题)

27. 在$\triangle ABC$中,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,若$\angle C=90°$,如图①,则有$a^2+b^2=c^2$;若$\triangle ABC$为锐角三角形,小明猜想:$a^2+b^2>c^2$. 理由如下:

如图②,过点A作$AD\perp CB$于点D,设$CD=x$.

在$Rt\triangle ADC$中,$AD^2=b^2-x^2$;

在$Rt\triangle ADB$中,$AD^2=c^2-(a-x)^2$.

$\therefore b^2-x^2=c^2-(a-x)^2$,即$a^2+b^2=c^2+2ax$.

$\because a>0, x>0$,

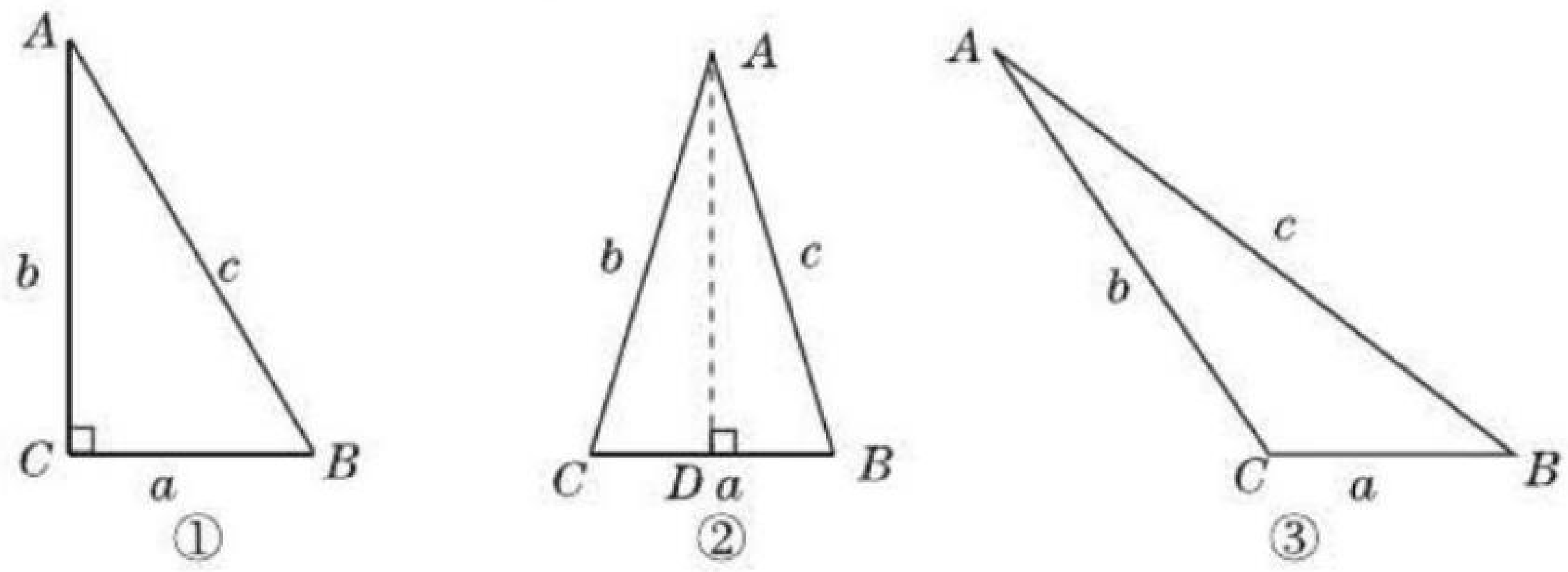
$\therefore 2ax>0$,

$\therefore a^2+b^2>c^2$.

故当$\triangle ABC$为锐角三角形时,$a^2+b^2>c^2$.

所以小明的猜想是正确的.

请你猜想,当$\triangle ABC$为钝角三角形时,如图③,a^2+b^2与c^2的大小关系,并证明你猜想的结论.



(第 27 题)

第十八章达标检测卷

(120分,90分钟)

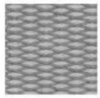
题 号	一	二	三	总 分
得 分				

一、选择题(每题3分,共30分)

1. 生活中很多精美的图案都是设计成特殊的平行四边形的形状,下列图案的外观形状不是特殊平行四边形的是(　　)


A


B


C

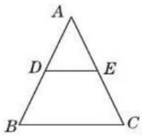

D

2. 如图,D,E分别是$\triangle ABC$的边AB,AC上的点,且$AD=DB$,$AE=EC$.若$DE=4$,则BC的长为(　　)

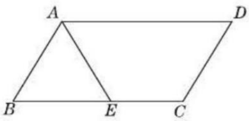
A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3. 如图,在▱$ABCD$中,AE平分$\angle BAD$,若$CE=3$ cm,$AB=4$ cm,则▱$ABCD$的周长是(　　)

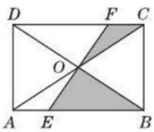
A. 20 cm　　B. 21 cm　　C. 22 cm　　D. 23 cm



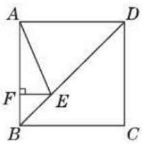
(第2题)



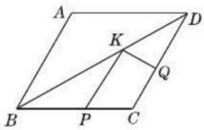
(第3题)



(第6题)



(第8题)



(第9题)

4. 下列命题中,真命题是(　　)

A. 对角线相等的四边形是矩形
B. 对角线互相垂直的四边形是菱形
C. 对角线互相平分的四边形是平行四边形
D. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形

5. 若顺次连接四边形$ABCD$四边的中点,得到的图形是一个矩形,则四边形$ABCD$一定是(　　)

A. 矩形
B. 菱形
C. 对角线相等的四边形
D. 对角线互相垂直的四边形

6. 如图,在矩形$ABCD$中,对角线AC,BD相交于点O,过O的直线EF分别交AB,CD于点E,F,若图中阴影部分的面积为6,则矩形$ABCD$的面积为(　　)

A. 12　　B. 18　　C. 24　　D. 30

7. 平行四边形$ABCD$的对角线交于点O,有五个条件:①$AC=BD$,②$\angle ABC=90°$,③$AB=AC$,④$AB=BC$,⑤$AC\perp BD$,则下列哪个组合可判定这个四边形是正方形?(　　)

A. ①②　　B. ①③　　C. ①④　　D. ④⑤

8. 如图,正方形$ABCD$的边长为4,点E在对角线BD上,且$\angle BAE=22.5°$,$EF\perp AB$,垂足为F,则EF的长为(　　)

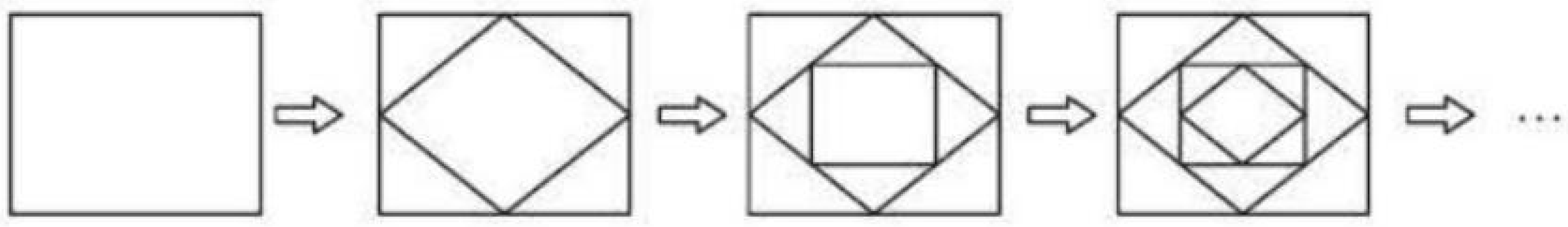
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $4-2\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{2}-4$

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 学校＿＿＿＿
密 封 线

9. 如图,在菱形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$\angle A=120°$,P,Q,K 分别为线段 BC,CD,BD 上的任意一点,则 $PK+QK$ 的最小值为(　　)

A. 1　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. $\sqrt{3}+1$

10. 如图,依次连接第一个矩形各边的中点得到一个菱形,再依次连接菱形各边的中点得到第二个矩形,按照此方法继续下去. 若第一个矩形的面积为 1,则第 n 个矩形的面积为(　　)

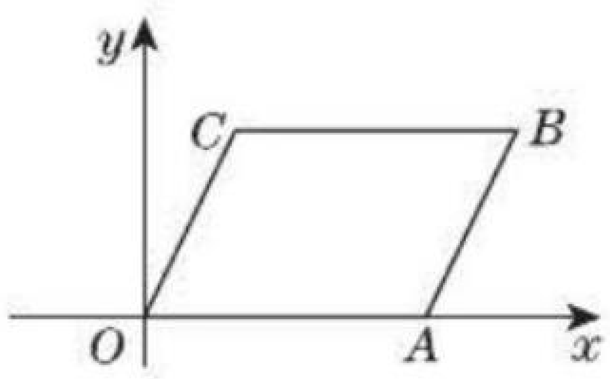


(第 10 题)

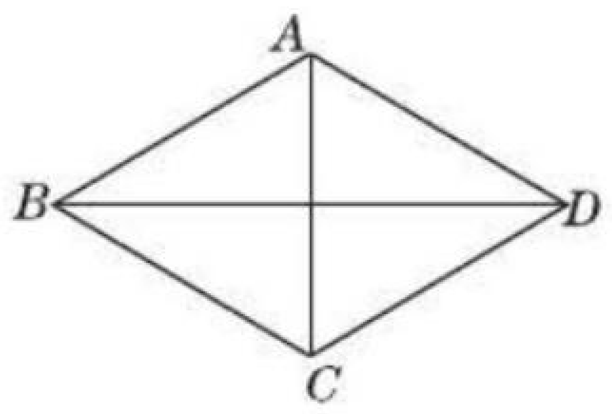
A. $\frac{1}{4}$　　　　B. $\frac{1}{4^{n-1}}$　　　　C. $\frac{1}{4^n}$　　　　D. $\frac{1}{4^{n+1}}$

二、填空题(每题 3 分,共 30 分)

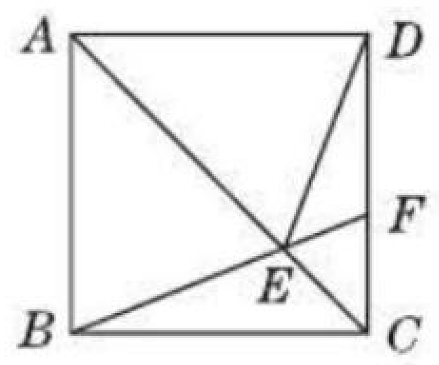
11. 如图,在▱$OABC$ 中,点 O 为坐标原点,点 A 的坐标为$(3,0)$,点 B 的坐标为$(4,2)$,则点 C 的坐标为________.



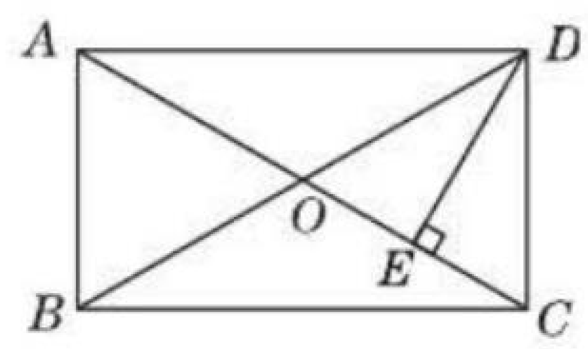
(第 11 题)



(第 12 题)



(第 13 题)



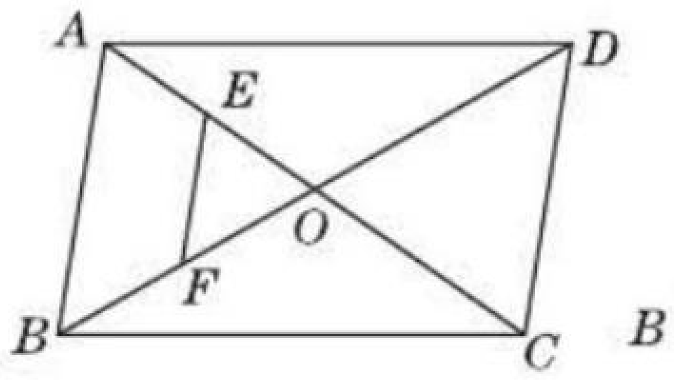
(第 14 题)

12. 如图,在菱形 $ABCD$ 中,对角线 $AC=6$,$BD=10$,则菱形 $ABCD$ 的面积为________.

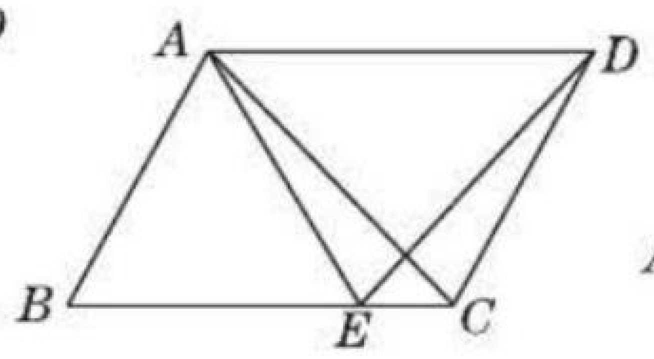
13. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,点 F 为 CD 上一点,BF 与 AC 交于点 E,若 $\angle CBF=20°$,则 $\angle AED$ 等于________.

14. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC,BD 相交于点 O,$DE\perp AC$ 于点 E,$\angle EDC:\angle EDA=1:2$,且 $AC=10$,则 EC 的长度是________.

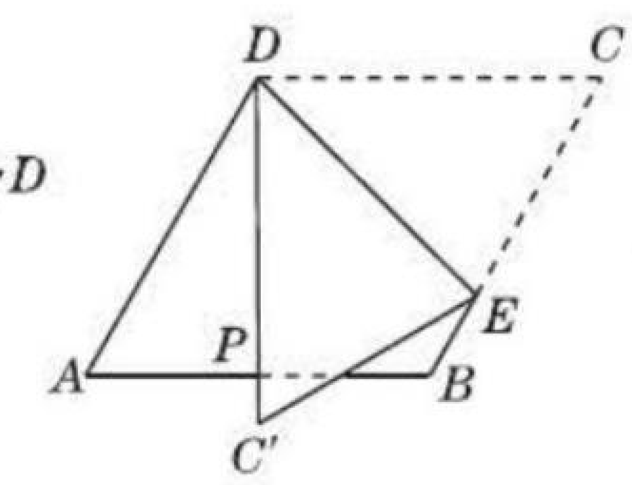
15. 如图,平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,E,F 分别是线段 AO,BO 的中点. 若 $AC+BD=30$ cm,$\triangle OAB$ 的周长为 23 cm,则 EF 的长为__________.



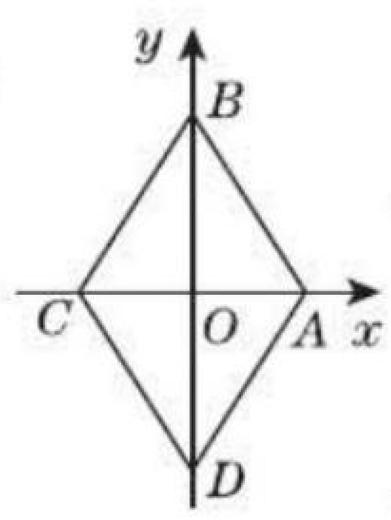
(第 15 题)



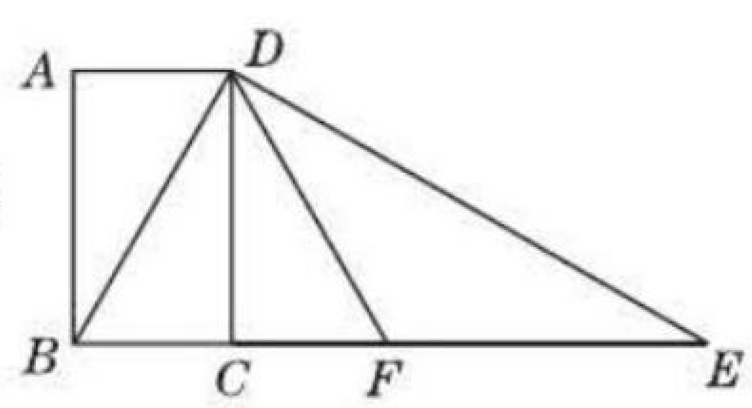
(第 16 题)



(第 17 题)



(第 18 题)



(第 19 题)

16. 如图,在▱$ABCD$ 中,点 E 为 BC 边上一点(不与端点重合),若 $AB=AE$,且 AE 平分 $\angle DAB$,则有下列结论:①$\angle B=60°$;②$AC=BC$;③$\angle AED=\angle ACD$;④$\triangle ABC\cong\triangle EAD$. 其中正确的是________.(在横线上填所有正确结论的序号)

17. 如图,在菱形纸片 $ABCD$ 中,$\angle A=60°$,折叠菱形纸片 $ABCD$,使点 C 落在 DP(P 为 AB 的中点)所在的直线上的点 C' 处,得到经过点 D 的折痕 DE. 则 $\angle DEC$ 的大小为________.

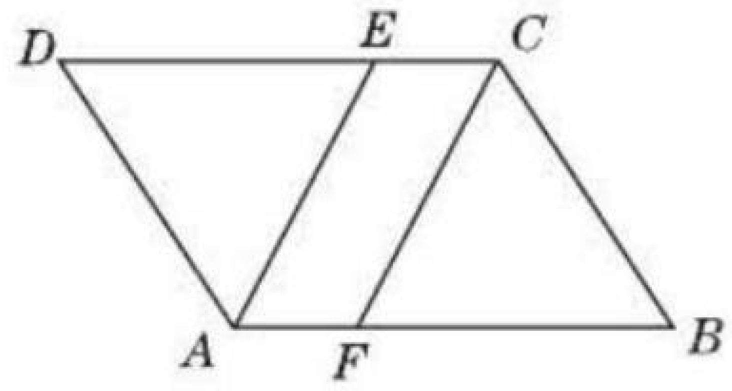
18. 菱形 $ABCD$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示,其中点 A 的坐标为$(1,0)$,点 B 的坐标为$(0,\sqrt{3})$,动点 P 从点 A 出发,沿 $A\to B\to C\to D\to A\to B\to\cdots$的路径,在菱形的边上以每秒0.5 个单位长度的速度移动,移动到第 2 020 s 时,点 P 的坐标为________.

19. 如图,四边形 $ABCD$ 为矩形,过点 D 作对角线 BD 的垂线,交 BC 的延长线于点 E,取 BE 的中点 F,连接 DF,$DF=4$. 设 $AB=x$,$AD=y$,则 $x^2+(y-4)^2$ 的值为________.

20. 正方形 $ABCD$ 的边长是 4,点 P 是 AD 边的中点,点 E 是正方形边上的一点,若$\triangle PBE$ 是等腰三角形,则腰长为__________________.

三、解答题(21 题 8 分,26 题 12 分,其余每题 10 分,共 60 分)

21. 如图,在▱$ABCD$ 中,AE 平分$\angle BAD$,CF 平分$\angle BCD$,分别交 CD,AB 于点 E,F. 求证:$AE=CF$.

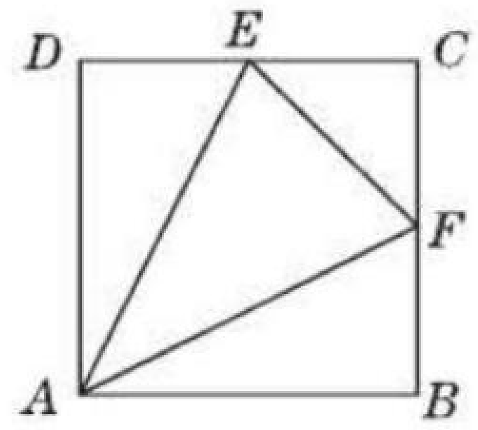


(第 21 题)

22. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 4,E,F 分别为 DC,BC 的中点.

(1)求证:$\triangle ADE\cong\triangle ABF$;

(2)求$\triangle AEF$ 的面积.

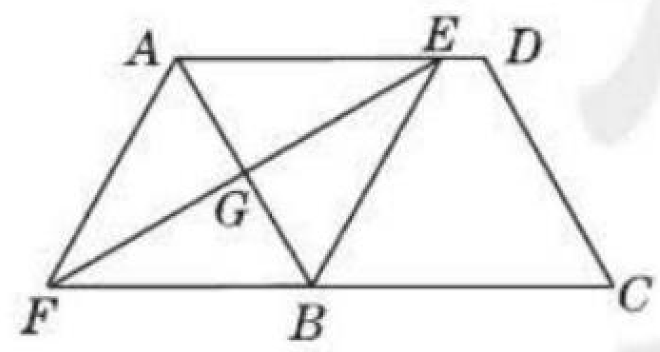


(第 22 题)

23. 如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,边 AB 的垂直平分线交 AD 于点 E,交 AB 于点 G,交 CB 的延长线于点 F,连接 AF,BE.

(1)求证:$\triangle AGE\cong\triangle BGF$;

(2)试判断四边形 $AFBE$ 的形状,并说明理由.

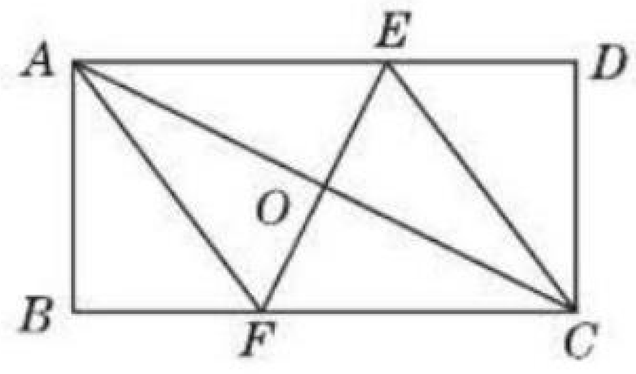


(第 23 题)

24. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 的垂直平分线 EF 分别交 AD, AC, BC 于点 E, O, F，连接 CE 和 AF.

(1) 求证：四边形 $AECF$ 为菱形；

(2) 若 $AB=4$，$BC=8$，求菱形 $AECF$ 的周长.



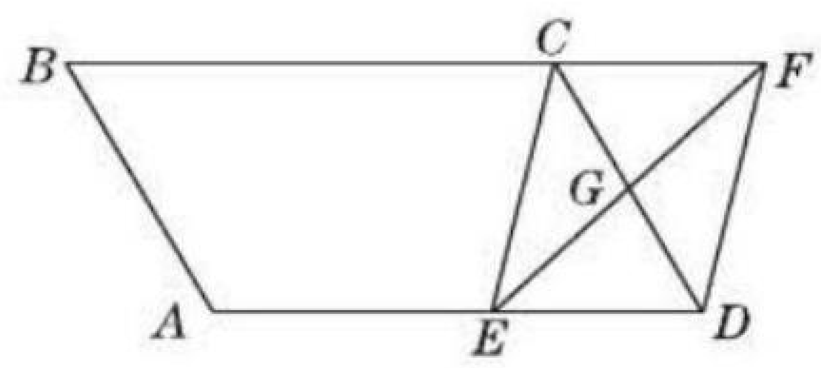
（第 24 题）

25. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=3$ cm，$BC=5$ cm，$\angle B=60°$，G 是 CD 的中点，E 是边 AD 上的动点，EG 的延长线与 BC 的延长线交于点 F，连接 CE, DF.

(1) 求证：四边形 $CEDF$ 是平行四边形；

(2) ①当四边形 $CEDF$ 是矩形时，求 AE 的长；

②当四边形 $CEDF$ 是菱形时，求 AE 的长.



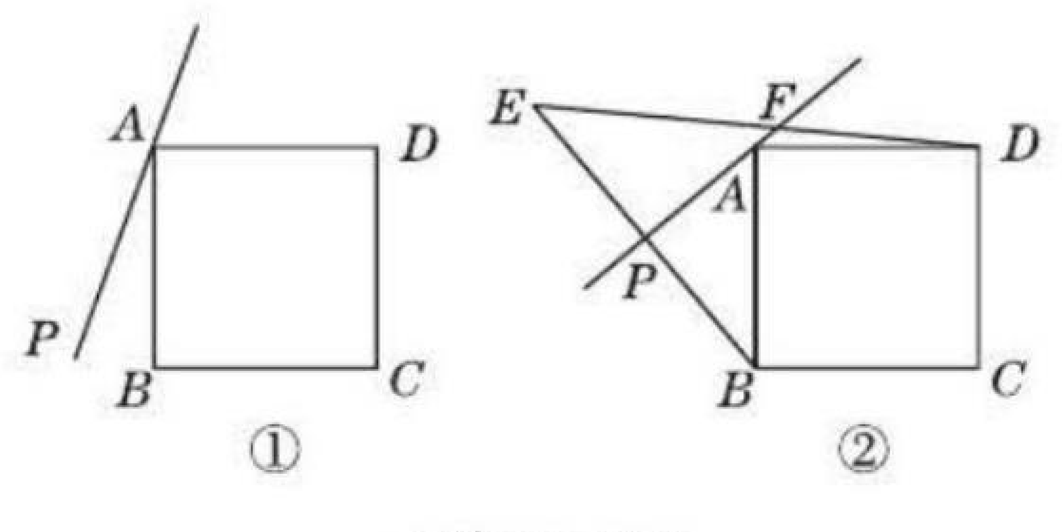
（第 25 题）

26. 如图，在正方形 $ABCD$ 外侧作直线 AP，点 B 关于直线 AP 的对称点为 E，连接 BE, DE，其中 DE 交直线 AP 于点 F.

(1) 依题意补全图①；

(2) 若 $\angle PAB=20°$，求 $\angle ADF$ 的度数；

(3) 如图②，若 $45°<\angle PAB<90°$，用等式表示线段 AB, EF, FD 之间的数量关系，并证明.



（第 26 题）

姓名________ 学号________ 班级________ 学校________

密 封 线

第十九章达标检测卷

(120 分,90 分钟)

题 号	一	二	三	总 分
得 分				

一、选择题(每题 3 分,共 30 分)

1. 下列图象中,不能表示 y 是 x 的函数的是(　　)

A　　　B　　　C　　　D

2. 函数 $y=\sqrt{x-4}$ 中自变量 x 的取值范围是(　　)

A. $x>4$　　B. $x\geq4$　　C. $x\leq4$　　D. $x\neq4$

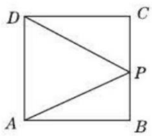
3. 一次函数 $y=-2x+1$ 的图象不经过(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

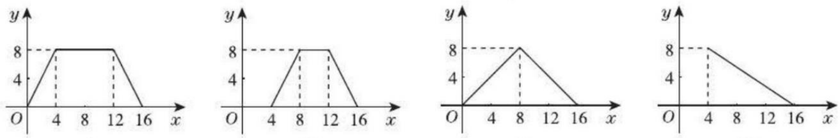
4. 已知在一次函数 $y=-1.5x+3$ 的图象上,有三点 $(-3,y_1)$,$(-1,y_2)$,$(2,y_3)$,则 y_1,y_2,y_3 的大小关系为(　　)

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_1>y_3>y_2$　　C. $y_2>y_1>y_3$　　D. 无法确定

5. 如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 4,点 P 为正方形 $ABCD$ 边上一动点,沿 $A\to D\to C\to B\to A$ 的路径匀速移动,设点 P 经过的路径长为 x,$\triangle APD$ 的面积为 y,则下列图象中,能大致反映 y 与 x 之间的函数关系的是(　　)



(第 5 题)



A　　　B　　　C　　　D

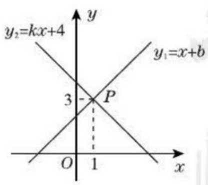
6. 已知一次函数 $y=kx+b$,y 随着 x 的增大而减小,且 $kb>0$,则这个函数的大致图象是(　　)

A　　　B　　　C　　　D

7. 如图,一次函数 $y_1=x+b$ 与一次函数 $y_2=kx+4$ 的图象交于点 $P(1,3)$,则关于 x 的不等式 $x+b>kx+4$ 的解集是(　　)

A. $x>-2$　　B. $x>0$

C. $x>1$　　D. $x<1$



(第 7 题)

8. 把直线 $y=-x+3$ 向上平移 m 个单位后,与直线 $y=2x+4$ 的交点在第一象限,则 m 的取值范围是(　　)

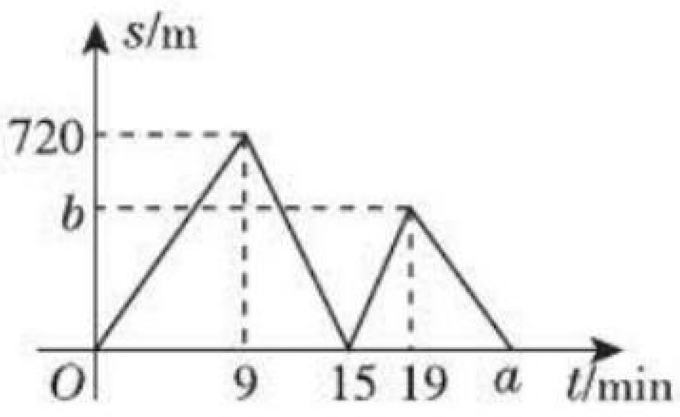
A. $1<m<7$　　B. $3<m<4$　　C. $m>1$　　D. $m<4$

9. 已知一次函数 $y=\frac{3}{2}x+m$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+n$ 的图象都经过点 $A(-2,0)$，且与 y 轴分别交于点 B,C，那么 $\triangle ABC$ 的面积是(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

10. 小文、小亮从学校出发到青少年宫参加书法比赛，小文步行一段时间后，小亮骑自行车沿相同路线行进，两人均匀速前行. 他们的路程差 s(m)与小文出发时间 t(min)之间的函数关系如图所示. 下列说法：①小亮先到达青少年宫；②小亮的速度是小文速度的 2.5 倍；③$a=24$；④$b=480$. 其中正确的是(　　)

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ①③④　　D. ①②③④

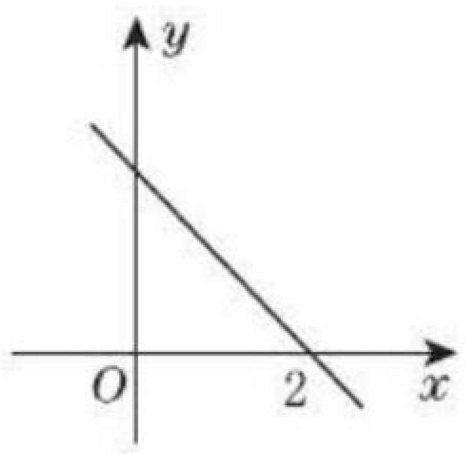


(第 10 题)

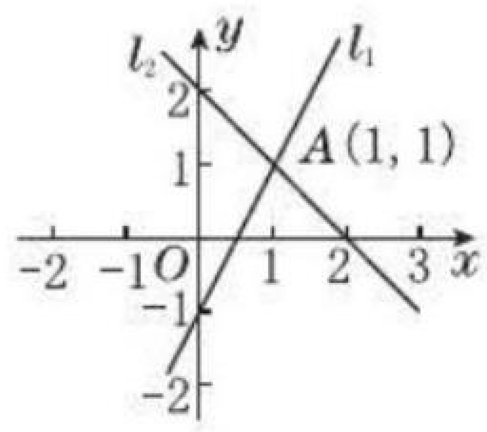
二、填空题(每题 3 分，共 30 分)

11. 2018 年是中国农历狗年，一位艺术家的剪纸如图所示，该剪纸可以近似看作圆形，若其半径为 r，那么这个剪纸的面积 $S=\pi r^2$，这个式子中________是自变量，________是自变量的函数. 当 $r=20$ cm 时，$S=$________cm^2.

(第 11 题)



(第 15 题)



(第 17 题)

12. 函数 $y=(m-2)x+m^2-4$ 是正比例函数，则 $m=$________.

13. 一次函数 $y=2x-6$ 的图象与 x 轴的交点坐标为________.

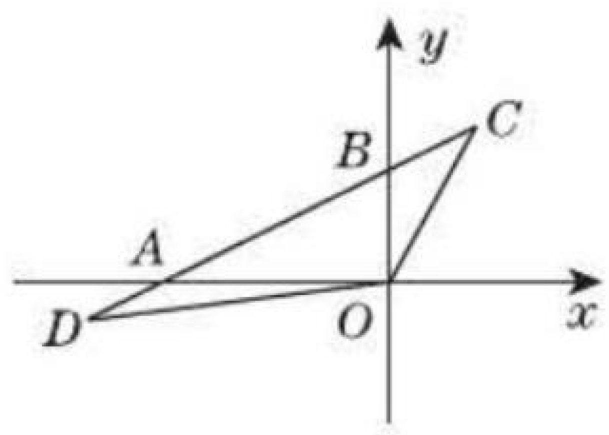
14. 如果直线 $y=\frac{1}{2}x+n$ 与直线 $y=mx-1$ 的交点坐标为$(1,-2)$，那么 $m=$________，$n=$________.

15. 如图，一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴的交点坐标为$(2,0)$，则下列说法：①y 随 x 的增大而减小；②$b>0$；③关于 x 的方程 $kx+b=0$ 的解为 $x=2$. 其中说法正确的有________(把你认为说法正确的序号都填上).

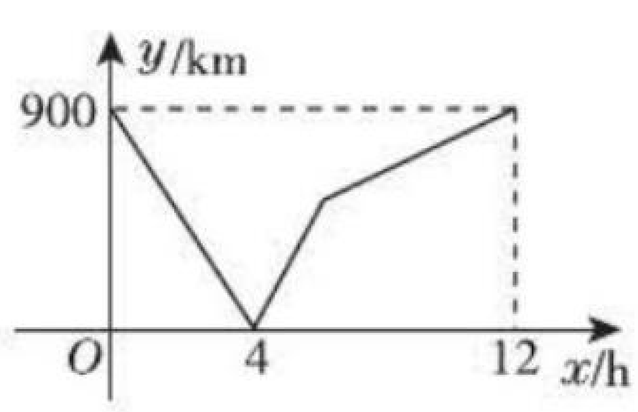
16. 若一次函数 $y=(2m-1)x+3-2m$ 的图象经过第一、二、四象限，则 m 的取值范围是________.

17. 如图，直线 l_1，l_2 交于点 A，观察图象，点 A 的坐标可以看作方程组________的解.

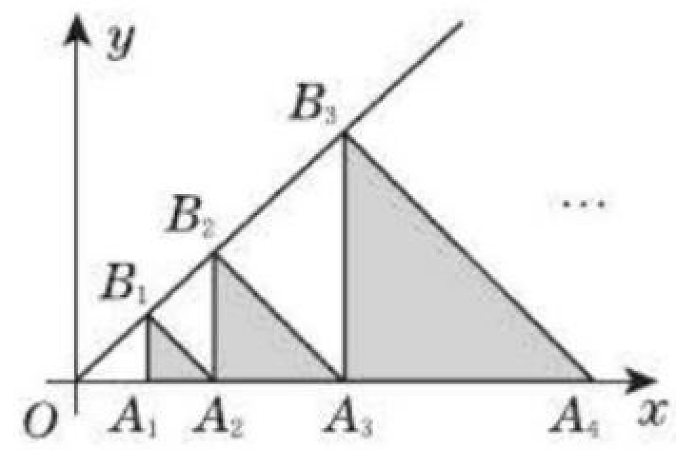
18. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 为坐标原点，直线 $y=kx+b$ 经过 $A(-6,0)$，$B(0,3)$两点，点 C,D 在直线 AB 上，C 的纵坐标为 4，点 D 在第三象限，且 $\triangle OBC$ 与 $\triangle OAD$ 的面积相等，则点 D 的坐标为________.



(第 18 题)



(第 19 题)



(第 20 题)

19. 一列快车从甲地驶往乙地，一列慢车从乙地驶往甲地，两车同时出发，两车的距离 y(km)与慢车行驶的时间 x(h)之间的函数关系如图所示，则快车到达乙地时慢车离乙地距离为________.

20. 如图，$\triangle A_1B_1A_2$，$\triangle A_2B_2A_3$，$\triangle A_3B_3A_4$，…，$\triangle A_nB_nA_{n+1}$都是等腰直角三角形，其中点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 在 x 轴上，点 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 在直线 $y=x$ 上，已知 $OA_2=1$，则 $OA_{2\,018}$的长为________.

三、解答题(21 题 6 分,26 题 10 分,27 题 12 分,其余每题 8 分,共 60 分)

21. 已知 $y+1$ 与 x 成正比例,且当 $x=2$ 时,$y=5$.

(1)写出 y 与 x 之间的函数解析式;

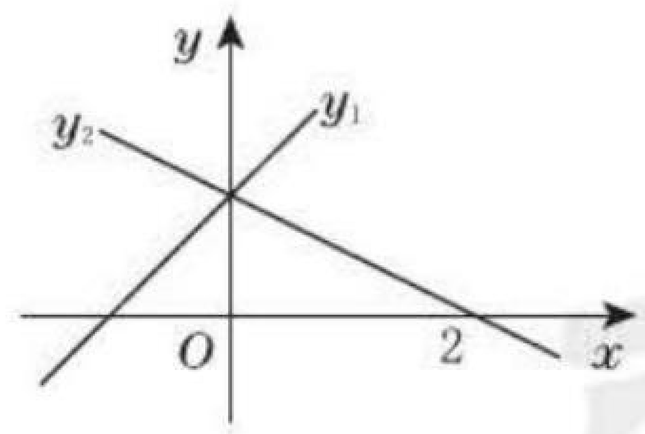
(2)计算当 $y=2\ 018$ 时,x 的值.

22. 已知一次函数的图象与直线 $y=-x+1$ 平行,且过点$(8,2)$,求此一次函数的解析式.

23. 函数 $y_1=x+1$ 与 $y_2=ax+b(a\neq0)$ 的图象如图所示,这两个函数图象的交点在 y 轴上,试求:

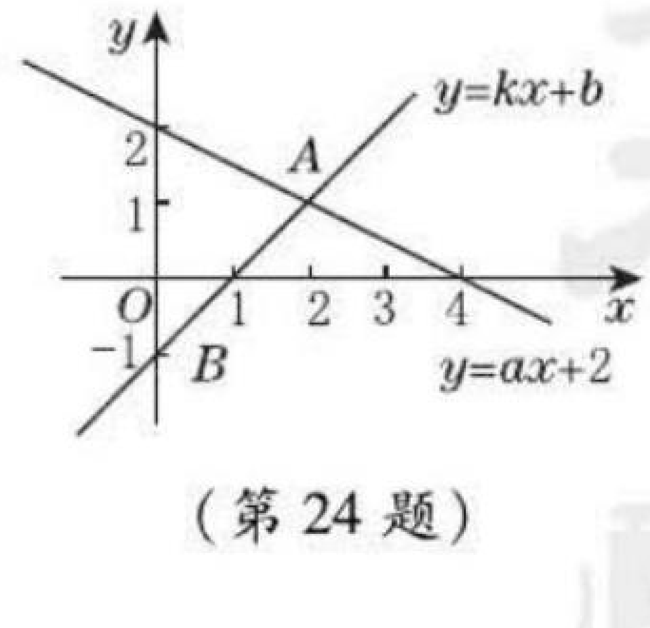
(1)函数 $y_2=ax+b$ 的解析式;

(2)使 y_1,y_2 的值都大于零的 x 的取值范围.



(第 23 题)

24. 已知一次函数 $y=ax+2$ 与 $y=kx+b$ 的图象如图,且方程组 $\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 点 B 的坐标为 $(0,-1)$,请你确定这两个一次函数的解析式.

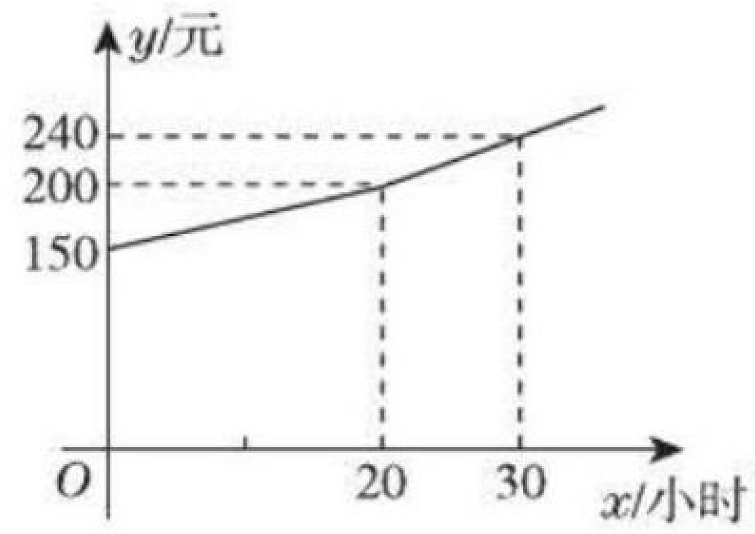


(第 24 题)

25. 为了鼓励李敏多读书,她的父母每月根据她上个月的阅读时间给予她物质奖励.若设李敏某月的阅读时间为 x 小时,下月她可获得的总购书费为 y 元,则 y 与 x 之间的函数图象如图所示.

(1)求出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)若李敏希望 2017 年 12 月有 250 元的购书费,则她 2017 年 11 月需阅读多长时间?



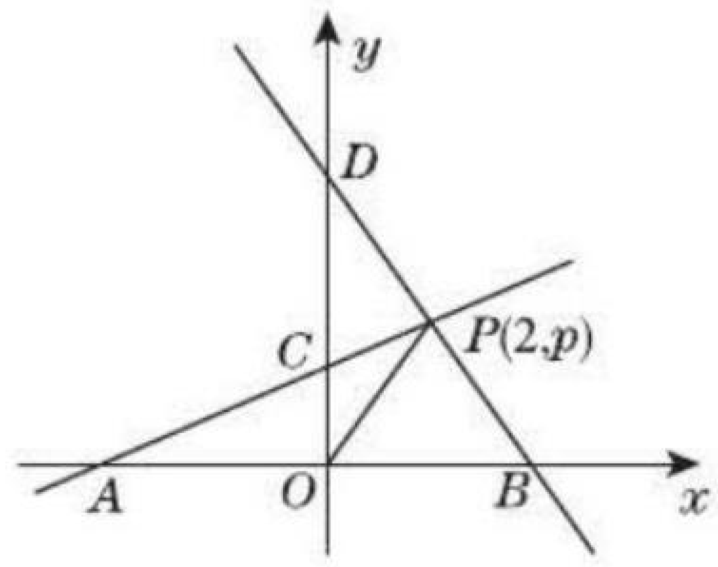
(第 25 题)

26. 如图,A,B 分别是 x 轴上位于原点左、右两侧的点,点 $P(2,p)$ 在第一象限,直线 PA 交 y 轴于点 $C(0,2)$,直线 PB 交 y 轴于点 D,$S_{\triangle AOP}=6$.

(1)求 $\triangle COP$ 的面积;

(2)求点 A 的坐标和 p 的值;

(3)若 $S_{\triangle BOP}=S_{\triangle DOP}$,求直线 BD 对应的函数解析式.



(第 26 题)

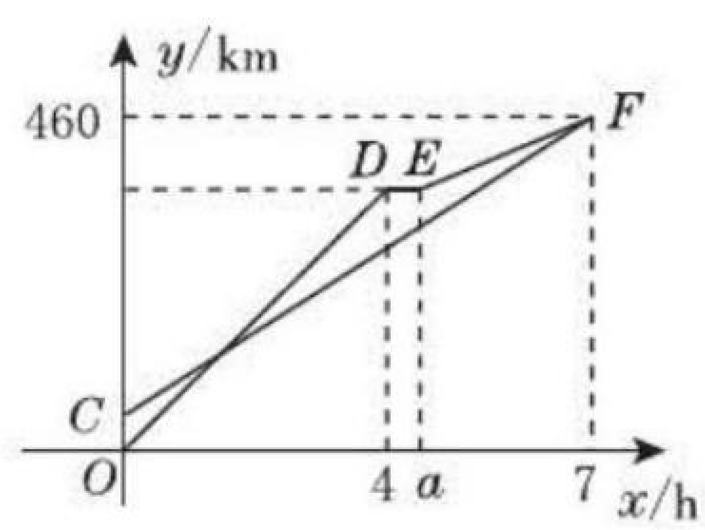
27. 甲、乙两车从 A 地出发沿同一路线驶向 B 地,甲车先出发匀速驶向 B 地,40 min 后,乙车出发,匀速行驶一段时间后,在途中的货站装货耗时半小时,由于满载货物,为了行驶安全,速度减少了 50 km/h,结果与甲车同时到达 B 地.甲、乙两车距 A 地的路程 y(km)与乙车行驶时间 x(h)之间的函数图象如图所示.

请结合图象信息解答下列问题:

(1)直接写出 a 的值,并求甲车的速度;

(2)求图中线段 EF 所表示的 y 与 x 之间的函数解析式,并直接写出自变量 x 的取值范围;

(3)乙车出发多少小时与甲车相距 15 km?



(第 27 题)

第二十章达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 学校＿＿＿＿

密 封 线

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 一组数据 6，3，9，4，3，5，12 的中位数是(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

2. 有一组数据 58，53，44，36，30，29，22，21，20，18，这组数据的平均数是(　　)

A. 33　　B. 33. 1　　C. 34. 1　　D. 35

3. 在端午节到来之前，学校食堂推荐了 A，B，C 三家粽子专卖店，对全校师生爱吃哪家店的粽子做调查，以决定最终向哪家店采购，下面的统计量最值得关注的是(　　)

A. 方差　　B. 平均数　　C. 中位数　　D. 众数

4. 某中学规定：学生的学期体育综合成绩满分为 100 分，其中，期中考试成绩占 40%，期末考试成绩占 60%，小海同学这个学期体育的期中、期末成绩（百分制）分别是 80 分、90 分，则小海这个学期的体育综合成绩是(　　)

A. 88. 5 分　　B. 86 分　　C. 87 分　　D. 87. 5 分

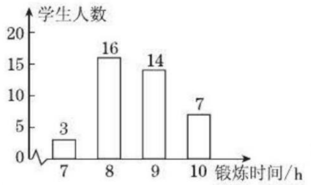
5. 一组数据 2，0，1，x，3 的平均数是 2，则这组数据的方差是(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 1　　D. 3

6. 如图是根据某班 40 名同学一周的体育锻炼情况绘制的条形统计图，那么关于该班 40 名同学一周参加体育锻炼时间的说法错误的是(　　)

A. 平均数是 8. 625 h　　B. 中位数是 8 h

C. 众数是 8 h　　D. 锻炼时间超过 8 h 的有 21 人



（第 6 题）

7. 某市测得一周 PM2. 5 的日均值（单位：微克/立方米）如下：31，30，34，35，36，34，31，对这组数据下列说法正确的是(　　)

A. 众数是 35　　B. 中位数是 34　　C. 平均数是 35　　D. 方差是 6

8. 某校要从四名学生中选拔一名参加市“风华小主播”大赛，将多轮选拔赛的成绩的数据进行分析得到每名学生的平均成绩$\bar{x}$及其方差 s^2 如表所示，如果要选择一名成绩高且发挥稳定的学生参赛，那么应选择的学生是(　　)

	甲	乙	丙	丁
$\bar{x}$	8	9	9	8
s^2	1	1	1. 2	1. 3

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

9. 如果一组数据 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 的方差是2,那么一组新数据 $2a_1,2a_2,2a_3,\cdots,2a_n$ 的方差是(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

10. 2022 年将在北京—张家口举办冬季奥运会,北京将成为世界上第一个既举办夏季奥运会又举办冬季奥运会的城市,某校开设了冰球选修课,12 名同学被分成甲、乙两组进行训练,他们的身高(单位:cm)如下表所示.

	队员 1	队员 2	队员 3	队员 4	队员 5	队员 6
甲组	176	177	175	176	177	175
乙组	178	175	170	174	183	176

设两组队员身高的平均数依次为 $\bar{x}_{甲},\bar{x}_{乙}$,方差依次为 $s_{甲}^2,s_{乙}^2$,下列关系中正确的是(　　)

A. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙},s_{甲}^2<s_{乙}^2$　　B. $\bar{x}_{甲}=\bar{x}_{乙},s_{甲}^2>s_{乙}^2$

C. $\bar{x}_{甲}<\bar{x}_{乙},s_{甲}^2<s_{乙}^2$　　D. $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙},s_{甲}^2>s_{乙}^2$

二、**填空题**(每题 3 分,共 30 分)

11. 数据 4,7,7,8,9 的众数是________.

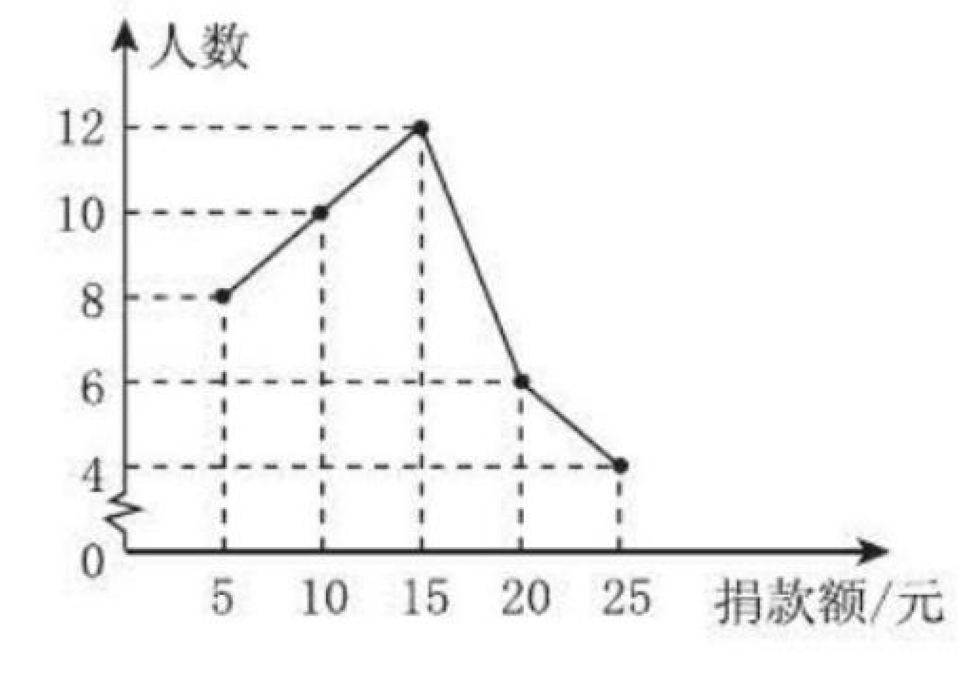
12. 需要对一批排球的质量是否符合标准进行检测,其中质量超过标准的克数记为正数,不足标准的克数记为负数. 现抽取 8 个排球,通过检测所得数据如下(单位:g):+1, -2, +1,0, +2, -3,0, +1,则这组数据的方差是________.

13. 两组数据:3,a,$2b$,5 与 a,6,b 的平均数都是 6,若将这两组数据合并为一组数据,则这组新数据的中位数为________.

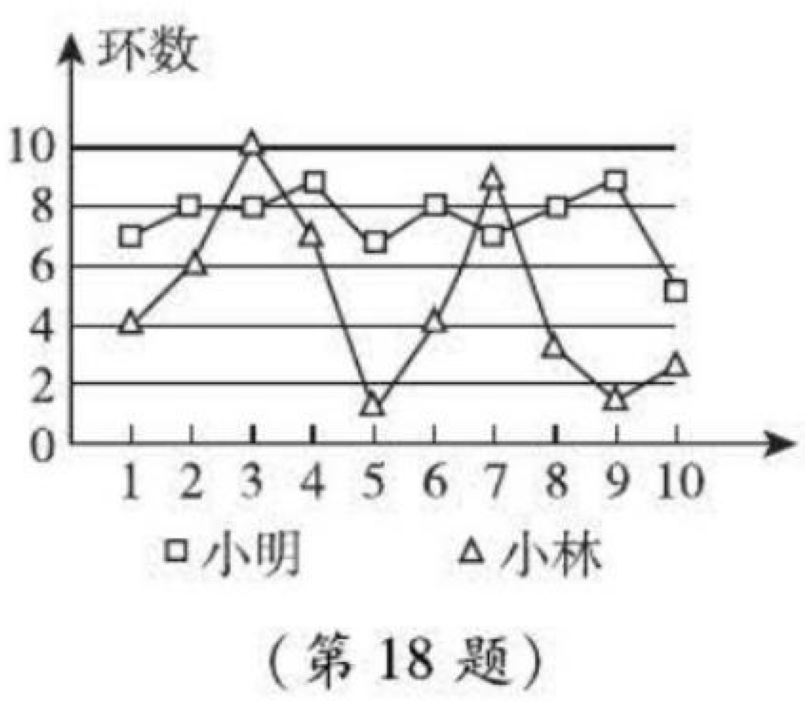
14. 三位同学在一次数学考试中的得分与他们三个人的平均成绩的差分别是 -8,6,a,则 $a=$________.

15. 某公司欲招聘工人,对候选人进行三项测试:语言、创新、综合知识,并将测试得分按 3 : 4 : 3 的比确定测试总分. 已知某位候选人的三项得分(单位:分)分别为 88,72,50,则这位候选人的测试总分为________.

16. 某班 40 名学生参加了一次"献爱心一日捐"活动,捐款人数与捐款额如图所示,根据图中所提供的信息,你认为这次捐款活动中 40 个捐款额的中位数是________.



(第 16 题)



(第 18 题)

17. 一组数据 1,5,7,x 的中位数和平均数相等,则 x 的值是________.

18. 小林和小明练习射击,第一轮 10 枪打完后两人打靶的环数如图所示,那么根据图中的信息,他们成绩的方差的大小关系是 $s_{小明}^2$________$s_{小林}^2$. (填">""<"或"=")

19. 已知一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差是 s^2,则新的一组数据 $ax_1+1,ax_2+1,\cdots,ax_n+1$($a$ 为非零常数)的方差是____________(用含 a 和 s^2 的式子表示).

20. 王老板为了与客户签订合同,对自己鱼塘中鱼的总质量进行估计,第一次捞出 100 条,称得总质量为 184 kg,并将每条鱼做好记号后放入水中,当它们完全混合于鱼群之后,又捞出 200 条,称得总质量为 416 kg,且带有记号的鱼有 20 条,则王老板的鱼塘中估计有鱼________条,共重________kg.

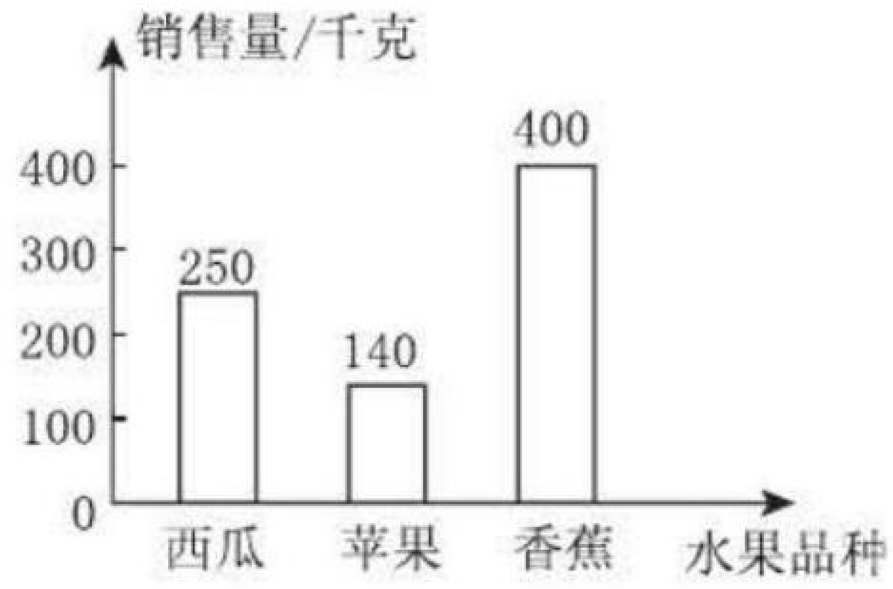
三、解答题(21,22 题每题 8 分,23,24 题每题 10 分,25,26 题每题 12 分,共 60 分)

21. 为了估计西瓜、苹果和香蕉三种水果一个月的销售量,某水果店对这三种水果 7 天的销售量进行了统计,统计结果如图所示.

(1)若西瓜、苹果和香蕉的售价分别为 6 元/千克、8 元/千克和 3 元/千克,则这 7 天销售额最大的水果品种是________;

A. 西瓜　　B. 苹果　　C. 香蕉

(2)估计一个月(按 30 天计算)该水果店可销售苹果多少千克?



(第 21 题)

22. 某学校招聘教师,王明、李红和张丽参加了考试,评委从三个方面对他们进行打分,结果如下表所示(各项的满分为 30 分),最后总分的计算按课堂教学效果的分数∶教学理念的分数∶教材处理能力的分数 = 5∶2∶3 的比例计算,如果你是该学校的教学校长,你会录用哪一位应聘者?试说明理由.

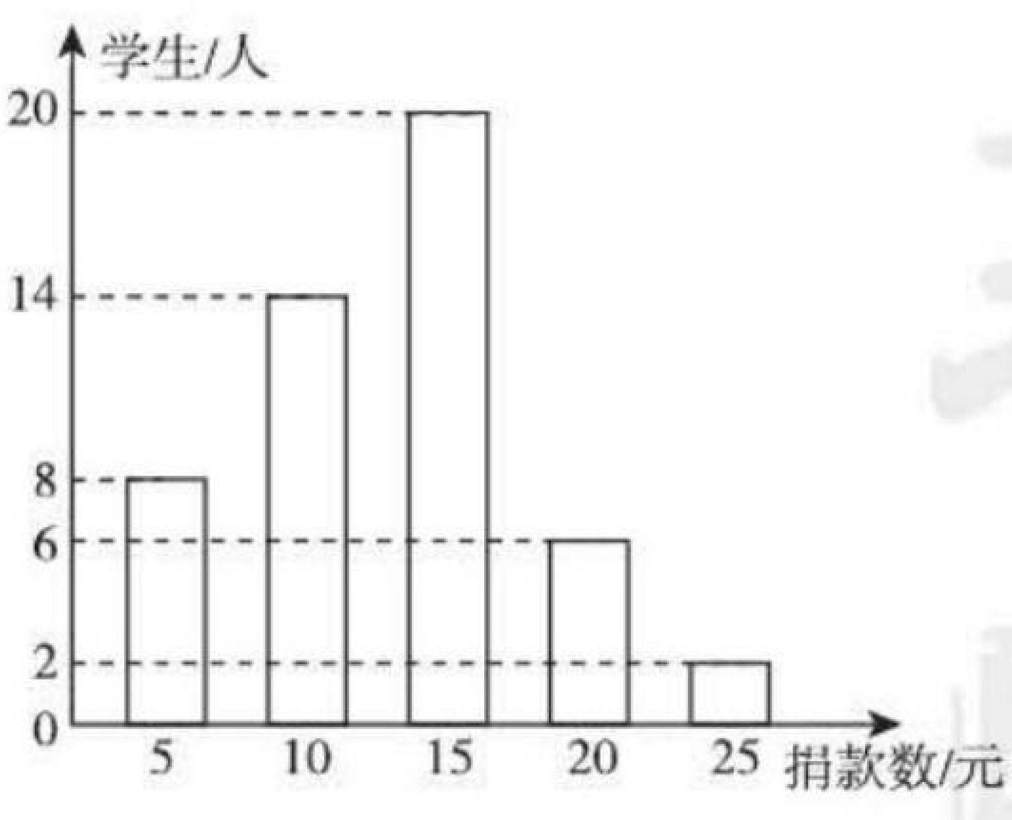
	王明	李红	张丽
课堂教学效果	25	26	25
教学理念	23	24	25
教材处理能力	24	26	25

23. 在慈善日捐活动中,某学校团支部为了了解本校学生的捐款情况,随机抽取了 50 名学生的捐款数进行了统计,并绘制成如图所示的条形统计图.

(1)这 50 名同学捐款的众数为________元,中位数为________元.

(2)求这 50 名同学捐款的平均数.

(3)该校共有 600 名学生参与捐款,请估计该校学生的捐款总数.



(第 23 题)

24. 在学校组织的社会实践活动中，甲、乙两人参加了射击比赛，每人射击七次，命中的环数如下表所示.

序号	一	二	三	四	五	六	七
甲命中的环数/环	7	8	8	6	9	8	10
乙命中的环数/环	5	10	6	7	8	10	10

根据以上信息，解决以下问题：

(1) 写出甲、乙两人命中环数的众数；

(2) 已知通过计算求得$\overline{x}_{甲}=8$，$s_{甲}^2\approx1.43$，试比较甲、乙两人谁的成绩更稳定.

25. 已知一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数为 1，方差为$\frac{5}{3}$.

(1) 求 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2$ 的值；

(2) 若在这组数据中加入另一个数据 x_7，重新计算，平均数无变化，求这 7 个数据的方差.（结果用分数表示）

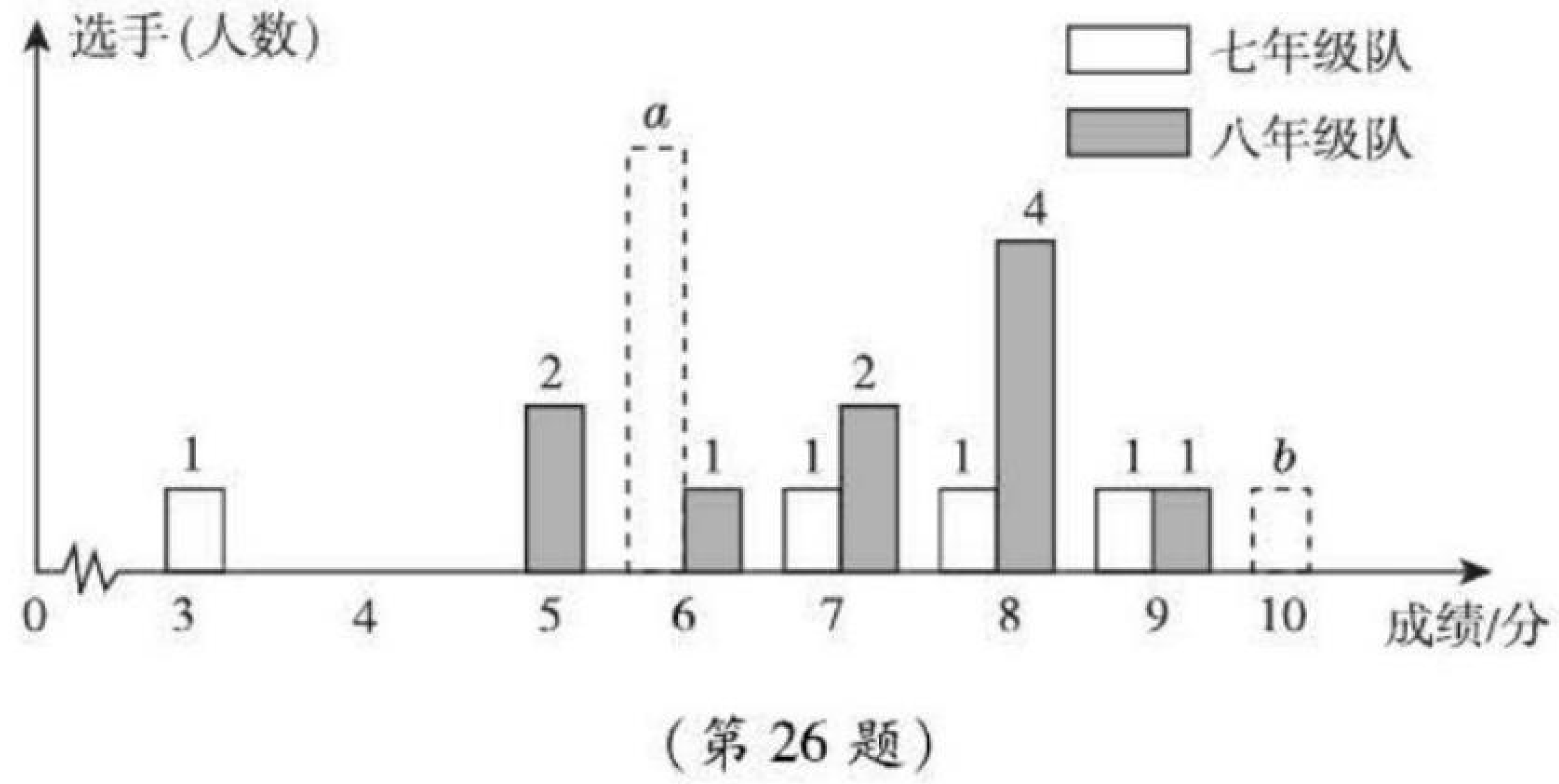
26. 我市某中学七、八年级各选派 10 名选手参加学校举办的"爱我荆门"知识竞赛，计分采用 10 分制，选手得分均为整数，成绩达到 6 分或 6 分以上为合格，达到 9 分或 10 分为优秀. 这次竞赛后，七、八年级两支代表队选手成绩分布的条形统计图如图所示，成绩统计分析表如下所示，其中七年级代表队得 6 分、10 分的选手人数分别为 a，b.

队别	平均分	中位数	方差	合格率	优秀率
七年级	6.7	m	3.41	90%	n
八年级	7.1	7.5	1.69	80%	10%

(1) 请依据图表中的数据，求 a，b 的值；

(2) 直接写出表中的 m，n 的值；

(3) 有人说七年级的合格率、优秀率均高于八年级，所以七年级队的成绩比八年级队好，但也有人说八年级队的成绩比七年级队好. 请你给出两条支持八年级队成绩好的理由.



（第 26 题）

期末达标检测卷

（120 分，90 分钟）

题　号	一	二	三	总　分
得　分				

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 学校＿＿＿＿

密 封 线

一、选择题（每题 3 分，共 30 分）

1. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是（　　）

A. $x\geqslant1$　　B. $x>1$　　C. $x\geqslant1$ 且 $x\neq2$　　D. $x\neq2$

2. 在下列各组数据中，不能作为直角三角形的三边长的是（　　）

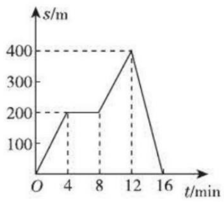
A. 3，4，6　　B. 7，24，25　　C. 6，8，10　　D. 9，12，15

3. 下列运算错误的是（　　）

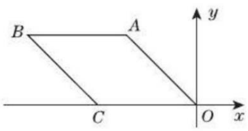
A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$　　C. $\sqrt{6}\div\sqrt{2}=\sqrt{3}$　　D. $(-\sqrt{2})^2=2$

4. 某幼儿园对全体小朋友爱吃哪种粽子做调查，以决定最终买哪种口味的粽子，下面的调查数据最值得关注的是（　　）

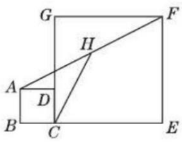
A. 方差　　B. 平均数　　C. 中位数　　D. 众数



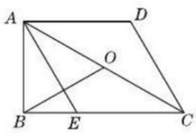
（第 5 题）



（第 6 题）



（第 8 题）



（第 10 题）

5. 小明从家出发，外出散步，到一个公共阅报栏前看了一会儿报后，继续散步了一段时间，然后回家. 如图描述了小明在散步过程中离家的距离 s(m) 与散步所用时间 t(min) 之间的函数关系，根据图象，下列说法错误的是（　　）

A. 小明看报用时 8 min　　B. 公共阅报栏距小明家 200 m

C. 小明离家最远的距离为 400 m　　D. 小明从出发到回家共用时 16 min

6. 菱形 $OABC$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示，若 $OA=2$，$\angle AOC=45°$，则 B 点的坐标是（　　）

A. $(2+\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B. $(2-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　C. $(-2+\sqrt{2},\sqrt{2})$　　D. $(-2-\sqrt{2},\sqrt{2})$

7. 对于一次函数 $y=-2x+4$，下列结论错误的是（　　）

A. 若两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 在该函数图象上，且 $x_1<x_2$，则 $y_1>y_2$

B. 函数的图象不经过第三象限

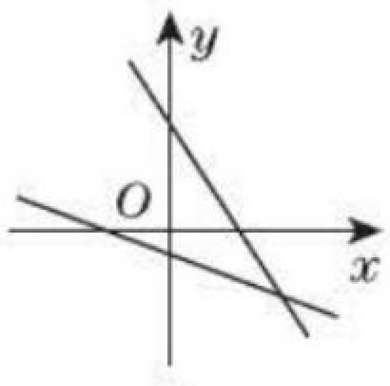
C. 函数的图象向下平移 4 个单位长度得 $y=-2x$ 的图象

D. 函数的图象与 x 轴的交点坐标是 $(0,4)$

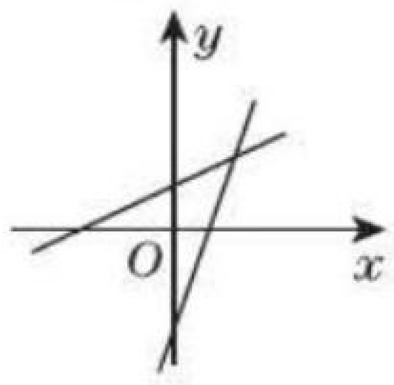
8. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中，点 D 在 CG 上，$BC=1$，$CE=3$，H 是 AF 的中点，那么 CH 的长是(　　)

A. 2.5　　　　B. $\sqrt{5}$　　　　C. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　　　D. 2

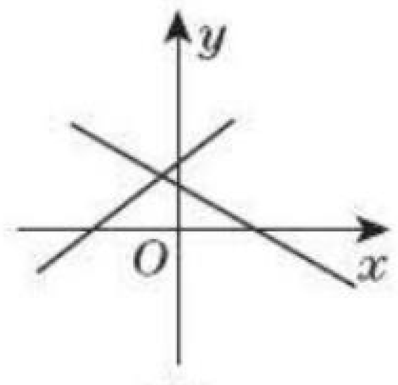
9. 若 $kb<0$，$b-k>0$，则函数 $y=kx+b$ 与 $y=bx+k$ 在同一坐标系中的大致图象是(　　)



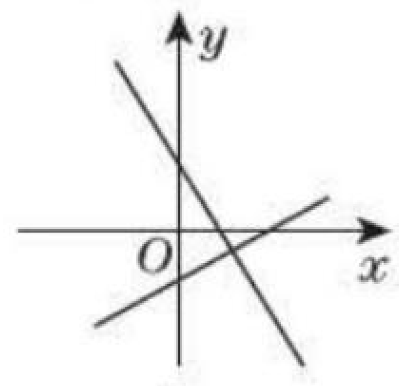
A



B



C



D

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，$AD/\!/BC$，$AE/\!/DC$ 交 BC 于点 E，AE 平分 $\angle BAC$，$AO=CO$，$AD=DC=2$，下面结论：①$AC=2AB$；②$AB=\sqrt{3}$；③$S_{\triangle ADC}=2S_{\triangle ABE}$；④$BO\perp AE$. 其中正确的有(　　)

A. 1 个　　　　B. 2 个　　　　C. 3 个　　　　D. 4 个

二、填空题(每题 3 分，共 30 分)

11. 计算：$\sqrt{27}-\sqrt{\frac{1}{3}}=$________.

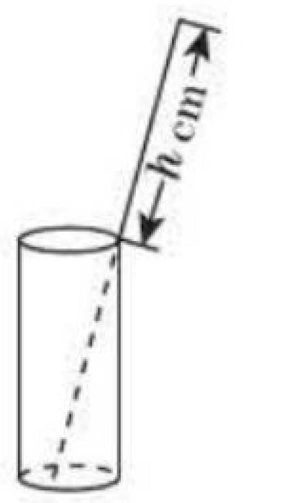
12. 一组数据 5，-2，4，x，3，-1，若这组数据的众数是 3，则这组数据的平均数是________.

13. 已知点 $P(a,b)$ 在一次函数 $y=4x+3$ 的图象上，则代数式 $4a-b-2$ 的值等于________.

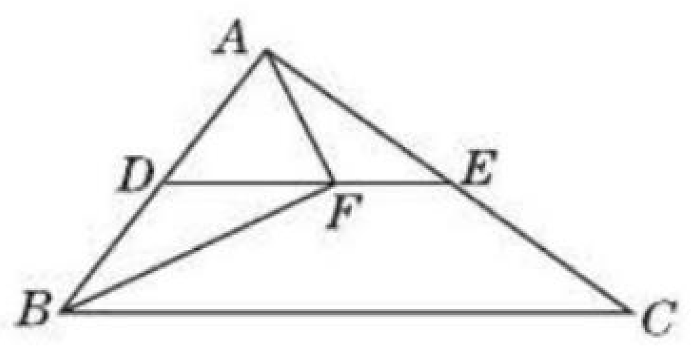
14. 若 x，y 满足 $\sqrt{x+2}+|y-5|=0$，则 $(3x+y)^{2\,019}=$________.

15. 某超市利用五一开展促销活动，超市前公告如下：一次性购买某种服装 3 件，每件仅售 80 元，如果超过 3 件，则超过部分打八折，顾客所付款 y(元)与所购这种服装件数 $x(x\geqslant 3)$ 之间的函数关系式为____________.

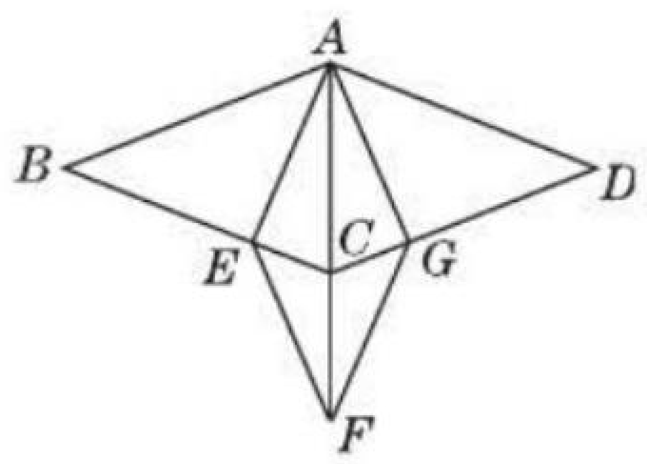
16. 将一根长 24 cm 的筷子，置于底面直径为 5 cm，高为 12 cm 的圆柱形水杯中(如图)，设筷子露在水杯外面的长度为 h cm，则 h 的取值范围是____________.



(第 16 题)



(第 17 题)

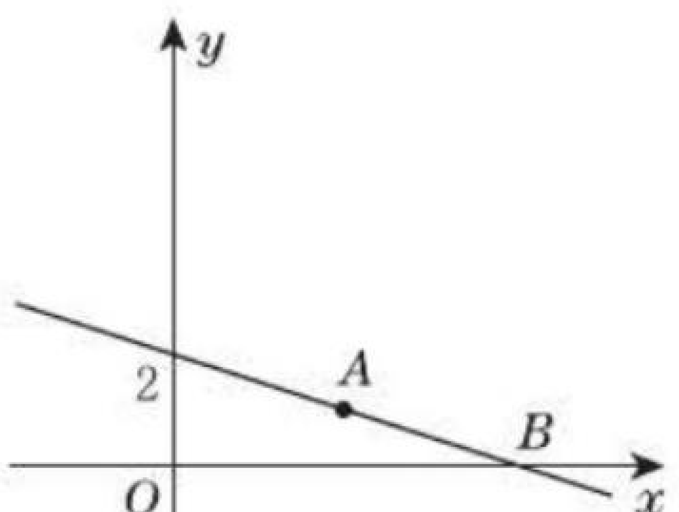


(第 18 题)

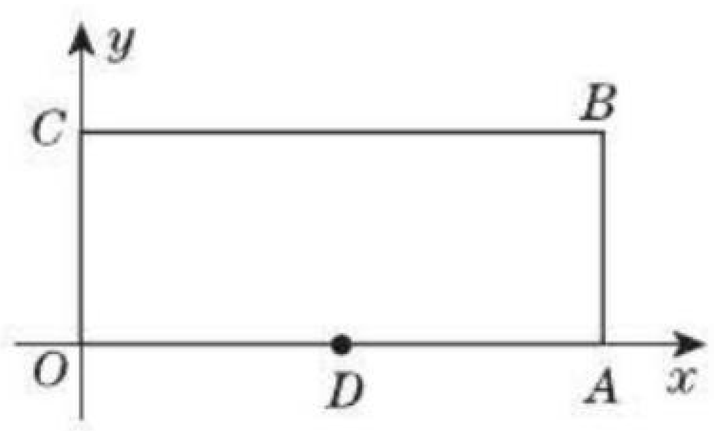
17. 如图，DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，点 F 在 DE 上，且 $\angle AFB=90°$，若 $AB=6$，$BC=10$，则 EF 的长为________.

18. 如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 都是菱形，其中点 C 在 AF 上，点 E，G 分别在 BC，CD 上，若 $\angle BAD=135°$，$\angle EAG=45°$，则 $\frac{AB}{AE}=$________.

19. 如图，直线 $y=kx+b$ 经过 $A(3,1)$ 和 $B(6,0)$ 两点，则不等式组 $0<kx+b<\frac{1}{3}x$ 的解集为__________.



(第 19 题)



(第 20 题)

20. 如图，在平面直角坐标系中有一矩形 $OABC$，O 为坐标原点，$A(10,0)$，$C(0,4)$，D 为 OA 的中点，P 为 BC 边上一点. 若 $\triangle POD$ 为等腰三角形，则所有满足条件的点 P 的坐标为________________.

三、解答题(21 题 8 分,26 题 12 分,其余每题 10 分,共 60 分)

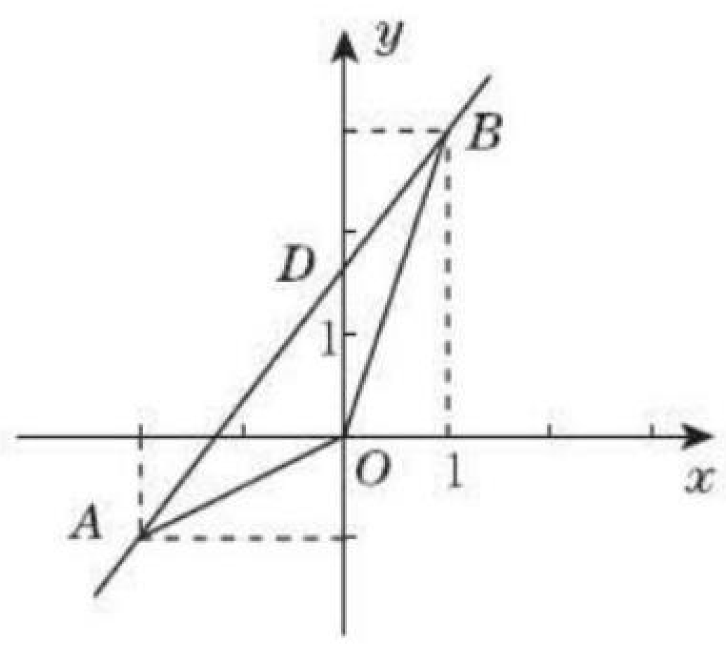
21. 计算:(1) $(40\sqrt{3}-18\sqrt{3}+8\sqrt{3})\div\sqrt{6}$;

(2) $(\sqrt{3}-2)^{2018}(\sqrt{3}+2)^{2018}-\sqrt{4}\times\sqrt{\frac{1}{2}}-(\pi-1)^{0}$.

22. 如图,已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过 $A(-2,-1)$,$B(1,3)$ 两点,并且交 y 轴于点 D.

(1)求该一次函数的解析式;

(2)求△AOB 的面积.



(第 22 题)

23. 已知 a,b,c 满足 $|a-\sqrt{7}|+\sqrt{b-5}+(c-4\sqrt{2})^{2}=0$.

(1)求 a,b,c 的值;

(2)判断以 a,b,c 的值为边长能否构成三角形?若能构成三角形,此三角形是什么形状,并求出三角形的面积;若不能,请说明理由.

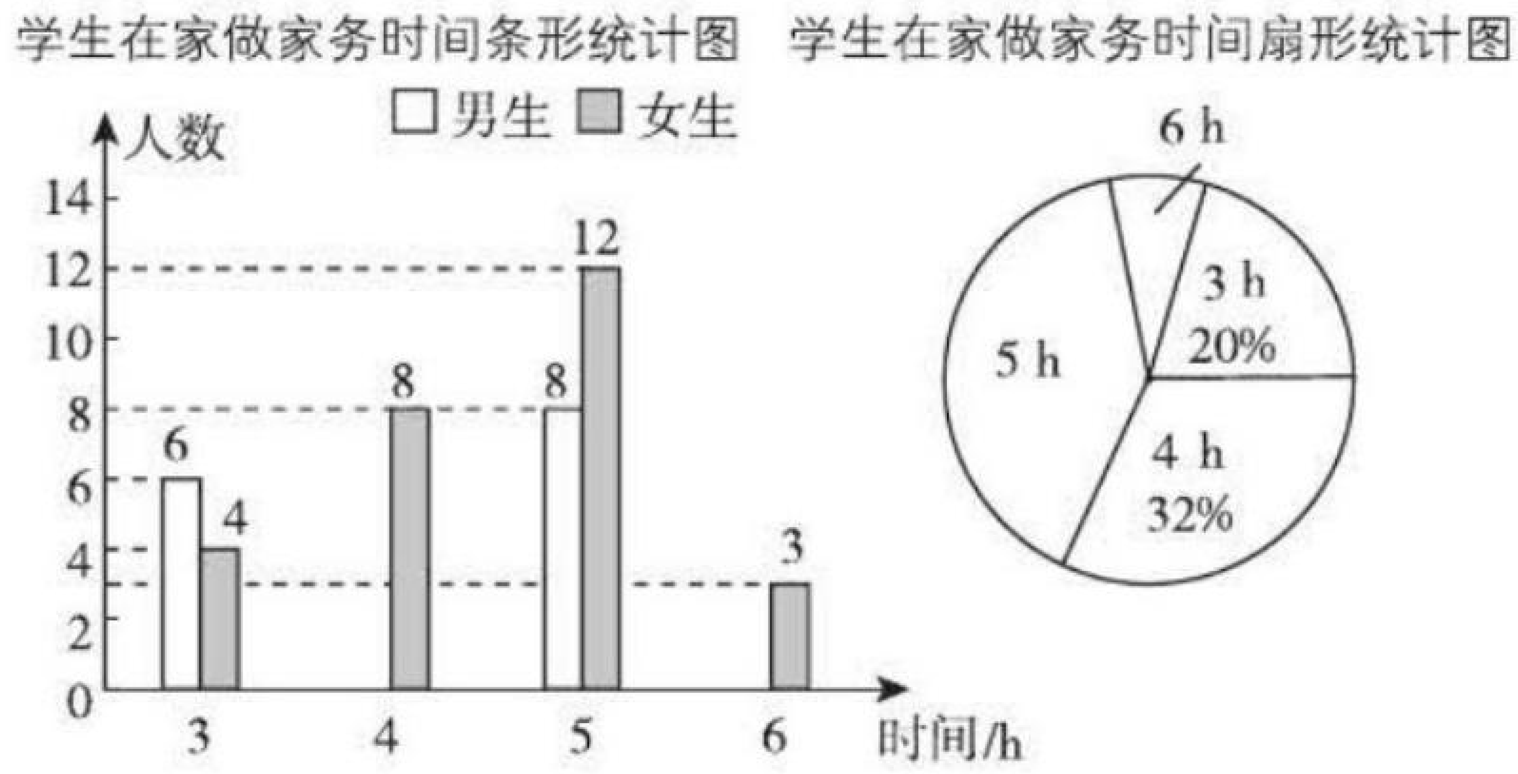
24. 育才中学开展了“孝敬父母,从家务事做起”活动,活动结束后随机调查了八年级部分学生一周在家做家务的时间,并将结果绘制成如图所示两幅不完整的统计图.

请你根据统计图提供的信息回答下列问题:

(1)本次调查的学生总数为________人,被调查学生做家务时间的中位数是________小时,众数是________小时;

(2)请你补全条形统计图;

(3)若全校八年级共有学生 1 500 人,估计八年级一周在家做家务的时间为 4 小时的学生有多少人?

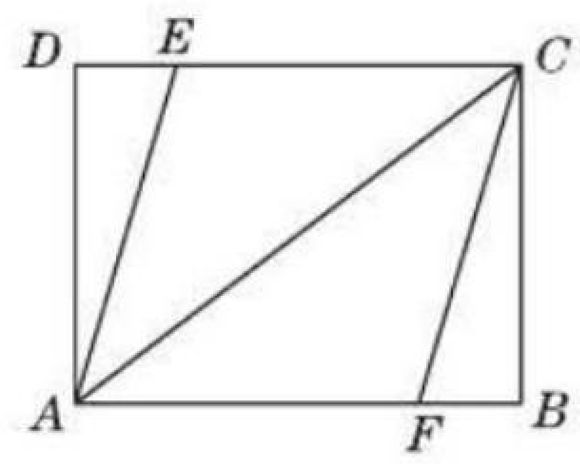


(第 24 题)

25. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=8$,$AD=6$,点 E,F 分别在边 CD,AB 上.

(1)若 $DE=BF$,求证:四边形 $AFCE$ 是平行四边形;

(2)若四边形 $AFCE$ 是菱形,求菱形 $AFCE$ 的周长.



(第 25 题)

26. 新农村社区改造中,有一部分楼盘要对外销售. 某楼盘共 23 层,销售价格如下:第 8 层楼房售价为 4 000 元/平方米,从第 8 层起每上升 1 层,每平方米的售价提高 50 元;反之,楼层每下降 1 层,每平方米的售价降低 30 元,已知该楼盘每套房面积均为 120 平方米.

若购买者一次性付清所有房款,开发商有两种优惠方案:

(方案一)降价 8%,另外每套房赠送 a 元装修基金;

(方案二)降价 10%,没有其他赠送.

(1)请写出售价 y(元/平方米)与楼层 x($1\leqslant x\leqslant 23$,x 取整数)之间的函数解析式;

(2)老王要购买第 16 层的一套房,若他一次性付清购房款,请帮他计算哪种优惠方案更加合算.

正文练习答案

第十六章 二次根式

16.1 二次根式

第1课时 二次根式的定义

1. C
2. A 点拨：根据二次根式的定义进行识别. $\sqrt{a}$中 $a<0$ 时不是二次根式.
3. C 点拨：二次根式必须满足两个条件：一是被开方数为非负数，二是根指数为 2. $\sqrt{-3}$无意义，$\sqrt[3]{8}$的根指数不是2，故②④不是二次根式. 二次根式有①③⑤⑥，共4个.
4. C 5. D
6. C 点拨：由题意可知：$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\1-2x\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $x=\dfrac{1}{2}$.

7. C 8. B 9. 1 10. D
11. B 点拨：根据 $|m-2|+\sqrt{n-4}=0$ 得 $m=2,n=4$，再根据三角形三边关系定理得：三角形三边长分别为4,4,2，故选 B.
12. A 点拨：本题易错在漏掉分母不为0这个条件，由题意知$x-1\geqslant 0$ 且 $x-2\neq 0$，解得 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2$.
13. 解：因为 $\sqrt{x+1}\geqslant 0$，$\sqrt{x+y-2}\geqslant 0$，且其和为0，所以 $x+1=0$，$x+y-2=0$，解得$x=-1$，$y=3$.

所以 x,y 的值分别为 -1，3.

方法总结：a^2，$|a|$，$\sqrt{a}$都为非负数，即 $a^2\geqslant 0$，$|a|\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$. 可利用“若几个非负数之和为零，则这几个非负数同时为零”解决问题.

14. 解：$\sqrt{3x-1}\geqslant 0$ 且由二次根式有意义的条件得 $3x-1\geqslant 0$，即 $x\geqslant\dfrac{1}{3}$，所以当 $x=\dfrac{1}{3}$时，式子 $\sqrt{3x-1}+2$ 的取值最小，最小值为2.
15. 解：$\left(\dfrac{2}{m}-\dfrac{1}{n}\right)\div\left(\dfrac{m^2+n^2}{mn}-\dfrac{5n}{m}\right)\cdot\left(\dfrac{m}{2n}+\dfrac{2n}{m}+2\right)$

$=\dfrac{2n-m}{mn}\div\dfrac{m^2+n^2-5n^2}{nm}\cdot\dfrac{m^2+4n^2+4mn}{2mn}$

$=\dfrac{2n-m}{mn}\cdot\dfrac{mn}{(m+2n)(m-2n)}\cdot\dfrac{(m+2n)^2}{2mn}$

$=-\dfrac{m+2n}{2mn}$.

$\because\sqrt{m+1}+(n-3)^2=0$，

$\therefore m+1=0,n-3=0$，

$\therefore m=-1,n=3$.

$\therefore$ 原式 $=-\dfrac{m+2n}{2mn}=-\dfrac{-1+2\times 3}{2\times(-1)\times 3}$

$=\dfrac{5}{6}$.

16. 解：(1)由$\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\3-x\geqslant 0\end{cases}$解得 $x=3$，

$\therefore y>2.\therefore\dfrac{|1-y|}{y-1}=\dfrac{y-1}{y-1}=1$.

(2)由$\begin{cases}2x-2\geqslant 0,\\1-x\geqslant 0\end{cases}$解得 $x=1$，

$\therefore y=-2,\therefore\sqrt{y^2+5x}=3$.

第2课时 二次根式的性质

1. A 2. B 3. D 4. D
5. $a\leqslant 2$ 点拨：$\because\sqrt{(a-2)^2}=2-a$，$\therefore a-2\leqslant 0$，即 $a\leqslant 2$.
6. 2 7. B 8. B 9. C
10. B 点拨：$\because a,b,c$ 为三角形的三边长，$\therefore a+c>b,a+b>c$，

即 $a-b+c>0,c-a-b<0$.

$\therefore\sqrt{(a-b+c)^2}-2|c-a-b|=(a-b+c)+2(c-a-b)=-a-3b+3c$.

故选 B.

11. B 点拨：选项 A 是二次根式，选项 B 是方程，选项 C 是整式，选项 D 是分式，故只有选项 B 不是代数式.
12. B 点拨：注意到 $2a+2b-3$ 只需变形得 $2(a+b)-3$，再将 $a+b=\dfrac{1}{2}$整体代入即可.
13. D 14. B
15. 错解：$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=1-\sqrt{2}$.

诊断：在运用 $\sqrt{a^2}=a(a\geqslant 0)$时，易忽略$a\geqslant 0$这个条件，导致错误. 其原因是没有把$\sqrt{a^2}$和$(\sqrt{a})^2$区别开来，忽略了 $1-\sqrt{2}$是负数. 解决此类问题时，我们既可以先判断 a 的符号，再脱去$\sqrt{a^2}$中的根号，也可以先化成绝对值，即$\sqrt{a^2}=|a|$，再进一步化简.

正解：因为 $1-\sqrt{2}<0$，

所以 $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$.

16. 解：(1)原式 $=5-6=-1$.

(2)原式 $=4-3+3\times\dfrac{1}{3}=2$.

(3)原式 $=-1+1+2-(\sqrt{2}-1)=3-\sqrt{2}$.

17. 解：(1) $\because\sqrt{x+3}+\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{z^2-2z+1}=0$，

$\therefore x+3=0,(y-1)^2=0,z^2-2z+1=0.\therefore x=-3,y=1,z=1$.

$\therefore(x+y+z)^{2\,021}=(-3+1+1)^{2\,021}=(-1)^{2\,021}=-1$.

(2)由$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\2-x\geqslant 0,\end{cases}$得 $x=2$，

$\therefore y>2.\therefore$ 原式 $=\dfrac{y-2}{2-y}+2=1$.

18. $2\,018\dfrac{2\,018}{2\,019}$ 点拨：$\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{2\,018^2}+\dfrac{1}{2\,019^2}}$

$=1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+1+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+1+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+1+\left(\dfrac{1}{2\,018}-\dfrac{1}{2\,019}\right)$

$=2\,018+1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2\,018}-\dfrac{1}{2\,019}$

$=2\,018+1-\dfrac{1}{2\,019}$

$=2\,018\dfrac{2\,018}{2\,019}$.

19. 解：(1)空白部分的面积为 $ab-a-b+1$；

(2)当 $a=3,b=2$ 时，空白部分的面积为 $6-3-2+1=2$.

点拨：利用**数形结合思想**，灵活的用代数式表示要求的量.

16.2 二次根式的乘除

第1课时 二次根式的乘法

1. B 2. C 3. B 4. A 5. B
6. B 7. D 8. B 9. B
10. D 点拨：$\sqrt{(-16)\times(-9)}=\sqrt{16}\times\sqrt{9}$，故 A 错误；$\sqrt{25a^4b^2}=|5a^2b|$，当 $b\geqslant 0$ 时，$\sqrt{25a^4b^2}=5a^2b$，当 $b<0$ 时，$\sqrt{25a^4b^2}=-5a^2b$，故 B 错误；$\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}\neq 8+5$，故 C 错误；$\sqrt{25^2-24^2}=\sqrt{(25+24)\times(25-24)}=\sqrt{49}=7$. 故 D 正确.
11. B
12. 错解：A 诊断：本题学生容易把 a 直接从外面平方后移到根号内化简，即 $a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}=\sqrt{a^2\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)}=\sqrt{-a}$. 忽视了 a 的取值为负数，应先留负号在根号外，然后再平方后移到根号内化简.

正解：B 点拨：$\because-\dfrac{1}{a}>0$，

$\therefore a<0$.

$\therefore a\sqrt{-\dfrac{1}{a}}=-\sqrt{a^2\cdot\left(-\dfrac{1}{a}\right)}=-\sqrt{-a}$.

13. **解**：(1)原式 $=4-3+1+3=5$.

(2)原式 $=\frac{3}{2}\times(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\sqrt{20\times15\times48}=\frac{1}{2}\times120=60$.

(3)原式 $=\left[\frac{2}{b}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot3\right]\cdot\sqrt{ab^3\cdot a^3b\cdot\frac{a}{b}}$

$=\left(-\frac{9}{b}\right)\sqrt{a^5b^3}=-9a^2\sqrt{ab}$.

14. **解**：由已知条件得 $8\leqslant x\leqslant10$. 因为 x 为奇数，所以 $x=9$.

所以 $\sqrt{1+2x+x^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2-6x+9}{x+1}}$

$=\sqrt{(1+x)^2\cdot\frac{(x-3)^2}{x+1}}$

$=(x-3)\sqrt{x+1}=6\sqrt{10}$.

15. **解**：(1) $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\times3}=\sqrt{75}$，$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\times5}=\sqrt{45}$，

$\because 75>45$，$\therefore\sqrt{75}>\sqrt{45}$，

$\therefore 5\sqrt{3}>3\sqrt{5}$.

(2) $3-6\sqrt{5}=3-\sqrt{6^2\times5}=3-\sqrt{180}$，$3-5\sqrt{6}=3-\sqrt{5^2\times6}=3-\sqrt{150}$.

$\because 180>150$，

$\therefore -\sqrt{180}<-\sqrt{150}$. $\therefore 3-\sqrt{180}<3-\sqrt{150}$，

即 $3-6\sqrt{5}<3-5\sqrt{6}$.

方法总结：比较两个含二次根式的式子的大小：可以转化成比较两个被开方数的大小，即可以将根号外的正因数平方后移到根号内，计算出被开方数后，再比较被开方数的大小，被开方数大的，其算术平方根也大. 如果是两个正数相比较，也可以采用平方法，如 $(5\sqrt{3})^2=75$，$(3\sqrt{5})^2=45$. $\because 75>45$，$\therefore 5\sqrt{3}>3\sqrt{5}$.

16. **解**：(1) $\because\sqrt{2}=\sqrt{1\times2}$，$\sqrt{6}=\sqrt{2\times3}$，$\sqrt{12}=\sqrt{3\times4}$，$\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}$，…，

$\therefore$ 第 n（n 是正整数）个二次根式是 $\sqrt{n(n+1)}$.

(2)由(1)发现的规律，可知第 5 个二次根式为 $\sqrt{5\times6}$，第 6 个二次根式为 $\sqrt{6\times7}$，

则前 6 个二次根式的积为 $\sqrt{1\times2}\times\sqrt{2\times3}\times\sqrt{3\times4}\times\sqrt{4\times5}\times\sqrt{5\times6}\times\sqrt{6\times7}$

$=1\times2\times3\times4\times5\times6\times\sqrt{7}$

$=720\sqrt{7}$.

17. **解**：$\sqrt{13-2\sqrt{42}}$，这里 $m=13$，$n=42$.

$\because(\sqrt{7})^2+(\sqrt{6})^2=13$，$\sqrt{7}\times\sqrt{6}=\sqrt{42}$，

$\therefore\sqrt{13-2\sqrt{42}}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$.

点拨：根据给出的材料，利用类比思想，找出满足 $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=13$ 和 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{42}$ 两个式子的 a,b 的值即可.

第 2 课时　二次根式的除法

1. 3　2. B

3. C　4. B　5. D　6. C　7. D

8. D　**点拨**：由题意得 $1-a\geqslant0$ 且 $a>0$，解得 $0<a\leqslant1$. 此题容易忽略 $1-a\geqslant0$ 这个条件.

9. D　10. A

11. A　**点拨**：$\sqrt{2.7}=\sqrt{\frac{270}{100}}=\sqrt{\frac{5\times6\times3^2}{100}}=\frac{3}{10}\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}=0.3ab$，故选A.

12. D　13. D

14. B　**点拨**：$\because xy<0$，

$\therefore x>0,y<0$ 或 $x<0,y>0$.

又 $\because x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}$ 有意义，

$\therefore y<0$. $\therefore x>0,y<0$.

当 $x>0$，$y<0$ 时，$x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}=\sqrt{-y}$，故选 B.

15. **错解**：$\sqrt{2^3\times3}\div\sqrt{2\times3}\times\frac{1}{\sqrt{2\times3}}=\sqrt{2^3\times3}\div1=2\sqrt{6}$.

诊断：$\sqrt{2\times3}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{2\times3}}$ 互为倒数，在计算时容易感觉后两个式子方便计算，就先计算后面的乘法运算，从而得出错误答案 $2\sqrt{6}$.

正解：原式 $=2\sqrt{2\times3}\times\frac{1}{\sqrt{2\times3}}\times\frac{1}{\sqrt{2\times3}}=\frac{2}{\sqrt{2\times3}}=\frac{2\sqrt{2\times3}}{2\times3}=\frac{\sqrt{2\times3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

16. **解**：(1) 原式 $=\left(1\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\right)\sqrt{45\div\frac{1}{5}\times5}=\sqrt{45\times5\times5}=15\sqrt{5}$.

(2) 原式 $=\left(-3\times\frac{1}{8}\div\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{7}{3}\times15\div\frac{2}{5}}=-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{7\times5\times5}{2}}=-\frac{15}{8}\sqrt{14}$.

17. **解**：$\because\sqrt{\frac{x-6}{9-x}}=\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{9-x}}$，

$\therefore\begin{cases}x-6\geqslant0,\\9-x>0,\end{cases}$ $\therefore 6\leqslant x<9$.

又 $\because x$ 是奇数，$\therefore x=7$.

$\therefore(1+x)\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}=(1+x)\sqrt{\frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-1)}}=(1+x)\sqrt{\frac{x-4}{x+1}}=\sqrt{(x+1)(x-4)}$.

当 $x=7$ 时，原式 $=\sqrt{(7+1)\times(7-4)}=2\sqrt{6}$.

18. **解**：(1)都正确.

(2)（解法不唯一）$\because\sqrt{10}=\sqrt{\frac{70}{7}}=\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{7}}=\frac{b}{a}$，$\therefore\sqrt{4.9}=\sqrt{\frac{49}{10}}=\sqrt{\frac{49\times10}{10\times10}}=\frac{7}{10}\sqrt{10}=\frac{7}{10}\cdot\frac{b}{a}=\frac{7b}{10a}$.

19. D　**点拨**：设 $x=\sqrt{6-3\sqrt{3}}-\sqrt{6+3\sqrt{3}}$，易知 $\sqrt{6+3\sqrt{3}}>\sqrt{6-3\sqrt{3}}$，

$\therefore x<0$，

由 $x^2=6-3\sqrt{3}-2\sqrt{(6-3\sqrt{3})(6+3\sqrt{3})}+6+3\sqrt{3}=12-2\times3=6$，

解得 $x=-\sqrt{6}$，即 $\sqrt{6-3\sqrt{3}}-\sqrt{6+3\sqrt{3}}=-\sqrt{6}$.

$\because\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=5-2\sqrt{6}$，

$\therefore$ 原式 $=5-2\sqrt{6}-\sqrt{6}=5-3\sqrt{6}$.

阶段核心方法专训

1. **解**：因为 $(\sqrt{6}+\sqrt{11})^2=17+2\sqrt{66}$，$(\sqrt{14}+\sqrt{3})^2=17+2\sqrt{42}$，$17+2\sqrt{66}>17+2\sqrt{42}$，所以 $(\sqrt{6}+\sqrt{11})^2>(\sqrt{14}+\sqrt{3})^2$. 又因为 $\sqrt{6}+\sqrt{11}>0$，$\sqrt{14}+\sqrt{3}>0$，所以 $\sqrt{6}+\sqrt{11}>\sqrt{14}+\sqrt{3}$.

2. **解**：因为 $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}\div\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}=\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}+2)^2}=\frac{a+4\sqrt{a}+3}{a+4\sqrt{a}+4}<1$，易知 $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}>0$，$\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}>0$，所以 $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}<\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3}$.

方法总结：作商比较两个含二次根式的式子的大小时，当两个式子（均为正数）均由分母和分子两部分组成时，常通过作商比较它们的大小，先计算两个式子的商，然后比较商与 1 的大小关系. 已知 $a>0,b>0$，若 $\frac{a}{b}>1$，则 $a>b$；若 $\frac{a}{b}=1$，则 $a=b$；若 $\frac{a}{b}<1$，则 $a<b$.

3. **解**：$\sqrt{15}-\sqrt{14}$

$=\frac{(\sqrt{15}-\sqrt{14})(\sqrt{15}+\sqrt{14})}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}$

$=\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}$，

$\sqrt{14}-\sqrt{13}$

$=\frac{(\sqrt{14}-\sqrt{13})(\sqrt{14}+\sqrt{13})}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$

$=\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$，

$\because\sqrt{15}+\sqrt{14}>\sqrt{14}+\sqrt{13}$，$\sqrt{15}+\sqrt{14}>0$，$\sqrt{14}+\sqrt{13}>0$，

$\therefore\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}<\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$，

即 $\sqrt{15}-\sqrt{14}<\sqrt{14}-\sqrt{13}$.

4. 解：∵ $\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$，$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

$2+\sqrt{3}>\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

∴ $\frac{1}{2-\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

5. 解：因为 $\frac{\sqrt{19}-1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{19}-3}{3}$，$\sqrt{19}-3>0$，所以 $\frac{\sqrt{19}-3}{3}>0$，所以 $\frac{\sqrt{19}-1}{3}>\frac{2}{3}$.

点拨：利用作差法比较两个式子的大小的方法，即 $a-b>0$，则 $a>b$；$a-b<0$，则 $a<b$；$a-b=0$，则 $a=b$.

6. 解：$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{2}>0$，

$\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}>0$，

∵ $\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+2}+\sqrt{n}>0$，

∴ $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}>0$，∴ $x<y$.

7. 解：取特殊值 $x=\frac{1}{4}$，则 $\frac{1}{x}=4$，$x^2=\frac{1}{16}$，$\sqrt{x}=\frac{1}{2}$，∴ $x^2<x<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$.

8. 解：∵ $5-a\geqslant0$，∴ $a\leqslant5$. ∴ $a-6<0$.

∴ $\sqrt[3]{a-6}<0$.

又∵ $\sqrt{5-a}\geqslant0$，∴ $\sqrt{5-a}>\sqrt[3]{a-6}$.

16.3 二次根式的加减

第 1 课时 二次根式的加减

1. D **2.** B

3. C **点拨**：$\sqrt{24}=\sqrt{2^2\times6}=2\sqrt{6}$，$\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sqrt{27}=\sqrt{3^2\times3}=3\sqrt{3}$，故选 C.

4. C **5.** C

6. D **点拨**：由题意得 $10-2m=m+4$，所以 $m=2$.

7. D **8.** A **9.** C **10.** D **11.** C

12. $5\sqrt{19}-4$ **点拨**：因为 $4<\sqrt{19}<5$，所以 $a=4$，$b=\sqrt{19}-4$. 所以 $\sqrt{19}a+b=4\sqrt{19}+\sqrt{19}-4=5\sqrt{19}-4$.

13. 错解：A 或 B 或 C

诊断：忽视了二次根式加减运算法则是被开方数相同的最简二次根式才能合并，而合并时只将系数相加减，被开方数不变.

正解：D

14. 解：因为 $-a^3\geqslant0$，$-\frac{1}{a}>0$，所以 $a<0$.

所以原式 $=-a\sqrt{-a}+\sqrt{-a}=(1-a)\sqrt{-a}$.

点拨：本题易忽略二次根式的隐含条件，即 $-a^3$ 和 $-\frac{1}{a}$ 应该大于 0.

15. 解：(1)原式 $=3+4\sqrt{3}+4-4\sqrt{3}+\frac{1}{4}=\frac{29}{4}$.

(2)原式 $=1+2\sqrt{2}-\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$.

(3)原式 $=2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}=3\sqrt{x}$.

16. 解：原式 $=\frac{a}{(a+b)(a-b)}\times\frac{b-a}{b}-\frac{1}{a+b}\times\frac{b-a}{b}$

$=-\frac{a}{b(a+b)}-\frac{b-a}{b(a+b)}$

$=-\frac{b}{b(a+b)}$

$=-\frac{1}{a+b}$.

当 $a=\sqrt{2}$，$b=2-\sqrt{2}$ 时，原式 $=-\frac{1}{\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$.

17. 解：因为 $x=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3}$，

$y=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$，

所以 $x+y=14$，$xy=1$.

所以 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=14^2-2\times1=194$.

18. 解：因为$\sqrt{5}$的整数部分为 2，

所以 $7+\sqrt{5}=9+a$，$7-\sqrt{5}=4+b$，即 $a=-2+\sqrt{5}$，$b=3-\sqrt{5}$.

所以 $ab-a+4b-3=(-2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})-(-2+\sqrt{5})+4(3-\sqrt{5})-3=-11+5\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+12-4\sqrt{5}-3=0$.

19. 解：(1)由非负数的性质知 $a-\sqrt{8}=0$，$b-\sqrt{18}=0$，$c-\sqrt{32}=0$，所以 $a=2\sqrt{2}$，$b=3\sqrt{2}$，$c=4\sqrt{2}$.

(2)能. 理由：因为 $a<b<c$，$a+b=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$，$c=4\sqrt{2}$，所以 $a+b>c$. 所以以 a,b,c 的值为边长的三条线段能构成三角形.

第 2 课时 二次根式的混合运算

1. C **点拨**：A. $\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$不能合并，所以 A 选项错误；

B. 原式 $=6\times2=12$，所以 B 选项错误；

C. 原式 $=\sqrt{8\div2}=2$，所以 C 选项正确；

D. 原式 $=2\sqrt{2}$，所以 D 选项错误.

2. B **3.** A

4. B **点拨**：由题图可知，第 n 行最后一个数为 $\sqrt{1+2+3+\cdots+n}=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$，所以第 8 行最后一个数为 $\sqrt{\frac{8\times9}{2}}=\sqrt{36}=6$，则第 9 行从左至右第 5 个数是 $\sqrt{36+5}=\sqrt{41}$，故选 B.

5. 解：(1)原式 $=4-3+4+1=6$.

(2)原式 $=3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})+1+|1-\sqrt{2}|=\frac{3}{2}\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=\frac{3}{2}\sqrt{2}-1$.

6. D **7.** C **8.** C

9. $13-2\sqrt{42}=(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2$ **点拨**：第 n 个等式左边的第 1 个数为 $2n+1$，根号下的数为 $n(n+1)$，利用完全平方公式得到第 n 个等式右边的式子为 $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2$ ($n\geqslant1$ 且 n 为整数).

10. 解：(1)原式 $=(2-\sqrt{3})[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^{2\,021}-\sqrt{3}-1=2-\sqrt{3}-\sqrt{3}-1=1-2\sqrt{3}$.

(2)原式 $=(3+2\sqrt{2})-1-(\sqrt{2}-1)$

$=3+2\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+1$

$=3+\sqrt{2}$.

(3)原式 $=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\div(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{b}-\sqrt{a})=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{b}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$.

(4)原式 $=2+2\sqrt{2}-2=2\sqrt{2}$.

11. 解：由已知得 $a=\sqrt{5}+2$，$b=\sqrt{5}-2$，

所以 $a+b=2\sqrt{5}$，$ab=1$.

所以原式 $=\sqrt{(a+b)^2-2ab+7}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2+7}=5$.

12. 解：因为 $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

所以 $xy=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1$，

$x+y=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{3}$.

所以 $x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)=xy[(x+y)^2-2xy]=1\times[(2\sqrt{3})^2-2\times1]=10$.

13. 解：因为 $(\sqrt{2\,021+x}+\sqrt{9+x})\cdot(\sqrt{2\,021+x}-\sqrt{9+x})=(\sqrt{2\,021+x})^2-(\sqrt{9+x})^2=2\,021+x-9-x=2\,012$，

$\sqrt{2\,021+x}+\sqrt{9+x}=1\,006$，

所以 $\sqrt{2\,021+x}-\sqrt{9+x}=2$.

14. 解：(1) $\left(1\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\times\sqrt{12}-\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right)^{-2}$

$=-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}+\sqrt{3\times12}-(1-\sqrt{3})^2$

$=-2+6-4+2\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}$；

(2) $\left(\frac{5x+3y}{x^2-y^2}+\frac{2x}{y^2-x^2}\right)\div\frac{x}{3(x-y)}$

$=\frac{5x+3y-2x}{x^2-y^2}\div\frac{x}{3(x-y)}$

$=\frac{3(x+y)}{(x+y)(x-y)}\cdot\frac{3(x-y)}{x}$

$=\frac{9}{x}$.

当 $x=3\sqrt{3}, y=\frac{1}{2}$ 时，

原式 $=\frac{9}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

第 3 课时　二次根式运算常见的题型

1. 解：(1) 原式 $=4-9+\sqrt{2}-1-1+2\sqrt{2}=-7+3\sqrt{2}$.

(2) 原式 $=[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})]^{2021}\cdot(2+\sqrt{3})-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$.

2. 解：(1) 原式 $=[(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+2)]^2=(\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-2)^2=9$.

(2) 原式 $=\frac{a(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}-\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\sqrt{a}-\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{b}$.

点拨：在进行二次根式的混合运算时，灵活运用乘法公式可简化计算过程.

3. 思路导引：先明确 $\sqrt{3}$ 的整数部分是 1，然后得出 $5\pm\sqrt{3}$ 的整数部分，再由 $5+\sqrt{3}=6+a, 5-\sqrt{3}=3+b$ 可求得 a, b 的值，最后代入求值即可.

解：$\because \sqrt{3}$ 的整数部分为 1，

$\therefore 5+\sqrt{3}=6+a, 5-\sqrt{3}=3+b$，即 $a=\sqrt{3}-1, b=2-\sqrt{3}$.

$\therefore ab-a+4b-3=(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)+4\times(2-\sqrt{3})-3=-5+3\sqrt{3}-\sqrt{3}+1+8-4\sqrt{3}-3=1-2\sqrt{3}$.

方法总结：确定二次根式整数部分和小数部分的方法是先采用缩放的方法确定二次根式的整数部分，然后用二次根式与整数部分的差确定小数部分，即由 $n<\sqrt{x}<n+1$（x 开方开不尽，n 为非负整数）可以确定 $\sqrt{x}$ 的整数部分为 n，小数部分为 $\sqrt{x}-n$.

4. 解：原式 $=\frac{x-y}{xy}\cdot\frac{2xy}{(x-y)^2}+\frac{1}{x-y}$

$=\frac{2}{x-y}+\frac{1}{x-y}$

$=\frac{3}{x-y}$.

当 $x=2+\sqrt{2}, y=2$ 时，

原式 $=\frac{3}{2+\sqrt{2}-2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

5. 解：$\because x=1-\sqrt{2}, y=1+\sqrt{2}$，

$\therefore x-y=(1-\sqrt{2})-(1+\sqrt{2})=-2\sqrt{2}, xy=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$，

$\therefore x^2+y^2-xy-2x+2y=(x-y)^2-2(x-y)+xy=(-2\sqrt{2})^2-2\times(-2\sqrt{2})+(-1)=7+4\sqrt{2}$.

6. 解：原式取倒数得 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1=(\sqrt{5})^2-1=4$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{4}$.

阶段核心技巧专训

1. C

2. 解：原式 $=(5+\sqrt{6})\times(5\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{6})$

$=(5+\sqrt{6})\times[\sqrt{2}\times(5-\sqrt{6})]$

$=\sqrt{2}\times[(5+\sqrt{6})\times(5-\sqrt{6})]$

$=\sqrt{2}\times(25-6)$

$=19\sqrt{2}$.

3. 解：原式 $=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

4. 解：设原式 $=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{2}+1)}=x$，

则 $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1$

$=\sqrt{3}-1$.

所以原式 $=x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

5. 解：原式 $=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{5})}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$.

6. 解：由二次根式的定义，得

$\begin{cases}3-5a\geqslant 0,\\ 5a-3\geqslant 0,\end{cases}$

$\therefore 3-5a=0, \therefore a=\frac{3}{5}$.

$\therefore b=15$.

$\therefore ab>0, a+b>0, a-b<0$.

$\therefore \sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2}-\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{ab}}-\sqrt{\frac{(a-b)^2}{ab}}=\frac{a+b}{ab}\sqrt{ab}-\frac{b-a}{ab}\sqrt{ab}=\left(\frac{a+b}{ab}-\frac{b-a}{ab}\right)\sqrt{ab}=\frac{2}{b}\sqrt{ab}$.

当 $a=\frac{3}{5}, b=15$ 时，原式 $=\frac{2}{15}\times\sqrt{\frac{3}{5}\times 15}=\frac{2}{5}$.

点拨：对于形如 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2$ 或 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2$ 的代数式一般要变为 $\frac{(a+b)^2}{ab}$ 或 $\frac{(a-b)^2}{ab}$ 的形式，当它们作为被开方式进行化简时，要注意 $a+b$ 和 $a-b$ 以及 ab 的符号.

7. 解：设原式 $=x$，则 $x^2=\frac{2\sqrt{10}+2}{\sqrt{10}+1}=2$，

又因为 $x>0$，

所以原式 $=x=\sqrt{2}$.

8. 解：设 $x=n+2+\sqrt{n^2-4}, y=n+2-\sqrt{n^2-4}$，

则 $x+y=2n+4, xy=4n+8$.

则原式 $=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}$

$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\frac{(x+y)^2}{xy}-2=\frac{(2n+4)^2}{4n+8}-2=n$.

当 $n=\sqrt{2}+1$ 时，原式 $=\sqrt{2}+1$.

9. 解：由已知得：$x=3+2\sqrt{2}, y=3-2\sqrt{2}$，则 $x+y=6, xy=1$.

所以原式 $=\frac{x^2+y^2-4xy}{xy}=\frac{(x+y)^2-6xy}{xy}=30$.

10. 解：$\because a+b=-6, ab=5$，

$\therefore a<0, b<0$.

$\therefore b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}=-\frac{b}{a}\sqrt{ab}-\frac{a}{b}\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}\cdot\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=-\frac{(a+b)^2-2ab}{\sqrt{ab}}=-\frac{36-10}{\sqrt{5}}=-\frac{26}{\sqrt{5}}$

$=-\frac{26\sqrt{5}}{5}$.

点拨：解此类题，应先考虑字母取值的正负情况，再进行二次根式的化简，同时运用整体思想代入求值，不能一味地想求出单一字母的值，导致问题复杂化，甚至无法求解.

11. 解：设 $x=k(k>0)$，则 $y=2k, z=3k$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{\sqrt{3k}}{\sqrt{4k}+\sqrt{5k}}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}$.

全章热门考点整合应用

1. 解：$\because x-3\geqslant 0, 3-x\geqslant 0, \therefore x=3$，

$\therefore y=-3, \therefore x-y=6$.

2. C　**点拨**：①②④⑤⑥是代数式.

3. $(85\%\,a+60\%\,b)$

4. C　**点拨**：根据最简二次根式的定义可知，只有 $4\sqrt{5a}, \sqrt{b}$ 这两个二次根式是最简二次根式. 故选 C.

5. A

6. $(x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

7. 8　**8.** A

9. 解：由题意得：$a+b+c>0, a-b-c<0, b-a-c<0$，$\therefore$ 原式 $=a+b+c-(a-b-c)-(b-a-c)=a+b+3c$.

10. 解：乙的解答正确，理由如下：

$\because \sqrt{(1-a)^2}=|1-a|$，且 $a=5$，

$\therefore 1-a<0.$

$\therefore |1-a|=a-1.$

甲在去绝对值符号时忽略了 1 与 a 的大小关系,导致错误.

11. B

12. 5 **点拨**:由题意,得 $\begin{cases}3-a\geqslant 0,\\ a+1\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 3$.

又$\because a$ 是整数,

$\therefore a$ 可以取 $-1,0,1,2,3$.

$\therefore$ 它们的和是 $-1+0+1+2+3=5$.

13. 解:(1) $\sqrt{4\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{40}{9}}=\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

(2) $\sqrt{\frac{121b^5}{16a^2}}=\frac{\sqrt{121b^4\cdot b}}{\sqrt{16a^2}}=\frac{11b^2\sqrt{b}}{-4a}$.

14. 解:(1)(方法 1:先将根号外的因数移到根号内,再计算)原式 $=(\sqrt{3^2\times 3}+\sqrt{32})\times(\sqrt{27}-\sqrt{4^2\times 2})=(\sqrt{27}+\sqrt{32})\times(\sqrt{27}-\sqrt{32})=27-32=-5$.

(方法 2:先化简,再计算)原式 $=(3\sqrt{3}+4\sqrt{2})\times(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})=(3\sqrt{3})^2-(4\sqrt{2})^2=27-32=-5$.

(2)原式 $=[\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)][\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)]=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2=3-(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

(3)原式 $=\frac{3}{10}\sqrt{\frac{5ab}{c}}\times\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2ac}{b}}\times\left(-2\sqrt{\frac{15bc}{a}}\right)+\sqrt{abc}=-\frac{3}{10}\times\frac{5}{3}\times 2\times\sqrt{\frac{5ab}{c}\times\frac{2ac}{b}\times\frac{15bc}{a}}+\sqrt{abc}=-\sqrt{5\times 2\times 5\times 3abc}+\sqrt{abc}=-5\sqrt{6abc}+\sqrt{abc}$.

15. 思路导引:因为 $\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021}>0$, $\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}>0$,所以可以先比较 $\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021}$ 与 $\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}$ 的倒数的大小,再来比较它们的大小.

解:$\frac{1}{\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021}}$

$=\frac{\sqrt{2\,022}+\sqrt{2\,021}}{(\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021})\times(\sqrt{2\,022}+\sqrt{2\,021})}$

$=\frac{\sqrt{2\,022}+\sqrt{2\,021}}{(\sqrt{2\,022})^2-(\sqrt{2\,021})^2}$

$=\sqrt{2\,022}+\sqrt{2\,021}$,

$\frac{1}{\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}}$

$=\frac{\sqrt{2\,021}+\sqrt{2\,020}}{(\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020})\times(\sqrt{2\,021}+\sqrt{2\,020})}$

$=\frac{\sqrt{2\,021}+\sqrt{2\,020}}{(\sqrt{2\,021})^2-(\sqrt{2\,020})^2}$

$=\sqrt{2\,021}+\sqrt{2\,020}$,

而 $\sqrt{2\,022}+\sqrt{2\,021}>\sqrt{2\,021}+\sqrt{2\,020}$,

所以 $\frac{1}{\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021}}>\frac{1}{\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}}$.

又因为 $\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021}>0$,

$\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}>0$,

所以 $\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021}<\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}$.

点拨:一般地,已知 $a>0,b>0$,如果 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,那么 $a<b$;如果 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,那么 $a>b$.

16. 4

17. 思路导引:先将 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 变形为 $\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$,然后将 $x+y$ 和 xy 的值整体代入计算即可.

解:因为 $x+y=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$,

$xy=(\sqrt{2}-1)\times(\sqrt{2}+1)=1$,

所以 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(2\sqrt{2})^2-2}{1}=6$.

点拨:若将 x,y 的值直接代入计算,则计算量较大,而且容易出错. 通过观察已知条件和欲求值的式子可以发现 $x+y,xy$ 的值是一个常数,故将 $x+y,xy$ 作为一个整体代入求值.

18. 解:$\because x+y=-7,xy=12$,

$\therefore x<0,y<0$.

$\therefore y\sqrt{\frac{x}{y}}+x\sqrt{\frac{y}{x}}=-\sqrt{xy}-\sqrt{xy}=-2\sqrt{xy}=-2\sqrt{12}=-4\sqrt{3}$.

19. 解:$\because a-b=\sqrt{3}+\sqrt{2},b-c=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,

$\therefore (a-b)+(b-c)=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$,即 $a-c=2\sqrt{3}$.

$\therefore 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)=(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}+5-2\sqrt{6}+12=22$.

第十七章 勾股定理

17.1 勾股定理

第 1 课时 勾股定理

1. A **2.** C **3.** A **4.** B **5.** 3

6. B **7.** C

8. 24 **点拨**:在运用勾股定理时,首先要正确识别哪个角是直角,从而确定哪条边是斜边,然后准确写出勾股定理关系式进行求解. 解这类题常见的错误是受思维定式(勾股定理的关系式: $a^2+b^2=c^2$)的影响而误认为 c 一定是斜边.

9. 解:(1)在 Rt$\triangle BCD$ 中, $CD^2=BC^2-BD^2=3^2-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{144}{25}$,

所以 $CD=\frac{12}{5}$.

(2)在 Rt$\triangle ACD$ 中, $AD^2=AC^2-CD^2=4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{256}{25}$,

所以 $AD=\frac{16}{5}$.

所以 $AB=AD+BD=\frac{16}{5}+\frac{9}{5}=5$.

10. 解:作 $AD\perp BC$ 于 D,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=15,BC=14$,

$AC=13$,设 $BD=x$,则 $CD=14-x$.

由勾股定理,得 $AD^2=AB^2-BD^2=15^2-x^2$, $AD^2=AC^2-CD^2=13^2-(14-x)^2$,

所以 $15^2-x^2=13^2-(14-x)^2$.

解得 $x=9$.

所以 $AD^2=AB^2-BD^2=15^2-9^2=144$,所以 $AD=12$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 14\times 12=84$.

11. 解:在 Rt$\triangle ABC$ 中, $AC=6$ cm, $BC=8$ cm,

由勾股定理得 $AB^2=AC^2+BC^2=6^2+8^2=100$,所以 $AB=10$ cm.

由折叠的性质知 $AE=AC=6$ cm, $DE=CD$, $\angle AED=\angle C=90°$,

所以 $BE=AB-AE=10-6=4$(cm), $\angle BED=90°$.

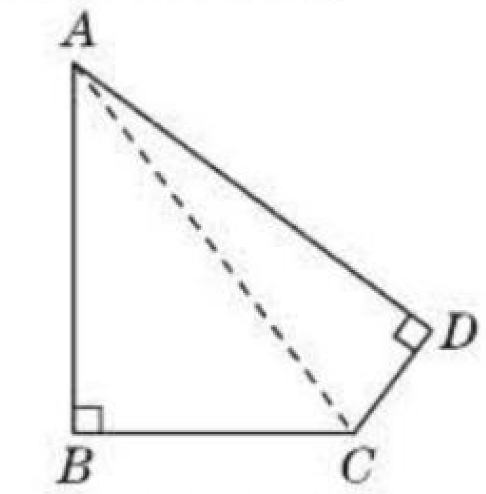
设 $CD=x$ cm,则 $DE=x$ cm, $BD=(8-x)$cm,

在 Rt$\triangle BDE$ 中,由勾股定理得 $x^2+4^2=(8-x)^2$,解得 $x=3$.

所以 CD 的长为 3 cm.

12. 解:如图,连接 AC.

因为 $\angle B=\angle D=90°$,



(第 12 题)

所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 都是直角三角形.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,根据勾股定理,得 $AC^2=AB^2+BC^2=20^2+15^2=625$,则 $AC=25$ m.

在 Rt$\triangle ACD$ 中,根据勾股定理,得 $AD^2=AC^2-CD^2=25^2-7^2=576$,则 $AD=24$ m. 故 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC+\frac{1}{2}AD\cdot CD=\frac{1}{2}\times 20\times 15+\frac{1}{2}\times 24\times 7=234(\text{m}^2)$.

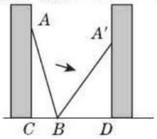
点拨:利用分割法将四边形 $ABCD$ 分割成 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 两个直角三角形,将这两个直角三角形面积相加即可得到结果.

第 2 课时　勾股定理在求距离中的应用

1. $x^2+9=(10-x)^2$

2. B　**点拨**：$\sqrt{(10-4)^2+8^2}=10(\mathrm{m})$，
∴ 小鸟至少飞行 10 m.

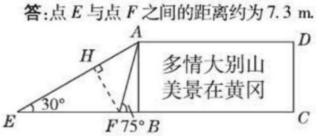
3. C　**点拨**：如图，在 Rt△ACB 中，



（第 3 题）

∵ $\angle ACB=90°$，$BC=0.7\ \mathrm{m}$，$AC=2.4\ \mathrm{m}$，
∴ $AB^2=0.7^2+2.4^2=6.25$.
在 Rt△$A'BD$ 中，∵ $\angle A'DB=90°$，$A'D=2\ \mathrm{m}$，$BD^2+A'D^2=A'B^2$，
∴ $BD^2+2^2=6.25$，∴ $BD^2=2.25$.
∵ $BD>0$，∴ $BD=1.5$ m.
∴ $CD=BC+BD=0.7+1.5=2.2(\mathrm{m})$.

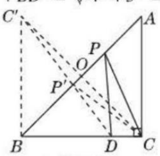
4. 解：如图，作 $FH\perp AE$ 于 H. 由题意可知 $\angle HAF=\angle HFA=45°$，
∴ $AH=HF$，设 $AH=HF=x$ m，则 $EF=2x$ m，则 $EH=\sqrt{3}x$ m，
在 Rt△AEB 中，∵ $\angle E=30°$，$AB=5$ m，∴ $AE=2AB=10$ m，
∴ $x+\sqrt{3}x=10$，∴ $x=5\sqrt{3}-5$，
∴ $EF=10\sqrt{3}-10\approx7.3(\mathrm{m})$，
答：点 E 与点 F 之间的距离约为 7.3 m.



（第 4 题）

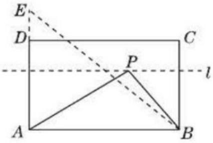
5. $2\sqrt{10}$　**6.** 20

7. B　**点拨**：如图，过点 C 作 $CO\perp AB$ 于 O，延长 CO 到 C'，使 $OC'=OC$，连接 DC'，交 AB 于 P'，连接 CP'，
此时 $DP'+CP'=DP'+P'C'=DC'$ 的值最小.
连接 BC'，由对称性可知 $\angle C'BP'=\angle CBP'=45°$，∴ $\angle CBC'=90°$，$\angle BCC'=\angle BC'C=45°$，
∴ $BC'\perp BC$，$BC'=BC=3+1=4$.
根据勾股定理可得 $DC'=\sqrt{BC'^2+BD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.



（第 7 题）

8. D　**点拨**：设△PAB 中 AB 边上的高是 h.
∵ $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}S_{长方形ABCD}$，
∴ $\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{3}AB\cdot AD$，
∴ $h=\frac{2}{3}AD=2$.

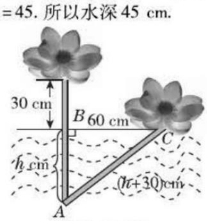


（第 8 题）

∴ 动点 P 在与 AB 平行且与 AB 的距离是 2 的直线 l 上，如图，作点 A 关于直线 l 的对称点 E，连接 AE，BE，则 BE 的长就是所求的最短距离.
在 Rt△ABE 中，
∵ $AB=5$，$AE=2+2=4$，
∴ $BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$，
即 $PA+PB$ 的最小值为 $\sqrt{41}$.

9. B　**点拨**：本题易考虑不全面，不能准确地找出最短路径而致错.

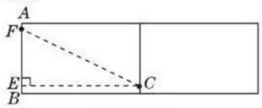
10. 解：设水深 h cm. 如图，在 Rt△ABC 中，$AB=h$ cm，$AC=(h+30)$ cm，$BC=60$ cm. 由勾股定理得 $AC^2=AB^2+BC^2$，即 $(h+30)^2=h^2+60$. 解得 $h=45$. 所以水深 45 cm.



（第 10 题）

点拨：本题利用了**方程思想**，关键是根据题意画出图形，再利用勾股定理列方程求解.

11. 解：将曲面沿 AB 展开，如图所示，连接 CF，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，在 Rt△CEF 中，$\angle CEF=90°$，$EF=18-1-1=16(\mathrm{cm})$，$CE=\frac{1}{2}\times60=30(\mathrm{cm})$，
由勾股定理，得 $CF^2=CE^2+EF^2=1\,156$，所以 $CF=34$ cm.
即蜘蛛所走的最短路线的长度是 34 cm.

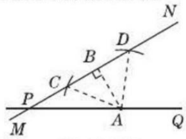


（第 11 题）

点拨：解决几何中最短路径问题时，需把几何体展开，根据两点之间线段最短求值. 化曲为直是这类问题的解题关键.

12. 思路导引：如图，过点 A 作 $AB\perp PN$ 于点 B，根据垂线段最短可知，若 $AB>100$ m，则不受影响；若 $AB\leqslant100$ m，则受影响. 若受影响，则首先要找出受影响时拖拉机行驶的路段，再构建直角三角形并利用勾股定理求出该路段的长，进而可求出受影响的时间.

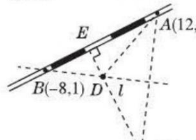
解：(1) 学校会受到噪音的影响. 理由：如图，过点 A 作 $AB\perp PN$，垂足为点 B，则有 $\angle ABP=90°$.
∵ $AP=160$ m，$\angle QPN=30°$，
∴ $AB=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}\times160=80(\mathrm{m})$.
∵ 80 m < 100 m，
∴ 学校会受到噪音的影响.



（第 12 题）

(2) 如图，以 A 为圆心，100 m 为半径作弧，交 PN 于点 C，D（C，D 分别在 BP，BN 上），连接 AC，AD.
即当拖拉机在公路 MN 上沿 PN 方向行驶到点 C 处时，学校开始受到噪音的影响，直到拖拉机行驶到点 D 以外时，学校才不受拖拉机噪音的影响.
在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得
$BC^2=AC^2-AB^2=100^2-80^2=3\,600$.
∴ $BC=\sqrt{3\,600}=60(\mathrm{m})$.
同理 $BD=60$ m.
∴ $CD=BC+BD=60+60=120(\mathrm{m})$.
∴ 学校受噪音影响的时间为 $(120\div1\,000)\div18=\frac{1}{150}(\mathrm{h})=24$ s.

13. (1) 20　(2) 13　**点拨**：(1) 由 A，B 两点的纵坐标相同可知：$AB/\!/x$ 轴，
∴ $AB=12-(-8)=20(\mathrm{km})$.
(2) 如图，过点 C 作 $l\perp AB$ 于点 E，连接 AC，作 AC 的垂直平分线交 l 于点 D，连接 AD.
易知 $CE=1-(-17)=18$ km，$AE=12$ km.
设 $CD=x$ km，则 $AD=CD=x$ km.
由勾股定理可知：$x^2=(18-x)^2+12^2$，解得 $x=13$. ∴ $CD=13$ km.



（第 13 题）

第 3 课时　勾股定理在几何中的应用

1. $(-1,0)$

2. D　**点拨**：由题图可知 $OA=OB=\sqrt{2}$，
∴ 在 Rt△OAD 中，$OD=\sqrt{OA^2+AD^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$，∴ $OC=OD=\sqrt{3}$.

3. C　**点拨**：∵ $AC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，
∴ $AM=AC=\sqrt{10}$，
∴ 点 M 表示的数为 $\sqrt{10}-1$.

4. A　**5.** 3

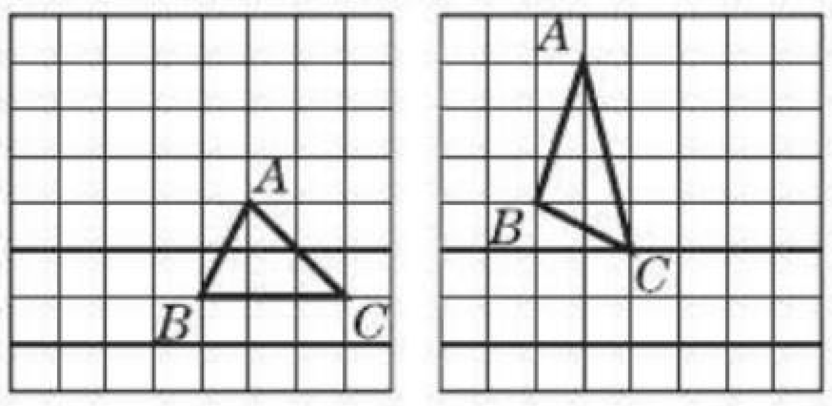
6. 9，13 和 49

7. $6+2\sqrt{2}$ 或 10 或 $8+2\sqrt{2}$

8. B　**9.** D

10. 115.2 **点拨**:在 Rt△PFH 中,$FH=\sqrt{PF^2+PH^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$,
$\therefore BC=BF+FH+CH=PF+FH+PH=8+10+6=24$.
设△PFH 的边 FH 上的高为 h,
则 $h=\frac{6\times8}{10}=4.8$,
$\therefore S_{长方形ABCD}=24\times4.8=115.2$.
易错总结:解此题时要灵活运用折叠前后对应线段相等,从而求出 BC 的长,然后再运用面积法求出△PFH 中 FH 边上的高,本题容易因忽视条件而求不出答案.

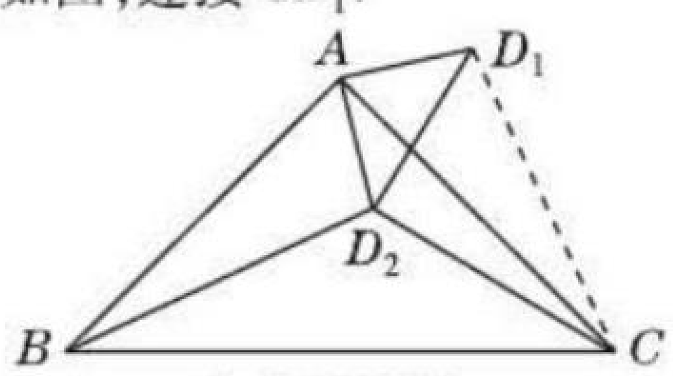
11. **解**:(1)如图①中的△ABC 为所求的三角形.
(2)如图②中的△ABC 的三边长分别为 $\sqrt{10}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{17}$,三角形的周长为 $\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{17}$.
方法总结:在网格中画长为$\sqrt{n}$的线段的步骤:(1)设法将 n 表示成两个整数的平方和;(2)构造直角三角形,使直角三角形的两条直角边长等于第一步得出的两个整数的值,斜边即为长为$\sqrt{n}$的线段.



①　　②

(第 11 题)

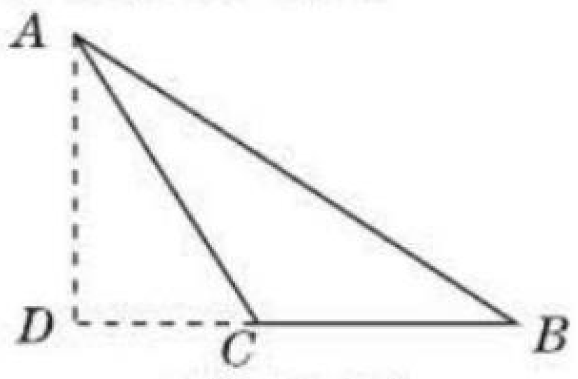
12. **解**:(1)①$AM=AD+DM=40$ 或 $AM=AD-DM=20$.
②显然∠MAD 不能为直角.
当∠AMD 为直角时,$AM^2=AD^2-DM^2=30^2-10^2=800$,
$\therefore AM=20\sqrt{2}$;
当∠ADM 为直角时,$AM^2=AD^2+DM^2=30^2+10^2=1\ 000$,
$\therefore AM=10\sqrt{10}$.
综上所述,AM 的长为 $20\sqrt{2}$ 或 $10\sqrt{10}$.
(2)如图,连接 CD_1.



(第 12 题)

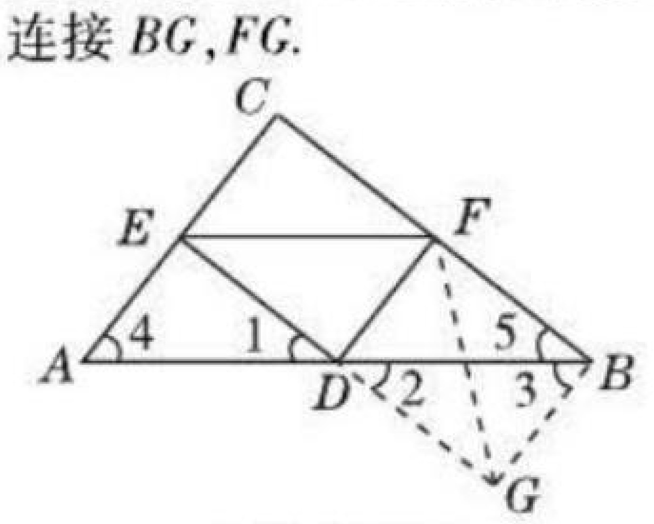
由题意知 $\angle D_1AD_2=90°$,$AD_1=AD_2=30$,
$\therefore \angle AD_2D_1=45°$,$D_1D_2=30\sqrt{2}$.
$\because \angle AD_2C=135°$,
$\therefore \angle CD_2D_1=90°$.
$\therefore CD_1=\sqrt{CD_2{}^2+D_1D_2{}^2}=\sqrt{60^2+(30\sqrt{2})^2}=30\sqrt{6}$.
$\because \angle BAC=\angle D_1AD_2=90°$,
$\therefore \angle BAC-\angle CAD_2=\angle D_1AD_2-\angle CAD_2$,
即$\angle BAD_2=\angle CAD_1$.
$\because AB=AC$,$AD_2=AD_1$,
$\therefore$ △$BAD_2\cong$△CAD_1(SAS).
$\therefore BD_2=CD_1=30\sqrt{6}$.

13. **解**:[阅读理解](3)如图所示,作 $AD\perp BC$ 交 BC 的延长线于 D,则 $BD=BC+CD=a+CD$,
在 Rt△ABD 中,$AD^2=AB^2-BD^2$.
在 Rt△ACD 中,$AD^2=AC^2-CD^2$,
$\therefore AB^2-BD^2=AC^2-CD^2$,
$\therefore c^2-(a+CD)^2=b^2-CD^2$,整理得 $a^2+b^2=c^2-2a\cdot CD$.
$\because a>0$,$CD>0$,
$\therefore a^2+b^2<c^2$;
[探究问题]当∠C 为钝角时,$\sqrt{a^2+b^2}<c<a+b$,
$\because a=3$,$b=4$,
$\therefore \sqrt{3^2+4^2}<c<3+4$,即 $5<c<7$;
当∠B 为钝角时,$b-a<c<\sqrt{b^2-a^2}$,$\because a=3$,$b=4$,
$\therefore 4-3<c<\sqrt{4^2-3^2}$,即 $1<c<\sqrt{7}$.
综上所述,第三边 c 的取值范围为 $5<c<7$ 或 $1<c<\sqrt{7}$.



(第 13 题)

14. **证明**:如图,延长 ED 至点 G,使 $DG=ED$,连接 BG,FG.



(第 14 题)

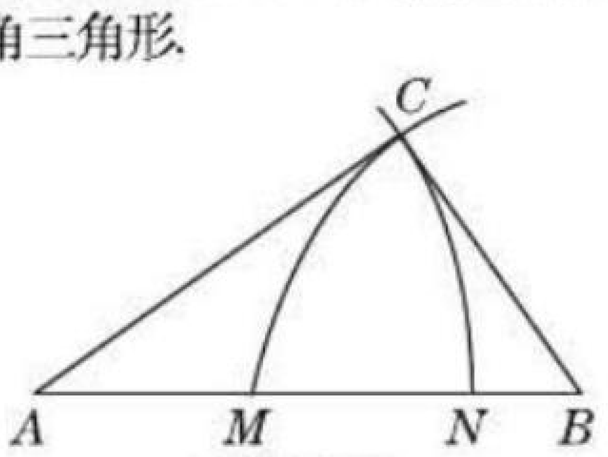
在△ADE 和△BDG 中,
$AD=DB$,∠1=∠2,$ED=DG$,
$\therefore$ △$ADE\cong$△BDG(SAS).
$\therefore AE=BG$,∠3=∠4.
又$\because$ ∠4+∠5=90°,
$\therefore$ ∠3+∠5=90°.
又$\because DF\perp EG$,$DE=DG$,$\therefore FG=EF$.
在 Rt△FBG 中,$BG^2+BF^2=FG^2$,
即 $AE^2+BF^2=EF^2$.
点拨:作辅助线,将 $AE^2+BF^2=EF^2$ 转化为求 $BG^2+BF^2=FG^2$.

17.2　勾股定理的逆定理

第 1 课时　勾股定理的逆定理

1. B　2. A　3. C　4. A　5. A

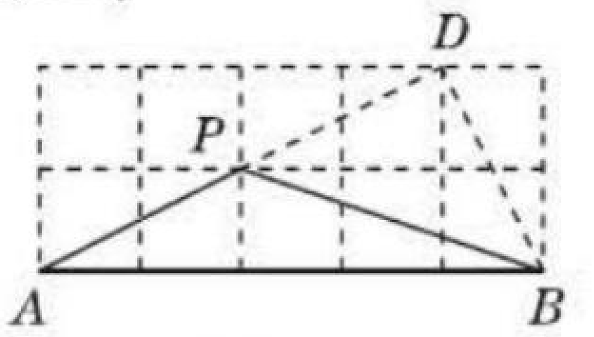
6. B　**点拨**:如图,依据作图即可得到 $AC=AN=4$,$BC=BM=3$,$AB=2+2+1=5$,进而得出 $AC^2+BC^2=AB^2$,即可得出△ABC 是直角三角形.



(第 6 题)

7. C　**点拨**:①中,因为∠A=∠B-∠C,∠A+∠B+∠C=180°,
所以∠B=90°,所以△ABC 是直角三角形;②中,由∠A:∠B:∠C=3:4:5得△ABC中最大角∠$C=180°\times\frac{5}{12}=75°$,则△$ABC$为锐角三角形;③中,$a^2=(b+c)(b-c)=b^2-c^2$,即 $a^2+c^2=b^2$,所以△ABC 是直角三角形;④中,因为 $a:b:c=5:12:13$,所以$a^2+b^2=c^2$,故△ABC 是直角三角形.
故选 C.

8. 45°　**点拨**:如图,延长 AP 交格点于 D,连接 BD,



(第 8 题)

则 $PD^2=BD^2=1^2+2^2=5$,$PB^2=1^2+3^2=10$,
$\therefore PD^2+DB^2=PB^2$,$PD=BD$.
$\therefore \angle PDB=90°$,
$\therefore \angle DPB=\angle PAB+\angle PBA=45°$.

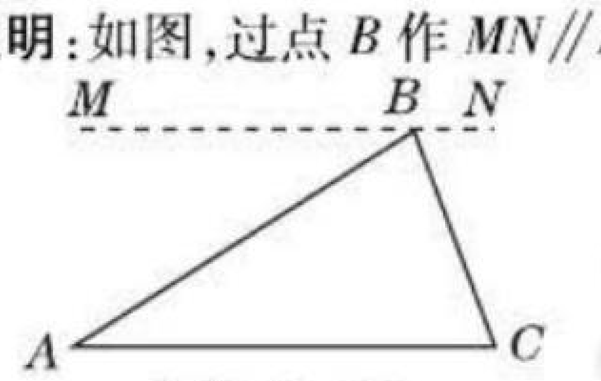
9. B　**点拨**:A 中虽然 4,5,6 均为正整数,但 $4^2+5^2\neq6^2$;C 中虽然 $(-10)^2+24^2=26^2$,但 $-10<0$;D 中虽然满足 $2.4^2+4.5^2=5.1^2$,但不是整数.

10. D　11. C

12. ①　**易错总结**:首先要注意到勾股数必须是一组正整数,其次要满足两个较小数的平方和等于最大数的平方.本题易误认为③也是勾股数.

13. **解**:(1)$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times5\times2+\frac{1}{2}\times5\times3=\frac{25}{2}$.
(2)因为 $AB^2=2^2+4^2=20$,$BC^2=1^2+2^2=5$,$AC^2=5^2=25$,
所以 $AB^2+BC^2=AC^2$.
所以∠ABC=90°.

14. (1)**解**:∠A+∠B<∠C.
(2)**证明**:如图,过点 B 作 MN∥AC,



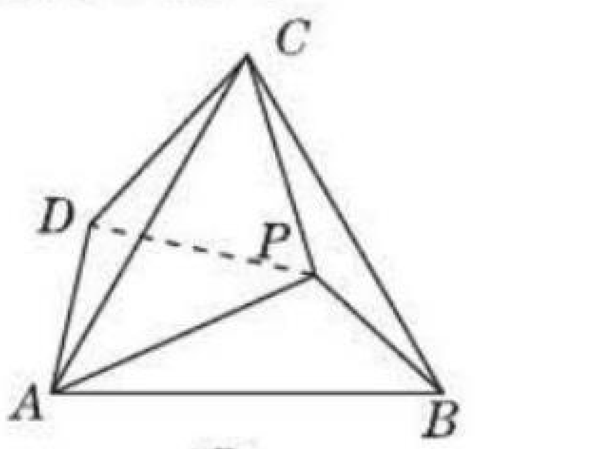
(第 14 题)

则∠MBA=∠A,∠NBC=∠C(两直线平行,内错角相等).
$\because$ ∠MBA+∠ABC+∠NBC=180°(平角的定义),
$\therefore$ ∠A+∠ABC+∠C=180°(等量代换),
即三角形三个内角的和等于 180°.
(3)**证明**:$\because \frac{a}{a-b+c}=\frac{\frac{1}{2}(a+b+c)}{c}$,
$\therefore ac=\frac{1}{2}(a+b+c)(a-b+c)=\frac{1}{2}[(a^2+2ac+c^2)-b^2]$,
$\therefore 2ac=a^2+2ac+c^2-b^2$,
$\therefore a^2+c^2=b^2$,
$\therefore$ △ABC 是直角三角形.

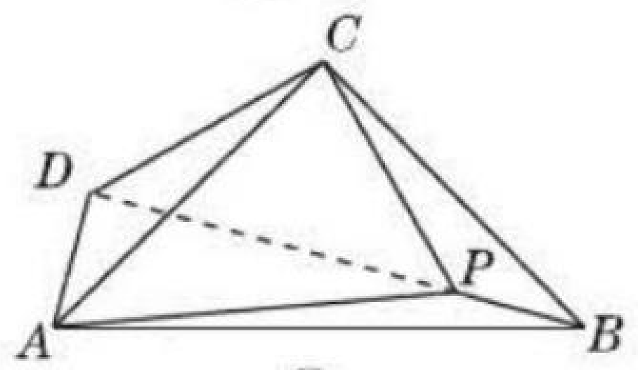
15. **解**:尝试　$A=(n^2-1)^2+(2n)^2=n^4-2n^2+1+4n^2=n^4+2n^2+1=$

$(n^2+1)^2$.
发现 $\because A=B^2, B>0$,
$\therefore B=n^2+1$.
联想 17;37

16. 解:(1)如图①,连接 DP,易知 $\triangle DCP$ 为等边三角形,易证得 $\triangle CPB \cong \triangle CDA$,$\therefore \angle BPC=\angle ADC$,$\angle CDP=60°$,$AD=6$,$DP=8$,
$\therefore AD^2+DP^2=AP^2$,
$\therefore \angle ADP=90°$,
$\therefore \angle ADC=150°$,
$\therefore \angle BPC=150°$.
(2)如图②,连接 DP,易得 $\triangle DCP$ 为等腰直角三角形,易证得 $\triangle CPB \cong \triangle CDA$,$\therefore \angle BPC=\angle ADC$,$\angle CDP=45°$,$AD=1$,$DP=2\sqrt{2}$,
$\therefore AD^2+DP^2=AP^2$,
$\therefore \angle ADP=90°$,
$\therefore \angle ADC=135°$,
$\therefore \angle BPC=135°$.



①



②

(第 16 题)

第 2 课时 勾股定理及其逆定理的应用

1. 证明:由题易知 $Rt\triangle C'D'A \cong Rt\triangle ABC$,
$\therefore \angle C'AD'=\angle ACB$.
又$\because \angle ACB+\angle BAC=90°$,
$\therefore \angle BAC+\angle C'AD'=90°$.
$\therefore \angle CAC'=90°$.
由题意得,四边形 $BCC'D'$ 为梯形.
$\because S_{梯形BCC'D'}=S_{Rt\triangle ABC}+S_{Rt\triangle AC'D'}+S_{Rt\triangle CAC'}$,$\therefore \frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$.
$\therefore (a+b)^2=2ab+c^2$.
$\therefore a^2+b^2=c^2$.

2. 解:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形,
$\therefore \angle D=\angle A=\angle C=90°$,$AD=BC=6$,$CD=AB=8$.
根据题意得 $\triangle ABP \cong \triangle EBP$,
$\therefore EP=AP$,$\angle E=\angle A=90°$,$BE=AB=8$.
在 $\triangle ODP$ 和 $\triangle OEG$ 中,
$\begin{cases}\angle D=\angle E=90°,\\ OD=OE,\\ \angle DOP=\angle EOG,\end{cases}$
$\therefore \triangle ODP \cong \triangle OEG$(ASA).
$\therefore OP=OG$,$PD=GE$.$\therefore DG=EP$.
设 $AP=EP=x$,则 $GE=PD=6-x$,$DG=x$,
$\therefore CG=8-x$,$BG=8-(6-x)=2+x$.
$\therefore$ 在 $Rt\triangle BCG$ 中,根据勾股定理得 $BC^2+CG^2=BG^2$.
即 $6^2+(8-x)^2=(x+2)^2$,解得 $x=4.8$,$\therefore AP=4.8$.

3. C

4. 解:根据题意得,$AC=30$ n mile,$AB=40$ n mile,$BC=50$ n mile.
$\because 30^2+40^2=50^2$,
$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle BAC=90°$.
$\therefore 180°-90°-35°=55°$.
答:乙船的航行方向为南偏东 55°.

5. 解:(1)$AB=\sqrt{5}$,$AC=\sqrt{13}$,$AD=2\sqrt{2}$,$AE=2\sqrt{5}$.
(2)存在,线段 AB,AC,AD 可以构成直角三角形.
理由如下:$\because AB=\sqrt{5}$,$AD=2\sqrt{2}$,$AC=\sqrt{13}$,$\therefore AD^2+AB^2=AC^2$,
由勾股定理的逆定理可知,线段 AB,AC,AD 可以构成直角三角形.

6. 解:(1)$EF \perp DE$.理由如下:
设正方形 $ABCD$ 的边长为 a,则 $AD=DC=a$,$FB=\frac{1}{4}a$,$AF=\frac{3}{4}a$,
$BE=EC=\frac{1}{2}a$,
在 $Rt\triangle DAF$ 中,$DF^2=AD^2+AF^2=\frac{25}{16}a^2$,
在 $Rt\triangle CDE$ 中,$DE^2=CD^2+CE^2=\frac{5}{4}a^2$,
在 $Rt\triangle EFB$ 中,$EF^2=FB^2+BE^2=\frac{5}{16}a^2$,
$\therefore DE^2+EF^2=\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{16}a^2=\frac{25}{16}a^2=DF^2$,
$\therefore \triangle DFE$ 为直角三角形,且 $\angle DEF=90°$,$\therefore EF \perp DE$.
(2)$\because$ 正方形的面积为 16,$\therefore a^2=16$,
$\therefore DF^2=\frac{25}{16}a^2=\frac{25}{16}\times 16=25$,
$\therefore DF=5$.

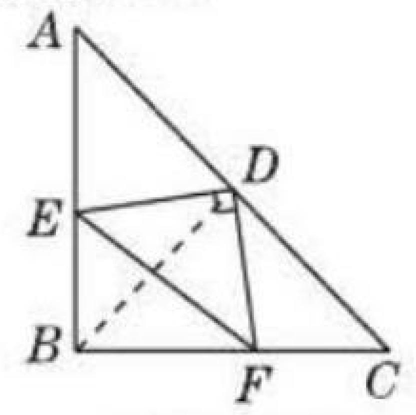
7. 解:(1)$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times 2\times 5+\frac{1}{2}\times 3\times 5=12.5$.
(2)$AD \perp CD$.理由如下:
因为 $AD^2=1^2+2^2=5$,$CD^2=2^2+4^2=20$,$AC^2=5^2=25$,
所以 $AD^2+CD^2=AC^2$,
所以 $\triangle ADC$ 是直角三角形,
且 $\angle ADC=90°$.
所以 $AD \perp CD$.

8. A

9. 解:(1)第一条边长为 a m,第二条边长为 $(2a+2)$ m,所以第三条边长为 $30-a-(2a+2)=(28-3a)$ m;
(2)第一条边长不可以为 7 m,理由如下:如果第一条边长为 7 m,那么第二条边长为 16 m,第三条边长为 7 m,$7+7<16$,不满足三角形三边之间的关系,不能构成三角形.所以第一条边长不可以为 7 m.a 的取值范围是 $\frac{13}{3}<a<\frac{13}{2}$.
(3)能.可以围成一个三边长分别为 5 m,12 m,13 m 的直角三角形.

阶段核心题型专训

1. 解:如图,连接 BD.

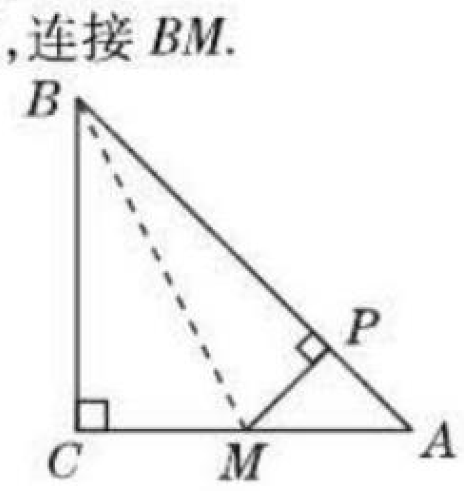


(第 1 题)

因为在等腰直角三角形 ABC 中,点 D 为 AC 边的中点,$\angle ABC=90°$,
所以 $BD \perp AC$,BD 平分 $\angle ABC$.
所以 $\angle ABD=\angle CBD=45°$.
又易知 $\angle C=45°$,
所以 $\angle ABD=\angle CBD=\angle C$.
易知 $BD=CD$.
因为 $DE \perp DF$,$BD \perp AC$,
所以 $\angle FDC+\angle BDF=\angle EDB+\angle BDF=90°$.
所以 $\angle FDC=\angle EDB$.
在 $\triangle EDB$ 与 $\triangle FDC$ 中,
$\begin{cases}\angle EBD=\angle C,\\ BD=CD,\\ \angle EDB=\angle FDC,\end{cases}$
所以 $\triangle EDB \cong \triangle FDC$(ASA).
所以 $BE=FC=3$.
所以 $AB=7$,则 $BC=7$.
所以 $BF=4$.
在 $Rt\triangle EBF$ 中,
$EF^2=BE^2+BF^2=3^2+4^2=25$,
所以 $EF=5$.

2. 解:因为 $CD \perp AD$,所以 $\angle ADC=90°$,
即 $\triangle ADC$ 是直角三角形.
由勾股定理,得 $AD^2+CD^2=AC^2$.
因为 $AD^2=2AB^2-CD^2$,
所以 $AD^2+CD^2=2AB^2$.所以 $AC^2=2AB^2$.
因为 $\angle ABC=90°$,
所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.
由勾股定理,得 $AB^2+BC^2=AC^2$,
所以 $AB^2+BC^2=2AB^2$.
所以 $BC^2=AB^2$,即 $AB=BC$.
点拨:当已知条件中有线段的平方关系时,应选择用勾股定理说明.应用勾股定理说明两条线段相等的一般步骤:①找出图中说明结论所要用到的直角三角形;②根据勾股定理写出三边长的平方关系;③联系已知,等量代换,求之即可.

3. 解:如图,连接 BM.



(第 3 题)

因为 $PM \perp AB$,
所以 $\triangle BMP$ 和 $\triangle AMP$ 均为直角三

角形.

所以 $BP^2+PM^2=BM^2$，$AP^2+PM^2=AM^2$.

同理可得 $BC^2+CM^2=BM^2$.

所以 $BP^2+PM^2=BC^2+CM^2$.

又因为 $CM=AM$，

所以 $CM^2=AM^2=AP^2+PM^2$.

所以 $BP^2+PM^2=BC^2+AP^2+PM^2$.

所以 $BP^2=BC^2+AP^2$.

4. 解：如图，连接 BD，作 $BE\perp AD$ 于点 E.

因为 $AB=AD$，$\angle A=60°$，

所以 $\angle 1=\angle ABD=\dfrac{180°-60°}{2}=60°$.

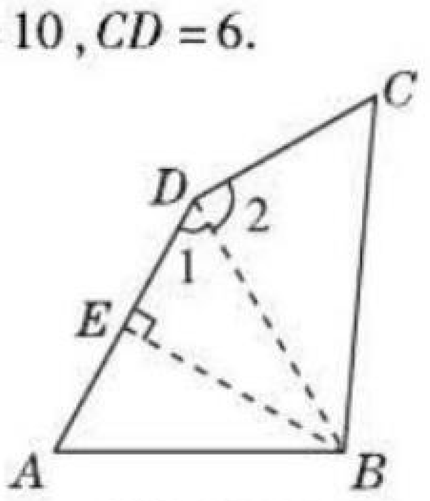
易得 $\triangle BAE\cong\triangle BDE$. 所以 $BD=AB=8$.

又 $\angle 1+\angle 2=150°$，则 $\angle 2=90°$.

设 $BC=x$，则 $CD=16-x$，由勾股定理得 $x^2=8^2+(16-x)^2$.

解得 $x=10$.

所以 $BC=10$，$CD=6$.



(第 4 题)

点拨：通过作辅助线，构造出直角三角形 BDC 求解即可.

5. 解：因为折叠前后两个图形的对应线段相等，所以 $CF=C'F$.

设 $BF=x$，因为 $BC=9$，

所以 $CF=9-x$. 所以 $C'F=9-x$.

由题意得 $BC'=3$.

在 $Rt\triangle C'BF$ 中，根据勾股定理可得 $C'F^2=BF^2+C'B^2$，

即 $(9-x)^2=x^2+3^2$，解得 $x=4$. 所以 BF 的长是4.

6. 解：(1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$BC^2=AB^2-AC^2=5^2-3^2=16$，所以 $BC=4$ cm.

(2) 由题意知 $BP=t$ cm，当 $\triangle ABP$ 为直角三角形时，有两种情况：

Ⅰ. 如图①，当 $\angle APB$ 为直角时，点 P 与点 C 重合，$BP=BC=4$ cm，即 $t=4$.

Ⅱ. 如图②，当 $\angle BAP$ 为直角时，$BP=t$ cm，$CP=(t-4)$ cm，$AC=3$ cm，

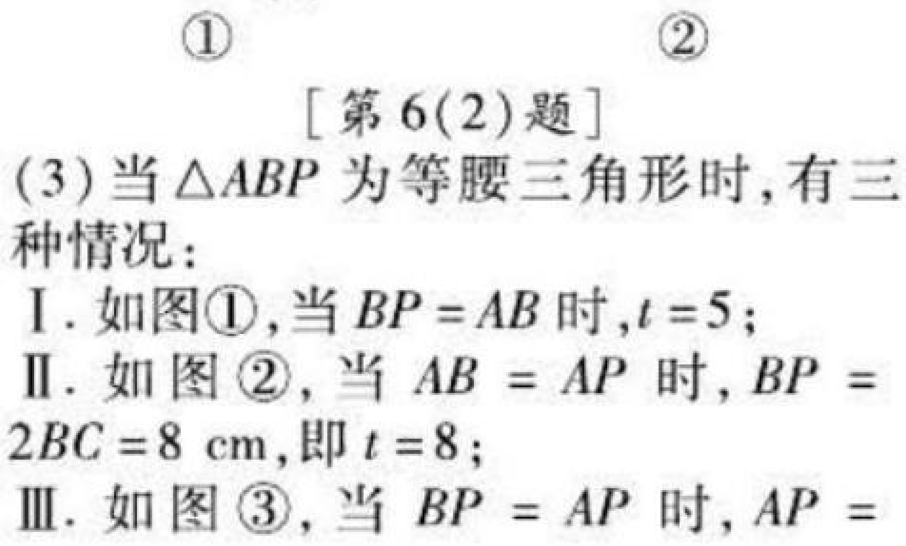
在 $Rt\triangle ACP$ 中，$AP^2=3^2+(t-4)^2$；

在 $Rt\triangle BAP$ 中，$AB^2+AP^2=BP^2$，

即 $5^2+[3^2+(t-4)^2]=t^2$，

解得 $t=\dfrac{25}{4}$.

故当 $\triangle ABP$ 为直角三角形时，$t=4$ 或 $t=\dfrac{25}{4}$.



[第 6(2) 题]

(3) 当 $\triangle ABP$ 为等腰三角形时，有三种情况：

Ⅰ. 如图①，当 $BP=AB$ 时，$t=5$；

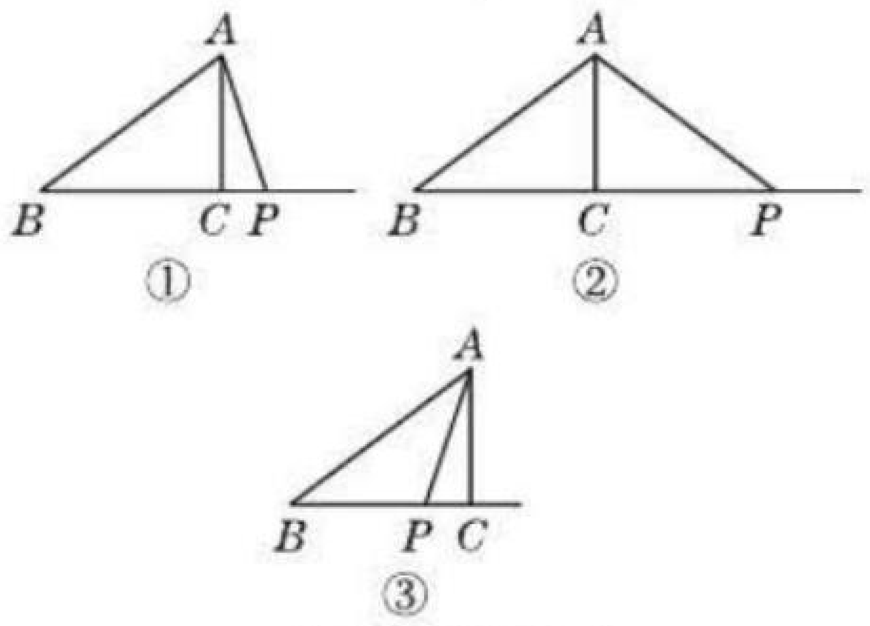
Ⅱ. 如图②，当 $AB=AP$ 时，$BP=2BC=8$ cm，即 $t=8$；

Ⅲ. 如图③，当 $BP=AP$ 时，$AP=BP=t$ cm，$CP=|t-4|$ cm，$AC=3$ cm，

在 $Rt\triangle ACP$ 中，$AP^2=AC^2+CP^2$，

所以 $t^2=3^2+(t-4)^2$，解得 $t=\dfrac{25}{8}$.

综上所述，当 $\triangle ABP$ 为等腰三角形时，$t=5$ 或 $t=8$ 或 $t=\dfrac{25}{8}$.



[第 6(3) 题]

7. 解：设 $CD=x(x>0)$ m，则 $AC=x$ m，作 $AB\perp l$ 于点 B，则 $AB=300$ m.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AD^2=AB^2+BD^2$，$AB=300$ m，$AD=500$ m，

所以 $BD=400$ m.

所以 $BC=(400-x)$ m.

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC^2=AB^2+BC^2$，

所以 $x^2=300^2+(400-x)^2$，解得 $x=312.5$.

所以商店 C 与公交站 D 之间的距离为 312.5 m.

8. 解：小明在河边 B 处取水后是沿南偏东 $60°$ 方向行走的. 理由如下：

由题易知 $AB=60$ m，$BC=80$ m，$AC=100$ m，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$.

所以 $\angle ABC=90°$.

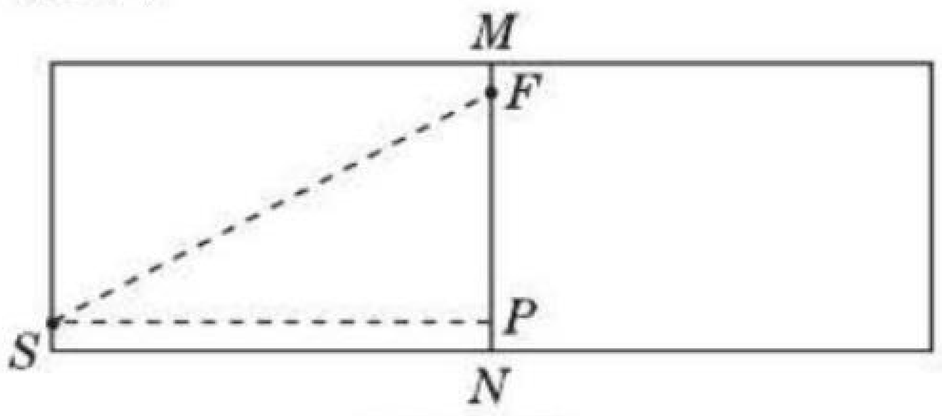
又因为 $AD\parallel NM$，

所以 $\angle NBA=\angle BAD=30°$.

所以 $\angle MBC=180°-90°-30°=60°$.

所以小明在河边 B 处取水后是沿南偏东 $60°$ 方向行走的.

9. 解：如图，将圆柱形玻璃容器侧面展开，



(第 9 题)

连接 SF，过点 S 作 $SP\perp MN$ 于点 P，

由题意可知 $FP=10-2=8$ (cm)，$SP=15$ cm，

在 $Rt\triangle SPF$ 中，$SF^2=SP^2+FP^2=15^2+8^2=289$，

所以 $SF=17$ cm.

因此，蚂蚁要吃到食物所走最短路线的长度为 17 cm.

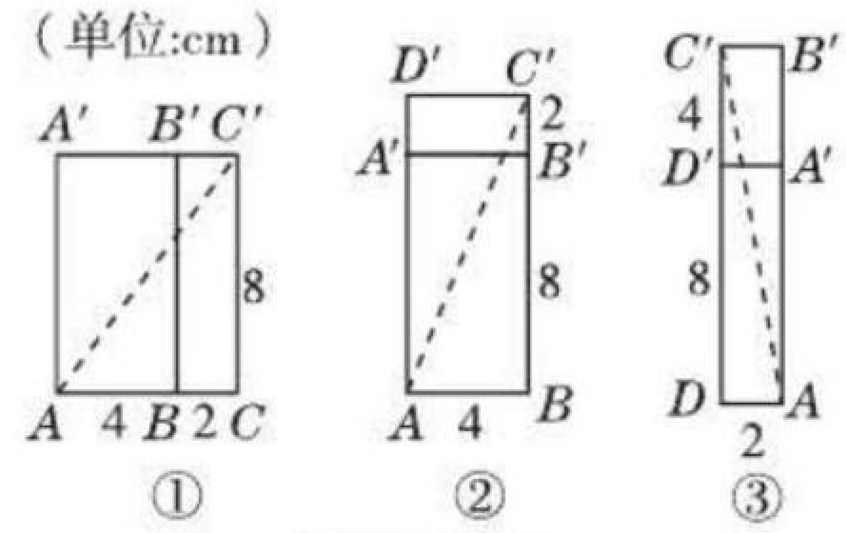
10. 解：根据题意，有以下三种情况：

(1) 如图①，连接 AC'，$AC'^2=AC^2+CC'^2=100$；

(2) 如图②，连接 AC'，$AC'^2=AB^2+C'B^2=116$；

(3) 如图③，连接 AC'，$AC'^2=AD^2+C'D^2=148$ cm；

综上所述，最短的路程应为如图①所示的情况，此时 $AC'^2=100$，即 $AC'=10$ cm，故最短的路程为 10 cm.



(第 10 题)

点拨：利用分类讨论思想，分成三种情况讨论比较数据，可得最短路程.

全章热门考点整合应用

1. 解：(1) 由于③的题设是 $a+b>0$，而⑤的结论是 $ab>0$，故⑤不是由③交换命题的题设和结论得到的，所以③和⑤不是互逆命题.

(2) 能. ③的逆命题是：如果 $a>0$，$b>0$，那么 $a+b>0$. ⑤的逆命题是：如果 $ab>0$，那么 $a>0$，$b>0$.

(3) ①与④，②与⑥分别是互逆命题.

2. C

3. 解：(1) 逆命题：三条边对应相等的两个三角形全等. 原命题与其逆命题都是真命题且都是定理，所以它们是互逆定理.

(2) 逆命题：如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的补角. 原命题是真命题，但其逆命题是假命题，所以它们不是互逆定理.

4. 解：设 $CD=x$，在 $Rt\triangle ABC$ 中，有 $AC^2+(CD+BD)^2=AB^2$，

整理，得 $AC^2=AB^2-(CD+BD)^2=64-(x+5)^2$. ①

在 $Rt\triangle ADC$ 中，有 $AC^2+CD^2=AD^2$，

整理，得 $AC^2=AD^2-CD^2=25-x^2$. ②

由①②两式，得 $64-(x+5)^2=25-x^2$，解得 $x=1.4$，即 CD 的长是 1.4.

点拨：勾股定理反映了直角三角形三边长之间的数量关系，利用勾股定理列方程思路清晰、直观易懂.

5. 解：(1) 画图略. 锐角；钝角

(2) $a^2+b^2=2^2+4^2=20$，

$\because c$ 为最长边，$2+4=6$，$\therefore 4\leqslant c<6$.

①由 $a^2+b^2>c^2$，得 $c^2<20$，即 $0<c<2\sqrt{5}$，$\therefore$ 当 $4\leqslant c<2\sqrt{5}$ 时，这个三角形是锐角三角形；

②由 $a^2+b^2=c^2$，得 $c^2=20$，即 $c=2\sqrt{5}$，$\therefore$ 当 $c=2\sqrt{5}$ 时，这个三角形是直角三角形；

③由 $a^2+b^2<c^2$，得 $c^2>20$，即 $c>2\sqrt{5}$，$\therefore$ 当 $2\sqrt{5}<c<6$ 时，这个三角形是钝角三角形.

6. 解：将长方体的侧面展开，如图所示.

(第 6 题)

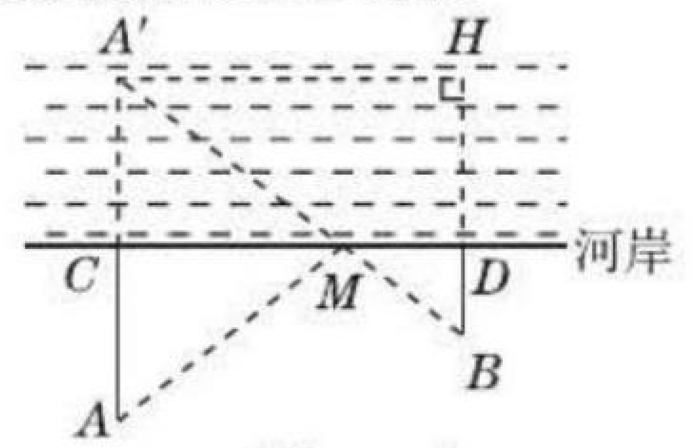
因为 $AA'=1+3+1+3=8$ (cm)，$A'B'=6$ cm，

所以 $AB'^2=AA'^2+A'B'^2=8^2+6^2=10^2$.

所以 $AB'=10$ cm.

所以用一根细线从点 A 开始经过 4 个侧面缠绕一圈到达 B，所用细线最短需要10 cm. 如果从点 A 开始经过 4 个侧面缠绕 n 圈到达点 B，那么所用细线最短时，其长度的平方为 $(8n)^2+6^2=64n^2+36$.

7. 解：如图，作点 A 关于直线 CD 的对称点 A'，连接 $A'B$ 交 CD 于点 M，连接 AM，则在点 M 处饮水所走的总路程最短，最短路程为$A'B$ 的长.



(第 7 题)

过点 A'作 $A'H\perp BD$ 交 BD 的延长线于点 H，在 Rt$\triangle A'HB$ 中，$A'H=CD=800$ m，$BH=BD+DH=BD+A'C=BD+AC=200+400=600$(m)，由勾股定理得$A'B^2=A'H^2+BH^2=800^2+600^2=1\ 000\ 000$，故 $A'B=1\ 000$ m，所以最短路程为1 000 m.

8. 解：如图，连接 EE'.

由题意可知$\triangle ABE\cong\triangle CBE'$，

所以 $CE'=AE=1$，$BE'=BE=2$，$\angle ABE=\angle CBE'$.

又因为$\angle ABE+\angle EBC=90°$，

所以$\angle CBE'+\angle EBC=90°$.

即$\angle EBE'=90°$，则由勾股定理，

得 $EE'^2=8$. 在$\triangle EE'C$ 中，

$CE'^2+EE'^2=1+8=9=CE^2$.

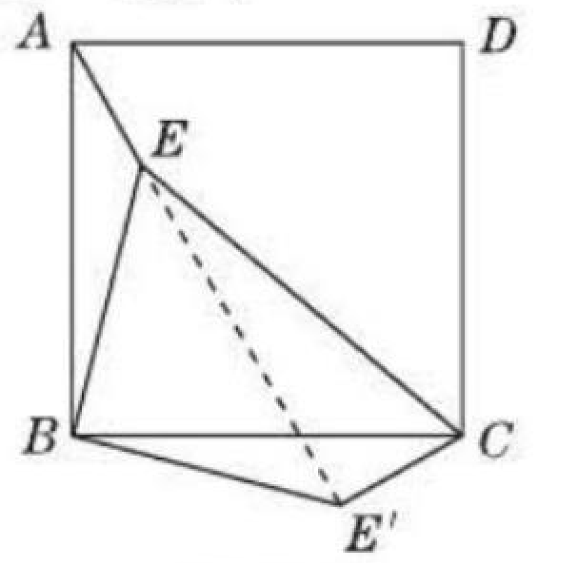
由勾股定理的逆定理可知$\angle EE'C=90°$.

因为$\angle EBE'=90°$，$BE=BE'$，

所以$\angle BEE'=\angle BE'E$.

所以$\angle BE'E=\dfrac{180°-90°}{2}=45°$.

所以$\angle BE'C=\angle BE'E+\angle EE'C=45°+90°=135°$.



(第 8 题)

9. 解：(1) 因为 AD 是 BC 边上的中线，$BC=10$，所以 $BD=CD=5$.

因为 $5^2+12^2=13^2$，

所以 $BD^2+AD^2=AB^2$.

所以$\angle ADB=90°$.

所以$\angle ADC=90°$.

所以 $AC^2=AD^2+CD^2=169$.

所以 $AC=13$.

(2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times10\times12=60$.

10. 解：彩旗下垂时最低处离地面的最小高度 h 也就是旗杆的高度减去彩旗的对角线的长，

因为 $120^2+90^2=22\ 500$，

所以彩旗的对角线长为 150 cm.

所以 $h=320-150=170$(cm).

即彩旗下垂时最低处离地面的最小高度 h 为 170 cm.

11. 解：由题意得 $AC=40\times(6\div60)=4$(n mile)，$BC=30\times(6\div60)=3$(n mile).

因为 $AB=5$ n mile，所以 $AB^2=BC^2+AC^2$. 所以$\angle ACB=90°$.

因为$\angle CBA=90°-37°=53°$，

所以$\angle CAB=37°$.

所以甲巡逻艇的航向为北偏东 53°.

第十八章 平行四边形

18.1 平行四边形

第 1 课时 平行四边形的边、角性质

1. D 点拨：此题易错在平行四边形数不全. 避免出错的技巧是有序思维，即在思考问题时一定要有顺序.

2. 61° 3. D 4. A 5. D

6. D 点拨：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $CD\parallel AB$，$CD=AB$，$AD=BC$，

∴ $\angle C=\angle FBE$，$\angle CDF=\angle E$.

∵ $BE=AB$，∴ $CD=BE$，

∴ $\triangle DCF\cong\triangle EBF$，

∴ $CF=BF$，$DF=EF$，∴ $BC=2BF$，

∴ $AD=2BF$.

只有 D 选项不一定成立.

7. D 8. D

9. D 点拨：情况一，如图①，$BE=3$ cm，$CE=4$ cm.

∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AD=BC$，$AB=CD$，$AD\parallel BC$，

∴ $\angle DAE=\angle AEB$.

∵ AE 平分$\angle BAD$，

∴ $\angle BAE=\angle DAE$，

∴ $\angle BAE=\angle AEB$，

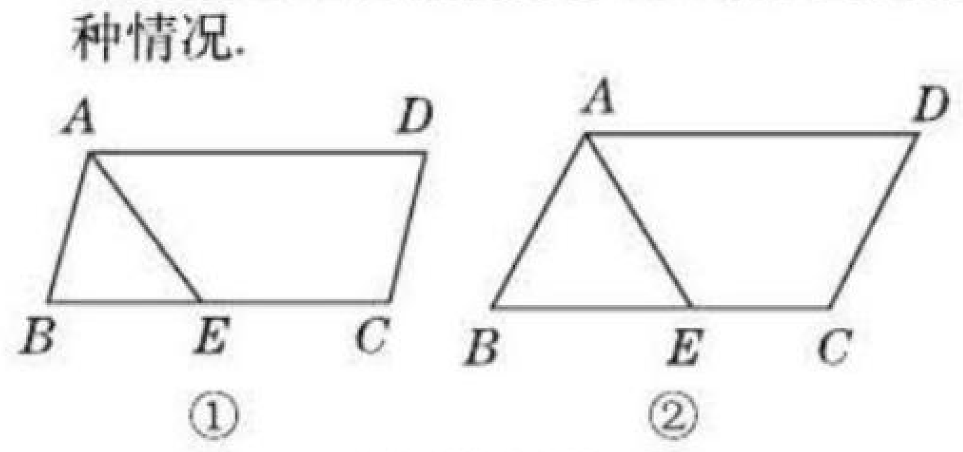
∴ $AB=BE=3$ cm，

∴ 平行四边形 $ABCD$ 的周长 $=(3+3+4)\times2=20$(cm).

情况二，如图②，$BE=4$ cm，$CE=3$ cm. 同理可得 $AB=BE=4$ cm，

∴ 平行四边形 $ABCD$ 的周长 $=(4+4+3)\times2=22$(cm).

本题利用了分类讨论思想，AE 把 BC 分成3 cm 和4 cm 两部分，没有明确哪部分是3 cm，哪部分是4 cm，所以分两种情况.



(第 9 题)

10. 证明：由题意可得 $AE=CF$.

在▱$ABCD$ 中，$AB=DC$，$\angle A=\angle C$.

在$\triangle ABE$ 和$\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}AE=CF,\\ \angle A=\angle C,\\ AB=CD,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$(SAS).

11. 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$，$AD\parallel BC$，$\angle A=\angle C$，

∴ $\angle F=\angle E$.

∵ $BE=DF$，

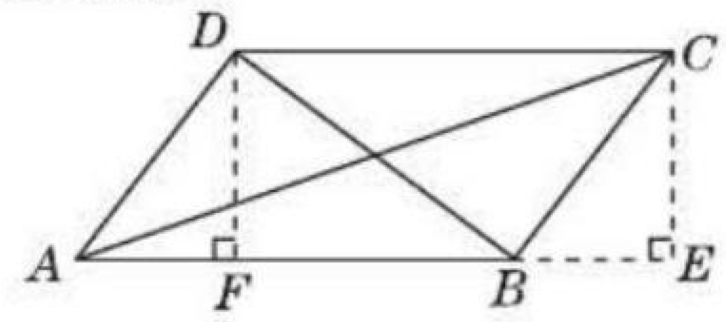
∴ $AD+DF=CB+BE$，即 $AF=CE$.

在$\triangle AGF$ 和$\triangle CHE$ 中，$\begin{cases}\angle A=\angle C,\\ AF=CE,\\ \angle F=\angle E,\end{cases}$

∴ $\triangle AGF\cong\triangle CHE$(ASA).

∴ $AG=CH$.

12. (1) 解：如图，作 $CE\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 E.



(第 12 题)

设 $BE=x$，$CE=h$.

在 Rt$\triangle CEB$ 中，$x^2+h^2=9$，①

在 Rt$\triangle CEA$ 中，$(5+x)^2+h^2=52$. ②

联立①②，解得 $x=\dfrac{9}{5}$，$h=\dfrac{12}{5}$.

∴ 平行四边形 $ABCD$ 的面积 $=AB\cdot h=5\times\dfrac{12}{5}=12$.

(2) 证明：如图，作 $DF\perp AB$，垂足为点 F，

∴ $\angle DFA=\angle CEB=90°$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$，$AD\parallel BC$.

∴ $\angle DAF=\angle CBE$.

又∵ $\angle DFA=\angle CEB=90°$，$AD=BC$，

∴ $\triangle ADF\cong\triangle BCE$(AAS).

∴ $AF=BE=\dfrac{9}{5}$，$BF=AB-AF=5-\dfrac{9}{5}=\dfrac{16}{5}$，$DF=CE=\dfrac{12}{5}$.

在 Rt$\triangle DFB$ 中，$BD^2=DF^2+BF^2=\left(\dfrac{12}{5}\right)^2+\left(\dfrac{16}{5}\right)^2=16$，

∴ $BD=4$.

∵ $BC=3$，$CD=AB=5$，

∴ $CD^2=BD^2+BC^2$.

∴ $\angle CBD=90°$，即 $BD\perp BC$.

13. (1) 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$，$AD\parallel BC$.

∴ $\angle ABC+\angle BAD=180°$.

∵ $AF\parallel BE$，

∴ $\angle EBA+\angle BAF=180°$.

∴ $\angle CBE=\angle DAF$.

同理，得$\angle BCE=\angle ADF$.

在$\triangle BCE$ 和$\triangle ADF$ 中，

$\begin{cases}\angle CBE=\angle DAF,\\ BC=AD,\\ \angle BCE=\angle ADF,\end{cases}$

∴ $\triangle BCE\cong\triangle ADF$(ASA).

(2) 解：∵ 点 E 在▱$ABCD$ 内部，

∴ $S_{\triangle BEC}+S_{\triangle AED}=\dfrac{1}{2}S_{▱ABCD}$.

由(1)知$\triangle BCE\cong\triangle ADF$，

∴ $S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ADF}$.

∴ $S_{四边形AEDF}=S_{\triangle ADF}+S_{\triangle AED}=$

$S_{\triangle BEC}+S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

$\therefore \frac{S}{T}=\frac{S}{\frac{1}{2}S}=2$.

第 2 课时 平行四边形的对角线性质

1. 14

2. C **点拨**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB=CD,AD=BC,OD=OB,OA=OC$.

$\because OD=OB,OA=OC,\angle AOD=\angle COB$,

$\therefore \triangle AOD\cong\triangle COB$(SAS);

同理可得 $\triangle AOB\cong\triangle COD$(SAS).

$\because AD=CB,AB=CD,BD=DB$,

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CDB$(SSS);

同理可得 $\triangle ACD\cong\triangle CAB$(SSS),

因此本题共有 4 对全等三角形.

3. B **点拨**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AB=CD,AB/\!/CD,OB=OD$.

$\therefore \angle CDF=\angle ABE$.

$\because AE\perp BD$ 于点 E,$CF\perp BD$ 于点 F,

$\therefore \angle CFD=\angle AEB=90°$.

$\therefore \triangle CFD\cong\triangle AEB$(AAS).

$\therefore DF=BE,CF=AE$(①正确);

$\therefore DF+EF=BE+EF$,即 $DE=BF$(③正确). 又$\because OB=OD$,

$\therefore DE-OD=BF-OB$,即 $OE=OF$(②正确).

易得出 $\triangle CDO\cong\triangle ABO$,$\triangle CDE\cong\triangle ABF$,$\triangle CFO\cong\triangle AEO$,$\triangle CEO\cong\triangle AFO$,$\triangle ADF\cong\triangle CBE$,$\triangle DOA\cong\triangle BOC$ 等(④错误). 故正确的有 3 个.

故选 B.

4. D **点拨**:$\because AC=2,BD=4$,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=1,BO=\frac{1}{2}BD=2$.

$\because AB=\sqrt{3}$,$\therefore AB^2+AO^2=BO^2$.

$\therefore \angle BAC=90°$.

$\because$ 在 Rt$\triangle BAC$ 中,$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$,

$S_{\triangle BAC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times BC\times AE$,

$\therefore \sqrt{3}\times 2=\sqrt{7}AE$.

$\therefore AE=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. 故选 D.

5. D **点拨**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OB=OD,AB=CD,AD=BC$.

$\because \square ABCD$ 的周长为 28,

$\therefore AB+AD=14$.

$\because OE\perp BD$,

$\therefore OE$ 是线段 BD 的垂直平分线.

$\therefore BE=ED$.

$\therefore \triangle ABE$ 的周长 $=AB+BE+AE=AB+ED+AE=AB+AD=14$.

6. D **点拨**:如图,$\because$ 四边形 $CPAQ$ 是平行四边形,

$\therefore AO=CO,OP=OQ$,

$\therefore PQ$ 最短时,PO 最短,

过 O 作 $OP'\perp AB$ 于 P',

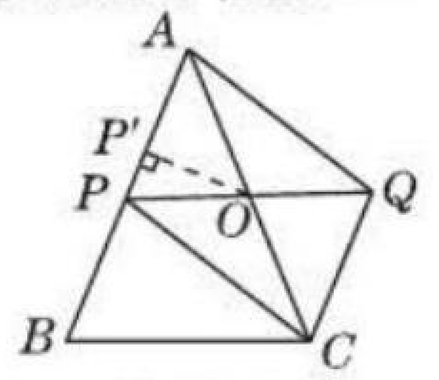
$\because \angle BAC=45°$,

$\therefore \triangle AP'O$ 是等腰直角三角形.

$\because AO=\frac{1}{2}AC=4$,

$\therefore OP'=2\sqrt{2}$,

$\therefore PQ$ 长度的最小值为 $2OP'=4\sqrt{2}$.



(第 6 题)

7. A **点拨**:$\because \square ABCD$ 的周长为 36 cm,

$\therefore AB+BC=18$ cm①.

$\because$ 过点 D 分别作 AB,BC 边上的高 DE,DF,且 $DE=4$ cm,$DF=5$ cm,

$\therefore 4AB=5BC$②,

由①②得 $AB=10$ cm,$BC=8$ cm,

$\therefore \square ABCD$ 的面积为 $AB\cdot DE=10\times 4=40(\text{cm}^2)$,故选 A.

8. C **点拨**:本题运用了**割补法**,将分散的阴影部分通过割补转化为规则的几何图形,从而求出面积.

9. **错解**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore OA=OC$. $\because OE\perp AD$ 于点 E,$OF\perp BC$ 于点 F,$\therefore \angle AEO=\angle CFO=90°$.

又 $\angle AOE=\angle COF$,$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$,$\therefore OE=OF$.

诊断:错解误认为已知 E,O,F 三点共线,从而得到 $\angle AOE=\angle COF$,而已知条件中并没有这个条件.

正解:$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AD/\!/BC,OA=OC$,

$\therefore \angle EAO=\angle FCO$.

$\because OE\perp AD,OF\perp BC$,

$\therefore \angle AEO=\angle CFO=90°$,

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS),$\therefore OE=OF$.

10. **证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OA=OC,OD=OB$.

$\because AF=CE$,

$\therefore OE=OF$,

在 $\triangle BEO$ 和 $\triangle DFO$ 中,

$\begin{cases}OB=OD,\\ \angle BOE=\angle DOF,\\ OE=OF,\end{cases}$

$\therefore \triangle BEO\cong\triangle DFO$(SAS),

$\therefore BE=DF$.

11. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore OD=OB,DC/\!/AB$.

$\therefore \angle FDO=\angle EBO$.

在 $\triangle DFO$ 和 $\triangle BEO$ 中,

$\begin{cases}\angle FDO=\angle EBO,\\ OD=OB,\\ \angle FOD=\angle EOB,\end{cases}$

$\therefore \triangle DFO\cong\triangle BEO$(ASA).

$\therefore OE=OF$.

(2)**解**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AB=CD,AD=BC,OA=OC$.

$\because EF\perp AC$,$\therefore AE=CE$.

$\because \triangle BEC$ 的周长是 10,

$\therefore BC+BE+CE=BC+BE+AE=BC+AB=10$.

$\therefore \square ABCD$ 的周长 $=2(BC+AB)=20$.

12. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AD/\!/BC,BA=CD$.

$\therefore \angle DAE=\angle E$.

又$\because AE$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAE=\angle DAE$. $\therefore \angle BAE=\angle E$.

$\therefore BA=BE$,$\therefore BE=CD$.

(2)**解**:$\because \angle BEA=60°,BA=BE$,

$\therefore \triangle ABE$ 为等边三角形.

$\therefore AE=AB=4$.

$\because BF\perp AE$,$\therefore F$ 为 AE 的中点,

$\therefore AF=EF=2$.

在 $\triangle AFD$ 和 $\triangle EFC$ 中,

$\begin{cases}\angle DAF=\angle E,\\ AF=EF,\\ \angle AFD=\angle EFC,\end{cases}$

$\therefore \triangle AFD\cong\triangle EFC$(ASA).

$\therefore \triangle AFD$ 的面积等于 $\triangle EFC$ 的面积.

$\therefore \square ABCD$ 的面积等于 $\triangle ABE$ 的面积.

在 Rt$\triangle ABF$ 中,$AB=4,AF=2$,

$\therefore BF=2\sqrt{3}$.

$\therefore \triangle ABE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

$\therefore \square ABCD$ 的面积为 $4\sqrt{3}$.

13. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD/\!/BC,AO=CO$.

$\therefore \angle EAO=\angle FCO$.

$\because \angle AOE=\angle COF$,

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$. $\therefore OE=OF$.

(2)**解**:能得到 $OE=OF$,方法同(1).

一般性结论:经过平行四边形的对角线的交点的直线被平行四边形的对边或对边的延长线截得的线段被平行四边形的对角线的交点平分.

第 3 课时 平行四边形的判定

1. C **2.** D **3.** C **4.** C **5.** B

6. C **7.** $AD/\!/BC$(答案不唯一) **8.** B

9. B **点拨**:给出条件① $OE=OF$,由题易知 $OD=OB$,$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 为平行四边形,故①正确;给出条件③ $\angle ADE=\angle CBF$,由题易知 $\angle DAE=\angle BCF,AD=BC$,$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CBF$,$\therefore DE=BF,\angle DEA=\angle BFC$,$\therefore \angle DEO=\angle BFO$,$\therefore DE/\!/BF$,$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 为平行四边形,故③正确;给出条件④,理由同③,亦可判定四边形 $DEBF$ 为平行四边形;只有给出条件②无法判定四边形 $DEBF$ 为平行四边形. 故选 B. 本题易错选 A.

10. **证明**:(1)$\because AD/\!/BC$,

$\therefore \angle DAF=\angle E$.

$\because$ 点 F 是 CD 的中点,

$\therefore DF=CF$.

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ECF$ 中,

$\begin{cases}\angle DAF=\angle E,\\ \angle AFD=\angle EFC,\\ DF=CF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle ECF$(AAS).

(2)$\because \triangle ADF\cong\triangle ECF$,

$\therefore AD=EC$.

$\because CE=BC$,

$\therefore AD=BC$.

又$\because AD/\!/BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

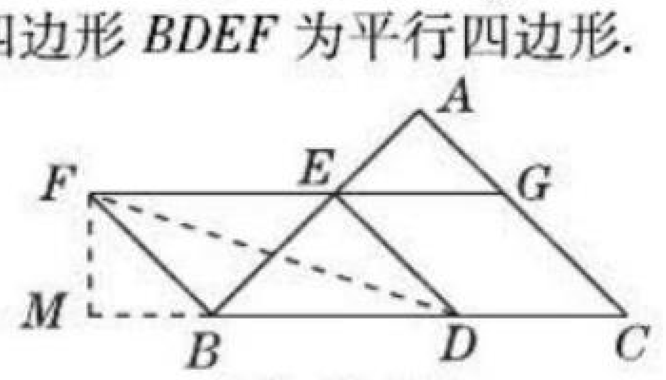
11. (1)**解**:在 $\square ABCD$ 中,$OA=OC,OB=OD$.

$\therefore OA=\frac{1}{2}AC=3,OD=\frac{1}{2}BD=4$.

在 $\triangle AOD$ 中,$4-3<AD<4+3$,

$\therefore 1 < AD < 7$.
(2)**解**:$\because AC = AD$,
$\therefore \angle ACD = \angle ADC$.
又$\because \angle CAD = 50°$,
$\therefore \angle ADC = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$.
在$▱ABCD$中,$\angle ABC = \angle ADC = 65°$.
(3)**证明**:在$▱ABCD$中,$OA = OC$,
$OB = OD$,
$\because AE = CF$,
$\therefore OA - AE = OC - CF$,即$OE = OF$.
$\because BG = DH$,
$\therefore OB - BG = OD - DH$,即$OG = OH$.
$\therefore$四边形$EHFG$是平行四边形.

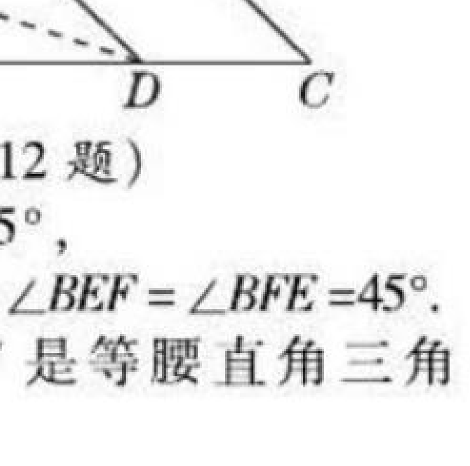
12. (1)**证明**:$\because$三角形ABC是以BC为底边的等腰三角形,
$\therefore \angle ABC = \angle C$.
$\because EG /\!/ BC, DE /\!/ AC$,
$\therefore$四边形$CDEG$是平行四边形.
$\therefore \angle DEG = \angle C$.
$\because EG /\!/ BC$,
$\therefore \angle AEG = \angle ABC$.
$\therefore \angle DEG = \angle AEG$.
$\because BE = BF$,
$\therefore \angle BFE = \angle BEF = \angle AEG$.
$\therefore \angle BFE = \angle DEG$. $\therefore BF /\!/ DE$.
$\therefore$四边形$BDEF$为平行四边形.



(第 12 题)

(2)**解**:$\because \angle C = 45°$,
$\therefore \angle BDE = \angle ABC = \angle BEF = \angle BFE = 45°$.
$\therefore \triangle BDE$, $\triangle BEF$是等腰直角三角形. $\because BD = 2$,
$\therefore BF = BE = \sqrt{2}$.
作$FM \perp BD$交DB的延长线于M,连接DF,如图所示.
易得$\triangle BFM$是等腰直角三角形,
$\therefore FM = BM = 1$. $\therefore DM = 3$.
在$Rt\triangle DFM$中,由勾股定理得$DF = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,
即D,F两点间的距离为$\sqrt{10}$.

13. (1)**解**:$\because \triangle ABC$绕点C顺时针旋转α得到$\triangle DEC$,点E恰好在AC上,
$\therefore CA = CD$, $\angle DCE = \angle ACB = 30°$, $\angle DEC = \angle ABC = 90°$.
$\therefore \angle CAD = \angle CDA = \frac{1}{2} \times (180° - 30°) = 75°$.
$\therefore \angle ADE = 90° - 75° = 15°$.
(2)**证明**:如图,连接AD.
由旋转的性质得$AC = DC$,
$\angle ACD = 60°$,
$\therefore \triangle ACD$是等边三角形.
$\because F$是AC的中点,
$\therefore DF \perp AC$.



(第 13 题)

同理可证$\triangle BCE$是等边三角形,
$\therefore \angle BEC = 60°$.
设BE交AC于点G.
$\because \angle ACE = 60° - \angle ACB = 30°$,
$\therefore \angle EGC = 90°$.
$\therefore EB \perp AC$. $\therefore EB /\!/ DF$.
$\because \angle BAC = 90° - \angle ACB = 60°$, $AB = AF = \frac{1}{2}AC$,
$\therefore \triangle ABF$是等边三角形.
$\therefore \angle AFB = 60°$.
$\therefore \angle FBG = 30°$.
由旋转的性质得$\angle DEC = \angle ABC = 90°$,
则$\angle DEB + \angle FBG = 90° + 60° + 30° = 180°$,
$\therefore ED /\!/ BF$.
$\therefore$四边形$BEDF$是平行四边形.

第 4 课时 平行四边形的性质和判定的应用

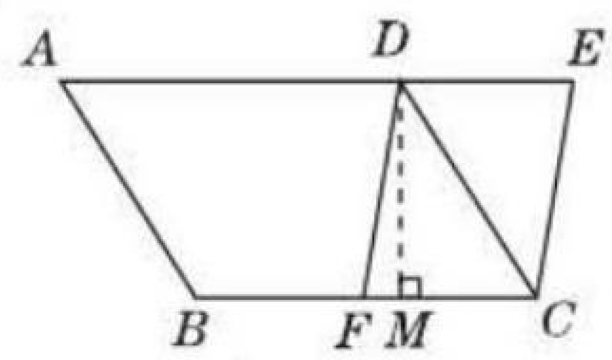
1. (1)**证明**:$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore CD /\!/ AB$.
$\because AM \perp BD, CN \perp BD$,
$\therefore AM /\!/ CN$.
$\therefore$四边形$CMAN$是平行四边形.
(2)**解**:$\because$四边形$CMAN$是平行四边形,$\therefore CM = AN$.
$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,
$\therefore CD = AB, CD /\!/ AB$.
$\therefore DM = BN, \angle MDE = \angle NBF$.
$\because AM \perp BD, CN \perp BD$,
$\therefore \angle DEM = \angle BFN = 90°$.
在$\triangle MDE$和$\triangle NBF$中,
$$\begin{cases} \angle MDE = \angle NBF, \\ \angle DEM = \angle BFN = 90°, \\ DM = BN, \end{cases}$$
$\therefore \triangle MDE \cong \triangle NBF(AAS)$. $\therefore BF = DE = 4$.
在$Rt\triangle NBF$中,
$\because \angle BFN = 90°, BF = 4, FN = 3$,
$\therefore BN = \sqrt{FN^2 + BF^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

2. **证明**:(1)$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore AB /\!/ CD$.
$\because AE = CF$,
$\therefore$四边形$AECF$是平行四边形.
(2)由(1)得四边形$AECF$是平行四边形,$\therefore AF /\!/ CE$.
$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,
$\therefore AB = CD$.
$\because AE = CF$,
$\therefore BE = DF$. $\because BE /\!/ DF$,
$\therefore$四边形$BFDE$是平行四边形.
$\therefore BF /\!/ DE$.
$\therefore$四边形$EGFH$是平行四边形.
$\therefore EF$与GH互相平分.

3. (1)**证明**:过D作$DF /\!/ AE$交BC的延长线于F,$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore BC = AD = 10, AD /\!/ BC$,
$\therefore$四边形$AEFD$为平行四边形.
$\therefore EF = AD = 10, DF = AE = 9$.
$\because E$是BC的中点,
$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = 5$.
$\therefore BF = BE + EF = 5 + 10 = 15$.
$\therefore BD^2 + DF^2 = 12^2 + 9^2 = 225 = BF^2$.
$\therefore \angle BDF = 90°$,即$DF \perp BD$.
又$\because DF /\!/ AE$, $\therefore AE \perp BD$.
(2)**解**:过D作$DM \perp BF$于M,
$\because BD \cdot DF = BF \cdot DM$,
$\therefore DM = \frac{9 \times 12}{15} = \frac{36}{5}$.
$\therefore S_{▱ABCD} = BC \cdot DM = 72$.

4. **证明**:(1)$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore \angle D = \angle CBA, DC /\!/ AB, AD /\!/ BC$.
$\because$将$▱ABCD$沿过点A的直线l折叠,使点D落到AB边上的点D'处,
$\therefore \angle DAE = \angle D'AE, \angle D = \angle AD'E$.
$\therefore \angle AD'E = \angle CBA$. $\therefore ED' /\!/ CB$.
$\because EC /\!/ D'B$,
$\therefore$四边形$BCED'$是平行四边形.
(2)$\because BE$平分$\angle ABC$,
$\therefore \angle CBE = \angle EBA$.
$\because AD /\!/ BC$, $\therefore \angle DAB + \angle CBA = 180°$.
$\because \angle DAE = \angle BAE$,
$\therefore \angle EAB + \angle EBA = 90°$.
$\therefore \angle AEB = 90°$. $\therefore AB^2 = AE^2 + BE^2$.

5. (1)**证明**:$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,$\therefore AD /\!/ BC, AD = BC$.
$\because F$是BC的中点,$\therefore FC = \frac{1}{2}BC$.
又$\because E$是AD延长线上一点,且$DE = \frac{1}{2}AD$, $\therefore FC = DE$.
$\because FC /\!/ DE$,
$\therefore$四边形$CEDF$是平行四边形.
(2)**解**:如图,过点D作$DM \perp BC$于点M.



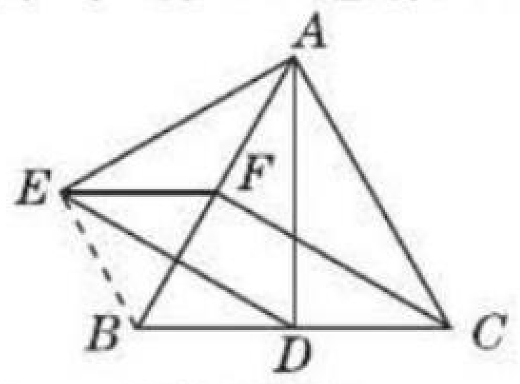
(第 5 题)

$\because$四边形$CEDF$、四边形$ABCD$都是平行四边形,F是BC的中点,
$\therefore CE = DF, \angle DCM = \angle A = 60°$,
$FC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = 2, DC = AB = 3$.
在$Rt\triangle DCM$中,$\angle CDM = 90° - 60° = 30°, DC = 3$.
$\therefore CM = \frac{3}{2}$. $\therefore DM = \frac{3\sqrt{3}}{2}, FM = \frac{1}{2}$.
在$Rt\triangle DFM$中,由勾股定理可得
$DF = \sqrt{DM^2 + FM^2} = \sqrt{7}$.
$\therefore CE = DF = \sqrt{7}$.

6. (1)**证明**:$\because DE /\!/ AC, DF /\!/ AB$,
$\therefore \angle FDC = \angle B$,四边形$AEDF$是平行四边形. $\therefore DE = AF$.
又$\because AB = AC$, $\therefore \angle B = \angle C$.
$\therefore \angle FDC = \angle C$, $\therefore DF = FC$.
$\therefore DE + DF = AF + FC = AC$.
(2)**解**:当点D在边BC的延长线上时,$DE - DF = AC$;
当点D在边BC的反向延长线上时,$DF - DE = AC$.
(3)2 或 10

7. **解**:(1)设x s 后,四边形$ABQP$为平行四边形,由题意易得$2x = 18 - 3x$,解得$x = 3.6$,
即 3.6 s 后,四边形$ABQP$为平行四边形,此时四边形$ABQP$的周长是$3.6 \times 2 \times 2 + 12 \times 2 = 38.4$(cm).
(2)设y s 后,四边形$PDCQ$为平行四边形. 由题意得$10 - 2y = 3y$,解得$y = 2$,即 2 s 后,四边形$PDCQ$为平行四边形,此时四边形$PDCQ$的周长是$3 \times 2 \times 2 + 15 \times 2 = 42$(cm).

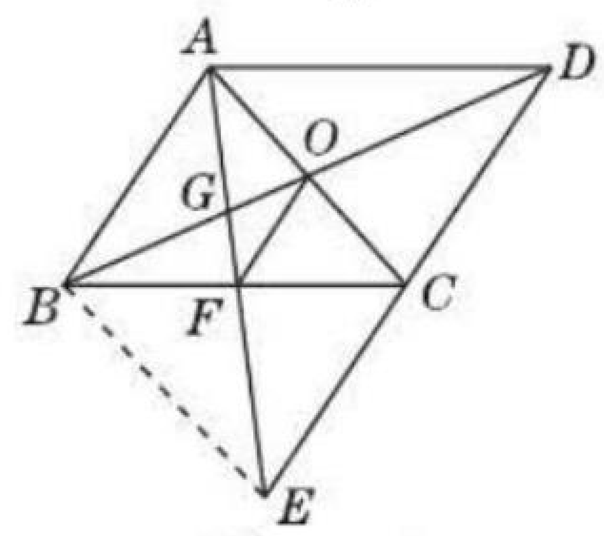
8. (1)**证明**：∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，
∴ $AC=BC$，$\angle FBC=\angle DCA=60^\circ$.
在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBF$ 中，
$\begin{cases}AC=CB,\\ \angle DCA=\angle FBC,\\ CD=BF,\end{cases}$
∴ $\triangle ACD\cong\triangle CBF$(SAS).
(2)**解**：当 D 是线段 BC 的中点时，四边形 $CDEF$ 为平行四边形且 $\angle DEF=30^\circ$.
如图，连接 BE，由题易知 $AB=AC$，$AE=AD$，$\angle BAC=\angle EAD=60^\circ$.


(第 8 题)

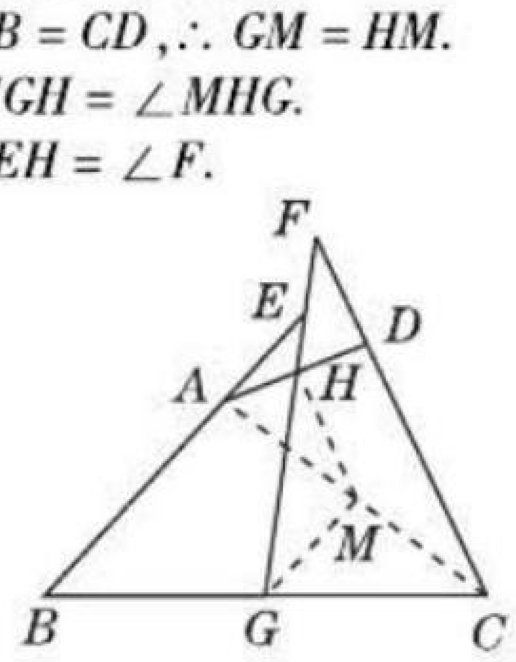
∴ $\angle EAB+\angle BAD=\angle DAC+\angle BAD=60^\circ$，
即 $\angle EAB=\angle DAC$，
∴ $\triangle AEB\cong\triangle ADC$(SAS).
又∵ $\triangle ACD\cong\triangle CBF$，
∴ $\triangle AEB\cong\triangle ADC\cong\triangle CFB$，
∴ $EB=DC=FB$，
$\angle EBA=\angle ABC=60^\circ$，
∴ $\triangle EFB$ 为等边三角形.
∴ $EF=FB=CD$，$\angle EFB=60^\circ$.
又∵ $\angle ABC=60^\circ$，
∴ $\angle EFB=\angle ABC=60^\circ$，
∴ $EF/\!/BC$，
而 CD 在 BC 上，∴ $EF/\!/CD$.
又∵ $EF=CD$，
∴ 四边形 $CDEF$ 为平行四边形.
∵ D 是线段 BC 的中点，
∴ F 是线段 AB 的中点.
∴ $\angle FCD=\frac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$，
则 $\angle DEF=\angle FCD=30^\circ$.

第 5 课时　三角形的中位线

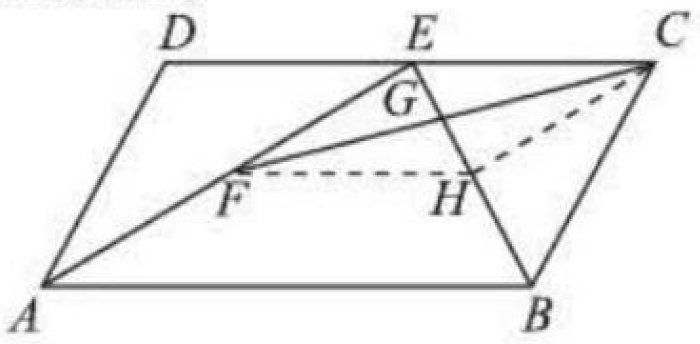
1. D　2. B
3. A　**点拨**：∵ $BD\perp CD$，$BD=4$，$CD=3$，
∴ $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.
∵ E,F,G,H 分别是 AB,BD,CD,AC 的中点，
∴ $EH=FG=\frac{1}{2}BC$，$EF=GH=\frac{1}{2}AD$.
∴ 四边形 $EFGH$ 的周长 $=EF+GH+FG+EH=AD+BC$.
又∵ $AD=7$，
∴ 四边形 $EFGH$ 的周长 $=7+5=12$.
4. D
5. C　**点拨**：由 $AB=AC$，$\angle CAB=45^\circ$，根据等边对等角及三角形内角和定理求出 $\angle B=\angle ACB=67.5^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，$\angle CAD=45^\circ$，$\angle ADC=90^\circ$，根据三角形内角和定理求出 $\angle ACD=45^\circ$，根据等角对等边得出 $AD=DC$，那么 $\angle ECD=\angle ACB+\angle ACD=112.5^\circ$，从而判断 A 正确；
根据三角形的中位线定理得到 $FE=\frac{1}{2}AB$，$FE/\!/AB$，根据平行线的性质得出 $\angle EFC=\angle BAC=45^\circ$，$\angle FEC=\angle B=67.5^\circ$，根据直角三角形的性质以及等腰三角形的性质得到 $FD=\frac{1}{2}AC$，$DF\perp AC$，则 $\angle FDC=45^\circ$，等量代换得到 $FE=FD$，再求出 $\angle FDE=\angle FED=22.5^\circ$，所以 $\angle CDE=22.5^\circ=\angle FDE$，进而判断 B 正确；
由 $\angle FEC=\angle B=67.5^\circ$，$\angle FED=22.5^\circ$，求出 $\angle DEC=\angle FEC-\angle FED=45^\circ$，从而判断 C 错误；
在等腰直角 $\triangle ADC$ 中利用勾股定理求出 $AC=\sqrt{2}CD$，又 $AB=AC$，等量代换得到 $AB=\sqrt{2}CD$，从而判断 D 正确.
6. B　7. 16
8. D 是 BC 的中点(答案不唯一)
9. B　**点拨**：本题是一道折叠题，找出中位线是解题的关键.
10. (1)**证明**：∵ D,E,F 分别是 AB,BC,AC 的中点，∴ $DF/\!/BC$，$EF/\!/AB$.
∴ 四边形 $BEFD$ 是平行四边形.
(2)**解**：∵ $\angle AFB=90^\circ$，D 是 AB 的中点，$AB=6$，
∴ $DF=DB=DA=\frac{1}{2}AB=3$.
∵ 四边形 $BEFD$ 是平行四边形.
∴ 四边形 $BEFD$ 是菱形.
∵ $DB=3$，
∴ 四边形 $BEFD$ 的周长为 $3\times4=12$.
11. **解**：$AB/\!/OF$，$OF=\frac{1}{2}AB$.
证明如下：如图，连接 BE，
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $OA=OC$，$AB=DC$，$AB/\!/DE$，
又∵ $CE=DC$，∴ $AB=CE$.
∴ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形.
∴ $BF=CF$.
又∵ $OA=OC$，
∴ OF 是 $\triangle ABC$ 的中位线.
∴ $AB/\!/OF$，$OF=\frac{1}{2}AB$.


(第 11 题)

12. **证明**：如图，连接 AC，取 AC 的中点 M，连接 HM,GM.
∵ H 是 AD 的中点，M 是 AC 的中点，
∴ HM 是 $\triangle ADC$ 的中位线.
∴ $HM/\!/CD$，$HM=\frac{1}{2}CD$.
∴ $\angle MHG=\angle F$.
同理，$GM/\!/AB$，$GM=\frac{1}{2}AB$.
∴ $\angle MGH=\angle AEH$.
又∵ $AB=CD$，∴ $GM=HM$.
∴ $\angle MGH=\angle MHG$.
∴ $\angle AEH=\angle F$.


(第 12 题)

点拨：当几个中点不是一个三角形的各边中点时，可设法再取一个中点，使它与已知中点能构成三角形的中位线. 此题中 H,G 分别是四边形 $ABCD$ 两条对边的中点，这时需连接对角线，将四边形转化为两个三角形，再取对角线中点，与已知中点相连，就会产生三角形的中位线，问题便迎刃而解.
13. **证明**：如图，


(第 13 题)

取 BE 的中点 H，连接 FH,CH.
∵ F 是 AE 的中点，H 是 BE 的中点，
∴ FH 是 $\triangle ABE$ 的中位线.
∴ $FH/\!/AB$ 且 $FH=\frac{1}{2}AB$.
在 ▱$ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，$AB=DC$.
又∵ 点 E 是 DC 的中点，
∴ $EC=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}AB$，
∴ $FH=EC$.
又∵ $AB/\!/DC$，$FH/\!/AB$，
∴ $FH/\!/EC$，
∴ 四边形 $EFHC$ 是平行四边形.
∴ $GF=GC$.

阶段核心方法专训

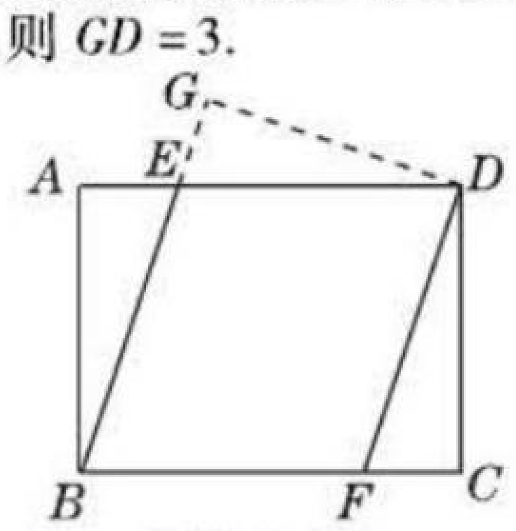
1. **证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$DE=BF$，∴ $DE \underline{\mathbin{/\!/}} BF$.
∴ 四边形 $BFDE$ 为平行四边形.
∴ $BE/\!/DF$. 同理，$AF/\!/CE$.
∴ 四边形 $FMEN$ 为平行四边形.
2. **证明**：∵ $\triangle ABD$，$\triangle BCE$，$\triangle ACF$ 都是等边三角形，
∴ $BA=BD=AD$，$BC=BE$，$AF=AC$，$\angle DBA=\angle EBC=60^\circ$.
∴ $\angle EBC-\angle EBA=\angle DBA-\angle EBA$，
即 $\angle ABC=\angle DBE$.
∴ $\triangle ABC\cong\triangle DBE$(SAS).
∴ $AC=DE$. ∴ $AF=DE$.
同理，可证 $\triangle ABC\cong\triangle FEC$，
∴ $AB=FE$. ∴ $AD=EF$.
∴ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.
3. **证明**：过 A 作 $AM\perp DF$ 于 M.
∵ $\angle ACB=90^\circ$，$ED\perp BC$，
∴ $DF/\!/AC$. ∴ $AM=DC$.
在 $\text{Rt}\triangle AMF$ 和 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中，
$\begin{cases}AM=CD,\\ AF=CE,\end{cases}$
∴ $\text{Rt}\triangle AMF\cong\text{Rt}\triangle CDE$.
∴ $\angle F=\angle CED$. ∴ $AF/\!/CE$.
又∵ $AF=CE$，
∴ 四边形 $ACEF$ 是平行四边形.
4. **解**：四边形 $BFDE$ 是平行四边形. 理由如下：在 ▱$ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle CDA$，$\angle A=\angle C$.
∵ BE 平分 $\angle ABC$，DF 平分 $\angle ADC$，
∴ $\angle ABE=\angle CBE=\frac{1}{2}\angle ABC$，
$\angle CDF=\angle ADF=\frac{1}{2}\angle ADC$.
∴ $\angle ABE=\angle CBE=\angle CDF=\angle ADF$.
∵ $\angle DFB=\angle C+\angle CDF$，$\angle BED=\angle ABE+\angle A$，∴ $\angle DFB=\angle BED$.
∴ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.
5. (1)**证明**：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AD/\!/BC$，∴ $\angle EAO=\angle FCO$.

$\because O$ 是 AC 的中点,$\therefore OA=OC$.
在 $\triangle OAE$ 与 $\triangle OCF$ 中,
$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ OA=OC,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$
$\therefore \triangle OAE\cong\triangle OCF(ASA)$,
$\therefore OE=OF$. 同理 $OG=OH$,
$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是平行四边形.
(2)**解**:与四边形 $AGHD$ 面积相等的平行四边形有 $\square GBCH$, $\square ABFE$, $\square EFCD$, $\square EGFH$.

18.2 特殊的平行四边形

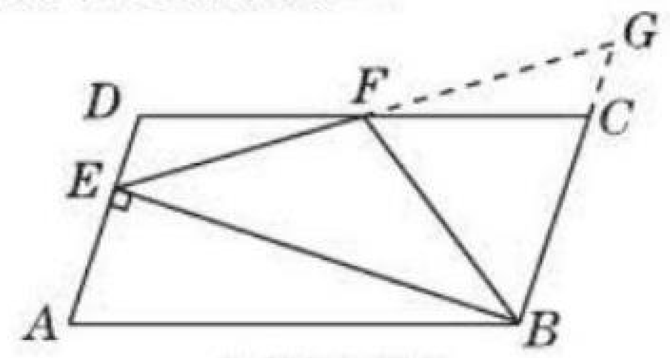
第 1 课时 矩形及其性质

1. B **2.** D
3. A **点拨**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
$\therefore AD=BC$, $\angle ADO=\angle EDO=\angle C=90°$. $\because AD=DE$, $\therefore BC=DE$.
在 $\triangle BOC$ 与 $\triangle EOD$ 中, $\angle BOC=\angle EOD$, $\angle C=\angle EDO=90°$,
$BC=DE$, $\therefore \triangle BOC\cong\triangle EOD$. 故 B 选项正确.
在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle EOD$ 中, $AD=DE$, $\angle ADO=\angle EDO=90°$, $OD=OD$,
$\therefore \triangle AOD\cong\triangle EOD$. 故 C 选项正确.
由 B,C 知 $\triangle AOD\cong\triangle BOC$,故 D 选项正确. 而 A 选项中两个三角形明显不全等. 故应选 A.
4. C **点拨**:如图,过点 D 作 $DG\perp BE$,垂足为 G,则 $GD=3$.



(第 4 题)

$\because \angle A=\angle G$, $\angle AEB=\angle GED$, $AB=GD=3$,
$\therefore \triangle AEB\cong\triangle GED$.
$\therefore AE=EG$.
设 $AE=EG=x$,则 $ED=4-x$,
在 $Rt\triangle DEG$ 中,$ED^2=GE^2+GD^2$,
即 $x^2+3^2=(4-x)^2$,解得 $x=\frac{7}{8}$.
故选 C.
5. $3\sqrt{3}$ **点拨**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
$\therefore \angle B=\angle BAD=90°$.
$\because \angle BAC=60°$,
$\therefore \angle ACB=30°$.
由作图知 AE 是 $\angle BAC$ 的平分线,
$\therefore \angle BAE=\angle CAE=30°$.
$\therefore \angle EAC=\angle ACE=30°$.
$\therefore AE=CE$.
过点 E 作 $EF\perp AC$ 于点 F,
$\therefore EF=BE=1$.
$\therefore CE=2$, $CF=\sqrt{3}$.
$\therefore AC=2CF=2\sqrt{3}$.
$\therefore AB=\sqrt{3}$, $BC=3$.
$\therefore S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=3\sqrt{3}$.
6. C **7.** B
8. C **点拨**:连接 DF,根据直角三角形斜边上的中线的性质,即可得到 $\triangle CDF$ 是等边三角形,进而得到 $\angle ACD=60°$. 根据 $\angle BCD$ 和 $\angle BDC$ 的平分线相交于点 E,可得出 $\angle CED=115°$,即可得到 $\angle ACD+\angle CED=60°+115°=175°$.
9. D **点拨**:$\because$ 在$\square ABCD$ 中,$CD=2AD$,F 为 DC 的中点. $\therefore CF=\frac{1}{2}CD=AD=BC$, $AB\parallel CD$. $\therefore \angle CBF=\angle CFB=\angle ABF$. $\therefore \angle ABC=\angle ABF+\angle CBF=2\angle ABF$. 故①正确;如图,延长 EF, BC,相交于点 G. 容易证明 $\triangle DEF\cong\triangle CGF$, $\therefore FE=FG$, $\because BE\perp AD$, $AD\parallel BC$, $\therefore \angle EBG=90°$,根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得 $EF=BF$,②正确;由于 BF 是 $\triangle BEG$ 的中线,$\therefore S_{\triangle BEG}=2S_{\triangle BEF}$,而 $S_{\triangle DEF}=S_{\triangle CGF}$, $\therefore S_{\triangle BEG}=S_{四边形DEBC}$,
$\therefore S_{四边形DEBC}=2S_{\triangle EFB}$,故③正确;设 $\angle DEF=x$, $\because AD\parallel BC$, $\therefore \angle DEF=\angle G=x$,又$\because FG=FB$, $\therefore \angle G=\angle FBG=x$, $\therefore \angle EFB=2x$, $\angle CFB=\angle CBF=x$, $\therefore \angle CFE=\angle CFB+\angle BFE=x+2x=3x=3\angle DEF$,故④正确;故本题答案为 D.



(第 9 题)

10. 30° **点拨**:根据矩形的性质求出 $\angle BAE=\angle BEA=45°$,求出 $\angle BAO=\angle BAE+\angle 1=60°$,推出 $\triangle AOB$ 为等边三角形, $\angle OBE=30°$,由 $AB=OB=BE$,求出 $\angle BEO=75°$,即可求得答案.
11. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
$\therefore AB\parallel CD$.
$\therefore \angle DFO=\angle BEO$.
$\because \angle DOF=\angle BOE$, $OD=OB$,
$\therefore \triangle DOF\cong\triangle BOE(AAS)$.
$\therefore DF=BE$.
又$\because DF\parallel BE$,
$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.
(2)**解**:$\because DE=DF$,四边形 $DEBF$ 是平行四边形,
$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是菱形.
$\therefore DE=BE$, $EF\perp BD$, $OE=OF$.
设 $AE=x$,则 $DE=BE=8-x$.
在 $Rt\triangle ADE$ 中,根据勾股定理,有 $AE^2+AD^2=DE^2$,
$\therefore x^2+6^2=(8-x)^2$,
解得 $x=\frac{7}{4}$.
$\therefore DE=8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$.
在 $Rt\triangle ABD$ 中,根据勾股定理,有 $AB^2+AD^2=BD^2$,
$\therefore BD=\sqrt{6^2+8^2}=10$.
$\therefore OD=\frac{1}{2}BD=5$.
在 $Rt\triangle DOE$ 中,根据勾股定理,有 $DE^2-OD^2=OE^2$,
$\therefore OE=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-5^2}=\frac{15}{4}$.
$\therefore EF=2OE=\frac{15}{2}$.
12. **证明**:连接 ME, MF.
$\because BE$, CF 分别是高,
$\therefore \angle BEC=\angle BFC=90°$.
在 $Rt\triangle BEC$ 和 $Rt\triangle BFC$ 中,点 M 是斜边 BC 的中点,
$\therefore FM=\frac{1}{2}BC=ME$.
又$\because N$ 是 EF 的中点,$\therefore MN\perp EF$.
13. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
$\therefore AB=CD$, $AB\parallel CD$, $AD\parallel BC$.
$\therefore \angle ABE=\angle CDF$.
$\because AE\perp BD$ 于点 E, $CF\perp BD$ 于点 F,
$\therefore \angle AEB=\angle CFD=90°$.
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,
$\begin{cases}\angle ABE=\angle CDF,\\ \angle AEB=\angle CFD,\\ AB=CD,\end{cases}$
$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF(AAS)$.
$\therefore AE=CF$.
(2)**解**:$\triangle ABE$, $\triangle CDF$, $\triangle BCE$, $\triangle ADF$.
14. **解**:(1)四边形 $ADEF$ 是平行四边形.
理由如下:
$\because \triangle ABD$, $\triangle BEC$ 都是等边三角形,
$\therefore BD=AB=AD$, $BE=BC$, $\angle DBA=\angle EBC=60°$.
$\therefore \angle DBE=60°-\angle EBA$, $\angle ABC=60°-\angle EBA$.
$\therefore \angle DBE=\angle ABC$.
$\therefore \triangle DBE\cong\triangle ABC$.
$\therefore DE=AC$.
$\because \triangle ACF$ 是等边三角形,
$\therefore AC=AF$.
$\therefore DE=AF$.
同理可得 $\triangle ABC\cong\triangle FEC$,
$\therefore EF=BA=DA$.
$\because DE=AF$, $DA=EF$,
$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 为平行四边形.
(2)若四边形 $ADEF$ 为矩形,则 $\angle DAF=90°$.
$\because \angle DAB=\angle FAC=60°$,
$\therefore \angle BAC=360°-\angle DAB-\angle FAC-\angle DAF=360°-60°-60°-90°=150°$.
$\therefore$ 当 $\triangle ABC$ 满足 $\angle BAC=150°$ 时,四边形 $ADEF$ 是矩形.

第 2 课时 矩形的判定

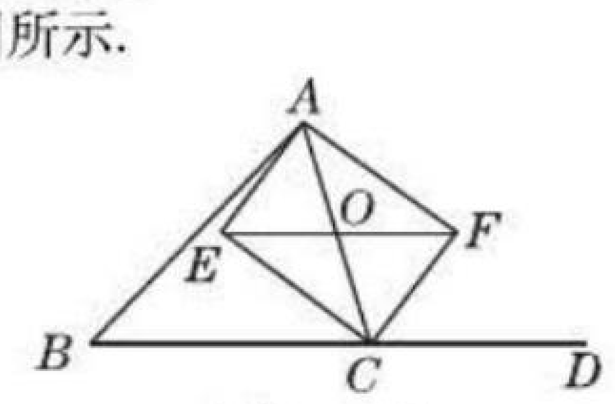
1. D **2.** B **3.** A **4.** B **5.** B
6. C **7.** C **8.** B
9. $\frac{12}{5}$ **点拨**:连接 AD. $\because \angle BAC=90°$, $BA=3$, $AC=4$,
$\therefore BC=\sqrt{BA^2+AC^2}=5$.
$\because DM\perp AB$, $DN\perp AC$,
$\therefore \angle DMA=\angle DNA=\angle BAC=90°$.
$\therefore$ 四边形 $AMDN$ 是矩形.
$\therefore MN=AD$.
当 $AD\perp BC$ 时,AD 的值最小.
此时,$\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AD$,
$\therefore AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{12}{5}$.
$\therefore MN$ 的最小值为$\frac{12}{5}$.
10. C **点拨**:此题易因对矩形的判定方法理解错误而出错. 在一组对边平行的前提下,再找该组对边相等或另一组对边平行即可判定这个四边形为平行四边形,再结合对角线相等即可判定这个四边形是矩形.

11. (1) **证明**:$\because$ ▱$ABCD$ 的对角线 AC,BD 相交于点 O,
$\therefore OA=OC,OB=OD$.
$\because AE=CF$,
$\therefore OE=OF$.
在$\triangle DOE$与$\triangle BOF$中,
$\begin{cases}OD=OB,\\ \angle DOE=\angle BOF,\\ OE=OF,\end{cases}$
$\therefore \triangle DOE\cong\triangle BOF(\text{SAS})$.
(2) **解**:四边形 $EBFD$ 是矩形. 理由如下:在四边形 $EBFD$ 中,$\because OB=OD$,$OE=OF$,
$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形.
$\because BD=EF$,
$\therefore$ ▱$EBFD$ 是矩形.

12. **证明**:(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore \angle B=\angle D,AB=CD,AD\parallel BC$.
$\because AE\perp BC,CF\perp AD$,
$\therefore \angle AEB=\angle AEC=\angle CFD=\angle AFC=90°$.
在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中,
$\begin{cases}\angle B=\angle D,\\ \angle AEB=\angle CFD,\\ AB=CD,\end{cases}$
$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF(\text{AAS})$.
(2) $\because AD\parallel BC$,
$\therefore \angle EAF=\angle AEB=90°$.
$\therefore \angle EAF=\angle AEC=\angle AFC=90°$.
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形.

13. **解**:根据题意得 $CQ=2t$ cm,$AP=4t$ cm,则 $BP=(24-4t)$ cm,
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
$\therefore \angle B=\angle C=90°,CD\parallel AB$.
$\therefore$ 只有 $CQ=BP$ 时,四边形 $QPBC$ 是矩形,即 $2t=24-4t$.
解得 $t=4$,
$\therefore$ 当 $t=4$ 时,四边形 $QPBC$ 是矩形.

14. **解**:(1) $\because EF$ 交 $\angle ACB$,外角 $\angle ACD$ 的平分线于点 E,F,
$\therefore \angle OCE=\angle BCE,\angle OCF=\angle DCF$.
$\because EF\parallel BC$,
$\therefore \angle OEC=\angle BCE,\angle OFC=\angle DCF$.
$\therefore \angle OEC=\angle OCE,\angle OFC=\angle OCF$.
$\therefore OE=OC,OF=OC$.
$\therefore OE=OF=\frac{1}{2}EF$.
$\because \angle OCE+\angle BCE+\angle OCF+\angle DCF=180°$,
$\therefore \angle ECF=90°$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle CEF$ 中,由勾股定理得 $EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=10$,
$\therefore OC=OE=\frac{1}{2}EF=5$.
(2) 当点 O 在边 AC 上运动到 AC 的中点时,四边形 $AECF$ 是矩形.
理由如下:
如图所示.

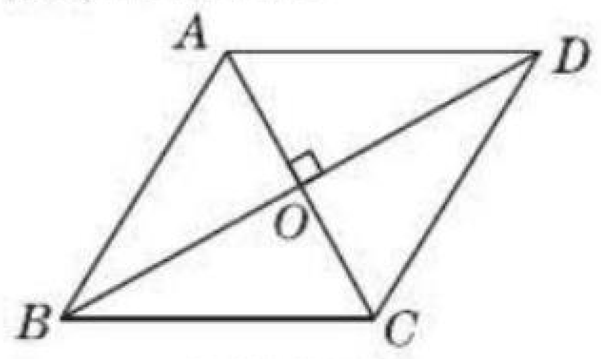


(第 14 题)

当 O 为 AC 的中点时,$AO=CO$,
$\because EO=FO$,
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.
$\because \angle ECF=90°$,
$\therefore$ 平行四边形 $AECF$ 是矩形.

第 3 课时　菱形及其性质

1. C
2. B　**点拨**:由 $DE\parallel AC,DF\parallel AB$,知四边形 $AEDF$ 为平行四边形,要使▱$AEDF$ 为菱形,只需邻边相等即可,由 $DE\parallel AF$,得 $\angle EDA=\angle FAD$. 又由 $\angle BAD=\angle CAD$,可得 $\angle EDA=\angle EAD$,所以 $AE=DE$.
3. A　4. C
5. C　**点拨**:如图所示.



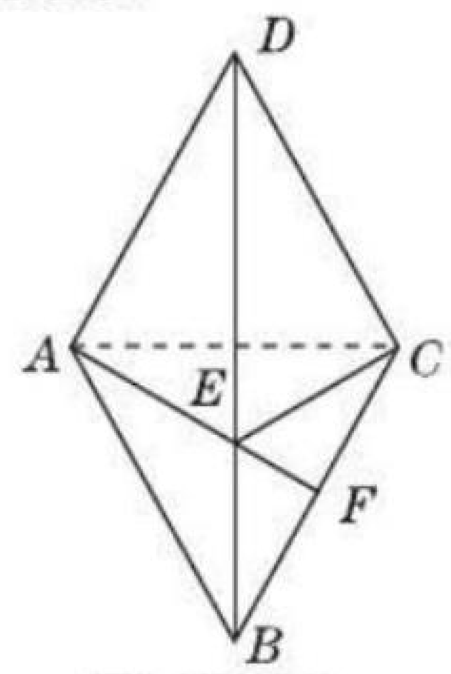
(第 5 题)

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.
$\therefore OA=OC=\frac{1}{2}AC,OD=OB=\frac{1}{2}BD$,
$AC\perp BD$.
$\because$ 菱形的面积为 28,
$\therefore \frac{1}{2}AC\cdot BD=2OD\cdot OA=28$. ①
$\because$ 菱形的边长为 6,
$\therefore OD^2+OA^2=36$. ②
由①②两式可得:$(OD+OA)^2=OD^2+OA^2+2OD\cdot OA=36+28=64$,
$\therefore OD+OA=8$.
$\therefore 2(OD+OA)=16$,即该菱形的两条对角线的长度之和为 16.
6. A
7. A　8. D
9. 45°或 105°　**点拨**:本题考查了菱形和等腰三角形的性质及分类讨论思想,解题的关键是能够根据题意正确地画出符合题意的图形,求出相关的角度. 顶角为 120°的等腰三角形 BDE(BD 为底边),点 E 可能在$\triangle ABD$内,也可能在$\triangle CBD$内,所以要分情况讨论. 此题易因考虑不全面而出错.

10. **证明**:(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
$\therefore AB=AD,AD\parallel BC$.
$\therefore \angle BPA=\angle DAE$.
$\because \angle ABC=\angle AED$,
$\therefore \angle BAF=\angle ADE$.
$\because \angle ABF=\angle BPF,\angle BPA=\angle DAE$,
$\therefore \angle ABF=\angle DAE$.
$\because AB=DA$,
$\therefore \triangle ABF\cong\triangle DAE(\text{ASA})$.
(2) $\because \triangle ABF\cong\triangle DAE$,
$\therefore BF=AE,AF=DE$.
$\because AF=AE+EF=BF+EF$,
$\therefore DE=BF+EF$.

11. **证明**:(1) $\because CF\parallel BD$,
$\therefore \angle ODE=\angle FCE$.
$\because E$ 是 CD 的中点,
$\therefore DE=CE$.
在$\triangle ODE$和$\triangle FCE$中,
$\begin{cases}\angle ODE=\angle FCE,\\ DE=CE,\\ \angle DEO=\angle CEF,\end{cases}$
$\therefore \triangle ODE\cong\triangle FCE(\text{ASA})$.
(2) $\because \triangle ODE\cong\triangle FCE$,
$\therefore OD=CF$.
$\because CF\parallel BD$,
$\therefore$ 四边形 $OCFD$ 是平行四边形.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
$\therefore AC\perp BD$.
$\therefore \angle COD=90°$.
$\therefore$ 四边形 $OCFD$ 是矩形.

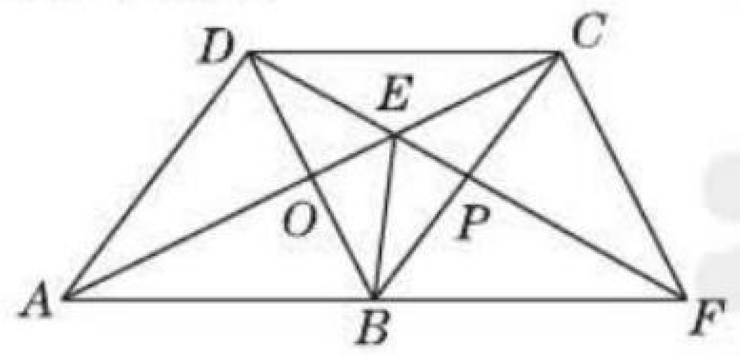
12. (1) **证明**:如图,连接 AC.
$\because BD$ 是菱形 $ABCD$ 的对角线,
$\therefore$ 线段 BD 所在直线是线段 AC 的垂直平分线.
$\because E$ 是线段 BD 上一点,
$\therefore AE=EC$.



(第 12 题)

(2) **解**:点 F 是线段 BC 的中点.
理由如下:
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
$\therefore AB=BC$.
又$\because \angle ABC=60°$,
$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,
$\therefore \angle BAC=60°$,
$\because AE=EC,\therefore \angle EAC=\angle ACE$.
$\because \angle CEF=60°,\therefore \angle EAC=30°$,
$\therefore \angle BAE=\angle EAC=30°$.
$\therefore AF$ 是$\triangle ABC$的角平分线,
$\therefore BF=CF$.
即点 F 是线段 BC 的中点.

13. (1) **证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,
$\therefore AB\parallel CD,DC=BC,\angle DCE=\angle BCE$. 又$\because CE=CE$,
$\therefore \triangle DCE\cong\triangle BCE(\text{SAS})$.
$\therefore \angle EBC=\angle EDC$.
又$\because AB\parallel CD,\therefore \angle AFD=\angle EDC$.
$\therefore \angle AFD=\angle EBC$.
(2) **解**:如图,设 DF 交 BC 于点 P,AC 交 BD 于点 O.



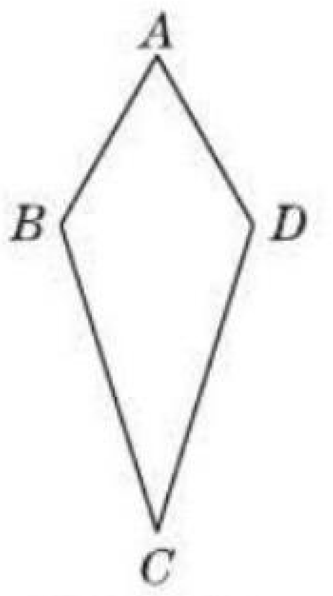
(第 13 题)

$\because E$ 为$\triangle BCD$的重心,
$\therefore P$ 为 BC 的中点. $\therefore BP=CP$.
又$\because \angle CDP=\angle BFP$,
$\angle CPD=\angle BPF$,
$\therefore \triangle CDP\cong\triangle BFP(\text{AAS})$.
$\therefore DP=FP$.
$\therefore$ 四边形 $BFCD$ 是平行四边形.
$\therefore FC\parallel BD$.
$\therefore \angle AOB=\angle ACF$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,
$\therefore AC\perp BD$. $\therefore \angle AOB=90°$.
$\therefore \angle ACF=\angle AOB=90°$.

第 4 课时　菱形的判定

1. $OA=OC$(答案不唯一)　2. C
3. A　4. C　5. C　6. C　7. C　8. B
9. **错解**:①②③⑤

诊断：②是最容易出错的，两组邻边分别相等的四边形不一定是菱形，如图，$AB = AD$，$BC = CD$，但四边形$ABCD$不是菱形. 判定菱形时，要区分是在四边形还是平行四边形的基础上进行判定的，要注意两者的区别与联系.



（第9题）

正解：①③⑤

10. 解：(1)四边形$ABCD$为菱形. 理由如下：
由作法得$AB = AD = CB = CD = 5$，
$\therefore$ 四边形$ABCD$为菱形.
(2)$\because$ 四边形$ABCD$为菱形，
$\therefore OA = OC = 4, OB = OD, AC \perp BD$.
在$Rt\triangle AOB$中，$OB = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$，
$\therefore BD = 2OB = 6$.

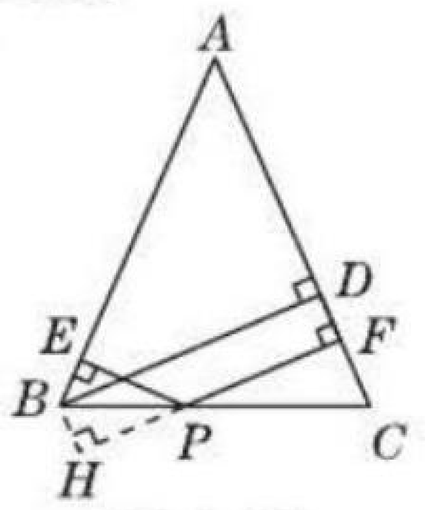
11. (1)**证明**：$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，
$\therefore \angle B = \angle D = 90°, AB = CD, AD = BC, AD // BC$.
在$Rt\triangle ABE$和$Rt\triangle CDF$中，
$\begin{cases} AE = CF, \\ AB = CD, \end{cases}$
$\therefore Rt\triangle ABE \cong Rt\triangle CDF(HL)$.
(2)**解**：当$AC \perp EF$时，四边形$AECF$是菱形. 理由如下：
$\because \triangle ABE \cong \triangle CDF$，
$\therefore BE = DF$.
$\because BC = AD$，
$\therefore CE = AF$.
$\because CE // AF$，
$\therefore$ 四边形$AECF$是平行四边形.
又$\because AC \perp EF$，
$\therefore$ 四边形$AECF$是菱形.

12. (1)**证明**：$\because AB // DE$，
$\therefore \angle A = \angle D$.
$\because AF = CD$，
$\therefore AF + FC = CD + FC$.
即$AC = DF$.
又$AB = DE$，$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF(SAS)$.
(2)**解**：$AF = \frac{7}{5}$.

13. (1)**证明**：$\because AB // CD$，
$\therefore \angle OAB = \angle DCA$.
$\because AC$平分$\angle BAD$，
$\therefore \angle OAB = \angle DAC$.
$\therefore \angle DCA = \angle DAC$.
$\therefore CD = AD = AB$.
$\because AB // CD$，
$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.
$\because AD = AB$，
$\therefore$ 四边形$ABCD$是菱形.
(2)**解**：$\because$ 四边形$ABCD$是菱形，
$\therefore OA = OC, BD \perp AC$.
$\because CE \perp AB$，
$\therefore OE = OA = OC$.
$\because BD = 2$，
$\therefore OB = \frac{1}{2}BD = 1$.
在$Rt\triangle AOB$中，$AB = \sqrt{5}, OB = 1$，
$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = 2$.
$\therefore OE = OA = 2$.

第5课时　矩形的性质与判定的六种应用

1. (1)**证明**：如图，作$BH \perp FP$交FP的延长线于点H.
$\because BD \perp AC, PF \perp AC, BH \perp PF$，
$\therefore$ 四边形$BDFH$是矩形.



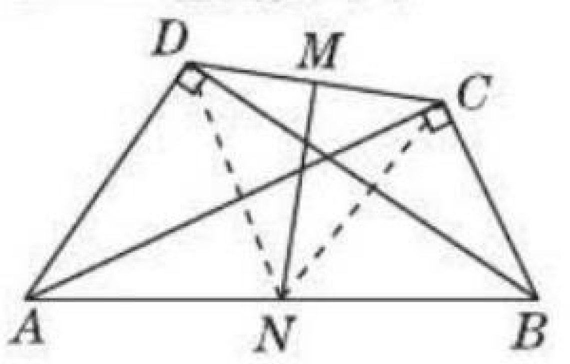
（第1题）

$\therefore BD = HF$.
$\because AB = AC$，
$\therefore \angle ABC = \angle C$.
$\because PE \perp AB, PF \perp AC$，
$\therefore \angle PEB = \angle PFC = 90°$.
$\therefore \angle EPB = \angle FPC$.
又$\because \angle HPB = \angle FPC$，
$\therefore \angle EPB = \angle HPB$.
$\because PE \perp AB, PH \perp BH$，
$\therefore \angle PEB = \angle PHB = 90°$.
又$\because PB = PB$，
$\therefore \triangle PEB \cong \triangle PHB$. $\therefore PE = PH$.
$\therefore BD = HF = PF + PH = PF + PE$，
即$BD = PE + PF$.
(2)**解**：不成立.
理由如下：作$BH \perp PF$交PF的延长线于点H. 与(1)同理可得$PE = PH$，$BD = HF$.
$\therefore PE = PH = HF + PF = BD + PF$.
点拨：先作辅助线构造矩形$BDFH$得出$BD = HF$，再证$\triangle PEB \cong \triangle PHB$得出$PE = PH$，从而得出$BD, PE, PF$之间的关系.

2. (1)**证明**：$\because$ 四边形$ABCD$为平行四边形，
$\therefore AB // DC$.
$\therefore \angle ABE = \angle ECF$.
$\because$ 点E为BC的中点，$\therefore BE = CE$.
又$\because \angle AEB = \angle FEC$，
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FCE$. $\therefore AB = CF$，$AE = EF$.
又$\because AB // CF$，
$\therefore$ 四边形$ABFC$为平行四边形.
$\because \angle AEC$为$\triangle ABE$的外角，
$\therefore \angle AEC = \angle ABC + \angle EAB$.
又$\because \angle AEC = 2\angle ABC$，
$\therefore \angle ABC = \angle EAB$. $\therefore AE = BE$.
$\therefore AE + EF = BE + CE$，即$AF = BC$.
$\therefore$ 四边形$ABFC$为矩形.
(2)**解**：$\because$ 四边形$ABFC$是矩形，
$\therefore AC \perp DF$.
又$\because \triangle AFD$是等边三角形，且边长为4，
$\therefore AF = DF = 4, CF = CD = \frac{DF}{2} = 2$.
$\therefore AC = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.
$\therefore S_{矩形ABFC} = 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}$.
点拨：先判定四边形$ABFC$是平行四边形，再推出$AF = BC$，即可根据对角线相等的平行四边形是矩形判定四边形$ABFC$是矩形.

3. (1)**证明**：$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，
$\therefore AB // DC, AD // BC$.
$\therefore \angle ABD = \angle CDB$.
$\because BE$平分$\angle ABD$，DF平分$\angle CDB$，
$\therefore \angle EBD = \frac{1}{2}\angle ABD$，$\angle FDB = \frac{1}{2}\angle CDB$.
$\therefore \angle EBD = \angle FDB$.
$\therefore BE // DF$. 又$\because AD // BC$，
$\therefore$ 四边形$BEDF$是平行四边形.
(2)**解**：当$\angle ABE = 30°$时，四边形$BEDF$是菱形.
理由如下：$\because BE$平分$\angle ABD$，
$\therefore \angle ABD = 2\angle ABE = 60°$，$\angle EBD = \angle ABE = 30°$.
$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，
$\therefore \angle A = 90°$.
$\therefore \angle EDB = 90° - \angle ABD = 30°$.
$\therefore \angle EDB = \angle EBD = 30°$. $\therefore EB = ED$.
又$\because$ 四边形$BEDF$是平行四边形，
$\therefore$ 四边形$BEDF$是菱形.

4. 解：$MN \perp CD$. 理由如下：



（第4题）

如图，连接ND, NC.
在$Rt\triangle ABD$中，
$\angle ADB = 90°$，N是AB的中点，
$\therefore ND = \frac{1}{2}AB$. 同理可证$NC = \frac{1}{2}AB$.
$\therefore ND = NC$. $\therefore \triangle NDC$是等腰三角形.
$\because M$是CD的中点，$\therefore MN \perp CD$.
点拨：本题利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半这一性质得到$DN = CN$，再根据等腰三角形底边上的中线与高互相重合得到$MN \perp CD$.

5. (1)**证明**：由折叠的性质，知$\triangle BDC \cong \triangle BDE$，
$\therefore \angle DBC = \angle DBE$.
又$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，
$\therefore AD // BC$. $\therefore \angle DBC = \angle FDB$.
$\therefore \angle DBE = \angle FDB$. $\therefore DF = BF$.
$\therefore \triangle BDF$是等腰三角形.
(2)**解**：①四边形$BFDG$是菱形. 理由如下：
$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，
$\therefore FD // BG$. 又$\because DG // BE$，
$\therefore$ 四边形$BFDG$是平行四边形.
又$\because DF = BF$，
$\therefore$ 四边形$BFDG$是菱形.
②$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，
$\therefore \angle A = 90°$.
$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
$\because$ 四边形$BFDG$是菱形，
$\therefore GF \perp BD, FG = 2OF$，
$OB = \frac{1}{2}BD = 5$.
设$DF = BF = x$，则$AF = AD - DF = 8 - x$，
在$Rt\triangle ABF$中，$AB^2 + AF^2 = BF^2$，
即$6^2 + (8 - x)^2 = x^2$，解得$x = \frac{25}{4}$.
$\therefore BF = \frac{25}{4}$.

在 Rt△FOB 中，$FO=\sqrt{BF^2-OB^2}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2-5^2}=\frac{15}{4}$,

∴ $FG=2FO=\frac{15}{2}$.

6. (1)**证明**：连接 BP，作 $CH\perp BD$ 于点 H.

在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BCD=90°$，$BC=4$，$CD=AB=3$，

∴ $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

由 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD=\frac{1}{2}BD\cdot CH$，

得 $CH=\frac{BC\cdot CD}{BD}=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$.

∵ $S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PBC}=S_{\triangle BCE}$，

∴ $\frac{1}{2}BE\cdot PR+\frac{1}{2}BC\cdot PQ=\frac{1}{2}BE\cdot\frac{12}{5}$.

又∵ $BE=BC$，

∴ $PR+PQ=\frac{12}{5}$.

(2)**解**：(1)中的结论 $PR+PQ=\frac{12}{5}$ 仍成立. 证明：连接 BP，作 $CH\perp BD$ 于点 H.

∵ $S_{\triangle PBE}+S_{\triangle PBC}=S_{\triangle BCE}$，

∴ $\frac{1}{2}BE\cdot PR+\frac{1}{2}BC\cdot PQ=\frac{1}{2}BE\cdot CH$.

又∵ $BE=BC$，

∴ $PR+PQ=CH$. 而 $CH=\frac{12}{5}$，

∴ $PR+PQ=\frac{12}{5}$.

∴ (1)中的结论仍成立.

(3)**解**：猜想：$PR-PQ=\frac{12}{5}$.

点拨：本题根据三角形的面积之间的数量关系求证 PR 与 PQ 之间的数量关系.

第 6 课时　菱形的性质与判定的四种应用

1. **证明**：(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$，$AD/\!/BC$，

∴ $\angle ADB=\angle DBC$.

∵ $CQ/\!/DB$，

∴ $\angle BCQ=\angle DBC$，

∴ $\angle ADB=\angle BCQ$.

∵ $DP=CQ$，

∴ $\triangle APD\cong\triangle BQC$(SAS).

(2)∵ $CQ/\!/DB$，且 $CQ=DP$，

∴ 四边形 $CQPD$ 是平行四边形，

∴ $CD=PQ$，$CD/\!/PQ$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$AB/\!/CD$，

∴ $AB=PQ$，$AB/\!/PQ$.

∴ 四边形 $ABQP$ 是平行四边形.

∵ $\triangle APD\cong\triangle BQC$，

∴ $\angle APD=\angle BQC$.

∵ $\angle APD+\angle APB=180°$，$\angle ABP+\angle BQC=180°$，

∴ $\angle ABP=\angle APB$，

∴ $AB=AP$.

∴ 四边形 $ABQP$ 是菱形.

点拨：先证明四边形 $ABQP$ 是平行四边形，再根据一组邻边相等($AB=AP$)的平行四边形是菱形证明四边形 $ABQP$ 是菱形.

2. (1)**证明**：由作图过程可知，$AB=AF$，AE 平分 $\angle BAD$.

∴ $\angle BAE=\angle EAF$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $BC/\!/AD$. ∴ $\angle AEB=\angle EAF$.

∴ $\angle BAE=\angle AEB$. ∴ $BE=AB$.

∴ $BE=AF$. ∵ $AF/\!/BE$，

∴ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形.

∵ $AB=BE$，∴ 四边形 $ABEF$ 是菱形.

(2)**解**：如图，连接 BF，交 AE 于 G，

∵ 菱形 $ABEF$ 的周长为16，$AE=4\sqrt{3}$，

∴ $AB=BE=EF=AF=4$，$AG=\frac{1}{2}AE=2\sqrt{3}$，$AE\perp BF$.

在 Rt△ABG 中，$AB^2=AG^2+BG^2$，

∴ $4^2=(2\sqrt{3})^2+BG^2$. ∴ $BG=2$.

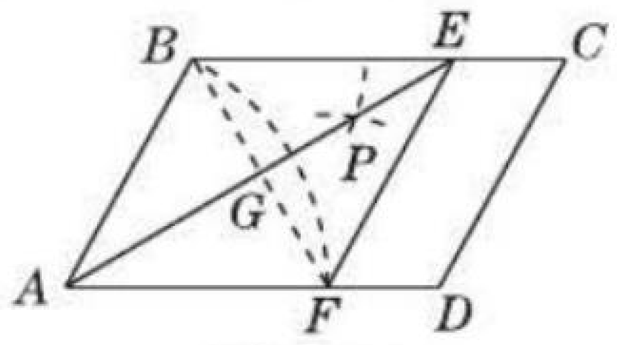
∴ $BF=2BG=4$. ∴ $AB=AF=BF=4$.

∴ △ABF 为等边三角形.

∴ $\angle BAF=60°$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $\angle C=\angle BAF=60°$.



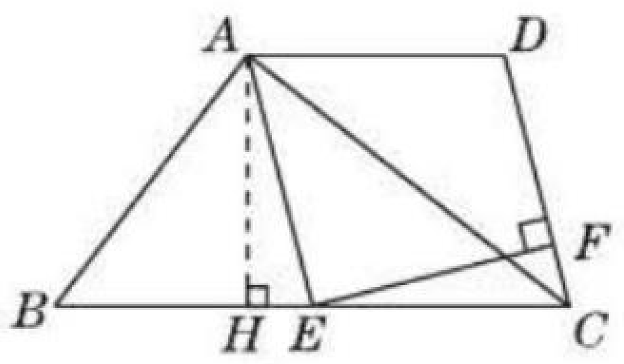
(第 2 题)

3. (1)**证明**：∵ $AD/\!/BC$，$AE/\!/DC$，

∴ 四边形 $AECD$ 是平行四边形.

∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，E 是 BC 的中点，

∴ $BE=EC=AE$，∴ 四边形 $AECD$ 是菱形.



(第 3 题)

(2)**解**：如图，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，在Rt△ABC 中，

$\angle BAC=90°$，$AB=6$，$BC=10$，由勾股定理得 $AC=8$.

根据面积关系，有 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}AB\cdot AC$，

∴ $AH=\frac{24}{5}$.

∵ 点 E 是 BC 的中点，$BC=10$，四边形 $AECD$ 是菱形，

∴ $CD=CE=5$.

∵ $S_{菱形AECD}=CD\cdot EF=CE\cdot AH$，

∴ $EF=AH=\frac{24}{5}$.

点拨：(1)根据平行四边形和菱形的判定证明即可；(2)利用面积公式可求出 EF 的长.

4. (1)**证明**：连接 BD.

∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $AB=AD$，$\angle BDF=\frac{1}{2}\angle ADF$.

又∵ $\angle DAB=60°$，

∴ $\angle BDF=\frac{1}{2}\times(180°-60°)=60°$，

△ABD 是等边三角形，

∴ $\angle ABD=60°$，$AB=DB$.

又∵ $AE+CF=m$，$CF+DF=m$，

∴ $AE=DF$.

在△ABE 和△DBF 中，

$\begin{cases}AB=DB,\\ \angle A=\angle BDF=60°,\\ AE=DF,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle DBF$(SAS)，

∴ $BE=BF$，$\angle ABE=\angle DBF$.

又∵ $\angle ABE+\angle EBD=\angle ABD=60°$，

∴ $\angle EBF=\angle DBF+\angle EBD=\angle ABD=60°$，

∴ △BEF 是等边三角形.

(2)**解**：由(1)知，△BEF 是等边三角形，其边长最小时，面积最小，即当 $BE\perp AD$ 时，△BEF 的面积最小.

此时 $BE=\sqrt{m^2-\left(\frac{1}{2}m\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}m$，

△BEF 的边 BE 上的高为 $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}m\right)^2}=\frac{3}{4}m$，

∴ △BEF 面积的最小值为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m\cdot\frac{3}{4}m=\frac{3\sqrt{3}}{16}m^2$.

点拨：作辅助线构造等边三角形和全等三角形，结合菱形的性质和等边三角形的性质求解.

第 7 课时　正方形及其性质

1. A　**2.** B

3. B　**点拨**：根据折叠的性质可得 $DH=EH$. 在Rt△CEH中，若设 $CH=x$，则 $EH=DH=9-x$，易得 $EC=3$，根据勾股定理列出方程，从而得出 CH 的长.

4. 12

5. C　**点拨**：根据正方形的性质，利用 SAS 即可证明△$ABE\cong$△BCF，再根据全等三角形的性质可得 $\angle BFC=\angle AEB$，又易得 $\angle DAE=\angle AEB$，$\angle BFC=\angle ABF$，从而求解.

6. C　**点拨**：连接 AE，由题易知 $AB=AD=AF$，$\angle D=\angle B=\angle AFG=\angle AFE=90°$，$GF=BG=GC=3$，在 Rt△$AEF$ 和 Rt△AED 中，

$\begin{cases}AE=AE,\\ AF=AD,\end{cases}$ ∴ Rt△$AFE\cong$Rt△ADE，

∴ $FE=DE$. 设 $DE=FE=x$，

则 $EG=3+x$，$EC=6-x$.

在 Rt△ECG 中，根据勾股定理，得 $(6-x)^2+9=(x+3)^2$，解得 $x=2$，则 $DE=2$.

7. C

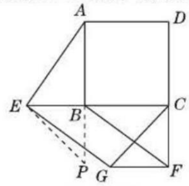
8. $\sqrt{17}$　**点拨**：在 AD 上取一点 M，使得 $AM=2$，易知点 F，M 关于直线 AC 对称. 连接 EM，交 AC 于点 P'，连接$P'F$，

易得 $P'F+P'E$ 的值为 $PF+PE$ 的最小值,即 EM 的长为 $PF+PE$ 的最小值. 过点 M 作 $MN\perp BC$ 于 N,由题意可知 $EN=BN-BE=AM-BE=2-1=1$, $MN=4$,所以 $EM=\sqrt{EN^2+MN^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.
此类问题容易出错的地方是不能将两条线段的和转化为一条线段.

9. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
∴ $AB=BC=CD$,
$\angle ABC=\angle DCB=90°$.
∵ $\triangle EBC$ 是等边三角形,
∴ $EB=BC=EC$, $\angle EBC=\angle ECB=\angle BEC=60°$.
∴ $\angle EBA=\angle ECD=30°$.
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 中,
$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle EBA=\angle ECD,\\ EB=EC.\end{cases}$
∴ $\triangle ABE\cong\triangle DCE$(SAS).
(2)**解**:由(1)可知, $AB=BE$,
$\angle ABE=30°$.
∴ $\angle BAE=\angle BEA=75°$.
同理 $\angle CDE=\angle CED=75°$.
∴ $\angle AED=360°-75°-75°-60°=150°$.
点拨:(1)利用正方形和等边三角形的性质,可以得到三角形全等的条件;(2)利用三角形的内角和及周角的定义即可求解.

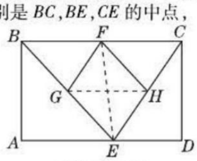
10. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
∴ $AB=AD$, $\angle ABC=\angle ADC=\angle ADF=90°$.
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADF$ 中,
$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABE=\angle ADF,\\ BE=DF,\end{cases}$
∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADF$(SAS).
(2)**解**:∵ $\triangle ABE\cong\triangle ADF$,
∴ $AE=AF$, $\angle BAE=\angle DAF$.
∵ $\angle BAE+\angle EAD=90°$,
∴ $\angle DAF+\angle EAD=90°$,即 $\angle EAF=90°$,
∴ $EF=\sqrt{AE^2+AF^2}=5\sqrt{2}$.

11. **证明**:(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
∴ $AB=BC$, $\angle ABC=\angle BCD=90°$,
∴ $\angle ABE=\angle BCF=90°$.
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中,
$\begin{cases}AB=BC,\\ \angle ABE=\angle BCF,\\ BE=CF,\end{cases}$
∴ $\triangle ABE\cong\triangle BCF$(SAS),
∴ $AE=BF$, $\angle BAE=\angle CBF$.
∵ $EG\parallel BF$,
∴ $\angle CBF=\angle CEG$.
∵ $\angle BAE+\angle BEA=90°$,
∴ $\angle CEG+\angle BEA=90°$,
∴ $AE\perp EG$, ∴ $AE\perp BF$.
(2)延长 AB 至点 P,使 $BP=BE$,连接 EP,如图所示.
则 $AP=CE$, $\angle EBP=90°$,
∴ $\angle P=45°$.
∵ CG 为正方形 $ABCD$ 外角的平分线,
∴ $\angle ECG=45°$,
∴ $\angle P=\angle ECG$.
由(1)得 $\angle BAE=\angle CEG$,
在 $\triangle APE$ 和 $\triangle ECG$ 中,
$\begin{cases}\angle P=\angle ECG,\\ AP=CE,\\ \angle PAE=\angle CEG,\end{cases}$
∴ $\triangle APE\cong\triangle ECG$(ASA),
∴ $AE=EG$.
∵ $AE=BF$,
∴ $EG=BF$,
∵ $EG\parallel BF$,
∴ 四边形 $BEGF$ 是平行四边形.



(第 11 题)

12. (1)**证明**:如图,连接 EF. ∵ 点 F,G,H 分别是 BC,BE,CE 的中点,

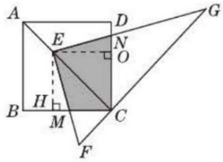


(第 12 题)

∴ $BF=CF$, $FH\parallel BE$, $FH=\frac{1}{2}BE=BG$.
∴ $\angle CFH=\angle CBG$.
∴ $\triangle BGF\cong\triangle FHC$.
(2)**解**:当四边形 $EGFH$ 是正方形时,连接 GH,如图,可得 $EF\perp GH$ 且 $EF=GH$.
在 $\triangle BEC$ 中,点 G,H 分别是 BE,CE 的中点,
∴ $GH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}a$,
且 $GH\parallel BC$,
∴ $EF\perp BC$.
∵ $AD\parallel BC$, $AB\perp BC$,
∴ $AB=EF=GH=\frac{1}{2}a$.
∴ 矩形 $ABCD$ 的面积 $=AB\cdot AD=\frac{1}{2}a\cdot a=\frac{1}{2}a^2$.

第 8 课时 正方形的判定

1. $5\sqrt{2}$ cm **点拨**:连接 AC.
因为菱形 $ABCD$ 的面积为 120 cm^2,
$BD=24$ cm, ∴ $AC=\frac{2\times120}{24}=10$(cm).
∴ 正方形 $AECF$ 的边长为 $\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+\left(\frac{10}{2}\right)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$(cm).
2. B
3. D **点拨**:如图,过点 E 作 $EO\perp CD$ 于点 O, $EH\perp BC$ 于点 H,显然四边形 $EHCO$ 为正方形,
∴ $EH=EO$, $\angle HEO=90°$.
∵ $\angle GEF=\angle HEO=90°$,
∴ $\angle OEN=\angle MEH$.



(第 3 题)

又∵ $\angle EHM=\angle EON=90°$,
∴ $\triangle EHM\cong\triangle EON$.
∴ $S_{\triangle EHM}=S_{\triangle EON}$.
∴ $S_{四边形EMCN}=S_{正方形EHCO}$.
∵ $AB=BC=a$, $\angle B=90°$,
∴ $AC=\sqrt{2}a$. ∵ $EC=2AE$,
∴ $\frac{EC}{AC}=\frac{2}{3}$. ∴ $EC=\frac{2}{3}\times\sqrt{2}a=\frac{2\sqrt{2}}{3}a$.
∴ $S_{正方形EHCO}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}a\times\frac{2\sqrt{2}}{3}a=\frac{4}{9}a^2$.
∴ 阴影部分即四边形 $EMCN$ 的面积为 $\frac{4}{9}a^2$. 故选 D.
4. B 5. A 6. B 7. B 8. ①②③
9. C **点拨**:本题易记混特殊四边形的判定方法而致错.
10. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
∴ $AB=BC=CD=DA$, $\angle B=\angle D$.
∵ 点 E,F 分别为 AB,AD 的中点,
∴ $BE=\frac{1}{2}AB$, $DF=\frac{1}{2}AD$.
∴ $BE=DF$.
在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCF$ 中,
$\begin{cases}BC=DC,\\ \angle B=\angle D,\\ BE=DF,\end{cases}$
∴ $\triangle BCE\cong\triangle DCF$(SAS).
(2)**解**: $AB\perp BC$,理由如下:
∵ 点 E,O,F 分别为 AB,AC,AD 的中点,
∴ $OE\parallel BC$, $OE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=AF$, $OF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=AE$.
∴ $OE=OF=AF=AE$.
∴ 四边形 $AEOF$ 是菱形.
∵ $AB\perp BC$, $OE\parallel BC$,
∴ $AE\perp OE$.
∴ 四边形 $AEOF$ 是正方形.
11. **证明**:(1)∵ $DE\perp AB$, $DF\perp AC$,
∴ $\angle BED=\angle CFD=90°$.
∵ $AB=AC$, ∴ $\angle B=\angle C$.
∵ D 是 BC 的中点, ∴ $BD=CD$.
∴ $\triangle BED\cong\triangle CFD$.
(2)∵ $DE\perp AB$, $DF\perp AC$,
∴ $\angle AED=\angle AFD=90°$.
又∵ $\angle A=90°$,
∴ 四边形 $DFAE$ 为矩形.
由(1)知, $\triangle BED\cong\triangle CFD$,
∴ $DE=DF$.
∴ 四边形 $DFAE$ 是正方形.

12. (1)**证明**：$\because AF /\!/ BC$，

$\therefore \angle EAF = \angle EDB$.

$\because E$ 是 AD 的中点，$\therefore AE = DE$.

又$\because \angle AEF = \angle DEB$，

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB$(ASA).

$\therefore AF = DB$.

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90°$，AD 是中线，

$\therefore AD = BD = DC = \frac{1}{2}BC$.

$\therefore AD = AF$.

(2)**解**：当 $AB = AC$ 时，四边形 $ADCF$ 是正方形. 证明如下：

由(1)可知，$AD = AF = DC$，

$\because AF /\!/ BC$，

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

$\because AB = AC$，AD 是中线，

$\therefore AD \perp BC$. $\therefore \angle ADC = 90°$.

又$\because AD = AF$，

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是正方形.

13. (1)**证明**：如图，连接 CD.

$\because O$ 是 EF 的中点，

$\therefore OE = OF$.

又$\because OD = OG$，

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 为平行四边形.

$\because AC = BC$，D 为 AB 的中点，$\angle ACB = 90°$，

$\therefore AD = DC$，$\angle A = \angle FCD = 45°$，$CD \perp AB$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CFD$ 中，$AE = CF$，$\angle A = \angle FCD$，$AD = CD$，

$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFD$.

$\therefore DE = DF$，$\angle ADE = \angle CDF$.

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 为菱形.

$\because CD \perp AD$，

$\therefore \angle ADE + \angle EDC = 90°$.

$\therefore \angle EDC + \angle CDF = 90°$，即$\angle EDF = 90°$.

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 为正方形.

(2)**解**：$\because$ 四边形 $EDFG$ 为正方形，

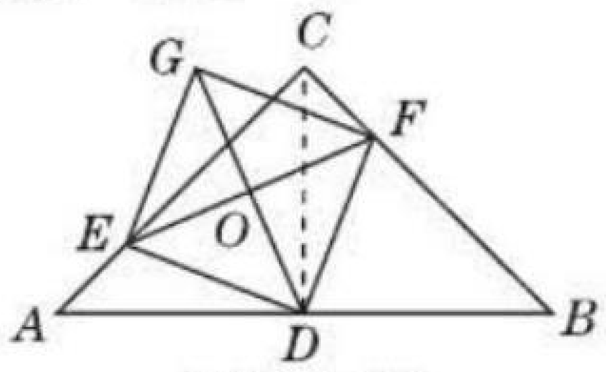
$\therefore$ 当正方形 $EDFG$ 的边长 DE 最短时，其面积最小.

$\because$ 垂线段最短，$\therefore$ 当 $DE \perp AC$ 时，四边形 $EDFG$ 的面积最小.

$\because AD = DC$，$DE \perp AC$，$CD \perp AB$，

$\therefore AE = EC$，$DE = \frac{1}{2}AC = 2$.

$\therefore$ 当 E 为 AC 的中点时，四边形$EDFG$ 的面积最小，四边形 $EDFG$ 的面积的最小值 $= 2 \times 2 = 4$.



(第 13 题)

第 9 课时　正方形的性质与判定的综合应用

1. **证明**：$\because AC$，BD 是正方形 $ABCD$ 的两条对角线，

$\therefore AC \perp BD$，$OA = OD = OC = OB$.

$\therefore \angle AOE = \angle DOF = 90°$.

$\because DE = CF$，$\therefore OE = OF$.

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle DOF$.

$\therefore \angle OAE = \angle ODF$. $\because \angle DOF = 90°$，

$\therefore \angle DFO + \angle FDO = 90°$.

$\therefore \angle DFO + \angle FAE = 90°$.

$\therefore \angle AMF = 90°$，即 $AM \perp DF$.

2. **解**：(1)仍有 $BM + DN = MN$ 成立. 证明如下：过点 A 作 $AE \perp AN$，交 CB 的延长线于点 E，易证$\triangle ABE \cong \triangle ADN$，

$\therefore DN = BE$，$AE = AN$.

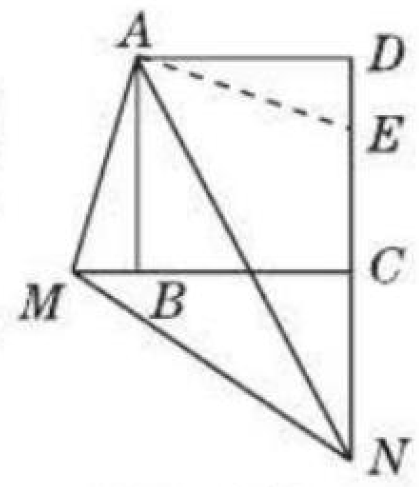
又$\because \angle EAM = \angle NAM = 45°$，$AM = AM$，

$\therefore \triangle EAM \cong \triangle NAM$. $\therefore ME = MN$.

$\because ME = BE + BM = DN + BM$，

$\therefore BM + DN = MN$.

(2) $DN - BM = MN$. 理由如下：如图，在 DN 上截取 $DE = BM$，连接 AE.



(第 2 题)

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle ABM = \angle D = \angle BAD = 90°$，$AB = AD$.

又$\because BM = DE$，

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADE$.

$\therefore AM = AE$，$\angle BAM = \angle DAE$.

$\because \angle DAB = 90°$，$\therefore \angle MAE = 90°$.

$\because \angle MAN = 45°$，

$\therefore \angle EAN = 45° = \angle MAN$.

又$\because AM = AE$，$AN = AN$，

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AEN$. $\therefore MN = EN$.

$\therefore DN = DE + EN = BM + MN$.

$\therefore DN - BM = MN$.

3. (1)**证明**：由题意知 $AB = AD$，$\angle BAD = 90°$.

$\because AF \perp AC$，$\therefore \angle EAF = 90°$，

$\therefore \angle BAF = \angle EAD$.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle ABF$ 中，

$\begin{cases} AD = AB, \\ \angle DAE = \angle BAF, \\ AE = AF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABF$(SAS)，

$\therefore BF = DE$.

(2)**解**：当点 E 运动到 AC 的中点时，四边形 $AFBE$ 是正方形.

理由：$\because E$ 为 AC 的中点，$\therefore BE = AE = \frac{1}{2}AC$，$BE \perp AC$.

$\therefore \angle BEC = 90°$.

$\therefore \angle FAE = \angle BEC$，

$\therefore BE /\!/ AF$.

$\because AF = AE$，

$\therefore BE = AF$，

$\therefore$ 四边形 $AFBE$ 为平行四边形.

$\because \angle FAE = 90°$，$AF = AE$，

$\therefore$ 平行四边形 $AFBE$ 是正方形.

4. (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$，$AB = BC = CD = DA$. 又$\because AP = BQ = CR = DS$，$\therefore PB = QC = RD = SA$. $\therefore \triangle ASP \cong \triangle BPQ \cong \triangle CQR \cong \triangle DRS$. $\therefore PS = QP = RQ = SR$，$\angle ASP = \angle BPQ$. $\therefore$ 四边形 $PQRS$ 是菱形. 又$\because \angle APS + \angle ASP = 90°$，$\therefore \angle APS + \angle BPQ = 90°$. $\therefore \angle QPS = 180° - (\angle APS + \angle BPQ) = 180° - 90° = 90°$. $\therefore$ 四边形 $PQRS$ 是正方形. 即不管滚动多长时间，连接四个小球所得的四边形 $PQRS$ 总是正方形.

(2)**解**：当 P，Q，R，S 在出发时或在到达终点时面积最大，此时的面积等于正方形 $ABCD$ 的面积.

(3)**解**：当 P，Q，R，S 四个小球滚动到正方形 $ABCD$ 四边中点时，四边形 $PQRS$ 的面积为正方形 $ABCD$ 面积的一半.

阶段核心归类专训

1. **证明**：$\because O$ 是 AC 的中点，$EF \perp AC$，

$\therefore AF = CF$，$AE = CE$，$AO = CO$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AD /\!/ BC$.

$\therefore \angle AFE = \angle CEF$.

在$\triangle AOF$ 和$\triangle COE$ 中，

$\begin{cases} \angle AFO = \angle CEO, \\ \angle AOF = \angle COE, \\ AO = CO, \end{cases}$

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE$. $\therefore AF = CE$.

$\therefore AF = CF = CE = AE$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

2. (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore BF /\!/ CD$，$AB = CD$，

$\therefore \angle AFG = \angle DCG$.

$\because GA = GD$，$\angle AGF = \angle CGD$，

$\therefore \triangle AGF \cong \triangle DGC$，

$\therefore AF = CD$，$\therefore AB = AF$.

(2)**解**：四边形 $ACDF$ 是矩形.

证明如下：$\because AF = CD$，$AF /\!/ CD$，

$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是平行四边形.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle BAD = \angle BCD = 120°$，

$\therefore \angle FAG = 60°$.

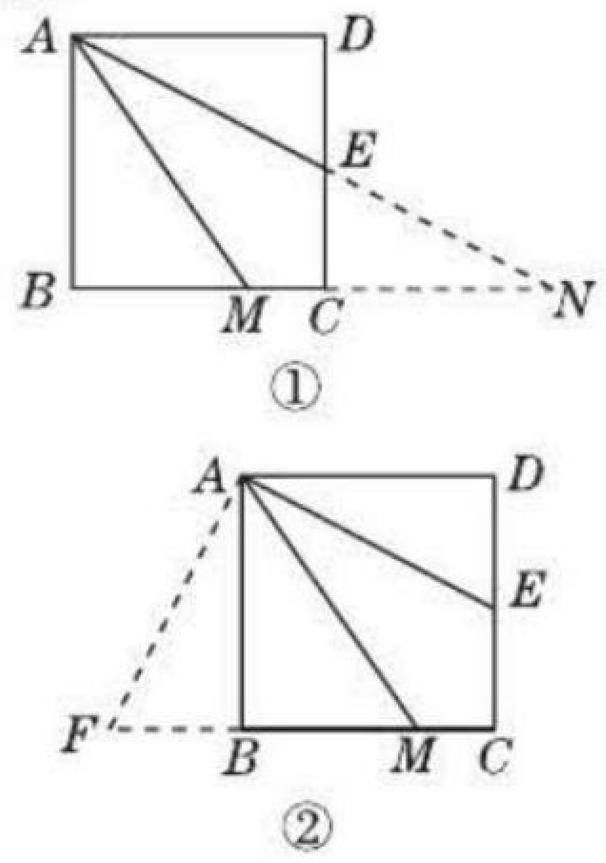
$\because AB = AG = AF$，$\therefore \triangle AGF$ 是等边三角形，$\therefore AG = GF$.

$\because \triangle AGF \cong \triangle DGC$，$\therefore FG = CG$.

$\because AG = GD$，$\therefore AD = CF$.

$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是矩形.

3. (1)**证明**：延长 AE，BC 交于点 N，如图①所示.



(第 3 题)

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，

所以 $AD /\!/ BC$，所以$\angle DAE = \angle ENC$.

因为 AE 平分$\angle DAM$，

所以$\angle DAE = \angle MAE$，

所以$\angle ENC = \angle MAE$，

所以 $AM = MN$.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle NCE$ 中，

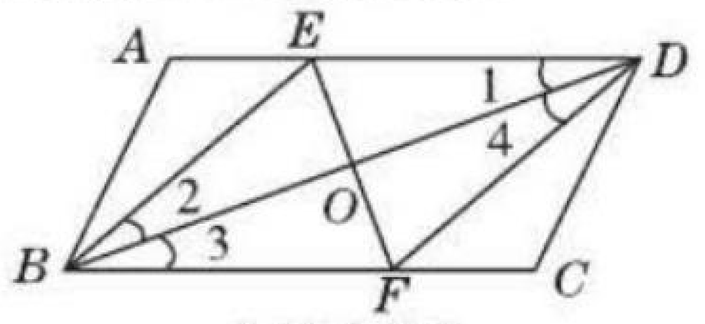
$\begin{cases} \angle DAE = \angle CNE, \\ \angle AED = \angle NEC, \\ DE = CE, \end{cases}$

所以$\triangle ADE \cong \triangle NCE$(AAS)，

所以 $AD = NC$,
所以 $AM = MN = NC + MC = AD + MC$.
(2)**解**:$AM = DE + BM$ 成立.
证明如下:过点 A 作 $AF \perp AE$,交 CB 的延长线于点 F,如图②所示. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,
所以 $\angle BAD = \angle D = \angle ABC = 90°$,$AB = AD$,$AB /\!/ DC$.
因为 $AF \perp AE$,所以 $\angle FAE = 90°$,
所以 $\angle FAB = 90° - \angle BAE = \angle DAE$.
在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ADE$ 中,
$\begin{cases}\angle FAB = \angle EAD,\\ AB = AD,\\ \angle ABF = \angle D = 90°,\end{cases}$
所以 $\triangle ABF \cong \triangle ADE$(ASA),
所以 $BF = DE$,$\angle F = \angle AED$.
因为 $AB /\!/ DC$,所以 $\angle AED = \angle BAE$.
因为 $\angle FAB = \angle EAD = \angle EAM$,
所以 $\angle AED = \angle BAE = \angle BAM + \angle EAM = \angle BAM + \angle FAB = \angle FAM$,
所以 $\angle F = \angle FAM$,所以 $AM = FM$,
所以 $AM = FB + BM = DE + BM$.
(3)**解**:结论 $AM = AD + MC$ 仍然成立;结论 $AM = DE + BM$ 不成立.

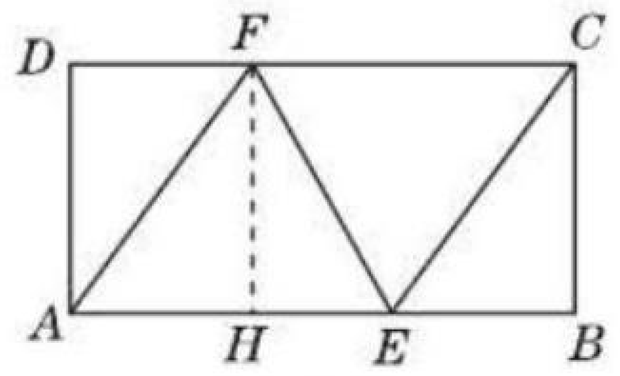
4. (1)**证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
$\therefore AB /\!/ CD$,$AC \perp BD$.
$\because DE \perp BD$,$\therefore DE /\!/ AC$.
$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是平行四边形.
(2)**解**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$AC = 8$,$BD = 6$,
$\therefore AO = 4$,$DO = 3$,$AO \perp DO$.
$\therefore CD = AD = 5$.
$\because$ 四边形 $ACDE$ 是平行四边形,
$\therefore AE = CD = 5$,$DE = AC = 8$.
$\therefore \triangle ADE$ 的周长为 $AD + AE + DE = 5 + 5 + 8 = 18$.

5. **证明**:如图,$\because EF$ 是 BD 的垂直平分线,
$\therefore BE = DE$,$BF = DF$,
$\therefore \angle 1 = \angle 2$,$\angle 3 = \angle 4$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
$\therefore DE /\!/ BF$,$\therefore \angle 1 = \angle 3$,
$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$,
$\therefore BE /\!/ DF$,
$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形,
$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是菱形.



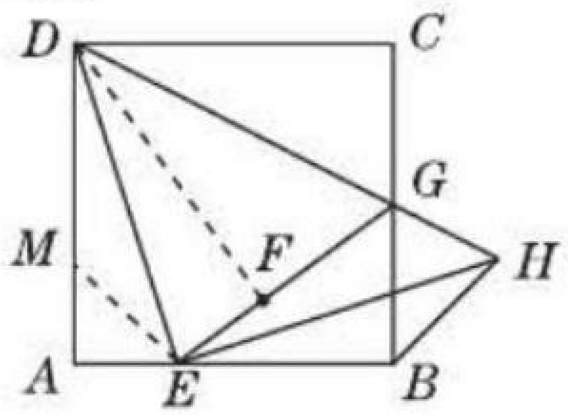
(第 5 题)

6. (1)**证明**:$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中,$AB = 4$,$BC = 2$,
$\therefore CD = AB = 4$,$AD = BC = 2$,$CD /\!/ AB$,$\angle D = \angle B = 90°$.
$\because BE = DF = \dfrac{3}{2}$,
$\therefore CF = AE = 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.
易知 $AF = CE = \sqrt{2^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{2}$,
$\therefore AF = CF = CE = AE = \dfrac{5}{2}$.
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.
(2)**解**:如图,过点 F 作 $FH \perp AB$ 于点 H.
易得四边形 $AHFD$ 是矩形,
$\therefore AH = DF = \dfrac{3}{2}$,$FH = AD = 2$.
$\therefore EH = AE - AH = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = 1$.
$\therefore EF = \sqrt{FH^2 + EH^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.



(第 6 题)

7. (1)**证明**:如图,连接 DF.
$\because A$,F 关于直线 DE 对称,
$\therefore AD = FD$,$AE = FE$.
在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FDE$ 中,
$\begin{cases}AD = FD,\\ AE = FE,\\ DE = DE,\end{cases}$
$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FDE$(SSS).
$\therefore \angle A = \angle DFE$.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
$\therefore \angle A = \angle C = 90°$,$AD = CD$.
$\therefore \angle DFE = \angle A = 90°$.
$\therefore \angle DFG = 180° - \angle DFE = 90°$.
$\because AD = DF$,$AD = CD$,
$\therefore DF = CD$.
在 $Rt\triangle DCG$ 和 $Rt\triangle DFG$ 中,
$\begin{cases}DC = DF,\\ DG = DG,\end{cases}$
$\therefore Rt\triangle DCG \cong Rt\triangle DFG$(HL).
$\therefore GF = GC$.



(第 7 题)

(2)**解**:$BH = \sqrt{2}AE$.
证明如下:如图,在 AD 上取点 M,使得 $AM = AE$,连接 ME.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
$\therefore AD = AB$,$\angle A = \angle ADC = 90°$.
$\because \triangle DAE \cong \triangle DFE$,
$\therefore \angle ADE = \angle FDE$.
同理 $\angle CDG = \angle FDG$.
$\therefore \angle EDG = \angle EDF + \angle GDF = \dfrac{1}{2}\angle ADF + \dfrac{1}{2}\angle CDF = \dfrac{1}{2}\angle ADC = 45°$.
$\because DE \perp EH$,$\therefore \angle DEH = 90°$.
$\therefore \angle EHD = 180° - \angle DEH - \angle EDH = 45°$.
$\therefore \angle EHD = \angle EDH$.
$\therefore DE = EH$.
$\because \angle A = 90°$,
$\therefore \angle ADE + \angle AED = 90°$.
$\because \angle DEH = 90°$,
$\therefore \angle AED + \angle BEH = 90°$.
$\therefore \angle ADE = \angle BEH$.
$\because AD = AB$,$AM = AE$,
$\therefore DM = EB$.
在 $\triangle DME$ 和 $\triangle EBH$ 中,
$\begin{cases}DM = EB,\\ \angle MDE = \angle BEH,\\ DE = EH,\end{cases}$
$\therefore \triangle DME \cong \triangle EBH$(SAS).
$\therefore ME = BH$.
在 $Rt\triangle AME$ 中,$\angle A = 90°$,$AE = AM$,
$\therefore ME = \sqrt{AE^2 + AM^2} = \sqrt{2}AE$.
$\therefore BH = \sqrt{2}AE$.

8. **证明**:$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
$\therefore \angle B = \angle D = \angle C = 90°$.
$\because \triangle AEF$ 是等边三角形,
$\therefore AE = AF$,$\angle AEF = \angle AFE = 60°$.
$\because \angle CEF = 45°$,
$\therefore \angle CFE = \angle CEF = 45°$.
$\therefore \angle AFD = \angle AEB = 180° - 45° - 60° = 75°$.
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$(AAS).
$\therefore AB = AD$.
$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 是正方形.

全章热门考点整合应用

1. **证明**:(1)$\because$ 点 E,F,G,H 分别为 AB,BC,CD,DA 的中点,
$\therefore EF /\!/ AC$ 且 $EF = \dfrac{1}{2}AC$,$GH /\!/ AC$ 且 $GH = \dfrac{1}{2}AC$,$EH /\!/ BD$,
$\therefore EF /\!/ GH$ 且 $EF = GH$,
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
又 $\because AC \perp BD$,$\therefore EF \perp EH$. $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.
(2)$\because$ 点 E,P,G,Q 分别为 AB,AC,DC,DB 的中点,
$\therefore EP = \dfrac{1}{2}BC$,$PG = \dfrac{1}{2}AD$,$GQ = \dfrac{1}{2}BC$,$QE = \dfrac{1}{2}AD$.
$\because AD = BC$,$\therefore EP = PG = GQ = QE$,
$\therefore$ 四边形 $EQGP$ 是菱形.
点拨:在三角形中出现两边中点,常考虑利用三角形的中位线定理得到线段的平行关系或数量关系.

2. **证明**:(1)$\because$ 点 D,E 分别是 AB,BC 的中点,$\therefore DE /\!/ AC$. 同理可得 $EF /\!/ AB$.
$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形.
(2)由(1)知四边形 $ADEF$ 是平行四边形,
$\therefore \angle DAF = \angle DEF$.
在 $Rt\triangle AHB$ 中,$\because D$ 是 AB 的中点,
$\therefore DH = \dfrac{1}{2}AB = AD$,
$\therefore \angle DAH = \angle DHA$.
同理可得 $HF = \dfrac{1}{2}AC = AF$,
$\therefore \angle FAH = \angle FHA$.
$\therefore \angle DAH + \angle FAH = \angle DHA + \angle FHA$.
$\therefore \angle DAF = \angle DHF$.
$\therefore \angle DHF = \angle DEF$.

3. **证明**:(1)$\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中,$\angle BAC = 30°$,$\therefore AB = 2BC$.
$\because \triangle ABE$ 是等边三角形,$EF \perp AB$,
$\therefore AE = AB$,$AB = 2AF$,$\therefore AF = BC$.
在 $Rt\triangle BCA$ 和 $Rt\triangle AFE$ 中,

$\begin{cases}BC=AF,\\ BA=AE,\end{cases}$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BCA\cong \mathrm{Rt}\triangle AFE$(HL)，

$\therefore AC=EF$.

(2) $\because \triangle ACD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle DAC=60°, AC=AD$，

$\therefore \angle DAB=\angle DAC+\angle BAC=90°$.

又 $\because EF\perp AB$，

$\therefore \angle EFA=90°=\angle DAB$.

$\therefore EF/\!/AD$.

$\because AC=EF, AC=AD$，

$\therefore EF=AD$.

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

4. (1) **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA=OC, AB/\!/CD$，

$\therefore \angle AEO=\angle CFO$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$\begin{cases}\angle AEO=\angle CFO,\\ \angle AOE=\angle COF,\\ OA=OC.\end{cases}$

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS).

(2) **解**：当 $AC=EF$ 时，四边形 $AECF$ 是矩形.

理由如下：

由(1)知 $\triangle AOE\cong\triangle COF$，$\therefore OE=OF$.

$\because AO=CO$，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

又 $\because AC=EF$，$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形.

5. (1) **证明**：$\because D,E$ 分别是 AB,AC 的中点，$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE/\!/BC$.

又 $\because EF/\!/AB$，

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形.

(2) **解**：当 $AB=BC$ 时，四边形 $DBFE$ 是菱形.

理由：$\because D$ 是 AB 的中点，

$\therefore BD=\frac{1}{2}AB$.

$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE=\frac{1}{2}BC$.

又 $\because AB=BC$，$\therefore BD=DE$.

又 $\because$ 四边形 $DBFE$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $DBFE$ 是菱形.

6. (1) **解**：$DE\perp FG$. 理由如下：

由题意，得 $\angle A=\angle EDB=\angle GFE$，$\angle ABC=\angle DBE=90°$.

$\therefore \angle EDB+\angle BED=90°$.

$\therefore \angle GFE+\angle BED=90°$，

$\therefore \angle FHE=90°$，即 $DE\perp FG$.

(2) **证明**：$\because \triangle ABC$ 沿射线 AB 平移至 $\triangle FEG$.

$\therefore CB/\!/GE, CB=GE$.

$\therefore$ 四边形 $CBEG$ 是平行四边形.

$\because \angle ABC=\angle GEF=90°$，

$\therefore$ 四边形 $CBEG$ 是矩形.

$\because BC=BE$，

$\therefore$ 四边形 $CBEG$ 是正方形.

7. (1) **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB=CD, \angle A=\angle C$.

$\because AE=CF$，$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$(SAS).

(2) **解**：四边形 $MFNE$ 是平行四边形. 证明如下：

$\because \triangle ABE\cong\triangle CDF$，

$\therefore \angle AEB=\angle CFD, BE=DF$.

又 $\because M,N$ 分别是 BE,DF 的中点，

$\therefore ME=FN$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore BC/\!/AD$，

$\therefore \angle AEB=\angle FBE$.

$\therefore \angle CFD=\angle FBE$.

$\therefore EB/\!/DF$，即 $ME/\!/FN$.

$\therefore$ 四边形 $MFNE$ 是平行四边形.

规律总结：本题是一道猜想型问题，先猜想结论，再证明结论. 本题已知一个四边形是平行四边形，借助其性质，利用平行四边形的判定方法判定另一个四边形是平行四边形.

8. **证明**：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \angle A=\angle C, AD=CB$. 又 $\because DE\perp AB$，$BF\perp CD$，$\therefore \angle DEA=\angle BFC=90°$.

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CBF$.

(2) $\because \triangle ADE\cong\triangle CBF$，

$\therefore AE=CF$.

$\because CD=AB$，

$\therefore DF=BE$.

又 $\because CD/\!/AB$，

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 为平行四边形.

又 $\because \angle DEB=90°$，

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 为矩形.

9. (1) **证明**：$\because AF/\!/BC$，

$\therefore \angle AFE=\angle DBE$，

$\because E$ 是 AD 的中点，

$\therefore AE=DE$.

在 $\triangle AFE$ 和 $\triangle DBE$ 中，

$\begin{cases}\angle AFE=\angle DBE,\\ \angle FEA=\angle BED,\\ AE=DE,\end{cases}$

$\therefore \triangle AFE\cong\triangle DBE$(AAS)，

$\therefore AF=BD$，

$\because AD$ 是 BC 边上的中线，$\therefore DC=BD$，

$\therefore AF=DC$.

(2) **解**：四边形 $ADCF$ 是菱形. 证明如下：由(1)得 $AF=DC$，

又 $\because AF/\!/BC$，

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

$\because AC\perp AB$，AD 是斜边 BC 上的中线，

$\therefore AD=\frac{1}{2}BC=DC$，

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是菱形.

10. **证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore CD=CB, \angle DCF=\angle BCF=45°$，$\angle CBE=90°$.

又 $\because CF=CF$，$\therefore \triangle DCF\cong\triangle BCF$.

$\therefore \angle CDF=\angle CBF$.

$\because H$ 为 GE 的中点，

$\therefore HB=HG=\frac{1}{2}GE$.

$\therefore \angle HGB=\angle HBG$.

$\because \angle CDG+\angle CGD=90°$，$\angle CGD=\angle HGB=\angle HBG$，

$\therefore \angle FBG+\angle HBG=90°$，

即 $\angle FBH=90°$，$\therefore FB\perp BH$.

11. **解**：$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=10$，$BC=5$，

$\therefore CD=AB=10, AD=BC=5$.

又 $\because$ 将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使点 A,D 分别落在矩形 $ABCD$ 外部的点 A_1,D_1 处，

$\therefore$ 根据轴对称的性质可得 $A_1E=AE$，$A_1D_1=AD, D_1F=DF$.

设线段 D_1F 与线段 AB 交于点 M，则阴影部分的周长为

$(A_1E+EM+MD_1+A_1D_1)+(MB+MF+FC+CB)$

$=AE+EM+MD_1+AD+MB+MF+FC+CB$

$=(AE+EM+MB)+(MD_1+MF+FC)+AD+CB$

$=AB+(FD_1+FC)+10$

$=AB+(FD+FC)+10$

$=10+10+10=30$.

12. **解**：两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是 $\frac{1}{4}$.

理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore OB=OC, \angle OBE=\angle OCF=45°$，$\angle BOC=90°$.

$\because$ 四边形 $A'B'C'O$ 是正方形，

$\therefore \angle EOF=90°$. $\therefore \angle EOF=\angle BOC$.

$\therefore \angle EOF-\angle BOF=\angle BOC-\angle BOF$，

即 $\angle BOE=\angle COF$. $\therefore \triangle BOE\cong\triangle COF$.

$\therefore S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}$.

$\therefore$ 两个正方形重叠部分的面积等于 $S_{\triangle BOC}$.

$\because S_{正方形ABCD}=1\times1=1$，

$\therefore S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 两个正方形重叠部分的面积保持不变，始终是 $\frac{1}{4}$.

13. **解**：(1) 在菱形 $ABCD$ 中，$AG=CG$，$AC\perp BD$，$BG=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times16=8$，

由勾股定理得 $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

所以 $AC=2AG=2\times6=12$.

所以菱形 $ABCD$ 的面积 $=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times12\times16=96$.

(2) 不发生变化. 理由如下：如图①，连接 AO，则 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AOD}$，

所以 $\frac{1}{2}BD\cdot AG=\frac{1}{2}AB\cdot OE+\frac{1}{2}AD\cdot OF$，

即 $\frac{1}{2}\times16\times6=\frac{1}{2}\times10\cdot OE+\frac{1}{2}\times10\cdot OF$.

解得 $OE+OF=9.6$，是定值，不变.

(3) 发生变化. 如图②，连接 AO，则 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABO}-S_{\triangle AOD}$，

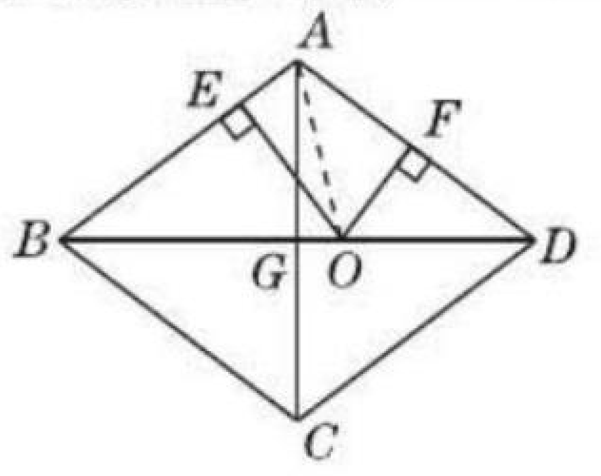
所以 $\frac{1}{2}BD\cdot AG=\frac{1}{2}AB\cdot OE-\frac{1}{2}AD\cdot OF$.

即 $\frac{1}{2}\times16\times6=\frac{1}{2}\times10\cdot OE-\frac{1}{2}\times10\cdot OF$.

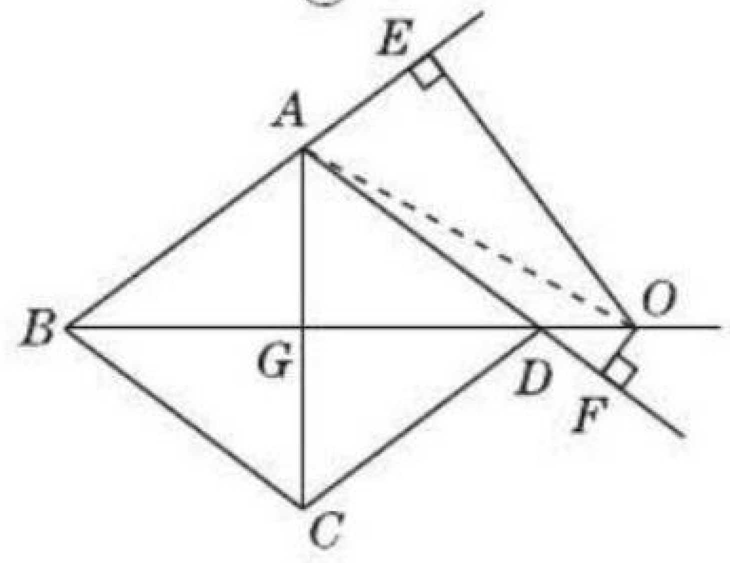
解得 $OE-OF=9.6$，是定值，不变.

所以 $OE+OF$ 的值发生变化，OE,OF

之间的数量关系为 $OE-OF=9.6$.



①



②

(第 13 题)

14. (1) **证明**:如图,连接 AO 并延长交 BC 于 H,

$\because AB=AC, OB=OC$,

$\therefore AH$ 是 BC 的垂直平分线,

即 $AH\perp BC$.

$\because D,E,F,G$ 分别是 AB,OB,OC,AC 的中点,

$\therefore DG/\!/EF/\!/BC$,

$DE/\!/AH/\!/GF$.

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是平行四边形.

$\because EF/\!/BC$,

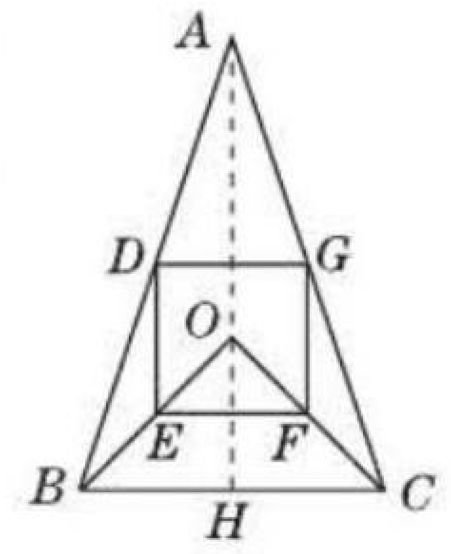
$AH\perp BC$,

$\therefore AH\perp EF$.

又 $\because DE/\!/AH$,

$\therefore EF\perp DE$,

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是矩形.



(第 14 题)

(2) **解**:$\because D,E,F$ 分别是 AB,OB,OC 的中点,

$\therefore AO=2DE=4, BC=2EF=6$.

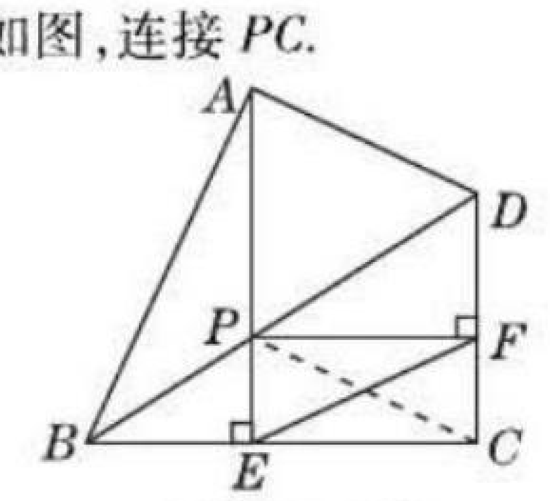
$\because \triangle BOC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore OH=\frac{1}{2}BC=3$.

$\therefore AH=OA+OH=4+3=7$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 7=21$.

15. **证明**:如图,连接 PC.



(第 15 题)

$\because PE\perp BC, PF\perp CD, \angle ECF=90°$,

$\therefore \angle PEC=\angle PFC=\angle ECF=90°$.

$\therefore$ 四边形 $PECF$ 是矩形.

$\therefore PC=EF$.

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle CBP$ 中,

$\begin{cases} AB=CB, \\ \angle ABP=\angle CBP, \\ BP=BP, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle CBP$(SAS).

$\therefore PA=PC$. $\therefore PA=EF$.

16. **解**:(1)(2,1.5)

(2)设点 D 的坐标为(x,y).

若以点 A,B,C,D 为顶点构成的四边形是平行四边形,

①当 AB 为对角线时,

$\because A(-1,2), B(3,1), C(1,4)$,

$\therefore \frac{-1+3}{2}=\frac{1+x}{2}, \frac{2+1}{2}=\frac{4+y}{2}$.

$\therefore x=1, y=-1$.

$\therefore$ 点 D 的坐标为$(1,-1)$.

②当 BC 为对角线时,

$\because A(-1,2), B(3,1), C(1,4)$,

$\therefore \frac{3+1}{2}=\frac{-1+x}{2}, \frac{1+4}{2}=\frac{2+y}{2}$.

$\therefore x=5, y=3$.

$\therefore$ 点 D 的坐标为$(5,3)$.

③当 AC 为对角线时,

$\because A(-1,2), B(3,1), C(1,4)$,

$\therefore \frac{-1+1}{2}=\frac{3+x}{2}, \frac{2+4}{2}=\frac{1+y}{2}$.

$\therefore x=-3, y=5$.

$\therefore$ 点 D 的坐标为$(-3,5)$.

综上所述,点 D 的坐标为$(1,-1)$或$(5,3)$或$(-3,5)$.

第十九章 一次函数

19.1 函 数

第 1 课时 变 量

1. C **点拨**:在 $s=50t$ 中路程随时间的变化而变化,所以行驶时间是自变量,行驶路程是因变量,速度为 50 km/h,是常量. 故选 C.

2. A

3. 0.8;1.2;$y=0.4x$;0.4;x,y

点拨:因为每份报纸的价格是 0.4 元,所以 2 份报纸的价格是 $0.4\times2=0.8$(元),3 份报纸的价格是 $0.4\times3=1.2$(元),由表中规律可知 y 与 x 之间的关系是 $y=0.4x$. 其中不变的量是 0.4,变化的量是 x,y.

4. B **点拨**:由观察可知左边三角形的数的规律为:$1,2,\cdots,n$,右边三角形的数的规律为:$2,2^2,\cdots,2^n$,下边三角形的数的规律为:$1+2,2+2^2,\cdots,n+2^n$,所以 $y=2^n+n$. 故选 B.

5. **解**:(1)音速是 352 m/s.

(2)反映了气温和音速之间的关系.

关系式为 $y=331+\frac{3}{5}x$.

6. **解**:(1)l 与 n 的关系式为 $l=3n+2$.

(2)变量:n,l;常量:3,2.

第 2 课时 函 数

1. B 2. C 3. A 4. A 5. C 6. B

7. A 8. D 9. C

10. $0<x<24$ **点拨**:本题易错之处在于只考虑 $x>0$,而忽视 $y>0$,从而给出 x 的取值范围为 $x>0$.

11. **解**:y 是 x 的函数,因为对于每一个 x 值,y 都有唯一一个值与 x 对应. x 不是 y 的函数,因为当 $y=3$ 时,x 有两个值 $-2,2$ 与 y 对应.

12. **解**:(1)$y=8+(x-3)\times1.8=1.8x+2.6(x\geqslant3)$.

(2)车费够. 因为当 $x=6$ 时,$y=13.4<14$,所以车费够.

13. **解**:(1)1;3;6;10

(2)$y=\frac{n(n+1)}{2}$

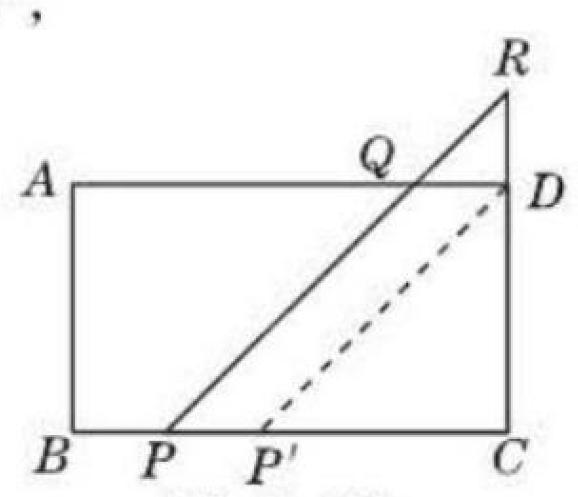
(3)当 $n=10$ 时,

$y=\frac{10\times(10+1)}{2}=55$,

所以物体总数为 55.

点拨:本题运用从特殊到一般的思想,从个体中找思路,进而整体的解决问题.

14. **解**:如图,过点 D 作 $DP'/\!/PQ$,交 BC 于点 P',



(第 14 题)

则 $\angle DP'C=\angle RPC=45°$,

又 $\because \angle C=90°$,

$\therefore \angle CDP'=\angle DP'C=45°$,

$\therefore P'C=CD=4$, $\therefore BP'=3$. $\therefore BP<3$.

$\because BP=x$, 则 $PC=7-x$.

在 Rt$\triangle PCR$ 中,$\angle C=90°$,

$\angle RPC=45°$,

$\therefore \angle R=\angle RPC=45°$,

$\therefore CR=PC=7-x$.

易知 $QD=RD$.

$\therefore QD=RD=CR-CD$

$=7-x-4$

$=3-x$,

$\therefore AQ=AD-QD$

$=7-(3-x)$

$=4+x$.

$\therefore y=\frac{1}{2}(BP+AQ)\cdot AB$

$=\frac{1}{2}(x+4+x)\times4$

$=4x+8(0<x<3)$.

第 3 课时 函数的图象

1. C 2. A 3. A 4. B 5. D 6. C

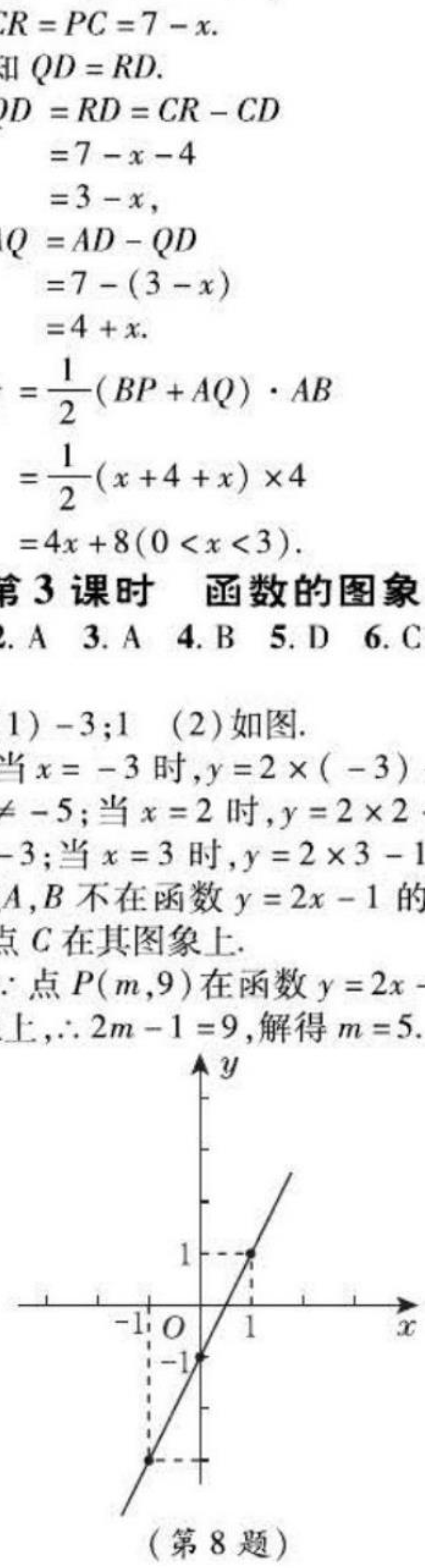
7. D

8. **解**:(1)-3;1 (2)如图.

(3)当 $x=-3$ 时,$y=2\times(-3)-1=-7\neq-5$;当 $x=2$ 时,$y=2\times2-1=3\neq-3$;当 $x=3$ 时,$y=2\times3-1=5$.

$\therefore$ 点 A,B 不在函数 $y=2x-1$ 的图象上,点 C 在其图象上.

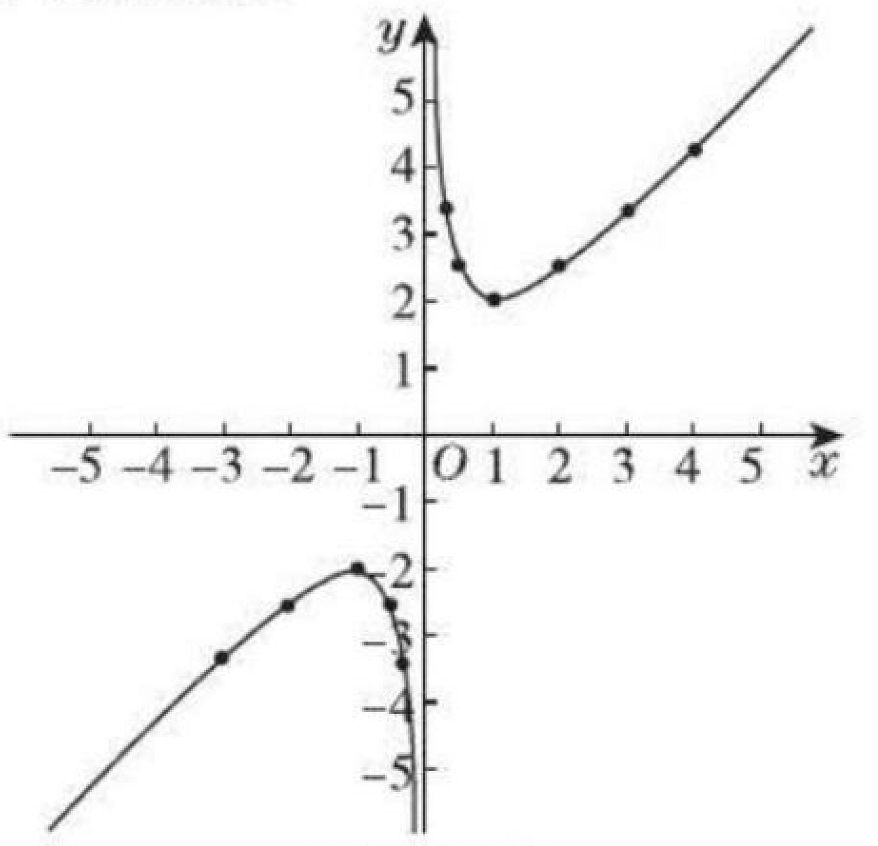
(4)$\because$ 点 $P(m,9)$ 在函数 $y=2x-1$ 的图象上,$\therefore 2m-1=9$,解得 $m=5$.



(第 8 题)

9. **解**:(1)$x\neq0$ (2)$\frac{10}{3}$;$\frac{10}{3}$

(3)如图所示.



(第9题)

(4)① -4 或 $-\frac{1}{4}$

②答案不唯一,如"图象在第一、三象限且关于原点对称;

当 $-1\leqslant x<0$ 或 $0<x\leqslant 1$ 时,y 随 x 的增大而减小;

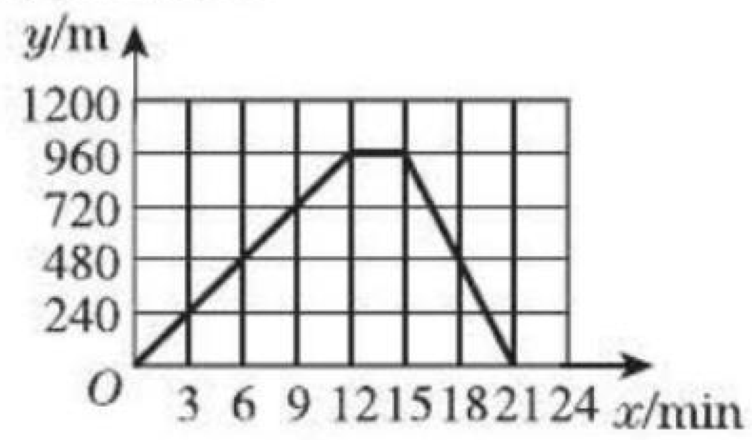
当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而增大"等.

10. 解:不正确. 因为 $x\geqslant 0$,所以图象应该是以原点为端点的射线.

11. 解:(1)由题意可得,$\frac{960}{6}-\frac{960}{12}=80$ (m/min).

答:小慧返回家中的速度比去文具店的速度快80 m/min.

(2)如图所示.



(第11题)

(3)根据图象可得,小慧从家出发后 9 min 或 16.5 min 离家的距离为 720 m.

12. 解:(1)③,①

(2)小芳离开家走了一段路程后来到了一个报亭,在报亭读了一段时间报后,按原路返回家.(答案不唯一)

第 4 课时 函数的表示法

1. D **2.** $y=16-2x(0<x<8)$

3. 6;12;18;24;30;36

4. B **5.** A **6.** C **7.** C

8. A **点拨**:①当 P 在 AB 边上时,设菱形的高为 h,

$y=\frac{1}{2}AP\cdot h$.

∵ AP 随 x 的增大而增大,h 不变,

∴ y 随 x 的增大而增大.

②当 P 在 BC 边上时,$y=\frac{1}{2}AD\cdot h$,

AD 和 h 都不变,

∴ 在这个过程中,y 不变.

③当 P 在 CD 边上时,$y=\frac{1}{2}PD\cdot h$,

∵ PD 随 x 的增大而减小,h 不变,

∴ y 随 x 的增大而减小.

∵ P 点从点 A 出发沿 $A\to B\to C\to D$ 路径匀速运动到点 D,

∴ P 在三条线段上运动的时间相同,故选 A.

9. D **10.** D

11. 解:(1)分别把点 A,B 的坐标代入函数的解析式,得方程组 $\begin{cases}-k+n=3,\\3k+n=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{2},\\n=\frac{3}{2}.\end{cases}$

所以 k 和 n 的值分别为 $-\frac{3}{2},\frac{3}{2}$.

(2)由(1)知函数的解析式是 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$.

把 $x=-5$ 代入函数的解析式,得 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\times(-5)+\frac{3}{2}=9$,因此图象经过点 $C(-5,9)$.

同理当 $x=-6$ 时,$y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\times(-6)+\frac{3}{2}=\frac{21}{2}\neq 10$,

因此图象不经过点 $D(-6,10)$.

方法总结:判断某点是否在函数的图象上的方法为将该点的横坐标代入函数解析式,看求出的函数值是否等于纵坐标. 若相等,则该点在函数的图象上;反之,则该点不在函数的图象上.

12. 解:(1)由表中的数据可知 $xy=-2$,

所以函数的解析式是 $y=-\frac{2}{x}$.

(2)当 $x=-6$ 时,函数值 $y=-\frac{2}{-6}=\frac{1}{3}$.

当 $x=5$ 时,函数值 $y=-\frac{2}{5}$.

因为 $y=-\frac{2}{x}$,所以 $x=-\frac{2}{y}$.

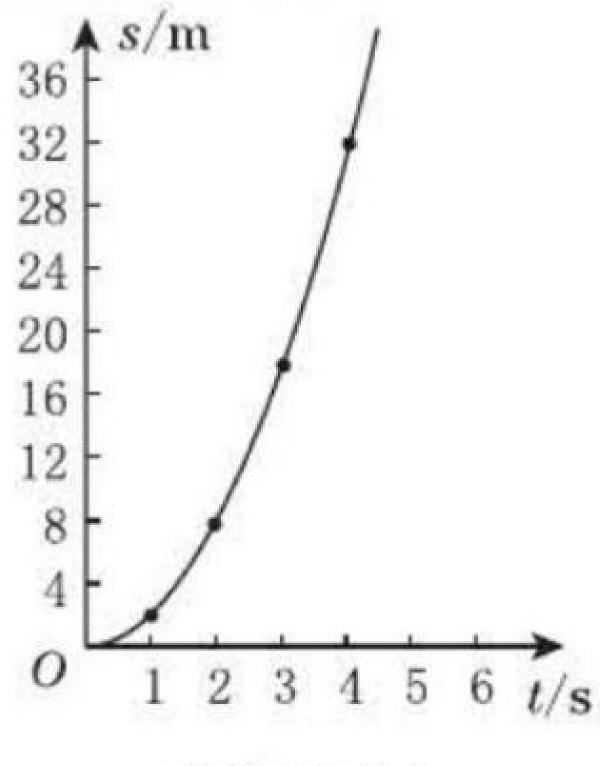
因此当 $y=-12$ 时,$x=-\frac{2}{-12}=\frac{1}{6}$.

当 $y=36$ 时,$x=-\frac{2}{36}=-\frac{1}{18}$.

点拨:给出表格中的数据求函数解析式时,看到貌似无关的数时不要慌,一般这种题中的函数关系都很简单,可将两个数做加、减、乘、除运算,就能找到两个变量之间的函数关系了.

13. 解:(1)2;8;18;32

这个函数的图象如图.



(第13题)

(2)当 $t=6.5$ 时,$s=84.5$,即当小球滚动 6.5 s 时,其滚动的距离是 84.5 m.

(3)当 $s=128$ 时,$t=8$,即经过 8 s,小球滚动的距离是 128 m.

14. C

19.2 一次函数

第 1 课时 正比例函数

1. $\frac{2}{3}$;$-\frac{1}{3}$ **点拨**:根据题意可得:$2a+b=1$,$a+2b=0$,解得 $a=\frac{2}{3}$,$b=-\frac{1}{3}$. 故答案为:$\frac{2}{3}$;$-\frac{1}{3}$.

2. A **3.** D

4. $y=-3x$;正比例

5. D

6. -2 **点拨**:根据正比例函数的定义,得 $\begin{cases}|k|-1=1,\\k-2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\pm 2,\\k\neq 2,\end{cases}$ 所以 $k=-2$.

易错总结:本题易漏掉比例系数不为 0 的条件而出错.

7. 解:(1)$y=4.5x$,是正比例函数.

(2)$y=0.5x+1.6$,不是正比例函数.

(3)$y=\frac{8\ 000}{x}$,不是正比例函数.

(4)$y=2\pi x$,是正比例函数.

8. 解:(1)$y=\frac{1}{2}BC\cdot x=\frac{1}{2}\times 8\times x=4x$,因为它形如 $y=kx$($k\neq 0$,k 为常数),所以它是正比例函数.

(2)列表格如下:

x/cm	5	6	7	8	9	10
y/cm²	20	24	28	32	36	40

(3)由(2)可知,当 x 每增加 1 cm 时,面积 y 增加 4 cm².

第 2 课时 正比例函数的图象和性质

1. 一、三

2. C **3.** C **4.** A **5.** A

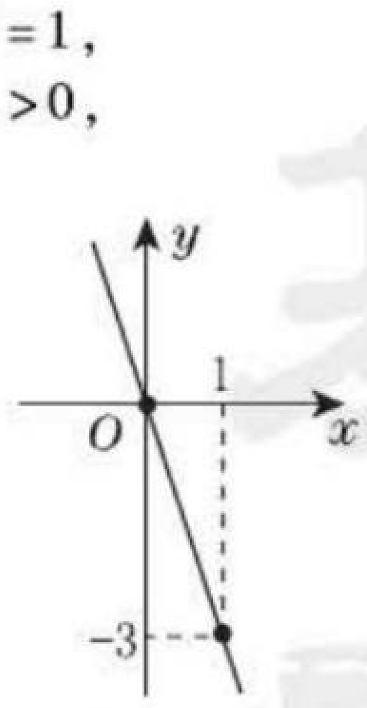
6. D **7.** B **8.** C **9.** D

10. C **点拨**:对于函数 $y=-k^2x$(k 是常数,$k\neq 0$),"$-k^2$"为负数,比例系数小于0,所以图象经过第二、四象限.

11. 解:由题意知 $\begin{cases}2-m^2=1,\\2m+1>0,\end{cases}$

∴ $m=1$,∴ $y=3x$.

12. 解:(1)设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx$,则 $-9=3k$,解得 $k=-3$. 所以 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-3x$.



(第12题)

(2)列表:

x	…	0	1	…
y	…	0	-3	…

描点,连线,图象如图所示.

(3)当 $x=-1$ 时,$y=-3\times(-1)=$

3;当 $x=-6$ 时,$y=-3\times(-6)=18\neq3$,所以点 $P(-1,3)$ 在此函数图象上,而点 $Q(-6,3)$ 不在此函数图象上.

13. 解:(1)由题意知 $1-2a>0$,所以 $a<\frac{1}{2}$.

(2)由题意知 $1-2a<0$,所以 $a>\frac{1}{2}$.

(3)①由题意知 $2=(1-2a)\times(-1)$,解得 $a=\frac{3}{2}$,则此函数关系式为 $y=-2x$. 图象略.

②由①知,$y=-2x$,所以当 $x=-1$ 时,$y=2$,
当 $x=5$ 时,$y=-10$,
所以 y 的取值范围为 $-10<y<2$.

14. 解:(1)因为点 A 的横坐标为3,且在第四象限,$\triangle AOH$ 的面积为3,所以点 A 的纵坐标为 -2. 故点 A 的坐标为 $(3,-2)$. 因为正比例函数 $y=kx$ 的图象经过点 A,所以 $3k=-2$,解得 $k=-\frac{2}{3}$. 所以正比例函数的解析式是 $y=-\frac{2}{3}x$.

(2)存在. 因为点 P 在 x 轴上,$\triangle AOP$ 的面积为5,点 A 的坐标为 $(3,-2)$,
所以 $OP=5$. 所以点 P 的坐标为 $(5,0)$ 或 $(-5,0)$.

第3课时 一次函数

1. C 2. B

3. A **点拨**:由 $y=(m-3)x^{|m|-2}+1$ 是 y 关于 x 的一次函数知 $|m|-2=1$,所以 $m=\pm3$,但 $m-3\neq0$,所以 $m=-3$.

4. A **点拨**:正比例函数是特殊的一次函数,但一次函数不一定是正比例函数. 此题易混淆两个概念的包含关系.

5. B 6. D 7. D

8. 解:(1)$y=20-6x(x>0)$.

(2)$500\ m=0.5\ km$,当 $x=0.5$ 时,$y=20-6\times0.5=17$. 即这时山顶的温度大约为17 ℃.

(3)当 $y=-34$ 时,有 $-34=20-6x$,解得 $x=9$. 即飞机离地面的高度为9 km.

9. 解:表中填10.

(1)$y=2x+2$,y 是 x 的一次函数.

(2)把 $y=42$ 代入 $y=2x+2$ 中,
得 $42=2x+2$,
解得 $x=20$.

答:需要20张这样的方桌拼成一行.

第4课时 一次函数的图象与性质

1. C 2. A 3. D 4. B 5. B 6. A

7. A 8. A 9. B 10. B 11. D

12. A **点拨**:因为 $y=kx+b$(k,b 是常数)的图象不经过第二象限,当 $k=0$,$b<0$ 时成立;当 $k>0$,$b\leq0$ 时成立;综上所述,$k\geq0$ 且 $b\leq0$,故选A.

易错总结:解决这类问题时,要把两种情况都考虑进去,并分两种情况分别求解. 本题常因漏掉其中一种情况导致结果不全面,从而错选.

13. 解:(1)$2m+4>0$,所以 $m>-2$.

(2)$m-3<0$,且 $2m+4\neq0$,
所以 $m<3$,且 $m\neq-2$.

(3)$m-3=0$ 且 $2m+4\neq0$,所以 $m=3$.

(4)$2m+4=-1$,所以 $m=-\frac{5}{2}$.

14. 解:(1)令 $x=0$,则 $y=1$,
∴ 直线 l 与 y 轴的交点坐标为 $(0,1)$.

(2)由题意,得 $A(k,k^2+1)$,$B\left(\frac{-k-1}{k},-k\right)$,$C(k,-k)$.

①当 $k=2$ 时,$A(2,5)$,$B\left(-\frac{3}{2},-2\right)$,$C(2,-2)$,
∴ 在区域 W 内有 $(0,0)$,$(0,-1)$,$(1,0)$,$(1,-1)$,$(1,1)$,$(1,2)$ 共6个整点.

②当 $-1\leq k<0$ 或 $k=-2$ 时,区域 W 内没有整点.

15. 解:(1)将点 $\left(-\frac{1}{2},3\right)$ 的坐标代入 $y=ax-a+1$,得 $3=-\frac{1}{2}a-a+1$,

解得 $a=-\frac{4}{3}$.

(2)当 $a>0$ 时,y 随 x 的增大而增大,所以当 $x=2$ 时,y 有最大值2,所以有 $2=2a-a+1$,解得 $a=1$.

当 $a<0$ 时,y 随 x 的增大而减小,所以当 $x=-1$ 时,y 有最大值2,所以有 $2=-a-a+1$,解得 $a=-\frac{1}{2}$.

综上所述,$a=1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

16. 解:(1)由 C 点的横坐标为1,且在 $y=3x$ 的图象上,可得点 C 的坐标为 $(1,3)$.

将 A,C 点的坐标代入 $y=kx+b$,得 $\begin{cases}6=-2k+b,\\3=k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=4.\end{cases}$

(2)直线 AB 的解析式为 $y=-x+4$,可求得 B 点坐标为 $(4,0)$,即 $OB=4$,

故 $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$.

所以 $S_{\triangle COD}=\frac{1}{3}\times6=2$.

由 $\triangle OCD$ 的 OD 边上的高为 C 点的横坐标1,得 $OD=2\times S_{\triangle OCD}\div1=4$,
故点 D 的坐标为 $(0,-4)$.

第5课时 一次函数解析式的求法

1. C 2. A

3. $y=-x+1$

4. C 5. D

6. $(47,16)$

7. B **点拨**:将点 $P(-2,3)$ 的坐标代入 $y=-2x+m$,得 $m=-1$,所以一次函数的解析式为 $y=-2x-1$.
当 $x=0$ 时,$y=-1$.
所以点 B 的坐标为 $(0,-1)$.
当 $y=0$ 时,$-2x-1=0$,

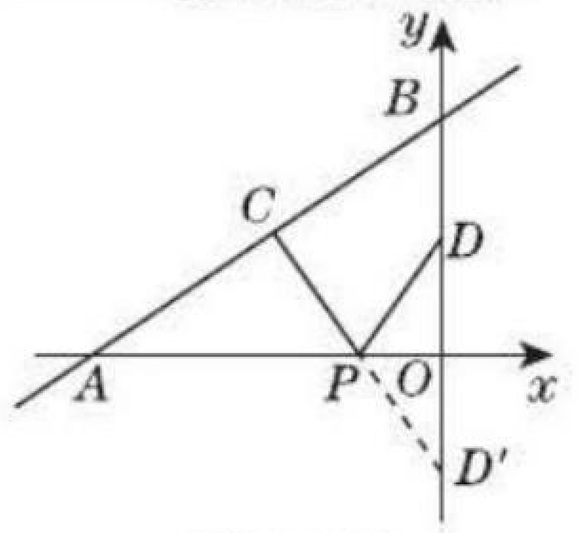
解得 $x=-\frac{1}{2}$,

所以点 A 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

所以 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$,故选B.

8. B

9. C **点拨**:作点 D 关于 x 轴的对称点 D',连接 CD' 交 x 轴于点 P,连接 PD,此时 $PC+PD$ 最小,如图所示.



(第9题)

令 $y=\frac{2}{3}x+4$ 中 $x=0$,则 $y=4$,
所以点 B 的坐标为 $(0,4)$.

令 $y=\frac{2}{3}x+4$ 中 $y=0$,则 $\frac{2}{3}x+4=0$,

解得 $x=-6$,
所以点 A 的坐标为 $(-6,0)$.
因为点 C,D 分别为线段 AB,OB 的中点,
所以点 $C(-3,2)$,点 $D(0,2)$.
因为点 D' 和点 D 关于 x 轴对称,
所以点 D' 的坐标为 $(0,-2)$.
设直线 CD' 对应的函数解析式为 $y=kx+b$,
因为直线 CD' 过点 $C(-3,2)$,$D'(0,-2)$,
所以 $2=-3k+b$,$-2=b$.

解得 $k=-\frac{4}{3}$,$b=-2$.

所以直线 CD' 对应的函数解析式为 $y=-\frac{4}{3}x-2$.

令 $y=-\frac{4}{3}x-2$ 中 $y=0$,

则 $0=-\frac{4}{3}x-2$,解得 $x=-\frac{3}{2}$,

所以点 P 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$.

故选C.

10. D

11. 解:(1)设 $y+2=k(x-1)(k\neq0)$,把 $x=3$,$y=4$ 代入,得 $4+2=k\times(3-1)$,解得 $k=3$.

则 y 与 x 之间的函数解析式是 $y+2=3(x-1)$,即 $y=3x-5$.

(2)当 $y=1$ 时,$3x-5=1$,解得 $x=2$.

12. 错解:$y=-2x-5$

诊断:本题易只考虑直线 $y=-2x-b$ 与 y 轴的交点在 y 轴负半轴上的情

况，即 $-b=-5$，故 $b=5$. 导致漏掉一个解，只得到直线 $y=-2x-b$ 对应的函数解析式为 $y=-2x-5$.

正解：$y=-2x+5$ 或 $y=-2x-5$

13. **解**：(1) ∵ 点 $P(-1,a)$ 在直线 l_2：$y=2x+4$ 上，

∴ $2\times(-1)+4=a$，即 $a=2$，

则 P 点的坐标为 $(-1,2)$.

设直线 l_1 的解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，将 $B(1,0)$，$P(-1,2)$ 的坐标分别代入得

$\begin{cases}k+b=0,\\-k+b=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1.\end{cases}$

∴ 直线 l_1 的解析式为 $y=-x+1$.

(2) ∵ 直线 l_1 与 y 轴相交于点 C，

∴ C 点的坐标为 $(0,1)$. 则 $OC=1$.

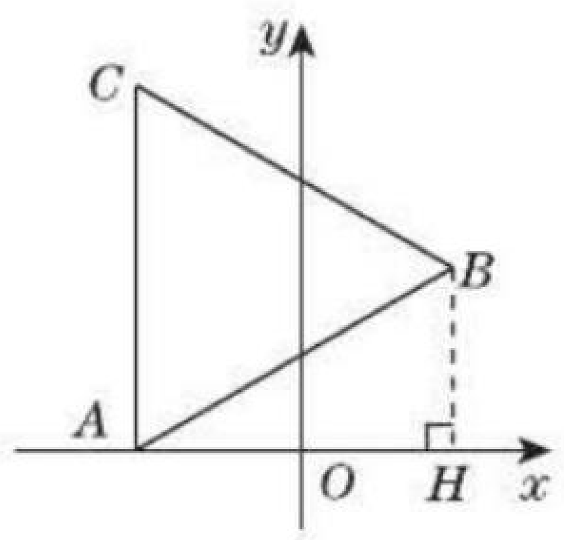
又∵ 直线 l_2 与 x 轴相交于点 A，

∴ A 点的坐标为 $(-2,0)$，则 $AB=3$.

又易知 $OB=1$，而 $S_{四边形PAOC}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle BOC}$，

∴ $S_{四边形PAOC}=\frac{1}{2}\times3\times2-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{5}{2}$.

14. **解**：(1) 如图，过点 B 作 $BH\perp x$ 轴于点 H.



（第 14 题）

∵ 点 A 的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，点 B 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，

∴ $AH=\sqrt{3}$，$BH=1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中，$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$.

∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，

∴ $AC=AB=2$，$\angle CAB=60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中，$BH=1$，$AB=2$，

∴ $\angle BAH=30°$.

∴ $\angle CAH=\angle CAB+\angle BAH=90°$.

∴ 点 C 的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$.

(2) 由 (1) 知点 C 的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，设线段 BC 所在直线的函数解析式为 $y=kx+b$，

则 $\begin{cases}1=\frac{\sqrt{3}}{2}k+b,\\2=-\frac{\sqrt{3}}{2}k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{\sqrt{3}}{3},\\b=\frac{3}{2}.\end{cases}$

故线段 BC 所在直线的函数解析式为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3}{2}$.

15. **解**：(1) 把点 $C(m,4)$ 的坐标代入 $y=-\frac{1}{2}x+5$，可得 $4=-\frac{1}{2}m+5$，

解得 $m=2$，所以 $C(2,4)$.

设 l_2 的解析式为 $y=ax$，则 $4=2a$，

解得 $a=2$，

所以 l_2 的解析式为 $y=2x$.

(2) 如图，过点 C 作 $CD\perp AO$ 于点 D，$CE\perp BO$ 于点 E，则 $CD=4$，$CE=2$，

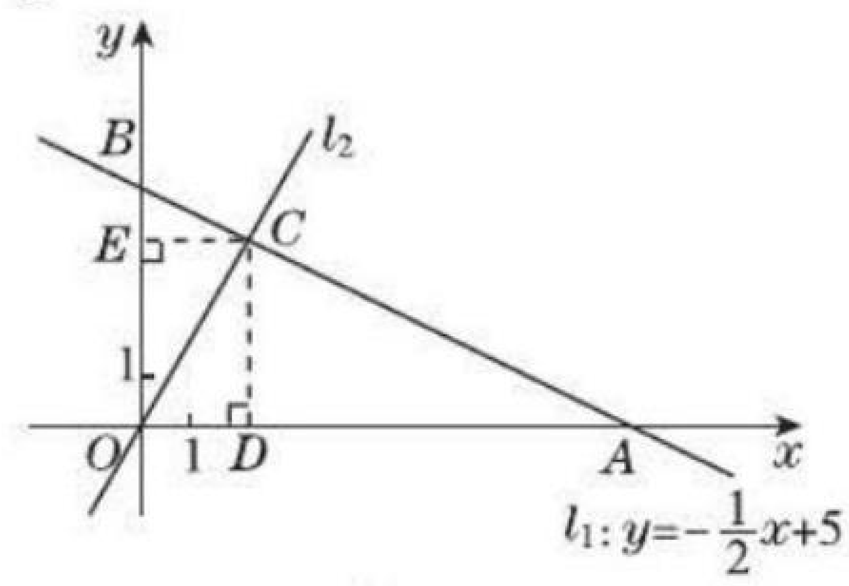
对于 $y=-\frac{1}{2}x+5$，令 $x=0$，则 $y=5$；

令 $y=0$，则 $x=10$，

所以 $A(10,0)$，$B(0,5)$.

所以 $AO=10$，$BO=5$，

所以 $S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times10\times4-\frac{1}{2}\times5\times2=20-5=15$.



（第 15 题）

(3) k 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 2 或 $-\frac{1}{2}$.

16. **解**：(1) 400 m 跑道中一段直道的长度 $=(400-2\times36\times3.14)\div2=86.96$(m).

(2) 表格如下：

跑道宽度/米	0	1	2	3	4	5	…
跑道周长/米	400	406.28	412.56	418.84	425.12	431.40	…

$y=2\pi x+400$.

(3) 当 $y=446$ 时，$2\pi x+400=446$.

解得 $x\approx7.32$.

$7.32\div1.2\approx6$(条).

∴ 最多能铺设道宽为 1.2 m 的跑道 6 条.

第 6 课时　含一个一次函数（图象）的应用

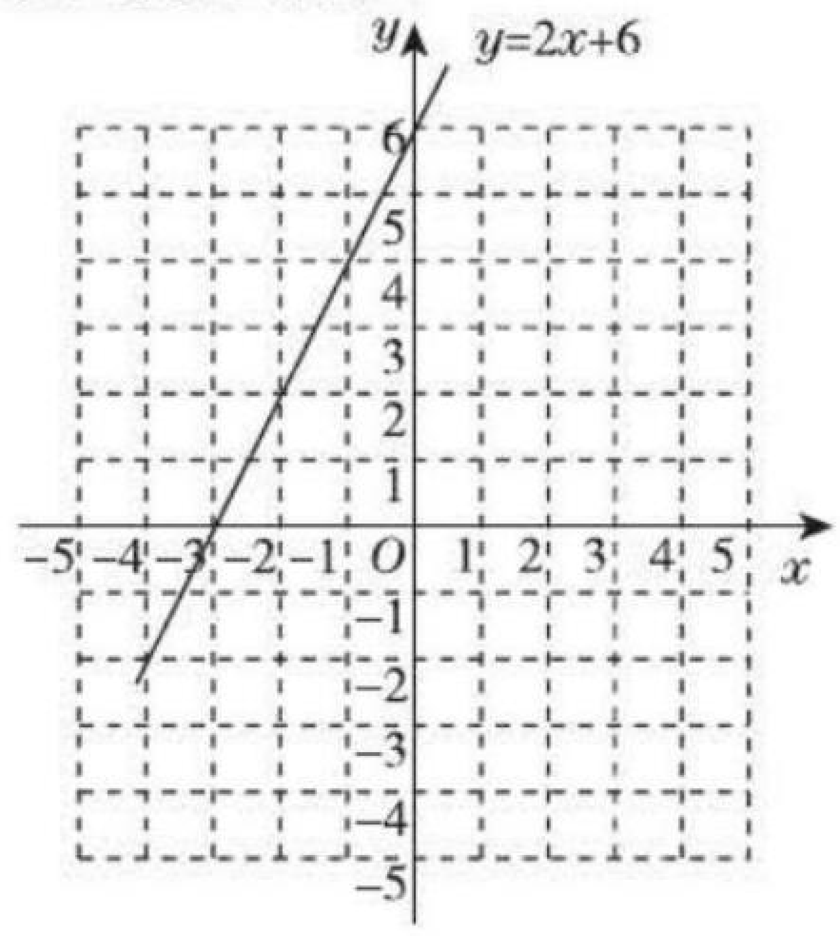
1. D

2. C　**点拨**：设一年内在该游泳馆游泳的次数为 x 次，消费的钱数为 y 元，记不购买会员年卡时消费的钱数为 y_1 元，根据题意得 $y_1=30x$，$y_A=50+25x$，$y_B=200+20x$，$y_C=400+15x$，当 $45\leqslant x\leqslant55$ 时，确定 y 的范围，进行比较即可得到答案.

3. B　4. B　5. $x=2$　6. C

7. C　**点拨**：本题中 s 并不是汽车行驶的路程，而是剩下没有走的路程. 不能受思维定式的影响，要仔细弄清题目，理解题意. 实际上 s 与 t 的函数关系式为 $s=400-100t$，其中 $0\leqslant t\leqslant4$，s 是 t 的一次函数，故选 C.

8. **解**：图象如图所示：



（第 8 题）

(1) 观察图象知：该函数图象经过点 $(-3,0)$，

故方程 $2x+6=0$ 的解为 $x=-3$.

(2) 观察图象知：当 $x>-3$ 时，$y>0$，故满足 $2x+6>0$ 的 x 的取值范围为 $x>-3$.

(3) 当 $-2\leqslant y\leqslant2$ 时，x 的取值范围为 $-4\leqslant x\leqslant-2$.

9. **解**：(1) $a=\frac{300}{5}\times(10+5)=900$.

(2) 小明的速度为：$300\div5=60$(m/min)，

小强的速度为：$[900-60\times(12-10)]\div12=65$(m/min).

(3) 由题意得 $A(10,900)$，$B(12,780)$，

设线段 AB 的函数解析式为 $y=kx+b$，把 $A(10,900)$、$B(12,780)$ 的坐标分别代入得

$\begin{cases}10k+b=900,\\12k+b=780,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-60,\\b=1\,500.\end{cases}$

∴ 线段 AB 的函数解析式为 $y=-60x+1\,500(10\leqslant x\leqslant12)$.

点拨：(1) 根据“小明的路程 = 小明的速度 × 小明行驶的时间”即可求解；(2) 根据 a 的值可以得出小强行驶 12 min 的路程，再根据“路程、速度与时间”的关系解答即可；(3) 由 (2) 可知点 B 的坐标，再运用待定系数法解答即可.

10. **解**：(1) 2 cm

(2) 设一次函数解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$. 把 $x=0$，$y=30$ 及 $x=3$，$y=36$ 分别代入函数解析式，得 $30=b$，$36=3k+b$，解得 $k=2$，$b=30$.

即 $y=2x+30$.

(3) 由题意得 $2x+30>49$，解得 $x>9.5$.

因为 x 是正整数，所以水桶中至少放入 10 个小球时有水溢出.

11. **解**：(1) 由题意可得，

$\begin{cases}10m+5n=170,\\6m+10n=200,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=10,\\n=14.\end{cases}$

答：m 的值是 10，n 的值是 14.

(2) 当 $20\leqslant x\leqslant60$ 时，

$y=(16-10)x+(18-14)(100-x)=2x+400$；

当 $60<x\leqslant70$ 时，

$y=(16-10)\times60+(16\times0.5-10)(x-60)+(18-14)(100-x)=-6x+880$,

由上可得,

$y=\begin{cases}2x+400(20\leqslant x\leqslant60);\\-6x+880(60<x\leqslant70).\end{cases}$

(3)当 $20\leqslant x\leqslant60$ 时,$y=2x+400$,则当 $x=60$ 时,y 取得最大值,此时 $y=520$.

当 $60<x\leqslant70$ 时,$y=-6x+880$,则 $y<-6\times60+880=520$.

由上可得,当 $x=60$ 时,y 取得最大值,此时 $y=520$.

∵在(2)的条件下,超市在获得的利润额 y(元)取得最大值时,决定售出的甲种蔬菜每千克捐出 $2a$ 元,乙种蔬菜每千克捐出 a 元给当地福利院,且要保证捐款后的盈利率不低于 20%,

$\therefore\dfrac{520-2a\times60-40a}{60\times10+40\times14}\geqslant20\%$,

解得 $a\leqslant1.8$,

即 a 的最大值是 1.8.

第 7 课时　含两个一次函数(图象)的应用

1. (1)1 620;3 960

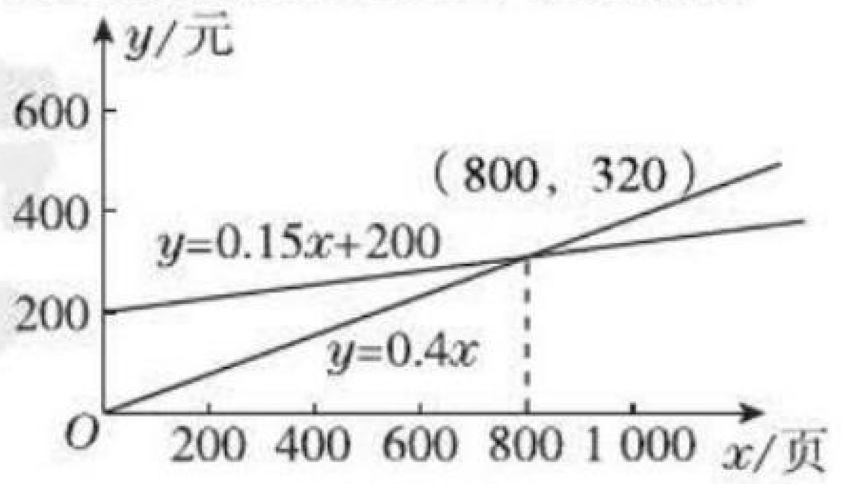
(2)$180x$;$108x+720$

2. **解**:(1)根据表中的数据可知,y 是 x 的正比例函数,设其解析式为 $y=kx$.
将 $x=100$,$y=40$ 代入 $y=kx$,解得 $k=0.4$,所以该函数的解析式为 $y=0.4x$.

(2)$y=0.15x+200$

(3)画函数图象如图所示.

由图象可知,当每月复印页数在 1 200 页左右时,选择乙复印社更合算.



(第 2 题)

3. C

4. A　**点拨**:由图象可知,乙车出发时,甲、乙两车相距 80 km,2 h 后,乙车追上甲车,则说明乙车每小时比甲车快 40 km,则乙车的速度为 120 km/h,①正确;

由图象知第 2 ~ 6 h,乙车由相遇点到达 B 地,用时 4 h,每小时比甲车快 40 km,则此时甲、乙两车的距离为 $40\times4=160$(km),则 $m=160$,②正确;

当乙车在 B 地休息 1 h 时,甲车前进 80 km,则 H 点的坐标为(7,80),③正确;

乙车返回时,甲、乙两车相距 80 km,到两车相遇用时 $80\div(120+80)=0.4$(h),则 $n=6+1+0.4=7.4$,④错误.

5. B　**点拨**:由图象知,汽车行驶前一半路程(40 km)所用的时间是 1 h,所以速度为 $40\div1=40$(km/h).于是行驶后一半路程的速度是 $40+20=60$(km/h),所以行驶后一半路程所用的时间为 $40\div60=\dfrac{2}{3}$(h).因为 $\dfrac{2}{3}$ h = 40 min,所以该车一共行驶了 1 h 40 min 到达乙地.所以到达乙地的时间是当天上午 10:40.

6. **解**:(Ⅰ)180;900;210;850.

(Ⅱ)当 $0<x\leqslant50$ 时,$y_2=7x$;

当 $x>50$ 时,$y_2=7\times50+5(x-50)=5x+100$.

因此 y_1,y_2 与 x 的函数解析式为:

$y_1=6x(x>0)$;

$y_2=\begin{cases}7x(0<x\leqslant50),\\5x+100(x>50).\end{cases}$

(Ⅲ)①100;②乙;③甲

7. **解**:(1)$y_1=30x+200$;$y_2=40x$.

(2)由 $y_1<y_2$,得 $30x+200<40x$,

解得 $x>20$.

当 $x>20$ 时,选择方式一比方式二省钱.

8. **解**:(1)4;120

(2)当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时,设乙车距 B 地的路程 y 关于 x 的函数解析式为 $y=k_1x$.

因为图象经过点(2,120),

所以 $2k_1=120$,

解得 $k_1=60$,

所以当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时,乙车距 B 地的路程 y 关于 x 的函数解析式为 $y=60x$.

当 $2<x\leqslant4$ 时,设乙车距 B 地的路程 y 关于 x 的函数解析式为 $y=k_2x+b$,

因为图象经过(2,120),(4,0)两点,

所以 $\begin{cases}2k_2+b=120,\\4k_2+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=-60,\\b=240.\end{cases}$

所以当 $2<x\leqslant4$ 时,乙车距 B 地的路程 y 关于 x 的函数解析式为 $y=-60x+240$.

综上所述,乙车距 B 地的路程 y 关于 x 的函数解析式为

$y=\begin{cases}60x(0\leqslant x\leqslant2),\\-60x+240(2<x\leqslant4).\end{cases}$

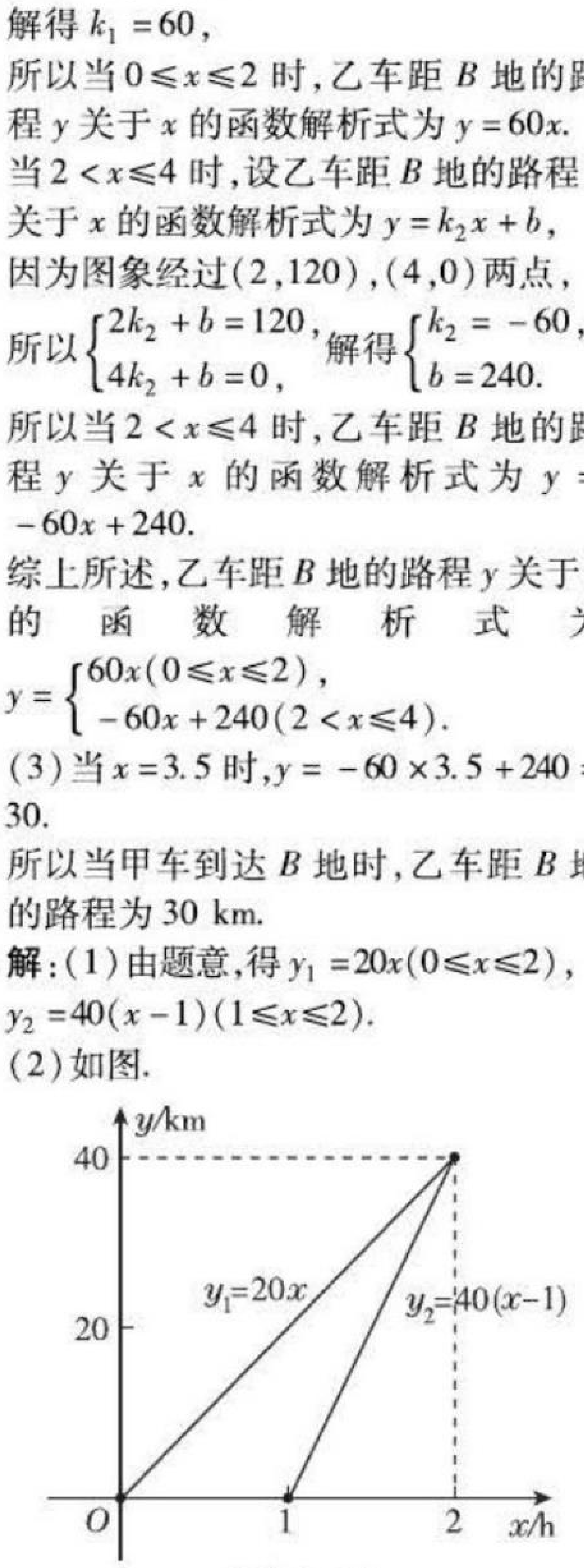
(3)当 $x=3.5$ 时,$y=-60\times3.5+240=30$.

所以当甲车到达 B 地时,乙车距 B 地的路程为 30 km.

9. **解**:(1)由题意,得 $y_1=20x(0\leqslant x\leqslant2)$,

$y_2=40(x-1)(1\leqslant x\leqslant2)$.

(2)如图.



(第 9 题)

(3)由图象可得,李玉刚同学和妈妈乘公交车和爸爸骑行同时到达老家.

阶段核心方法专训

1. $y=10x$

2. **解**:由题意得 $\begin{cases}m^2-8=1,\\m-3\neq0,\end{cases}$ 所以 $m=-3$.所以函数解析式为 $y=-6x-9$.

3. **解**:设这个函数的解析式为 $y=kx+b$,

由函数图象平行于直线 $y=-2x$ 得 $k=-2$,

因为图象经过点 $A(-4,2)$.

所以 $2=-2\times(-4)+b$,解得 $b=-6$.

所以这个函数的解析式为 $y=-2x-6$.

4. **解**:(1)(5,6);(1,6)

(2)一次函数 $y=ax-4(a\neq0)$ 的图象经过点 C,将点 $C(5,6)$ 的坐标代入 $y=ax-4$,得 $6=5a-4$.

所以 $a=2$.

所以 $y=2x-4$.

(3)在 $y=2x-4$ 中,令 $y=0$,得 $x=2$,

所以 $E(2,0)$.

画图略.$S_{\triangle OCE}=2\times6\times\dfrac{1}{2}=6$.

(4)由题意知,直线 $y=kx+b$ 与 $y=2x-4$ 平行,

则 $k=2$,所以 $y=2x+b$.

若直线 $y=2x+b$ 过点 $B(5,2)$,则 $2\times5+b=2$,解得 $b=-8$;

若直线 $y=2x+b$ 过点 $D(1,6)$,则 $2\times1+b=6$,解得 $b=4$,

所以 $-8\leqslant b\leqslant4$.

5. **解**:(1)10;18

(2)根据题意知,当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时,种子的价格为 5 元/千克,所以 $y=5x$;

当 $x>2$ 时,其中有 2 千克的种子按 5 元/千克付款,

其余的 $(x-2)$ 千克种子按 4 元/千克(即八折)付款.

所以 $y=5\times2+4(x-2)=4x+2$.

所以 y 关于 x 的函数解析式为

$y=\begin{cases}5x(0\leqslant x\leqslant2),\\4x+2(x>2).\end{cases}$

(3)因为 $30>10$,所以他一次购买种子的质量超过 2 千克.

令 $30=4x+2$,解得 $x=7$.

答:他购买种子的质量是 7 千克.

6. **解**:(1)根据题意得 $A(0,2)$,$B(4,0)$,设直线 AB 对应的函数解析式为 $y=kx+b$,把点 $A(0,2)$,$B(4,0)$ 的坐标分别代入 $y=kx+b$ 得 $b=2$,$0=4\times k+2$,

解得 $k=-\dfrac{1}{2}$.所以直线 AB 对应的函数解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$.

(2)存在点 P 使得 $\triangle AOP$ 的面积为 1.

设点 P 的横坐标为 a,根据题意得 $S_{\triangle AOP}=\dfrac{1}{2}OA\cdot|a|=|a|=1$,解得 $a=1$ 或 $a=-1$,则点 P 的坐标为(1,1.5)或(−1,2.5).

第 8 课时　一次函数与一元一次方程、不等式

1. C　2. D　3. D　4. B　5. A

6. 2　**点拨**:由题意知汽车 2 h 行驶的路

程为 $320-160=160(km)$，此时汽车快速行驶的速度为 $160\div2=80(km/h)$. 一直快速行驶所需时间为 $320\div80=4(h)$. $6-4=2(h)$. 故答案为2.

7. 解：(1) l_2；30；20　(2) 由图可求出 $s_甲=-30t+60$，$s_乙=20t-10$，由 $s_甲-s_乙=5$ 解得 $t=1.3$；由 $s_乙-s_甲=5$，解得 $t=1.5$.
答：甲出发后1.3 h或1.5 h，两人恰好相距5 km.

8. $-1<x<2$　点拨：此题运用数形结合思想，观察图象知不等式 $-2<kx+b<1$ 的解集就是线段 AB（不包含端点）所对应的自变量 x 的取值范围.

9. 解：(1) 当 $k=-2$ 时，$y_1=-2x+2$，
根据题意，得 $-2x+2>x-3$，
解得 $x<\frac{5}{3}$.
所以 x 的取值范围是 $x<\frac{5}{3}$.
(2) $-4\leqslant k<0$ 或 $0<k\leqslant1$.
点拨：(1) 解不等式 $-2x+2>x-3$ 即可；(2) 先计算出 $x=1$ 对应的 y_2 的值，然后根据 $x<1$ 时，一次函数 $y_1=kx+2$（k 为常数，$k\neq0$）的图象在直线 $y_2=x-3$ 的上方确定 k 的范围.

10. 解：(1) 直线 l 经过点 $(-2,0)$，则方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=-2$.
(2) 直线 l 经过点 $(0,1)$，则当 $x>0$ 时，有 $kx+b>1$，即不等式 $kx+b>1$ 的解集是 $x>0$.
(3) 线段 AB 对应的自变量的取值范围是 $-2\leqslant x\leqslant2$，则 $-2\leqslant m\leqslant2$. 当 $-2\leqslant x\leqslant2$ 时，函数值 y 的范围是 $0\leqslant y\leqslant2$，则 $0\leqslant n\leqslant2$.

11. 解：(1) 设购买一个甲种文具 a 元，一个乙种文具 b 元，由题意得 $\begin{cases}2a+b=35,\\a+3b=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=15,\\b=5.\end{cases}$
答：购买一个甲种文具15元，一个乙种文具5元.
(2) 根据题意得：
$955\leqslant15x+5(120-x)\leqslant1\,000$.
解得 $35.5\leqslant x\leqslant40$.
$\because x$ 取整数，
$\therefore x$ 可取36，37，38，39，40.
$\therefore$ 有5种购买方案.
(3) $W=15x+5(120-x)=10x+600$.
$\because 10>0$，
$\therefore W$ 随 x 的增大而增大，
$\therefore$ 当 $x=36$ 时，$W_{最小}=10\times36+600=960$.
$\therefore 120-36=84$（个）.
答：购买甲种文具36个，乙种文具84个时需要的资金最少，最少资金是960元.

12. 解：(1) 当 $x\geqslant30$ 时，设 y 与 x 之间的函数解析式为 $y=kx+b$，
由题意得 $\begin{cases}30k+b=60,\\40k+b=90,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}k=3,\\b=-30.\end{cases}$
所以当 $x\geqslant30$ 时，y 与 x 之间的函数解析式为 $y=3x-30$.
(2) 若小李4月份上网20 h，他应付60元的上网费用.
(3) 由 $75=3x-30$，解得 $x=35$，所以他在该月份的上网时间是35 h.

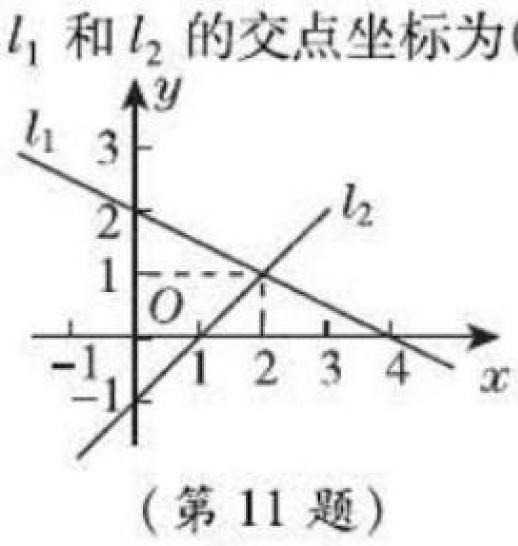
第9课时　一次函数与二元一次方程(组)

1. B　2. B　3. C　4. B　5. A　6. B
7. D　8. B

9. $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$　点拨：利用方程组的解就是两个相应的一次函数图象的交点坐标求解.

10. $\frac{2}{3}\leqslant m\leqslant1$　点拨：由题意得，$\begin{cases}y=3,\\y=2x+1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}$ 所以直线 $y=3$ 与直线 $y=2x+1$ 的交点坐标为 $(1,3)$. 当点 B 在点 A 的右侧时，有 $m\leqslant1$ 且 $3m-1\geqslant1$，解得 $\frac{2}{3}\leqslant m\leqslant1$；当点 B 在点 A 的左侧时，有 $m\geqslant1$ 且 $3m-1\leqslant1$，无解，所以 m 的取值范围为 $\frac{2}{3}\leqslant m\leqslant1$.

11. 错解：$\begin{cases}x+2y=4,①\\x-y=1,②\end{cases}$
①－②，得 $3y=3$，$y=1$.
把 $y=1$ 代入②，得 $x=2$.
所以原方程组的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$
正解：由 $x+2y=4$，可得 $y=-\frac{1}{2}x+2$.
由 $x-y=1$，可得 $y=x-1$.
在同一平面直角坐标系内作出一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图象 l_1 和 $y=x-1$ 的图象 l_2，如图所示，通过观察可得 l_1 和 l_2 的交点坐标为 $(2,1)$.

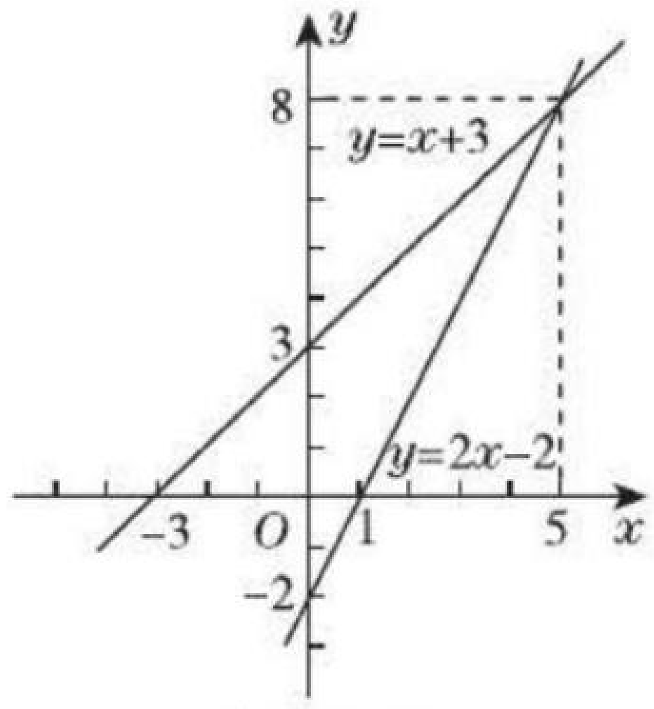


（第11题）

所以方程组 $\begin{cases}x+2y=4,\\x-y=1\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

12. 解：由题意，可得方程组 $\begin{cases}y=3x+6,\\y=2x+b\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=-10,\\y=-24.\end{cases}$ 将 $\begin{cases}x=-10,\\y=-24\end{cases}$ 代入 $y=2x+b$，
得 $-24=2\times(-10)+b$，
所以 $b=-4$.

13. 解：画出 $y=2x-2$ 和 $y=x+3$ 的图象，如图所示.
(1) 根据图象可知方程 $2x-2=x+3$ 的解为 $x=5$.
(2) 根据图象可知方程组 $\begin{cases}2x-y-2=0,\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=5,\\y=8.\end{cases}$
点拨：解答本题的关键是正确画出图象，把握好方程、方程组与函数图象的关系.



（第13题）

14. 解：(1) 设焚烧1 t垃圾，A 发电厂发电 a kW·h，B 发电厂发电 b kW·h，根据题意得：
$\begin{cases}a-b=40,\\30b-20a=1\,800,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=300,\\b=260.\end{cases}$
答：焚烧1 t垃圾，A 发电厂发电300 kW·h，B 发电厂发电260 kW·h.
(2) 设 A 发电厂焚烧 x t垃圾，则 B 发电厂焚烧 $(90-x)$ t垃圾，总发电量为 y kW·h电，则
$y=300x+260(90-x)=40x+23\,400$.
$\because x\leqslant2(90-x)$，
$\therefore x\leqslant60$.
$\because y$ 随 x 的增大而增大，
$\therefore$ 当 $x=60$ 时，$y_{最大值}=40\times60+23\,400=25\,800$.
答：A 发电厂和 B 发电厂总发电量的最大值是25 800 kW·h电.

15. 解：(1) 由题意，得 $\begin{cases}y=\frac{3}{4}x,\\y=-x+7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$ 所以点 A 的坐标为 $(4,3)$.
(2) 因为 $P(a,0)$，所以 $B\left(a,\frac{3}{4}a\right)$，$C(a,-a+7)$.
所以 $BC=\frac{3}{4}a-(-a+7)=\frac{7}{4}a-7$.
所以 $\frac{7}{4}a-7=7$，解得 $a=8$.
所以 $S_{三角形OBC}=\frac{1}{2}BC\cdot OP=\frac{1}{2}\times7\times8=28$.

19.3　课题学习　选择方案

1. 解：(1) 表一：315；$45x$；30；$-30x+240$
表二：1 200；$400x$；1 400；$-280x+2\,240$
(2) 能完成此项运送任务的最节省费用的租车方案是租用甲种货车6辆，乙种货车2辆，
理由：当租用甲种货车 x 辆时，设两种货车的总费用为 y 元，
则 $y=400x+(-280x+2\,240)=120x+2\,240$，
又$\because 45x+(-30x+240)\geqslant330$，
$\therefore x\geqslant6$，
$\because 120>0$，$\therefore$ 在函数 $y=120x+2\,240$ 中，y 随 x 的增大而增大，
$\therefore$ 当 $x=6$ 时，y 取得最小值，
即能完成此项运送任务的最节省费用的租车方案是租用甲种货车6辆，乙

种货车 2 辆.

2. 解:(1)设 A 的单价为 x 元,B 的单价为 y 元,

根据题意,得$\begin{cases}3x+2y=120,\\5x+4y=210,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x=30,\\y=15.\end{cases}$

$\therefore A$ 的单价为 30 元,B 的单价为 15 元.

(2)设购买 A 奖品 z 个,则购买 B 奖品 $(30-z)$个,购买奖品的花费为 W 元,

由题意可知,$z\geqslant\frac{1}{3}(30-z)$,

$\therefore z\geqslant\frac{15}{2}$.

$W=30z+15(30-z)=450+15z$,

$\therefore$ 当 $z=8$ 时,W 取最小值,此时 $30-z=22$,

即购买 A 奖品 8 个,购买 B 奖品 22 个,花费最少.

3. 解:(1)根据题意得:

$\begin{cases}5x+3(30-x)\leqslant130,\\4x+6(30-x)\leqslant144,\end{cases}$

解得 $18\leqslant x\leqslant20$,

$\because x$ 是正整数,$\therefore x=18,19,20$.

共有三种方案:

方案一:生产 A 产品 18 件,B 产品 12 件;

方案二:生产 A 产品 19 件,B 产品 11 件;

方案三:生产 A 产品 20 件,B 产品 10 件.

(2)根据题意得:$y=700x+900(30-x)=-200x+27\ 000$,

$\because -200<0$,$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x=18$ 时,y 有最大值,

$y_{最大}=-200\times18+27\ 000=23\ 400$.

$\therefore$ 利润最大的方案是方案一:生产 A 产品 18 件,B 产品 12 件,最大利润为 23 400 元.

4. 解:(1)设 2018 年 6 月份 A 型车每辆 x 元,那么 2019 年 6 月份每辆$(x+400)$元,

根据题意得

$\frac{32\ 000}{x}=\frac{32\ 000(1+25\%)}{x+400}$,

解得 $x=1\ 600$,

经检验,$x=1\ 600$ 是方程的解.

$1\ 600+400=2\ 000$(元).

答:2019 年 6 月份 A 型车每辆销售价为2 000元.

(2)设 2019 年 7 月份进 A 型车 m 辆,获得的总利润为 y 元,则进 B 型车$(50-m)$辆,

根据题意得 $50-m\leqslant2m$,

解得 $m\geqslant16\frac{2}{3}$,

$\because y=(2\ 000-1\ 100)m+(2\ 400-1\ 400)(50-m)=-100m+50\ 000$,

$\therefore y$ 随 m 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $m=17$ 时,可以获得最大利润.

$50-17=33$(辆).

答:进 A 型车 17 辆,B 型车 33 辆,才能使这批车获利最多.

5. 解:(1)$28(13-x)$;$250(13-x)$

(2)设租车的总费用为 W 元,则有 $W=400x+250(13-x)=150x+3\ 250$.

由已知得 $45x+28(13-x)\geqslant500$,

解得 $x\geqslant8$.

$\because$ 在 $W=150x+3\ 250$ 中,$150>0$,

$\therefore W$ 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=8$ 时,W 有最小值,最小值为 4 450.

故租 A 型客车 8 辆、B 型客车 5 辆时,总的租车费用最低,最低为 4 450 元.

6. 解:(1)由题意得 $y=x+1.5\times2x+2(100-3x)=-2x+200$.

(2)由题意得 $-2x+200\geqslant180$,

解得 $x\leqslant10$,

$\because x\geqslant8$,$\therefore 8\leqslant x\leqslant10$.

$\because x$ 为整数,$\therefore x=8,9,10$.

$\therefore$ 有三种种植方案.

方案一:种植西红柿 8 公顷、马铃薯 76 公顷、青椒 16 公顷;

方案二:种植西红柿 9 公顷、马铃薯 73 公顷、青椒 18 公顷;

方案三:种植西红柿 10 公顷、马铃薯 70 公顷、青椒 20 公顷.

(3)方案一:投资 A 种类型的大棚 1 个,B 种类型的大棚 1 个;

方案二:投资 A 种类型的大棚 1 个,B 种类型的大棚 2 个;

方案三:投资 A 种类型的大棚 2 个,B 种类型的大棚 1 个;

方案四:投资 A 种类型的大棚 3 个,B 种类型的大棚 1 个.

阶段核心归类专训

1. 解:(1)快车的速度为:$180\div2=90$(km/h),

慢车的速度为:$180\div3=60$(km/h),

答:快车的速度为 90 km/h,慢车的速度为 60 km/h.

(2)由题意可得,

点 E 的横坐标为 $2+1.5=3.5$,

则点 E 的坐标为$(3.5,180)$.

点 C 的横坐标为$(360-180)\div90+3.5=5.5$,

则点 C 的坐标为$(5.5,360)$,

设线段 EC 所表示的 y_1 与 x 之间的函数解析式是 $y_1=kx+b$,

则$\begin{cases}3.5k+b=180,\\5.5k+b=360,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=90,\\b=-135.\end{cases}$

即线段 EC 所表示的 y_1 与 x 之间的函数解析式是 $y_1=90x-135$.

(3)点 F 的坐标为$(4.5,270)$,点 F 代表的实际意义是在 4.5 h 时,快车与慢车行驶的路程相等.

点拨:设点 F 的横坐标为 a,则 $60a=90a-135$,解得$a=4.5$. 则 $60a=270$.

2. 解:(1)设甲组加工零件的数量 y 与时间 x 之间的函数解析式为$y=kx$,因为当$x=6$ 时,$y=360$,所以 $k=60$.

即甲组加工零件的数量 y 与时间 x 之间的函数解析式为 $y=60x(0\leqslant x\leqslant6)$.

(2)$a=100+100\div2\times2\times(4.8-2.8)=300$.

(3)当工作 2.8 h 时共加工零件 $100+60\times2.8=268$(件),

所以装满第 1 箱的时刻在 2.8 h 后.

设经过 x_1 h 恰好装满第 1 箱.

则 $60x_1+100\div2\times2(x_1-2.8)+100=300$,解得 $x_1=3$.

从 $x=3$ 到 $x=4.8$ 这一时间段内,甲、乙两组共加工零件$(4.8-3)\times(100+60)=288$(件),

所以 $x>4.8$ 时,才能装满第 2 箱,此时只有甲组继续加工.

设装满第 1 箱后再经过 x_2 h 装满第 2 箱.

则 $60x_2+(4.8-3)\times100=300$,解得 $x_2=2$.

故经过 3 h 恰好装满第 1 箱,再经过 2 h恰好装满第 2 箱.

3. 解:(1)$y_{甲}=477x$,

$y_{乙}=\begin{cases}530x(0\leqslant x\leqslant3),\\424x+318(x>3).\end{cases}$

(2)当 $477x=424x+318$ 时,

解得 $x=6$.

即当 $x=6$ 时,到甲、乙两个商店购买所需费用相同;

当 $477x<424x+318$ 时,解得 $x<6$,

又 $x\geqslant4$,于是,当 $4\leqslant x<6$ 时,到甲商店购买合算;

当 $477x>424x+318$ 时,解得 $x>6$,

又 $x\leqslant10$,于是,当 $6<x\leqslant10$ 时,到乙商店购买合算.

4. 解:(1)$y=\begin{cases}2.4(0\leqslant x\leqslant30),\\-0.01x+2.7(30<x\leqslant70),\\2(70<x\leqslant100).\end{cases}$

(2)当 $0\leqslant x\leqslant30$ 时,$w=2.4x-(x+1)=1.4x-1$;

当 $30<x\leqslant70$ 时,$w=(-0.01x+2.7)x-(x+1)=-0.01x^2+1.7x-1$;

当 $70<x\leqslant100$ 时,$w=2x-(x+1)=x-1$;

(3)当 $0\leqslant x\leqslant30$ 时,$w'=1.4x-1-0.3x=1.1x-1$,当 $x=30$ 时,w'取最大值为 32,不合题意;

当 $30<x\leqslant70$ 时,$w'=-0.01x^2+1.7x-1-0.3x=-0.01x^2+1.4x-1=-0.01(x-70)^2+48$,当 $x=70$ 时,w'取最大值为 48,不合题意.

当 $70<x\leqslant100$ 时,$w'=x-1-0.3x=0.7x-1$,当 $x=100$ 时,w'取最大值为 69,此时 $0.7x-1\geqslant55$,解得$x\geqslant80$,

所以产量至少要达到 80 吨.

5. 解:(1)6;2;18

(2)$PD=6-2(t-12)=30-2t$,$S=\frac{1}{2}AD\cdot PD=\frac{1}{2}\times6\times(30-2t)=90-6t$,即点 P 在 CD 上运动时 S 与 t 之间的函数解析式为 $S=90-6t(12\leqslant t\leqslant15)$.

(3)当 $0\leqslant t\leqslant6$ 时易求得 $S=3t$,将$S=10$ 代入,得 $3t=10$,解得 $t=\frac{10}{3}$;当

$12\leqslant t\leqslant 15$ 时，$S=90-6t$，将 $S=10$ 代入，得 $90-6t=10$，解得 $t=\frac{40}{3}$. 所以当 t 为 $\frac{10}{3}$ 或 $\frac{40}{3}$ 时，三角形 APD 的面积为 $10\ cm^2$.

6. 解：(1) 点 P 在边 AB，BC，CD 上运动时所对应的 y 与 x 之间的函数解析式不相同，故应分段求出相应的函数解析式.

①当点 P 在边 AB 上运动，即 $0\leqslant x<3$ 时，

$y=\frac{1}{2}\times 4x=2x$；

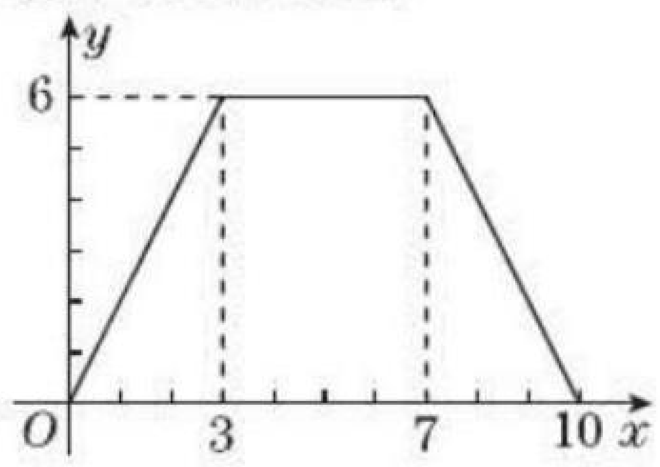
②当点 P 在边 BC 上运动，即 $3\leqslant x<7$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$；

③当点 P 在边 CD 上运动，即 $7\leqslant x\leqslant 10$ 时，$y=\frac{1}{2}\times 4(10-x)=-2x+20$.

所以 y 与 x 之间的函数解析式为

$$y=\begin{cases}2x & (0\leqslant x<3),\\ 6 & (3\leqslant x<7),\\ -2x+20 & (7\leqslant x\leqslant 10).\end{cases}$$

(2) 函数图象如图所示.



（第 6 题）

点拨：本题考查了分段函数在动态几何中的运用，体现了数学中的**分类讨论思想**和**数形结合思想**. 根据点 P 在边 AB，BC，CD 上运动时所对应的 y 与 x 之间的函数解析式不相同，分段求出相应的函数解析式，再画出相应的函数图象.

全章热门考点整合应用

1. 解：(1) 常量是 π 和 R，变量是 V 和 h.

(2) 常量是 π 和 h，变量是 V 和 R.

2. 解：在 $y^2=x+1$ 中，当 x 的值是 0 时，y 的值为 ± 1，此时 y 的值有两个，并不是唯一确定的，因此 y 不是 x 的函数. $y^2=x+1$ 变形为 $x=y^2-1$ 后，对于 y 的每一个值，另一个变量 x 都有唯一确定的值与其对应，因此 x 是 y 的函数.

3. 解：(1) 一切实数.

(2) 因为 $12x-3\neq 0$，所以 $x\neq\frac{1}{4}$.

(3) 因为 $16x-9\geqslant 0$ 且 $3x-2\neq 0$，所以 $x\geqslant\frac{9}{16}$ 且 $x\neq\frac{2}{3}$.

4. 解：若 $y=(5m-3)x^{2-n}+(m+n)$ 是关于 x 的一次函数，

则有 $\begin{cases}5m-3\neq 0,\\ 2-n=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m\neq\frac{3}{5},\\ n=1.\end{cases}$

所以当 $m\neq\frac{3}{5}$ 且 $n=1$ 时，$y=(5m-3)x^{2-n}+(m+n)$ 是关于 x 的一次函数.

若 $y=(5m-3)x^{2-n}+(m+n)$ 是关于 x 的正比例函数，

则有 $\begin{cases}5m-3\neq 0,\\ 2-n=1,\\ m+n=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}n=1,\\ m=-1.\end{cases}$

所以当 $m=-1$ 且 $n=1$ 时，$y=(5m-3)x^{2-n}+(m+n)$ 是关于 x 的正比例函数.

5. B　**6.** C　**7.** A

8. A　**点拨**：$\because$ 点 $M(1,a)$ 和点 $N(2,b)$ 在一次函数 $y=-2x+1$ 的图象上，由一次函数的性质可知一次函数 $y=-2x+1$ 中函数值 y 随 x 的增大而减小，$\therefore a>b$.

9. 解：(1) 因为图象与 y 轴的交点位于原点下方，即点 $(0,12-3k)$ 位于原点下方，所以 $12-3k<0$，解得 $k>4$. 所以 $k-2>4-2>0$，所以函数值随着自变量的增大而增大.

(2) 因为函数值随着自变量的增大而增大，所以 $k-2>0$，解得 $k>2$.

因为函数图象与 y 轴的交点位于原点上方，所以 $12-3k>0$，解得 $k<4$.

所以 k 的取值范围为 $2<k<4$.

所以满足条件的正整数 k 的值为 3.

10. B

11. 解：(1) 在 $y=2x$ 中，令 $x=1$，得 $y=2$，则点 B 的坐标是 $(1,2)$，

设一次函数的解析式是 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$，

则 $\begin{cases}b=3,\\ k+b=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=3,\\ k=-1.\end{cases}$

故一次函数的解析式是 $y=-x+3$.

(2) 点 $C(4,-2)$ 不在该一次函数的图象上. 理由：对于 $y=-x+3$，当 $x=4$ 时，$y=-1\neq -2$，所以点 $C(4,-2)$ 不在该一次函数的图象上.

(3) 在 $y=-x+3$ 中，令 $y=0$，得 $x=3$，则点 D 的坐标是 $(3,0)$，

则 $S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times OD\times 2=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$.

12. 解：(1) 由 $x+1=0$，解得 $x=-1$，

所以点 B 的坐标是 $(-1,0)$.

由 $-\frac{3}{4}x+3=0$，解得 $x=4$，

所以点 C 的坐标是 $(4,0)$.

(2) 因为 $BC=4-(-1)=5$，点 A 到 x 轴的距离为 $\frac{15}{7}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{15}{7}=\frac{75}{14}$.

13. A　**点拨**：由选项中的图象可知要将 $5x-1=2x+5$ 的解转化为两条直线的交点的横坐标，因此画出一次函数 $y=5x-1$ 与 $y=2x+5$ 的图象即可.

14. A

15. 解：(1) 把点 $(1,4)$ 的坐标代入 $y=kx+3$ 中，得 $4=k+3$.

$\therefore k=1$.

$\therefore$ 这个一次函数的解析式为 $y=x+3$.

(2) 由 (1) 知 $k=1$，

$\therefore$ 原不等式为 $x+3\leqslant 6$. $\therefore x\leqslant 3$.

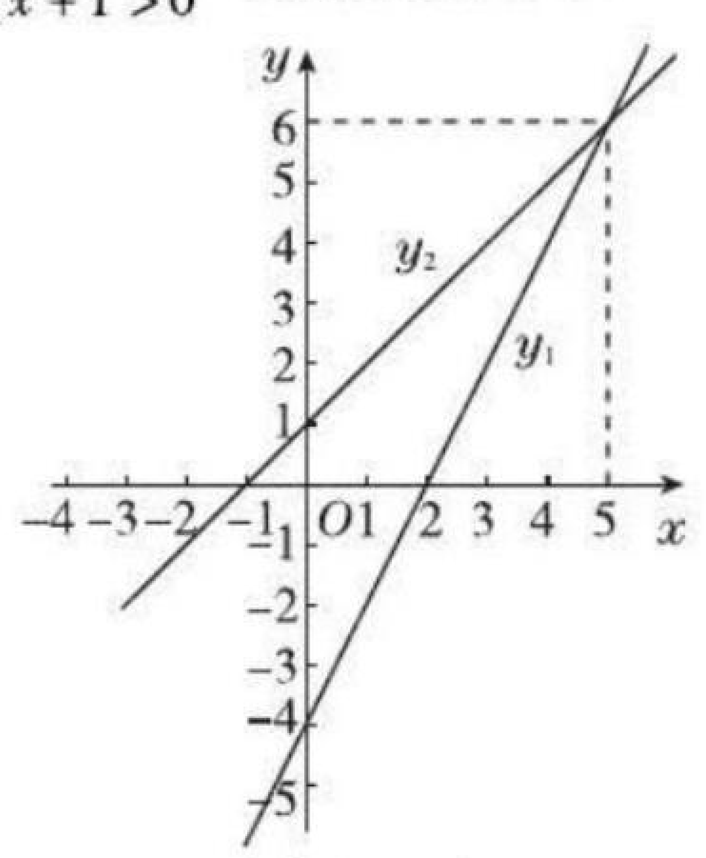
点拨：(1) 把点 $(1,4)$ 的坐标代入 $y=kx+3$ 中，用待定系数法求出 k 的值.

(2) 把求出的 k 值代入不等式 $kx+3\leqslant 6$ 中，求出不等式的解集.

16. 解：图象如图所示.

(1) 由图象知，直线 $y_1=2x-4$ 与 $y_2=x+1$ 的交点坐标为 $(5,6)$. 所以方程组 $\begin{cases}y=2x-4,\\ y=x+1\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=5,\\ y=6.\end{cases}$

(2) 由图象知，不等式组 $\begin{cases}2x-4>0,\\ x+1>0\end{cases}$ 的解集为 $x>2$.



（第 16 题）

17. 解：(1) 设正比例函数的解析式为 $y=k_1x$，一次函数的解析式为 $y=k_2x+b$，把 $A(3,4)$ 的坐标代入 $y=k_1x$ 得 $k_1=\frac{4}{3}$，把 $A(3,4)$，$B(0,-5)$ 的坐标分别代入 $y=k_2x+b$，解得 $k_2=3$，$b=-5$，故正比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{3}x$，一次函数的解析式为 $y=3x-5$.

(2) 因为 A 点横坐标为 3，所以 A 点到 OB 的距离为 3. 又因为 B 点纵坐标为 -5，所以 $OB=5$.

所以三角形 AOB 的面积为 $\frac{1}{2}\times 5\times 3=7.5$.

18. 解：(1) 16

(2) 降价后苹果的销售量为 $(760-640)\div(16-4)=10$（千克）.

设降价后销售金额 y（元）与销售量 x（千克）之间的函数解析式为 $y=kx+b$，该函数图象过点 $(40,640)$，$(50,760)$，

则 $\begin{cases}40k+b=640,\\ 50k+b=760,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=12,\\ b=160.\end{cases}$

即降价后销售金额 y（元）与销售量 x（千克）之间的函数解析式是 $y=12x+160\ (40<x\leqslant 50)$.

(3) $760-8\times 50=360$（元）.

答：该水果店这次销售苹果盈利了

360 元.

19. 解:(1)5 900;6 000

(2)当 $0\leqslant x\leqslant 1\ 000$ 时,$y_甲=4x$,

当 $x>1\ 000$ 时,

$y_甲=4\ 000+3.8(x-1\ 000)=3.8x+200$,

$\therefore y_甲=\begin{cases}4x(0\leqslant x\leqslant 1\ 000 \text{ 且 } x \text{ 为整数}),\\3.8x+200(x>1\ 000 \text{ 且 } x \text{ 为整数}).\end{cases}$

当 $0\leqslant x\leqslant 2\ 000$ 时,$y_乙=4x$,

当 $x>2\ 000$ 时,

$y_乙=8\ 000+3.6(x-2\ 000)=3.6x+800$,

$\therefore y_乙=\begin{cases}4x(0\leqslant x\leqslant 2\ 000 \text{ 且 } x \text{ 为整数}),\\3.6x+800(x>2\ 000 \text{ 且 } x \text{ 为整数}).\end{cases}$

(3)由题意,得

当 $0\leqslant x\leqslant 1\ 000$ 时,两家林场白杨树苗价格一样,

$\therefore$ 到两家林场购买所需费用一样;

当 $1\ 000<x\leqslant 2\ 000$ 时,甲林场有优惠而乙林场无优惠,

$\therefore$ 当 $1\ 000<x\leqslant 2\ 000$ 时,到甲林场购买合算;

当 $x>2\ 000$ 时,$y_甲=3.8x+200$,

$y_乙=3.6x+800$,

当 $y_甲=y_乙$ 时,

$3.8x+200=3.6x+800$,

解得 $x=3\ 000$,

$\therefore$ 当 $x=3\ 000$ 时,到两家林场购买所需费用一样;

当 $y_甲<y_乙$ 时,

$3.8x+200<3.6x+800$,

解得 $x<3\ 000$,

$\therefore$ 当 $2\ 000<x<3\ 000$ 时,到甲林场购买合算;

当 $y_甲>y_乙$ 时,

$3.8x+200>3.6x+800$,

解得 $x>3\ 000$,

$\therefore$ 当 $x>3\ 000$ 时,到乙林场购买合算.

综上所述,当 $0\leqslant x\leqslant 1\ 000$ 或 $x=3\ 000$时,到两家林场购买所需费用一样;

当 $1\ 000<x<3\ 000$ 时,到甲林场购买合算;

当 $x>3\ 000$ 时,到乙林场购买合算.

第二十章 数据的分析

20.1 数据的集中趋势

第 1 课时 算术平均数

1. D **2.** C **3.** B

4. C **点拨**:实际平均成绩为$\frac{85\times 40+80}{40}=87$(分). 故选 C.

5. 8

6. ①统计;②数据;③统计

7. D **点拨**:$\because (105-15)\div 30=90\div 30=3$,$\therefore$ 求出的平均数与实际平均数的差是 -3,故选 D.

8. B

9. C **点拨**:由题意可得,两次加油间耗油 30 L,行驶的路程为 $6\ 600-6\ 200=400$(km),所以该车每 100 km 的平均耗油量为 $30\div(400\div 100)=7.5$(L). 故选 C.

10. B

11. 错解:C

正解:D

误区诊断:因为从甲地到乙地的速度为 v_1,从乙地返回甲地的速度为 v_2,所以有的同学会误认为来回的平均速度是$\frac{v_1+v_2}{2}$. 造成错误的原因是对平均数的意义理解不透彻. 根据平均数的定义,来回的平均速度应为$\frac{来回所走的总路程}{来回所用的总时间}$.

12. 解:(1)因为 $2,4,2x,4y$ 四个数的平均数是 5,所以 $2+4+2x+4y=5\times 4$,即 $x+2y=7$. ①

因为 $5,7,4x,6y$ 四个数的平均数是 9,所以 $5+7+4x+6y=9\times 4$,即

$2x+3y=12$. ②

解由①②构成的二元一次方程组,可得$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$

所以 $x^2+y^3=3^2+2^3=17$.

(2)因为$\frac{x_1+x_2}{2}=4$,所以 $x_1+x_2=8$,

所以$\frac{x_1+1+x_2+5}{2}=7$,即 x_1+1 与 x_2+5 的平均数是 7.

13. 解:$(6+12+16+10)\div 4$

$=44\div 4$

$=11$

答:这四个小组回答正确题数的平均数是 11.

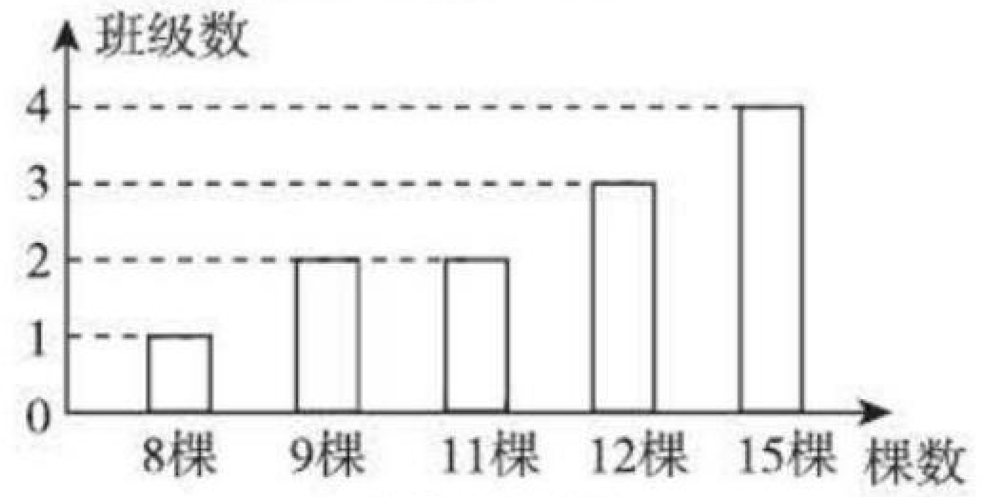
点拨:平均数的计算方法是求出所有数据的和,然后除以数据的总个数.

14. 解:(1)$3\div 25\%=12$.

答:该校的班级总数是 12.

(2)植树 11 棵的班级数是 $12-1-2-3-4=2$. 补充条形图如图所示.

植树班级数条形图



(第 14 题)

(3)$(8\times 1+9\times 2+11\times 2+12\times 3+15\times 4)\div 12=12$(棵).

答:该校各班在这一活动中植树的平均棵数是 12 棵.

15. 解:(1)这 5 期的集训共有:$5+7+10+14+20=56$(天).

小聪 5 次测试的平均成绩是:$(11.88+11.76+11.61+11.53+11.62)\div 5=11.68$(秒).

答:这 5 期的集训共有 56 天,小聪 5 次测试的平均成绩是 11.68 秒.

(2)略.

第 2 课时 加权平均数

1. B **2.** A **3.** C **4.** B

5. D **6.** B **7.** 1.15 **8.** D

9. B **点拨**:根据题意分析发现,取每一区间的首尾两数的平均数乘该区间的频数,再全部加起来除以总数即可.

$[(0+10)\div 2\times 8+(10+20)\div 2\times 12]\div 20=(40+180)\div 20=11$. 故选 B.

10. B **点拨**:本题不但要考虑客房标价,还要考虑入住百分率.

11. 解:(1)乙的平均成绩为

$\frac{73+80+82+83}{4}=79.5$.

因为 $80.25>79.5$,所以应选派甲.

(2)甲的平均成绩为

$\frac{85\times 2+78\times 1+85\times 3+73\times 4}{2+1+3+4}$

$=79.5$,

乙的平均成绩为

$\frac{73\times 2+80\times 1+82\times 3+83\times 4}{2+1+3+4}$

$=80.4$.

因为 $79.5<80.4$,所以应选派乙.

12. 解:(1)①$m=20\div 20\%=100$,

②$n=100-40-20-10=20$,

③$c=\frac{40}{100}\times 360°=144°$;

故答案为 100,20,144°

(2)被抽取同学的平均体重为:$\frac{1}{100}(40\times 10+45\times 20+50\times 40+55\times 20+60\times 10)=50$(千克)

答:被抽取同学的平均体重为 50 千克.

(3)$1\ 000\times 30\%=300$(人).

答:七年级学生体重低于 47.5 千克的学生大约有 300 人.

13. 解:(1)4%;

(2)$92.1\times 52\%+85.0\times 26\%+69.2\times 18\%+41.3\times 4\%=84.1$(分);

答:所抽取的学生的测试成绩的平均分为 84.1 分;

(3)设抽取的总人数为 n,$80.0\leqslant 41.3\times n\times 4\%\leqslant 89.9$,

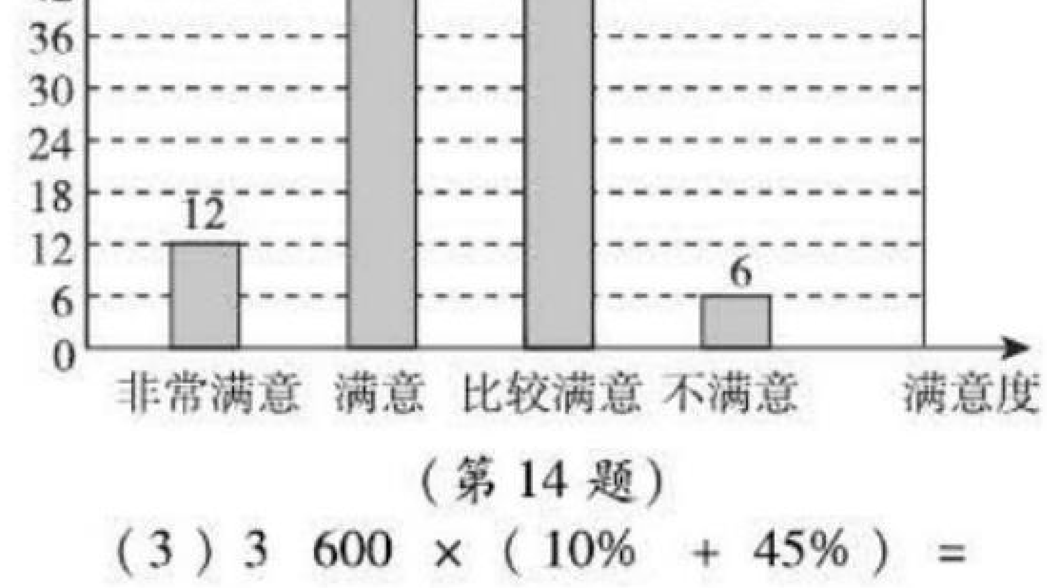
所以 $48\frac{176}{413}\leqslant n\leqslant 54\frac{173}{413}$,

又因为 $4\%\ n$ 为整数,所以 $n=50$.

所以估计九年级学生中优秀的学生均有 $52\%\times 50\div 10\%=260$(人).

14. 解:(1)120;45%

(2)$n=120\times 40\%=48$. 补全条形图如图所示.



(第 14 题)

(3)$3\ 600\times(10\%+45\%)=$

1 980(名).
估计该景区服务工作平均每天得到1 980名游客的肯定.

第3课时　加权平均数的应用

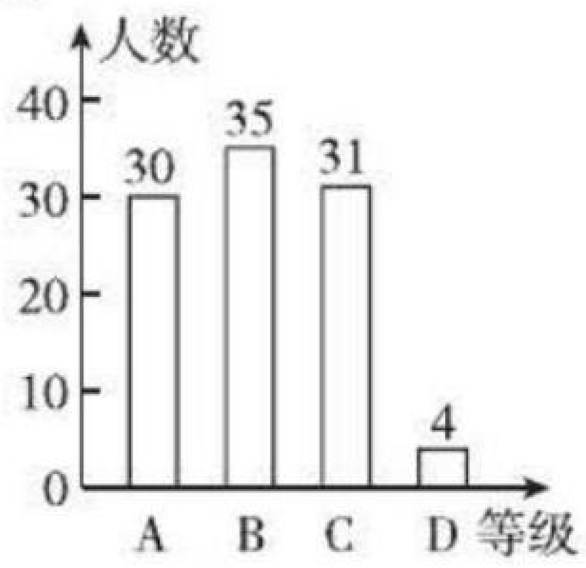
1. 78. 8分
2. 解:(1)甲民主评议得分为100×25%=25(分);乙民主评议得分为100×40%=40(分);丙民主评议得分为100×35%=35(分).
(2)甲将被录用.理由:甲的成绩为$\frac{2\times80+2\times98+1\times25}{2+2+1}=76.2$(分);
乙的成绩为$\frac{2\times85+2\times75+1\times40}{2+2+1}=72$(分);
丙的成绩为$\frac{2\times95+2\times73+1\times35}{2+2+1}=74.2$(分).
因为甲的成绩最好,所以甲将被录用.
3. 解:(1)m的值是50,a的值是10,b的值是20.
(2)$\frac{1\times15+2\times10+3\times20+4\times5}{50}\times500=1\ 150$(本).
答:估计该年级全体学生在这次活动中课外阅读书籍的总量大约是1 150本.
4. 解:(1)∵第①组所占的百分比为1-96%=4%,
∴第②组所占的百分比为12%-4%=8%,
则这次跳绳测试共抽取学生12÷8%=150(名).
∴第①组的人数为150×4%=6.
∵第②③④组的频数之比为4∶17∶15,第②组的频数为12,∴第③④组的人数分别为51,45,则第⑤组的人数为150-(6+12+51+45+12)=24.
∴第①~⑥组分别有6人、12人、51人、45人、24人、12人.
(2)这次跳绳测试中达到优秀的人数为24+12=36.
(3)估计这批学生1 min跳绳次数的平均数为
$\frac{100\times6+110\times12+120\times51+130\times45+140\times24+150\times12}{150}$
=127(次).

第4课时　中位数和众数

1. C　2. C　3. C　4. C　5. B　6. B
7. A
8. A　点拨:根据题意得:80×5-(81+77+80+82)=80,则丙的得分是80;众数是80.故选A.
9. 5和2　点拨:在这组数据中,5和2都出现了3次,出现的次数最多,因此本题有两个众数.
易错总结:众数是一组数据中出现次数最多的数据,如果一组数据有几个数据重复出现的次数相同,并且次数是最多的,那么这几个数据都是这组数据的众数,即一组数据的众数不一定唯一.
10. 解:(1)表格中的五个数据(人数)的中位数是1 300.
(2)平均每天需要租车却未租到车的人数为
(1 500+1 200+1 300+1 300+1 200)÷5=1 300(人),
1 300+700=2 000(人).
答:平均每天在7:00~8:00需要租用公共自行车的人数为2 000人.
11. 解:(1)3 400;3 000
(2)用中位数或众数反映该公司全体员工月收入水平较为合适.理由:平均数受极端值45 000元的影响,只有3个人的工资超过了平均数6 276元,因此用平均数反映该公司全体员工月收入水平不合适.
12. 解:(1)$\bar{x}=\frac{1}{20}\times(9\times1+10\times1+11\times6+12\times4+13\times2+15\times2+16\times2+19\times1+20\times1)=13$(个);
答:这一天20名工人生产零件的平均个数为13个;
(2)中位数为$\frac{12+12}{2}=12$(个),众数为11个.
当定额为13个时,有8人达标,6人获奖,不利于提高工人的积极性;
当定额为12个时,有12人达标,8人获奖,不利于提高大多数工人的积极性;
当定额为11个时,有18人达标,12人获奖,有利于提高大多数工人的积极性;
∴定额为11个时,有利于提高大多数工人的积极性.
13. 解:(1)150;42
(2)B;36°
(3)$2\ 500\times\frac{27+15+30}{150}=1\ 200$(户).
估计家庭年文化教育消费10 000元以上的家庭有1 200户.

第5课时　应用中位数、众数及平均数分析数据

1. B　2. D
3. C　4. D
5. 解:(1)100
(2)30;0.31
(3)由(2)知$a=30$,
补全的统计图如图所示.
(4)240



(第5题)

6. D
7. B　点拨:甲组家庭用水量的中位数为$\frac{5+5}{2}=5$(t).
乙组家庭用水量为4 t的有$12\times\frac{90}{360}=3$(户),
6 t的有$12\times\frac{90}{360}=3$(户),
7 t的有$12\times\frac{60}{360}=2$(户),
所以5 t的有12-(3+3+2)=4(户).
所以乙组家庭用水量的中位数为$\frac{5+5}{2}=5$(t).
则甲组和乙组五月份家庭用水量的中位数相等,故选B.
8. B　点拨:在求众数时,将众数出现的次数误认为是众数.众数是一组数据中出现次数最多的数,容易混淆的是“次数”和“出现次数最多的数”.本题中,条形统计图的高度表示捐款人数,是相对应的捐款金额出现的次数,易知本题捐款金额的众数是30元.
9. 解:(1)根据题意得(80×1 000×60%+82.5×1 000×40%)÷1 000=81(分),
所以该校九年级学生本次数学测试成绩的平均数是81分.
(2)D
10. 解:(1)$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(161+155+174+163+152)=161$;
(2)①0.22;3
②这50名学生身高的中位数落在159.5~163.5 cm,身高在155.5~159.5 cm的学生数最多.
11. 解:(1)平均数为278件,
中位数为180件,
众数为90件;
(2)如果想让一半左右的营业员都能达到月销售目标,平均数、中位数、众数中,中位数最适合作为月销售目标.理由如下:因为中位数为180件,即月销售量大于或等于180件与小于180件的人数差不多.
所以中位数最适合作为月销售目标,有一半左右的营业员能达到销售目标.

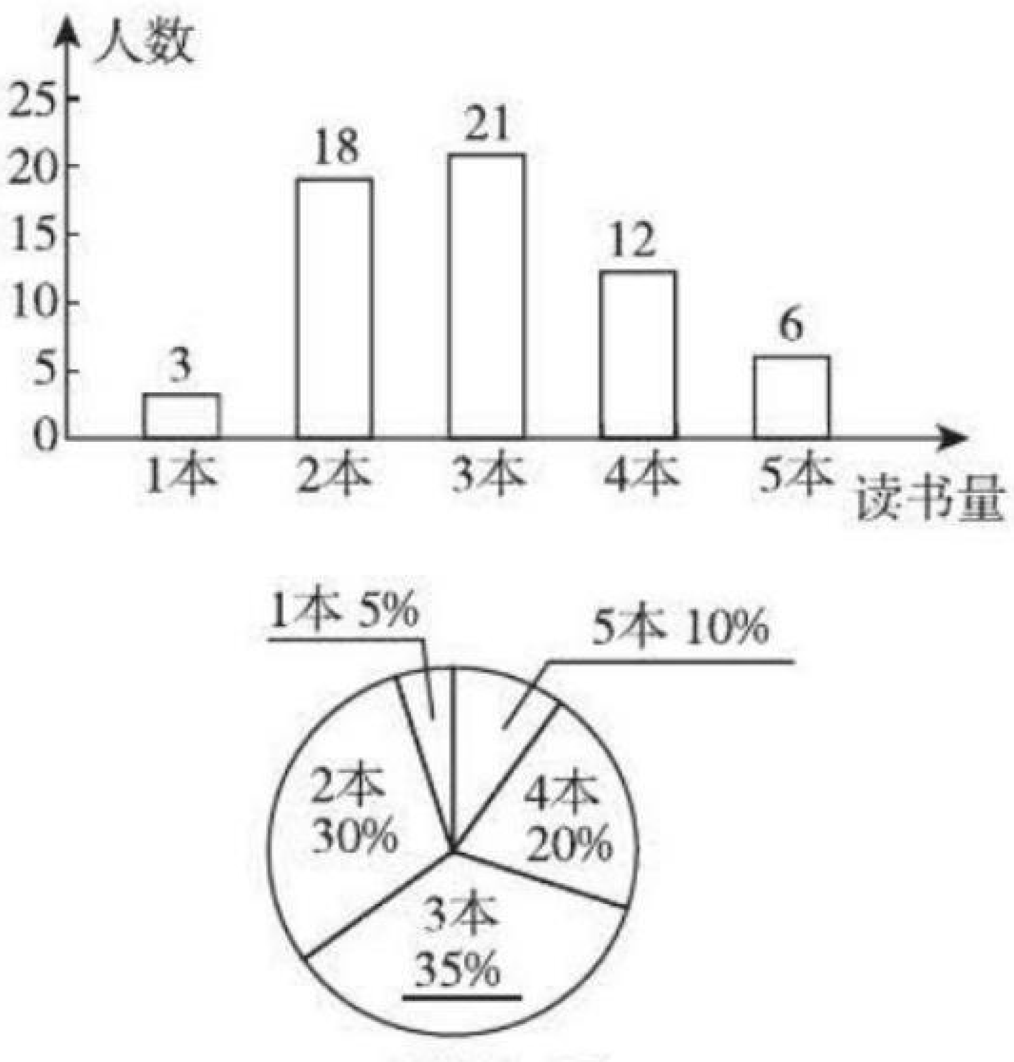
阶段核心归类专训

1. 解:(1)$\frac{9\times2+10\times5+12\times3}{2+5+3}=10.4$(元),
所以混合后得到的什锦糖果的价格定为每千克10.4元才能保证获得的利润不变.
(2)$\frac{9\times6+10\times3+12\times1}{6+3+1}=9.6$(元),
所以混合后得到的什锦糖果的价格定为每千克9.6元才能保证获得的利润不变.
2. 解:(1)甲的成绩为
$\frac{86\times5+93\times3+73\times2}{5+3+2}=85.5$(分),
乙的成绩为$\frac{81\times5+95\times3+79\times2}{5+3+2}=84.8$(分),所以甲将被录用.
(2)甲能,乙不一定能.理由:由频数直方图可知,85分及以上的共有7人,因此甲能被录用,乙不一定能被录用.

3. 解:(1)3

所抽取该校七年级学生四月份

“读书量”的统计图



(第 3 题)

(2)平均数 $=\dfrac{3\times1+18\times2+21\times3+12\times4+6\times5}{3+18+21+12+6}$

$=3$;

(3)四月份“读书量”为 5 本的学生人数为 120 人.

4. 解:(1)这四名候选人面试成绩的中位数为 89 分.

(2)由题意得,$x\times60\% +90\times40\% =87.6$,

解得 $x=86$.

(3)甲候选人的综合成绩为 $90\times60\% +88\times40\% =89.2$(分),

乙候选人的综合成绩为 $84\times60\% +92\times40\% =87.2$(分),

丁候选人的综合成绩为 $88\times60\% +86\times40\% =87.2$(分),

所以以综合成绩排序确定所要招聘的前两名的人选是甲和丙.

5. 解:(1)4.5 首

(2)大赛后一个月该校学生一周诗词诵背 6 首(含 6 首)以上的有

$1\ 200\times\dfrac{40+25+20}{10+10+15+40+25+20}=850$(人).

答:大赛后一个月该校学生一周诗词诵背 6 首(含 6 首)以上的有 850 人.

(3)(答案不唯一)活动启动之初“一周诗词诵背数量”的中位数是 4.5 首,众数是 4 首,

大赛结束后一个月时“一周诗词诵背数量”的中位数是 6 首,众数是 6 首,

由比赛前后的中位数和众数看,比赛后学生诵背诗词的积极性明显提高,这次举办的效果比较理想.

6. 解:(1)补全表格如下:

年级	平均数	中位数	满分率
初一	90.1	93	25%
初二	92.8	97.5	20%

(2)135

(3)初二年级掌握禁毒知识的总体水平较好.

因为初二年级成绩的平均数比初一高,说明初二年级平均水平高,且初二年级成绩的中位数比初一大,说明初二年级得高分的人数多于初一,所以初二年级掌握禁毒知识的总体水平较好.

7. 解:(1)$a=4$;$b=83$;$c=85$;$d=90$;

(2)从平均数看三个班都一样;

从中位数看,1 班和 3 班一样,是 80,2 班最高,是 85;

从众数看,1 班和 3 班都是 80,2 班是 90;

综上所述,2 班成绩比较好;

(3)$570\times\dfrac{4}{30}=76$(张),

答:估计需要准备 76 张奖状.

20.2 数据的波动程度

第 1 课时 方 差

1. B **2.** D **3.** C **4.** A **5.** B **6.** A

7. B **8.** D **9.** D

10. A **点拨**:A,由方差公式计算可知,小黄成绩的方差小于小韦成绩的方差,故小黄的成绩波动幅度小,成绩更稳定,此选项正确,C 选项错误;

B,小韦成绩的众数为 10 环,小黄成绩的众数为 9 环,此选项错误;

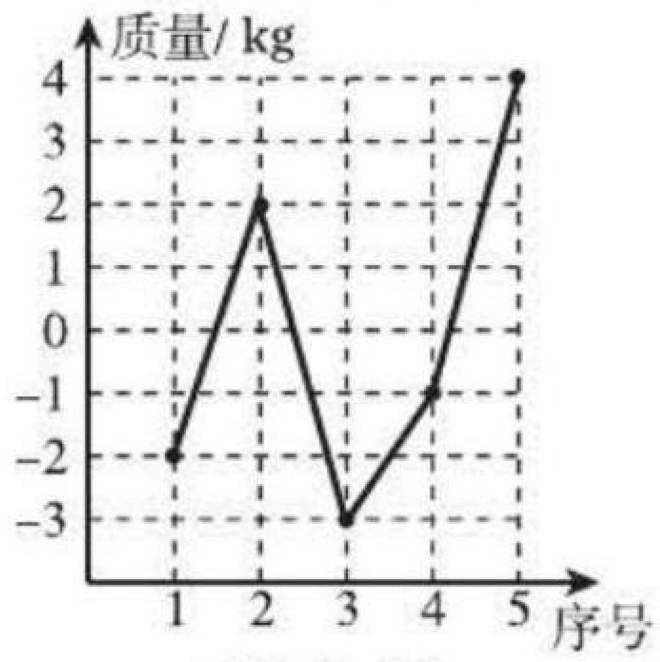
D,小韦的平均成绩为 $\dfrac{6+7\times2+10\times3}{6}=\dfrac{25}{3}$(环),小黄的平均成绩为 $\dfrac{7+8\times2+9\times3}{6}=\dfrac{25}{3}$(环),此选项错误. 故选 A.

11. B **点拨**:可分别计算前后的方差比较.

诊断:本题易因对方差意义的理解不透彻,认为年龄增大,方差随之增大,而错选 A 选项.

12. 解:(1)乙组数据的折线统计图如图所示:

记录数据折线统计图



(第 12 题)

(2)①$\bar{x}_甲=50+\bar{x}_乙$;

②$s^2_甲=s^2_乙$. 理由:$\bar{x}_甲=50$,$\bar{x}_乙=0$.

$\because s^2_甲=\dfrac{1}{5}[(48-50)^2+(52-50)^2+(47-50)^2+(49-50)^2+(54-50)^2]=6.8$,

$s^2_乙=\dfrac{1}{5}[(-2-0)^2+(2-0)^2+(-3-0)^2+(-1-0)^2+(4-0)^2]=6.8$,

$\therefore s^2_甲=s^2_乙$.

13. 解:(1)这五天的日最高气温和日最低气温的平均数分别是:

$\bar{x}_高=\dfrac{23+25+23+25+24}{5}=24$,

$\bar{x}_低=\dfrac{21+22+15+15+17}{5}=18$,

方差分别是:

$s^2_高=\dfrac{(23-24)^2+(25-24)^2+(23-24)^2+(25-24)^2+(24-24)^2}{5}$

$=0.8$,

$s^2_低=\dfrac{(21-18)^2+(22-18)^2+(15-18)^2+(15-18)^2+(17-18)^2}{5}$

$=8.8$,

$\because s^2_高<s^2_低$,

$\therefore$ 该市这 5 天的日最低气温波动大;

(2)略.

14. 解:表一:3;3;1

表二:400;402

乙 理由:由表二知,乙包装机分装的奶粉质量的方差小,分装质量比较稳定,所以包装机分装情况比较好的是乙.(答案不唯一)

第 2 课时 数据分析的应用

1. D **点拨**:A,甲的数学成绩高于班级平均分,且成绩比较稳定,正确;B,乙的数学成绩在班级平均分附近波动,且比丙好,正确;C,丙的数学成绩低于班级平均分,但成绩逐次提高,正确;D,就甲、乙、丙三个人而言,丙的数学成绩最不稳,故 D 错误.

故选 D.

2. 解:(1)甲班的优秀率为 $\dfrac{3}{5}\times100\%=60\%$;乙班的优秀率为 $\dfrac{2}{5}\times100\%=40\%$.

(2)甲、乙两个班比赛成绩的中位数分别是 100 个和 97 个.

(3)估计甲班的方差较小.

(4)甲班. 因为甲班 5 人比赛成绩的优秀率比乙班高,中位数比乙班大,方差比乙班小,综合评定甲班成绩较好.

3. 解:(1)$a=86$,$b=85$,$c=85$.

(2)根据以上数据分析,八年级(2)班前 5 名学生的成绩较好. 理由:因为八年级(2)班的平均分高于八年级(1)班的平均分,且八年级(2)班成绩的方差小于八年级(1)班成绩的方差,说明八年级(2)班的成绩更稳定,而中位数和众数两个班是一样的,所以八年级(2)班前 5 名学生的成绩较好.

4. 解:(1)$a=7$,$b=7.5$,$c=4.2$.

(2)从平均成绩看甲、乙二人的平均成绩相等,均为 7 环,从中位数看甲成绩的中位数小于乙成绩的中位数,从众数看甲射中 7 环的次数最多而乙射中 8 环的次数最多,从方差看甲的成绩比乙的成绩稳定.

综合以上各因素,若选派一名队员参赛,可选择乙参赛,因为乙获得较好成绩的可能性更大.(答案不唯一)

20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析

1. 整理数据;分析数据

2. D **3.** C **4.** B **5.** C **6.** D

7. 解:(1)嘉兴市 2010—2014 年社会消费品零售总额增速这组数据的中位数是 14.2%.

(2)$\because\dfrac{1\ 083.7+1\ 196.9+1\ 347.0}{3}=1\ 209.2$,

∴ 嘉兴市2012—2014年社会消费品零售总额这组数据的平均数是1 209.2.

(3)答案不唯一，合理即可. 例如：从该市2010—2014年社会消费品零售总额增速这组数据的中位数分析，预测嘉兴市2015年社会消费品零售总额为1 347.0×(1+14.2%)亿元.

8. 解：(1)30.5；

(2)折线统计图；

(3)2018年7~12月与2017年同期相比PM2.5平均浓度下降了.

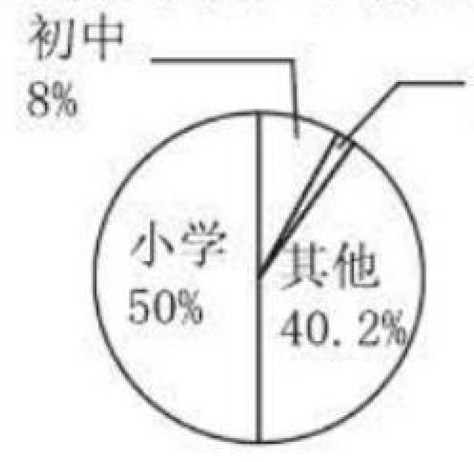
9. 解：(1)

2015年全省教育发展情况统计表

	学校所数/所	在校学生数/万人	在职教师数/万人
小学	12 500	440	20
初中	2 000	200	12
高中	450	75	5
其他	10 050	280	11
合计	25 000	995	48

(2)补全扇形图如图所示.

全省各级各类学校所数扇形图



(第9题)

(3)①小学师生比=1∶22，初中师生比=3∶50，高中师生比=1∶15，

∴ 小学学段的师生比最小.

②小学在校学生数最多.（答案不唯一）

③高中学校所数偏少.（答案不唯一）

10. 解：(1)8.5；0.7；8

(2)从平均数看，两个班的平均数相同，则甲、乙两个班的成绩一样好；

从中位数看，甲班的中位数大，所以甲班的成绩较好；

从众数看，乙班的众数大，所以乙班的成绩较好；

从方差看，甲班的方差小，所以甲班的成绩更稳定.

阶段核心归类专训

1. 解：(1)甲种电子钟走时误差的平均数是$\frac{1}{10}(1-3-4+4+2-2+2-1-1+2)=0(s)$，

乙种电子钟走时误差的平均数是

$\frac{1}{10}(4-3-1+2-2+1-2+2-2+1)=0(s)$.

(2)$s_{甲}^2=\frac{1}{10}[(1-0)^2+(-3-0)^2+\cdots+(2-0)^2]=\frac{1}{10}\times60=6$，

$s_{乙}^2=\frac{1}{10}[(4-0)^2+(-3-0)^2+\cdots+(1-0)^2]=\frac{1}{10}\times48=4.8$.

(3)买乙种电子钟，因为两种电子钟走时误差的平均数相同，且甲种电子钟走时误差的方差比乙种大，说明乙种电子钟的走时稳定性更好，所以乙种电子钟的质量更优.

2. 解：(1)$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{4}(50+36+40+34)=40(kg)$，$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{4}(36+40+48+36)=40(kg)$，估计甲、乙两片山杨梅的产量总和为$40\times100\times98\%\times2=7\ 840(kg)$.

(2)$s_{甲}^2=\frac{1}{4}[(50-40)^2+(36-40)^2+(40-40)^2+(34-40)^2]=38$，

$s_{乙}^2=\frac{1}{4}[(36-40)^2+(40-40)^2+(48-40)^2+(36-40)^2]=24$，所以$s_{甲}^2>s_{乙}^2$.

所以乙山上的杨梅产量较稳定.

3. 解：(1)(1)班选手进球数的平均数为$\frac{1}{10}(10\times1+9\times1+8\times1+7\times4+6\times0+5\times3)=7$(个)，

(2)班选手进球数的平均数为$\frac{1}{10}(10\times0+9\times1+8\times2+7\times5+6\times0+5\times2)=7$(个)；

(1)班投中7个球的有4人，人数最多，故众数为7个，

(2)班投中7个球的有5人，人数最多，故众数为7个；

(1)班选手进球数按从小到大的顺序排第5、第6名同学各进7个球，

故中位数为7个，

(2)班选手进球数按从小到大的顺序排第5、第6名同学各进7个球，

故中位数为7个.

(2)(1)班选手进球数的方差$s_1^2=\frac{1}{10}[(10-7)^2+(9-7)^2+(8-7)^2+4\times(7-7)^2+0\times(6-7)^2+3\times(5-7)^2]=2.6$，

(2)班选手进球数的方差$s_2^2=\frac{1}{10}[0\times(10-7)^2+(9-7)^2+2\times(8-7)^2+5\times(7-7)^2+0\times(6-7)^2+2\times(5-7)^2]=1.4$，

(2)班选手水平发挥更稳定，如果争取夺得总进球数团体第1名，应该选择(2)班；

(1)班前3名选手的成绩突出，分别进10个、9个、8个球，如果要争取个人进球数进入学校前3名，应该选择(1)班.

4. 解：(1)因为$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{6}(15+16+16+14+14+15)=15(cm)$；

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{6}(11+15+18+17+10+19)=15(cm)$.

甲路段的中位数为15 cm；乙路段的中位数为16 cm.

$s_{甲}^2=\frac{2}{3}$，$s_{乙}^2=\frac{35}{3}$.

所以相同点：两段台阶路每一级台阶高度的平均数相同. 不同点：两段台阶路每一级台阶高度的中位数、方差不同.

(2)甲段台阶路走起来更舒服一些，因为它的每一级台阶高度的方差小.

(3)每一级台阶高度均整修为15 cm(原每一级台阶高度的平均数)，使得方差为0，此时游客行走最方便.

全章热门考点整合应用

1. 4.4 **2.** C

3. D **点拨**：因为$10+13+12+15=50$(人)，捐款金额按照从小到大的顺序排列第25个和第26个都是20元，所以中位数$=\frac{20+20}{2}=20$(元).

4. C

5. C **点拨**：根据题意得丙的得分为$80\times5-(81+79+80+82)=78$(分)，方差为$\frac{1}{5}\times[(81-80)^2+(79-80)^2+(78-80)^2+(80-80)^2+(82-80)^2]=2$. 故选C.

6. B

7. 解：(1)平均数是260个，中位数是240个，众数是240个.

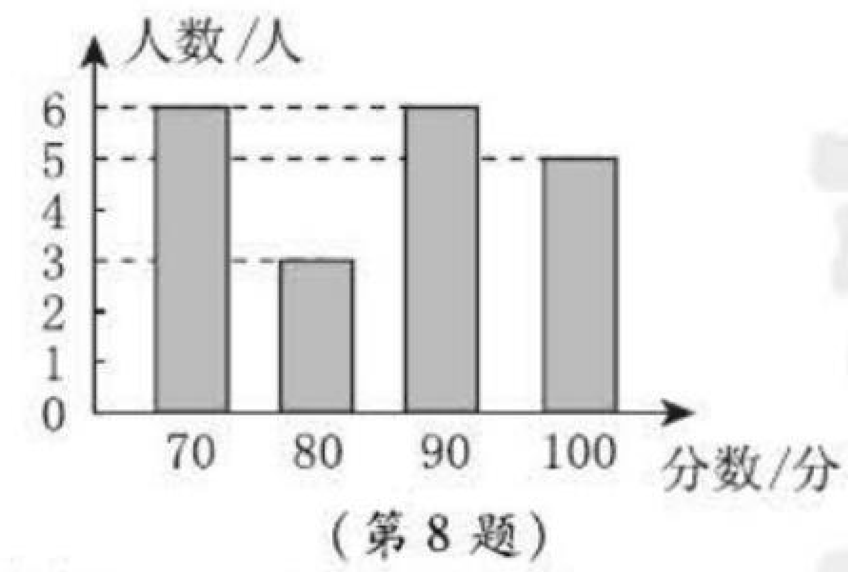
(2)不合理. 因为表中数据显示，每月能完成260个的人数一共有4人，还有11人不能达到此定额，尽管260个是平均数，但不利于调动多数员工的积极性，而240个既是中位数，又是众数，是大多数人能达到的定额，故定额为240个较为合理.

8. 解：(1)54°

(2)6÷30%=20(人)，

20-6-3-6=5(人)，补充统计图如图：

甲校成绩条形图



(第8题)

(3)20-1-7-8=4(人)，

$\bar{x}_{乙}=\frac{70\times7+80\times4+90\times1+100\times8}{20}=85$(分).

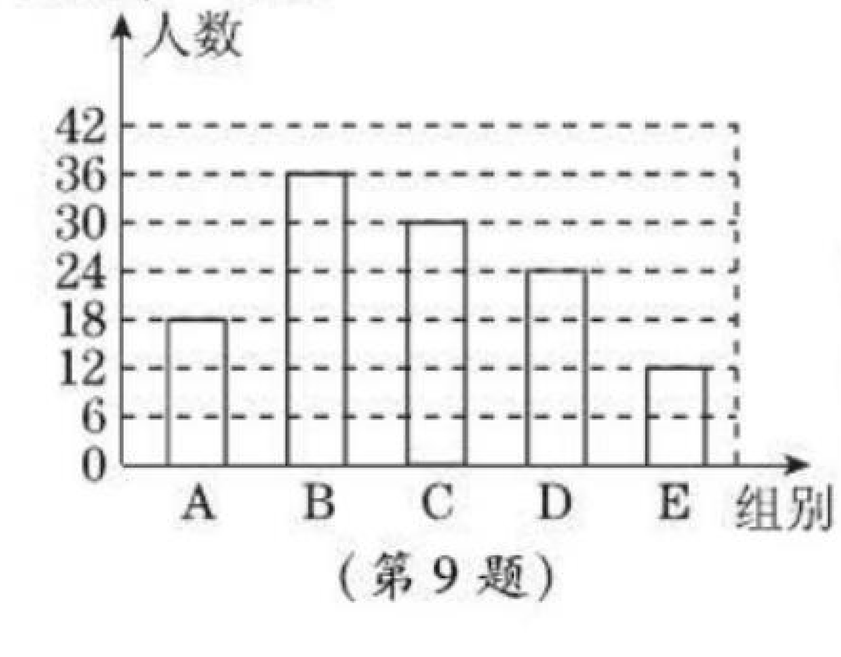
(4)因为$s_{甲}^2<s_{乙}^2$，所以甲校20名学生的成绩相对乙校较整齐.

9. 解：(1)36；30%；120

补全条形图如图.

(2)C

(3)估计个人旅游年消费金额在6 000元以上的人数为$3\ 000\times(10\%+20\%)=900$.



(第9题)

达标检测卷答案

第十六章达标检测卷

一、1. D　2. B　3. B　4. D　5. A　6. D
7. C

8. B　**点拨**:原等式可化为 $|a-b|+|b-c|=0$,$\therefore a-b=0$ 且 $b-c=0$,$\therefore a=b=c$,即 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

9. A　10. D

二、11. $\sqrt{6}$

12. 4　**点拨**:$\because$ 最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{2a+3}$ 可以合并,$\therefore$ 它们的被开方数相同,即 $3a-1=2a+3$,解得 $a=4$.

13. 8　**点拨**:$x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}-2+2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=(\sqrt{6})^2+2=6+2=8$.

14. 7

15. $2m-10$　**点拨**:$\because$ 三角形的三边长分别为 $3,m,5$,
$\therefore 2<m<8$,$\therefore 2-m<0$,$m-8<0$,
$\therefore \sqrt{(2-m)^2}-\sqrt{(m-8)^2}=m-2-(8-m)=2m-10$.

16. -1 或 -7　**点拨**:由二次根式有意义,得 $\begin{cases}x^2-9\geqslant 0,\\ 9-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $x^2=9$,$\therefore x=\pm 3$,$\therefore y=4$,$\therefore x-y=-1$ 或 -7.

17. $-2a$　**点拨**:由题中数轴可以看出,$a<0$,$b>0$,所以 $a-b<0$,所以 $\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}+\sqrt{(a-b)^2}=-a-b+[-(a-b)]=-a-b-a+b=-2a$.

18. $\frac{1}{2}$

19. $-\sqrt{-y}$　**点拨**:由题意知 $x<0$,$y<0$,所以 $x\sqrt{-\frac{y}{x^2}}=-\sqrt{-y}$. 解此类题要注意二次根式的隐含条件:被开方数是非负数.

20. 181

三、21. **解**:(1)原式 $=(3\sqrt{2}+2\sqrt{6})\div 3\sqrt{2}=1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

(2)原式 $=4\sqrt{3}\div\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{2}\times 12}+2\sqrt{6}$
$=4-\sqrt{6}+2\sqrt{6}$
$=4+\sqrt{6}$.

(3)原式 $=9+12\sqrt{5}+20-(16-5)$
$=29+12\sqrt{5}-11$
$=18+12\sqrt{5}$.

(4)原式 $=-2-2\sqrt{3}+1-(2-\sqrt{3})$
$=-2-2\sqrt{3}+1-2+\sqrt{3}$
$=-3-\sqrt{3}$.

22. **解**:原式 $=\frac{(a+b)(a-b)}{a}\div\frac{a^2-2ab+b^2}{a}=\frac{(a+b)(a-b)}{a}\cdot\frac{a}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}$,当 $a=\sqrt{5}+2$,$b=\sqrt{5}-2$ 时,原式 $=\frac{\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

23. **解**:$\because a,b,c$ 是 $\triangle ABC$ 的三边长,
$\therefore a+b+c>0$,$b+c-a>0$,$c-b-a<0$,$\therefore$ 原式 $=a+b+c-(b+c-a)+(a+b-c)=3a+b-c$.

24. **解**:由题意,知 $a<0$,$b<0$,所以原式 $=\sqrt{\frac{ab}{a^2}}+\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{-a}+\frac{\sqrt{ab}}{-b}=-\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}=-\frac{(-2)\times\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$.

点拨:此题易出现以下错误:原式 $=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=\frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=-2\sqrt{2}$. 出错的原因在于忽视了隐含条件,进而导致在解答过程中进行了非等价变形. 事实上,由 $a+b=-2$,$ab=\frac{1}{2}$,可知 $a<0$,$b<0$,所以将 $\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}$ 变形成 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 是不成立的.

25. **解**:(1)$\sqrt{\frac{125}{26}}$;$5\sqrt{\frac{5}{26}}$

(2)猜想:$\sqrt{n-\frac{n}{n^2+1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$. 验证如下:当 $n\geqslant 2$,n 为自然数时,$\sqrt{n-\frac{n}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{n^3+n}{n^2+1}-\frac{n}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2+1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$.

26. **解**:(1)纸板的面积为:$(6\sqrt{2})^2-4\times(\sqrt{2})^2=64(\text{cm}^2)$.

(2)长方体盒子的体积为:$(6\sqrt{2}-2\sqrt{2})(6\sqrt{2}-2\sqrt{2})\times\sqrt{2}=32\sqrt{2}(\text{cm}^3)$.

27. **解**:(1)m^2+3n^2;$2mn$

(2)答案不唯一,如:12;6;3;1

(3)由 $b=2mn$,得 $4=2mn$,
则 $mn=2$.
因为 a,m,n 均为正整数,所以 $mn=1\times 2$ 或 $mn=2\times 1$,
即 $m=1$,$n=2$ 或 $m=2$,$n=1$.
当 $m=1$,$n=2$ 时,$a=m^2+3n^2=1^2+3\times 2^2=13$;
当 $m=2$,$n=1$ 时,$a=m^2+3n^2=2^2+3\times 1^2=7$.
因此 a 的值为 13 或 7.

第十七章达标检测卷

一、1. C　2. C　3. C　4. D　5. C　6. A
7. B　8. B　9. C　10. B

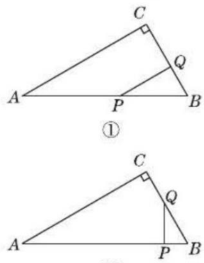
二、11. 4　12. 24　13. 24　14. 10

15. 直角三角形　16. (10,3)　17. $(\sqrt{2})^{n-1}$

18. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　**点拨**:在网格中求三角形的高,应借助三角形的面积求解. 以 AC,AB,BC 为斜边的三个直角三角形的面积分别为 $1,1,\frac{1}{2}$,因此 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\times 2-1-1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$;用勾股定理计算出 BC 的长为 $\sqrt{2}$,因此 BC 边上的高为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

19. 20

20. $\frac{12}{5},\frac{24}{7}$ 或 $\frac{24}{5}$　**点拨**:(1)如图①,当 $\angle BQP=90^\circ$ 时,易得 $\angle BPQ=30^\circ$,则 $BP=2BQ$. $\because BP=12-3t$,$BQ=t$,
$\therefore 12-3t=2t$,解得 $t=\frac{12}{5}$;



(第 20 题)

(2)如图②,当$\angle QPB=90^\circ$时,
易知$\angle B=60^\circ$,$\therefore \angle BQP=30^\circ$,$\therefore BQ=2BP$. 若$0<t\leq 4$,则$t=2(12-3t)$,解得$t=\frac{24}{7}$;若$4<t\leq 6$时,则$t=2(3t-12)$,$t=\frac{24}{5}$.

三、**21. 解**:(1)$\because AB=13$,$BD=1$,
$\therefore AD=13-1=12$. 在$Rt\triangle ACD$中,
$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$.
(2)在$Rt\triangle BCD$中,$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$.

22. 解:由题意知,$AM=8\times 2=16$(n mile),
$AP=15\times 2=30$(n mile).
因为两岛相距34 n mile,
所以$MP=34$ n mile.
因为$16^2+30^2=34^2$,
所以$AM^2+AP^2=MP^2$,
所以$\angle MAP=90^\circ$.
又因为$\angle NAM=60^\circ$,
所以$\angle PAS=30^\circ$.
所以乙船航行的方向是南偏东30°.

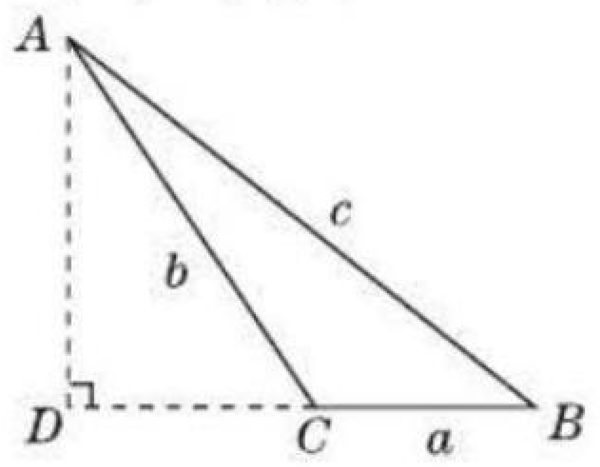
23. 解:$\because a^2+b^2+c^2+50=6a+8b+10c$,
$\therefore a^2+b^2+c^2-6a-8b-10c+50=0$,即$(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$,
$\therefore a=3$,$b=4$,$c=5$.
$\because 3^2+4^2=5^2$,即$a^2+b^2=c^2$,
$\therefore$根据勾股定理的逆定理可判定$\triangle ABC$是直角三角形.
点拨:本题利用配方法,先求出a,b,c的值,再利用勾股定理的逆定理进行判断.

24. (1)(答案不唯一)6;8;10;9;12;15
(2)**证明**:$x^2+y^2=(2n)^2+(n^2-1)^2=4n^2+n^4-2n^2+1=n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2=z^2$,
即以x,y,z为三边长的三角形为直角三角形.

25. 解:这个零件符合要求.
理由:在$\triangle ACD$中,因为$AD^2+CD^2=8^2+6^2=64+36=100$.
且$AC^2=10^2=100$,
所以$AD^2+CD^2=AC^2$,
所以$\angle ADC=90^\circ$.
在$\triangle ABC$中,因为$AC^2+AB^2=10^2+24^2=100+576=676$,且$BC^2=26^2=676$,所以$AC^2+AB^2=BC^2$,
所以$\angle BAC=90^\circ$.
因此,这个零件符合要求.

26. 解:$\because BF=CF=8$,$\angle C=30^\circ$,
$\therefore \angle FBC=\angle C=30^\circ$,$\therefore \angle DFB=60^\circ$. 由题易知$BE$与$BC$关于直线$BF$对称,
$\therefore \angle DBF=\angle FBC=30^\circ$,
$\therefore \angle BDC=90^\circ$. $\therefore DF=\frac{1}{2}BF=4$,
$\therefore BD=\sqrt{BF^2-DF^2}=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$.
$\because \angle A=90^\circ$,$AD\parallel BC$,$\therefore \angle ABC=90^\circ$,
$\therefore \angle ABD=30^\circ$,$\therefore AD=\frac{1}{2}BD=2\sqrt{3}$,
$\therefore AB=\sqrt{BD^2-AD^2}=\sqrt{48-12}=6$.

27. 解:当$\triangle ABC$为钝角三角形时,a^2+b^2与c^2的大小关系为:$a^2+b^2<c^2$.
证明如下:如图,过点A作$AD\perp BC$,交BC的延长线于点D.



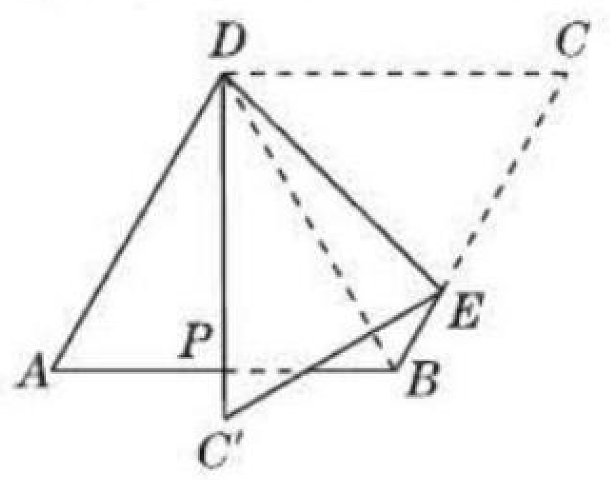
(第27题)

设$CD=x$.
在$Rt\triangle ADC$中,由勾股定理,
得$AD^2=AC^2-DC^2=b^2-x^2$;
在$Rt\triangle ADB$中,由勾股定理,
得$AD^2=AB^2-BD^2=c^2-(a+x)^2$,
$\therefore b^2-x^2=c^2-(a+x)^2$,
整理,得$a^2+b^2=c^2-2ax$.
$\because a>0$,$x>0$,$\therefore 2ax>0$,
$\therefore a^2+b^2=c^2-2ax<c^2$,
$\therefore$当$\triangle ABC$为钝角三角形时,
$a^2+b^2<c^2$.
点拨:阅读理解探究题型的解题思路时,(1)遵循题目范例或给定提示进行理解;(2)联想学习过的相关定义、性质、法则等进行探究分析. 本题中,通过作高将钝角三角形转化为直角三角形是解题的关键.

第十八章达标检测卷

一、**1.** D **2.** D **3.** C **4.** C
5. D **点拨**:运用三角形的中位线定理和矩形的性质解答.
6. C **点拨**:根据题意易知$\triangle COF$的面积与$\triangle AOE$的面积相等,阴影部分的面积为矩形面积的四分之一.
7. C
8. C **点拨**:根据正方形的对角线平分一组对角可得$\angle ABD=\angle ADB=45^\circ$,再求出$\angle DAE$的度数. 根据三角形的内角和定理求$\angle AED$,从而得到$\angle DAE=\angle AED$,再根据等角对等边得到$AD=DE$,然后求出正方形的对角线$BD$,再求出$BE$,进而在等腰直角三角形中利用勾股定理求出$EF$的长.
9. B
10. B **点拨**:已知第一个矩形的面积为1,第二个矩形的面积为$\frac{1}{4}$,第三个矩形的面积是$\frac{1}{16}$……故第n个矩形的面积为$\frac{1}{4^{n-1}}$. 故选B.

二、**11.** (1,2) **12.** 30 **13.** 65° **14.** 2.5
15. 4 cm
16. ①③④ **点拨**:$\because$四边形$ABCD$为平行四边形,$\therefore AB\parallel CD$,$AD=BC$,$AD\parallel BC$,$\therefore \angle DAE=\angle AEB$. $\because AE$平分$\angle DAB$,$\therefore \angle DAE=\angle BAE$,$\therefore \angle BAE=\angle AEB$,$\therefore AB=BE$. 又$AB=AE$,$\therefore \triangle ABE$为等边三角形,$\therefore \angle B=60^\circ$. $\because \angle BAC=\angle BAE+\angle EAC=60^\circ+\angle EAC>\angle B$,$\therefore BC>AC$. 在$\triangle ABC$和$\triangle EAD$中,$\begin{cases}AB=EA,\\ \angle ABC=\angle EAD,\\ BC=AD,\end{cases}$
$\therefore \triangle ABC\cong\triangle EAD$,$\therefore \angle BAC=\angle AED$.
$\because AB\parallel CD$,$\therefore \angle BAC=\angle ACD$,
$\therefore \angle AED=\angle ACD$. 故正确的是①③④.
17. 75° **点拨**:如图,连接BD,由菱形的性质及$\angle A=60^\circ$,得到三角形ABD为等边三角形. 由P为AB的中点,利用等腰三角形三线合一的性质得到$\angle ADP=30^\circ$. 由题意易得$\angle ADC=120^\circ$,$\angle C=60^\circ$,进而求出$\angle PDC=90^\circ$,由折叠的性质得到$\angle CDE=\angle PDE=45^\circ$,利用三角形的内角和定理即可求出$\angle DEC=75^\circ$.



(第17题)

18. $(0,\sqrt{3})$
19. 16 **点拨**:$\because$四边形$ABCD$是矩形,$AB=x$,$AD=y$,$\therefore CD=AB=x$,$BC=AD=y$,$\angle BCD=90^\circ$. 又$\because BD\perp DE$,点F是BE的中点,$DF=4$,$\therefore BF=DF=EF=4$,$\therefore CF=BF-BC=4-y$. 在$Rt\triangle DCF$中,$DC^2+CF^2=DF^2$,即$x^2+(4-y)^2=4^2=16$. $\therefore x^2+(y-4)^2=16$.
20. $2\sqrt{5}$或$\frac{5}{2}$或$\frac{\sqrt{65}}{2}$

三、**21. 证明**:$\because$四边形$ABCD$为平行四边形,

$\therefore AD=BC$，$\angle D=\angle B$，$\angle BAD=\angle BCD$.

又$\because AE$平分$\angle BAD$，CF平分$\angle BCD$，

$\therefore \angle DAE=\angle BCF$.

在$\triangle DAE$和$\triangle BCF$中，

$\begin{cases}\angle D=\angle B,\\ DA=BC,\\ \angle DAE=\angle BCF,\end{cases}$

$\therefore \triangle DAE\cong\triangle BCF(\text{ASA})$，

$\therefore AE=CF$.

22. (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB=AD=DC=CB$，$\angle D=\angle B=90°$. $\because E,F$分别为DC,BC的中点，

$\therefore DE=\frac{1}{2}DC,BF=\frac{1}{2}BC,\therefore DE=BF$.

在$\triangle ADE$和$\triangle ABF$中，$\begin{cases}AD=AB,\\ \angle D=\angle B,\\ DE=BF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle ABF(\text{SAS})$.

(2)**解**：由题知$\triangle ABF$，$\triangle ADE$，$\triangle CEF$均为直角三角形，且$AB=AD=4$，$DE=BF=CE=CF=\frac{1}{2}\times4=2$，

$\therefore S_{\triangle AEF}=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle ADE}-S_{\triangle ABF}-S_{\triangle CEF}=4\times4-\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times2\times2=6$.

23. (1)**证明**：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD/\!/BC$.

$\therefore \angle AEG=\angle BFG$.

$\because EF$垂直平分AB，

$\therefore AG=BG$.

在$\triangle AGE$和$\triangle BGF$中，

$\begin{cases}\angle AEG=\angle BFG,\\ \angle AGE=\angle BGF,\\ AG=BG,\end{cases}$

$\therefore \triangle AGE\cong\triangle BGF(\text{AAS})$.

(2)**解**：四边形$AFBE$是菱形，

理由如下：$\because \triangle AGE\cong\triangle BGF$，

$\therefore AE=BF$.

$\because AD/\!/BC$，

$\therefore$ 四边形$AFBE$是平行四边形.

又$\because EF\perp AB$，

$\therefore$ 四边形$AFBE$是菱形.

24. (1)**证明**：$\because EF$是AC的垂直平分线，

$\therefore AO=OC$，$\angle AOE=\angle COF=90°$.

$\because$ 四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AD/\!/BC$，

$\therefore \angle EAO=\angle FCO$.

在$\triangle AEO$和$\triangle CFO$中，

$\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ AO=CO,\\ \angle AOE=\angle COF,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEO\cong\triangle CFO$，

$\therefore OE=OF$.

$\because OA=OC$，

$\therefore$ 四边形$AECF$是平行四边形.

又$\because EF\perp AC$，

$\therefore$ 平行四边形$AECF$是菱形.

(2)**解**：设$AF=x$.

$\because EF$是AC的垂直平分线，

$\therefore AF=CF=x,BF=8-x$.

在$\text{Rt}\triangle ABF$中，由勾股定理得：

$AB^2+BF^2=AF^2$，

即$4^2+(8-x)^2=x^2$，

解得$x=5$.

$\therefore AF=5$，

$\therefore$ 菱形$AECF$的周长为20.

25. (1)**证明**：$\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore CF/\!/ED$，

$\therefore \angle FCG=\angle EDG$.

$\because G$是CD的中点，

$\therefore CG=DG$.

在$\triangle FCG$和$\triangle EDG$中，

$\begin{cases}\angle FCG=\angle EDG,\\ CG=DG,\\ \angle CGF=\angle DGE,\end{cases}$

$\therefore \triangle FCG\cong\triangle EDG$，

$\therefore FG=EG$.

$\because CG=DG$，

$\therefore$ 四边形$CEDF$是平行四边形.

(2)**解**：①$\because$ 四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore \angle CDA=\angle B=60°$，

$DC=AB=3\text{ cm}$，

$BC=AD=5\text{ cm}$.

$\because$ 四边形$CEDF$是矩形，

$\therefore \angle CED=90°$.

在$\text{Rt}\triangle CED$中，易得$ED=\frac{1}{2}CD=1.5\text{ cm}$，

$\therefore AE=AD-ED=3.5(\text{cm})$.

故当四边形$CEDF$是矩形时，$AE=3.5\text{ cm}$.

②若四边形$CEDF$是菱形，

则$CE=ED$.

由①可知，$\angle CDA=60°$，

$\therefore \triangle CED$是等边三角形，

$\therefore DE=CD=3\text{ cm}$.

$\therefore AE=AD-DE=5-3=2(\text{cm})$.

故当四边形$CEDF$是菱形时，$AE=2\text{ cm}$.

点拨：在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件，有时还需添加适当的辅助线构造全等三角形. 同时全等三角形也为平行四边形、矩形、菱形的判定构筑了重要的平台和保障.

26. **解**：(1)如图①所示.

(2)如图②，连接AE，$\because$ 点E是点B关于直线AP的对称点，

$\therefore \angle PAE=\angle PAB=20°,AE=AB$.

$\because$ 四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AE=AB=AD,\angle BAD=90°$，

$\therefore \angle AED=\angle ADE,\angle EAD=\angle DAB+\angle BAP+\angle PAE=130°$，

$\therefore \angle ADF=\frac{180°-130°}{2}=25°$.

(3)$EF^2+FD^2=2AB^2$

证明如下：如图③，连接AE,BF,BD，由轴对称和正方形的性质可得，$EF=BF$，$AE=AB=AD$，易得$\angle ABF=\angle AEF=\angle ADF$，又$\because \angle BAD=90°$.

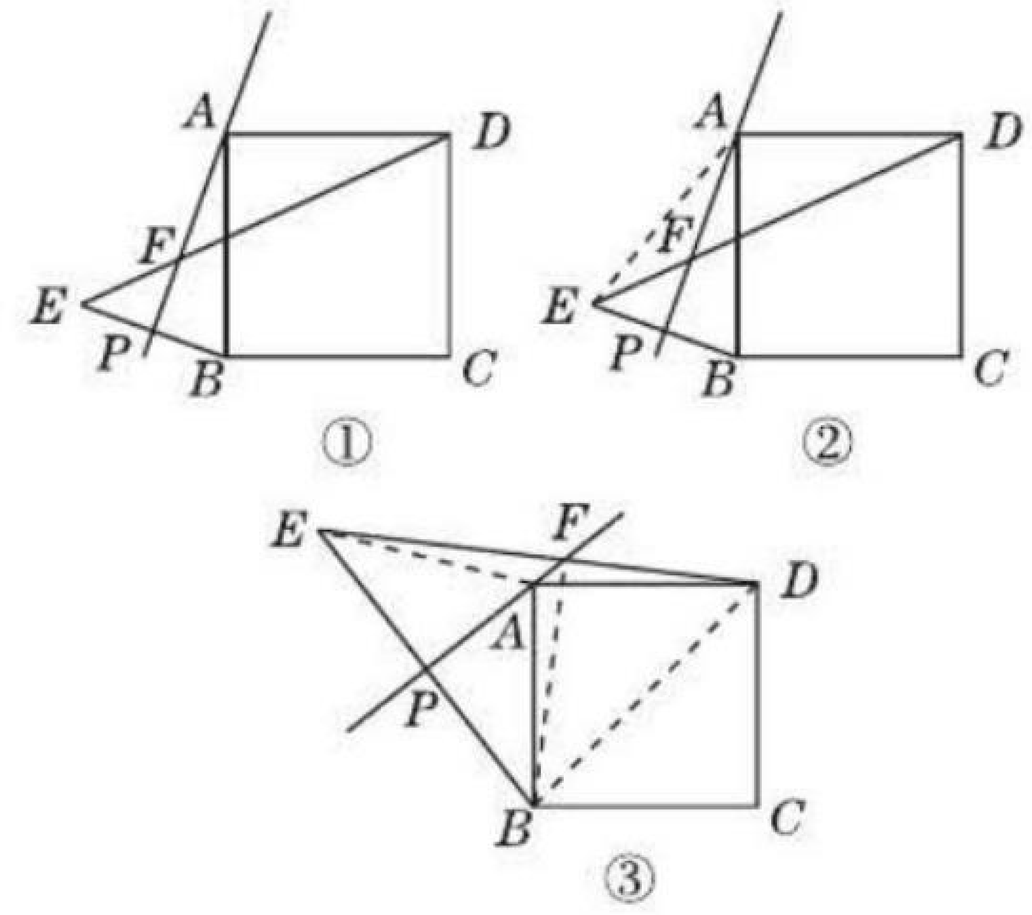
$\therefore \angle ABF+\angle FBD+\angle ADB=90°$，

$\therefore \angle ADF+\angle ADB+\angle FBD=90°$，

$\therefore \angle BFD=90°$. 在$\text{Rt}\triangle BFD$中，由勾股定理得$BF^2+FD^2=BD^2$.

在$\text{Rt}\triangle ABD$中，由勾股定理得$BD^2=AB^2+AD^2=2AB^2$，

$\therefore EF^2+FD^2=2AB^2$.



(第 26 题)

第十九章达标检测卷

一、**1.** B **点拨**：根据函数的定义可知，对于自变量x的任何值，y都有唯一确定的值与之对应，只有B不满足这一条件. 故选B.

2. B **3.** C **4.** A **5.** B

6. B **点拨**：$\because y$随x的增大而减小，

$\therefore k<0$. 又$\because kb>0$，$\therefore b<0$，故选B.

7. C **8.** C **9.** C

10. B **点拨**：由图象得出小文步行720 m，需要9 min，

所以小文的速度为$720\div9=80(\text{m/min})$，

当第 15 min 时，小亮骑了 $15-9=6(\text{min})$，骑的路程为 $15\times80=1\ 200(\text{m})$，

∴ 小亮的速度为 $1\ 200\div6=200(\text{m/min})$，

∴ $200\div80=2.5$，故②正确；

当第 19 min 以后两人之间距离越来越近，说明小亮已经到达终点，则小亮先到达青少年宫，故①正确；

此时小亮骑了 $19-9=10(\text{min})$，

骑的总路程为 $10\times200=2\ 000(\text{m})$，

∴ 小文的步行时间为 $2\ 000\div80=25(\text{min})$，

故 a 的值为 25，故③错误；

∵ 小文 19 min 步行的路程为 $19\times80=1\ 520(\text{m})$，

∴ $b=2\ 000-1\ 520=480$，故④正确.

∴ 正确的有①②④. 故选 B.

二、**11.** $r;S;400\pi$

12. -2

13. $(3,0)$ **14.** $-1;-\frac{5}{2}$ **15.** ①②③

16. $m<\frac{1}{2}$ **点拨**：根据题意可知：$\begin{cases}2m-1<0,\\3-2m>0,\end{cases}$解不等式组即可.

17. $\begin{cases}y=-x+2,\\y=2x-1\end{cases}$

18. $(-8,-1)$

19. 450 km

20. $2^{2\ 016}$ **点拨**：因为 $OA_2=1$，所以 $OA_1=\frac{1}{2}$，进而得出 $OA_3=2$，$OA_4=4$，$OA_5=8$，由此得出 $OA_n=2^{n-2}$，所以 $OA_{2\ 018}=2^{2\ 016}$.

三、**21. 解**：(1) 设 $y+1=kx$，

由题意得，$5+1=2k$，

解得 $k=3$，

∴ $y+1=3x$，即 $y=3x-1$.

(2) 当 $y=2\ 018$ 时，

$2\ 018=3x-1$，

解得 $x=673$.

22. 解：设一次函数的解析式为 $y=kx+b$，

∵ 一次函数的图象与直线 $y=-x+1$ 平行，∴ $k=-1$，

∴ 一次函数的解析式为 $y=-x+b$，

∵ 一次函数的图象经过点 $(8,2)$，

∴ $2=-8+b$，解得 $b=10$，

∴ 一次函数的解析式为 $y=-x+10$.

23. 解：(1) 对于函数 $y_1=x+1$，当 $x=0$ 时，$y=1$.

∴ 将点 $(0,1)$，点 $(2,0)$ 的坐标分别代入 $y_2=ax+b$ 中，得 $\begin{cases}b=1,\\2a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=1,\end{cases}$ ∴ $y_2=-\frac{1}{2}x+1$.

(2) 由 $y_1>0$，即 $x+1>0$，得 $x>-1$，

由 $y_2>0$，即 $-\frac{1}{2}x+1>0$，得 $x<2$.

故使 $y_1>0$，$y_2>0$ 的 x 的取值范围为 $-1<x<2$.

24. 解：因为方程组 $\begin{cases}y=ax+2,\\y=kx+b\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 所以交点 A 的坐标为 $(2,1)$，

所以 $2a+2=1$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

又因为函数 $y=kx+b$ 的图象过交点 $A(2,1)$ 和点 $B(0,-1)$，

所以 $\begin{cases}2k+b=1,\\b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=-1.\end{cases}$

所以这两个一次函数的解析式分别为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，$y=x-1$.

点拨：此类问题的解题规律是明确方程组的解就是两条直线的交点坐标，再利用待定系数法求解. 本题中确定这两个函数的解析式的关键是确定 a,k,b 的值.

25. 解：(1) 当 $0\leqslant x\leqslant20$ 时，设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=ax+b$，

已知函数图象过点 $(0,150)$ 和 $(20,200)$，

∴ $\begin{cases}150=b,\\200=20a+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2.5,\\b=150.\end{cases}$

∴ $y=2.5x+150$.

当 $x\geqslant20$ 时，同理可得 $y=4x+120$.

∴ y 与 x 之间的函数关系式为

$y=\begin{cases}2.5x+150(0\leqslant x\leqslant20),\\4x+120(x>20).\end{cases}$

(2) 令 $4x+120=250$，解得 $x=32.5$.

∴ 李敏需阅读 32.5 小时.

点拨：含有图象的实际问题的常用解题方法有，(1) 根据图象上的特殊点，利用待定系数法确定每段函数的关系式；

(2) 借助图象确定自变量的取值范围，然后将特殊位置的自变量代入相应的关系式，确定其函数值；

(3) 利用方程与函数的关系，确定交点坐标.

26. 解：(1) 过点 P 作 $PF\perp y$ 轴于点 F.

∵ 点 P 的横坐标是 2，∴ $PF=2$.

又易知 $OC=2$，

∴ $S_{\triangle COP}=\frac{1}{2}OC\cdot PF=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

(2) ∵ $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle AOP}-S_{\triangle COP}=6-2=4$，

∴ $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OA\cdot OC=4$，即 $\frac{1}{2}\times OA\times2=4$，

∴ $OA=4$，

∴ 点 A 的坐标是 $(-4,0)$.

设直线 AP 对应的函数解析式是 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}-4k+b=0,\\b=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=2.\end{cases}$

∴ 直线 AP 对应的函数解析式是 $y=\frac{1}{2}x+2$.

当 $x=2$ 时，$y=3$，即 $p=3$.

(3) 设直线 BD 对应的函数解析式为 $y=ax+c$，

∴ 点 D 的坐标为 $(0,c)$，点 B 的坐标为 $\left(-\frac{c}{a},0\right)$.

∵ $S_{\triangle DOP}=S_{\triangle BOP}$，

∴ $\frac{1}{2}OD\cdot2=\frac{1}{2}OB\cdot3$，即 $\frac{1}{2}c\cdot2=\frac{1}{2}\left(-\frac{c}{a}\right)\cdot3$. 由题意知 $c\neq0$，

∴ $a=-\frac{3}{2}$，∴ 直线 BD 对应的函数解析式是 $y=-\frac{3}{2}x+c$. 将 $P(2,3)$ 的坐标代入得 $c=6$，∴ 直线 BD 对应的函数解析式是 $y=-\frac{3}{2}x+6$.

27. 解：(1) $a=4.5$，甲车的速度为 $\dfrac{460}{\frac{2}{3}+7}=60(\text{km/h})$；

(2) 设乙开始的速度为 v km/h，则 $4v+(7-4.5)\times(v-50)=460$，解得 $v=90$，$4v=360$，则 $D(4,360)$，$E(4.5,360)$，设直线 EF 对应的函数解析式为 $y=kx+b$，把点 $E(4.5,360)$，点 $F(7,460)$ 的坐标分别代入，得 $\begin{cases}4.5k+b=360,\\7k+b=460,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=40,\\b=180.\end{cases}$ 所以线段 EF 所表示的 y 与 x 之间的函数解析式为 $y=40x+180(4.5\leqslant x\leqslant7)$；

(3) $60\times\frac{2}{3}=40(\text{km})$，则 $C(0,40)$，

设直线 CF 对应的函数解析式为 $y=mx+n$. 把点 $C(0,40)$，点 $F(7,460)$ 的坐标分别代入，得 $\begin{cases}n=40,\\7m+n=460,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=60,\\n=40,\end{cases}$ 所以直线 CF 对应的函数解析式为 $y=60x+40$，易得线段 OD 对应的函数解析式为 $y=90x(0\leqslant x\leqslant4)$，当 $60x+40-$

$90x=15$，解得 $x=\frac{5}{6}$；当 $90x-(60x+40)=15$，解得 $x=\frac{11}{6}$；当 $40x+180-(60x+40)=15$，解得 $x=\frac{25}{4}$. 所以乙车出发 $\frac{5}{6}$ h 或 $\frac{11}{6}$ h 或 $\frac{25}{4}$ h，与甲车相距 15 km.

第二十章达标检测卷

一、1. C　2. B　3. D　4. B　5. A

6. B　**点拨**：众数是一组数据中出现次数最多的数据，故众数是 8 h；

将这组数据按从小到大的顺序排列后，处于中间位置的两个数的平均数是 9，故中位数是 9 h；

平均数是 $\frac{7\times3+8\times16+9\times14+10\times7}{40}=8.625(\text{h})$；

锻炼时间超过 8 h 的有 $14+7=21$(人).

故选 B.

7. B　8. B　9. C　10. A

二、11. 7

12. 2.5　**点拨**：$\because \bar{x}=\frac{1}{8}(+1-2+1+0+2-3+0+1)=0$，

$\therefore s^2=\frac{1}{8}[(1-0)^2+(-2-0)^2+(1-0)^2+(0-0)^2+(2-0)^2+(-3-0)^2+(0-0)^2+(1-0)^2]=2.5$.

13. 6　**点拨**：由题意得 $\begin{cases}\frac{3+a+2b+5}{4}=6,\\ \frac{a+6+b}{3}=6,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=8,\\ b=4,\end{cases}$

$\therefore$ 这组新数据是 3，4，5，6，8，8，8，其中位数是 6.

14. 2　15. 70.2 分　16. 15 元

17. -1 或 3 或 11　18. $<$

19. a^2s^2　**点拨**：$\because$ 数据 ax_1+1，ax_2+1，$\cdots$，ax_n+1(a 为非零常数)的方差与数据 ax_1，ax_2，$\cdots$，ax_n(a 为非零常数)的方差相同，且数据 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的方差是 s^2，$\therefore$ 数据 ax_1+1，ax_2+1，$\cdots$，ax_n+1(a 为非零常数)的方差是 a^2s^2.

20. 1 000；2 000

三、21. **解**：(1) A

(2) $140\div7\times30=600$(千克).

答：估计一个月(按 30 天计算)该水果店可销售苹果 600 千克.

22. **解**：王明的最后总分为 $\frac{25\times5+23\times2+24\times3}{5+2+3}=24.3$(分)，

李红的最后总分为 $\frac{26\times5+24\times2+26\times3}{5+2+3}=25.6$(分)，

张丽的最后总分为 $\frac{25\times5+25\times2+25\times3}{5+2+3}=25$(分).

$\because 25.6>25>24.3$，

$\therefore$ 李红将被录用.

23. **解**：(1) 15；15

(2) 这 50 名同学捐款的平均数 $=\frac{1}{50}\times(8\times5+14\times10+20\times15+6\times20+2\times25)=13$(元).

(3) $600\times13=7\ 800$(元).

答：估计该校学生的捐款总数为 7 800 元.

易错警示：本题容易出错的地方是在计算平均数时忘记乘以每个数的频数.

24. **解**：(1) 由表可知甲命中环数的众数为 8 环，乙命中环数的众数为 10 环.

(2) 乙的平均数为 $\bar{x}_{乙}=\frac{5+6+7+8+10+10+10}{7}=8$，乙的方差为 $s^2_{乙}=\frac{1}{7}[(5-8)^2+(10-8)^2+\cdots+(10-8)^2]=\frac{26}{7}\approx3.71$.

$\because \bar{x}_{甲}=8$，$s^2_{甲}\approx1.43$，

$\therefore$ 甲、乙的平均成绩一样，而甲的方差小于乙的方差，

$\therefore$ 甲的成绩更稳定.

25. **解**：(1) $\because$ 数据 x_1，x_2，$\cdots$，x_6 的平均数为 1，

$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_6=1\times6=6$.

又 $\because$ 方差为 $\frac{5}{3}$，

$\therefore \frac{1}{6}[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\cdots+(x_6-1)^2]=\frac{1}{6}[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_6)+6]=\frac{1}{6}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2-2\times6+6)=\frac{1}{6}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2)-1=\frac{5}{3}$，

$\therefore x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2=16$.

(2) $\because$ 数据 x_1，x_2，$\cdots$，x_7 的平均数为 1，$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_7=1\times7=7$.

$\because x_1+x_2+\cdots+x_6=6$，$\therefore x_7=1$.

$\because \frac{1}{6}[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\cdots+(x_6-1)^2]=\frac{5}{3}$，

$\therefore (x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\cdots+(x_6-1)^2=10$，

$\therefore s^2=\frac{1}{7}[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+\cdots+(x_7-1)^2]=\frac{1}{7}[10+(1-1)^2]=\frac{10}{7}$.

26. **解**：(1) 依题意得

$\begin{cases}3\times1+6a+7\times1+8\times1+9\times1+10b=6.7\times10,\\ a+1+1+1+b=90\%\times10,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=5,\\ b=1.\end{cases}$

(2) $m=6$，$n=20\%$.

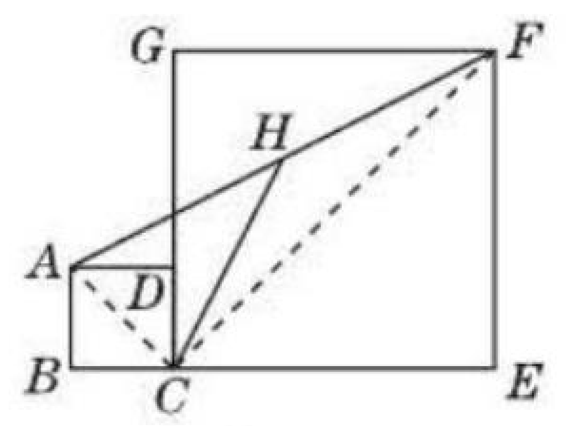
(3)(答案不唯一) ①八年级队的平均分高于七年级队；②八年级队的成绩比七年级队稳定.

期末达标检测卷

一、1. C　2. A　3. A　4. D　5. A　6. D

7. D　**点拨**：$k=-2<0$，$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，A 正确；$k<0$，$b>0$，图象过第一、二、四象限，B 正确；函数图象向下平移 4 个单位长度得 $y=-2x$ 的图象，C 正确；函数的图象与 x 轴的交点坐标是 $(2,0)$，D 错误.

8. B　**点拨**：如图，



(第 8 题)

连接 AC，CF，

在正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中，

$\because BC=1$，$CE=3$，

$\therefore AC=\sqrt{2}$，$CF=3\sqrt{2}$.

$\because \angle ACD=\angle GCF=45^\circ$，

$\therefore \angle ACF=45^\circ+45^\circ=90^\circ$.

$\therefore \triangle ACF$ 是直角三角形.

由勾股定理得，$AF=\sqrt{AC^2+CF^2}=2\sqrt{5}$.

$\because H$ 是 AF 的中点，$\therefore CH=\frac{1}{2}AF=\sqrt{5}$.

故选 B.

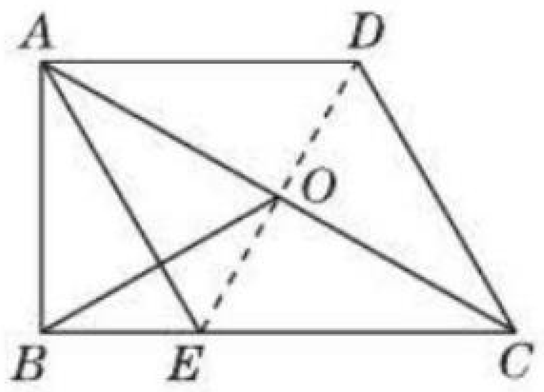
9. D

10. D　**点拨**：连接 ED，如图所示.

$\because AD\parallel BC$，$AE\parallel DC$，$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是平行四边形. 又 $\because AD=DC$，$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是菱形. 又 $\because AO=CO$，$\therefore ED$ 过点 O 且 $AC\perp ED$，$\angle EAO=\angle DAO$.

$\because AE$ 平分 $\angle BAO$，$\therefore \angle BAE=\angle OAE$.

又∵ $\angle ABE=\angle AOE=90°$, $AE=AE$, ∴ $\triangle BAE\cong\triangle OAE$(AAS), ∴ $AB=AO$, $EB=EO$. ∴ $AC=2AO=2AB$. ∵ $\angle BAE=\angle OAE$, $\angle EAO=\angle DAO$, 且易知 $\angle BAD=90°$, ∴ $\angle BAE=\angle EAO=\angle OAD=30°$. ∵ 四边形 $AECD$ 是菱形, $AD=2$, ∴ $AE=2$, ∴ $BE=1$, ∴ $AB=\sqrt{3}$, 且 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times AD\times AB=\frac{1}{2}\times 2BE\times AB=2\times\frac{1}{2}BE\times AB=2S_{\triangle ABE}$. ∵ $AB=AO$, $EB=EO$, ∴ AE 垂直平分 BO, ∴ ①②③④均正确.



(第 10 题)

二、11. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 12. 2 13. -5

14. -1

15. $y=64x+48(x\geqslant 3)$

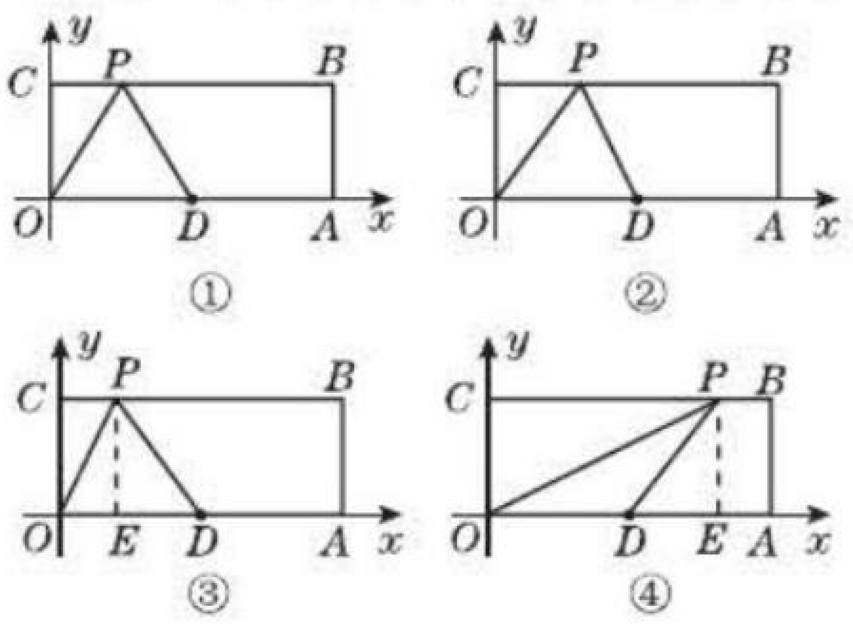
16. $11\leqslant h\leqslant 12$

17. 2 18. $\sqrt{2}$ 19. $3<x<6$

20. (2.5,4)或(3,4)或(2,4)或(8,4)

点拨:∵ 四边形 $OABC$ 是矩形, 点 A 的坐标为(10,0), 点 C 的坐标为(0,4),

∴ $\angle OCB=90°$, $OC=4$, $BC=OA=10$. ∵ D 为 OA 的中点, ∴ $OD=AD=5$. (1)当 $PO=PD$ 时, 如图①, 点 P 在 OD 的垂直平分线上, ∴ 点 P 的坐标为(2.5,4); (2)当 $OP=OD$ 时, 如图②所示, 则 $OP=OD=5$, $PC=\sqrt{5^2-4^2}=3$, ∴ 点 P 的坐标为(3,4); (3)当 $DP=DO$ 时, 作 $PE\perp OA$ 于 E, 则 $\angle PED=90°$, $DE=\sqrt{5^2-4^2}=3$. 分两种情况: 当 E 在 D 的左侧时, 如图③所示, $OE=5-3=2$, ∴ 点 P 的坐标为(2,4); 当 E 在 D 的右侧时, 如图④所示, $OE=5+3=8$, ∴ 点 P 的坐标为(8,4). 综上所述: 点 P 的坐标为(2.5,4)或(3,4)或(2,4)或(8,4).



(第 20 题)

三、21. **解**:(1)原式 $=30\sqrt{3}\div\sqrt{6}=15\sqrt{2}$.

(2)原式 $=[(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)]^{2\,018}-\sqrt{4\times\frac{1}{2}}-1=(-1)^{2\,018}-\sqrt{2}-1$

$=1-\sqrt{2}-1$

$=-\sqrt{2}$.

22. **解**:(1)把(−2,−1),(1,3)分别代入 $y=kx+b$, 得 $\begin{cases}-2k+b=-1,\\ k+b=3,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\frac{4}{3},\\ b=\frac{5}{3},\end{cases}$

∴ 一次函数的解析式为 $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$.

(2)把 $x=0$ 代入 $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$ 得 $y=\frac{5}{3}$,

∴ D 点的坐标为 $\left(0,\frac{5}{3}\right)$,

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times 1=\frac{5}{2}$.

23. **解**:(1)∵ a,b,c 满足 $|a-\sqrt{7}|+\sqrt{b-5}+(c-4\sqrt{2})^2=0$,

∴ $|a-\sqrt{7}|=0$, $\sqrt{b-5}=0$, $(c-4\sqrt{2})^2=0$, 解得 $a=\sqrt{7}$, $b=5$, $c=4\sqrt{2}$.

(2)∵ $a=\sqrt{7}$, $b=5$, $c=4\sqrt{2}$,

∴ $a+b=\sqrt{7}+5>4\sqrt{2}=c$,

∴ 以 a,b,c 的值为边长能构成三角形.

∵ $a^2+b^2=(\sqrt{7})^2+5^2=32=(4\sqrt{2})^2=c^2$,

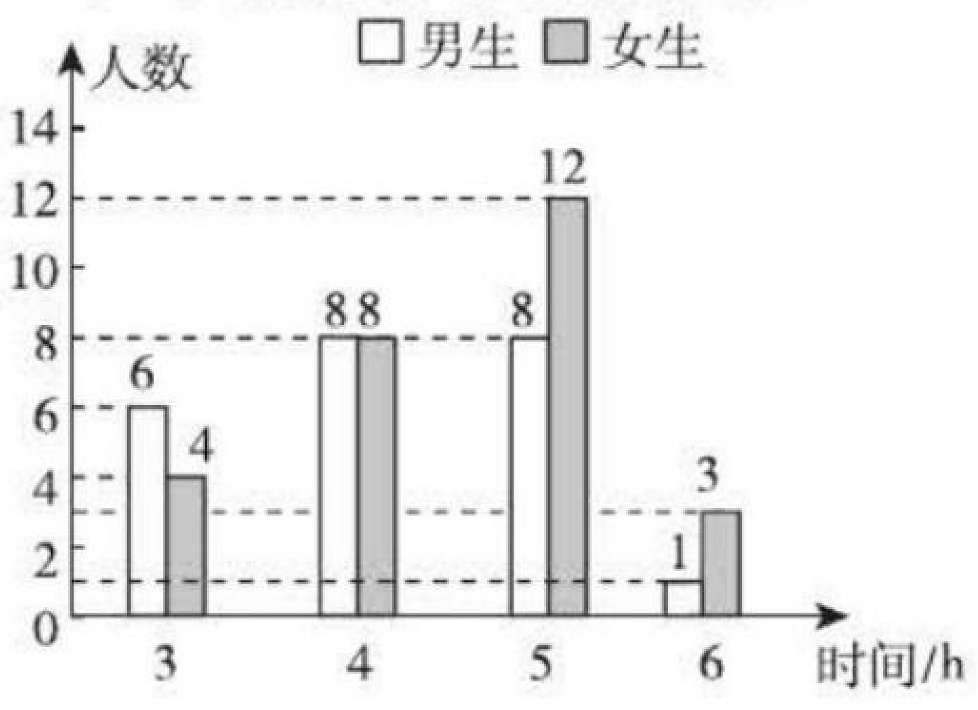
∴ 此三角形是直角三角形.

∴ $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times 5=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

24. **解**:(1)50;4;5

(2)补全条形统计图如图所示.

学生在家做家务时间条形统计图



(第 24 题)

(3)∵ 样本中做家务的时间为 4 小时的学生人数是 16 人,

∴ $1\,500\times\frac{16}{50}=480$(人).

答:八年级一周在家做家务的时间为 4 小时的学生大约有 480 人.

25. (1)**证明**:∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

∴ $AB=CD$, $AB\parallel CD$.

∵ $DE=BF$,

∴ $AF=CE$.

又∵ $AF\parallel CE$,

∴ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

(2)**解**:∵ 四边形 $AFCE$ 是菱形,

∴ $AE=CE$. 设 $DE=x$, 则 $CE=AE=8-x$. 在 Rt $\triangle ADE$ 中, $DE^2+AD^2=AE^2$,

∴ $x^2+6^2=(8-x)^2$, 解得 $x=\frac{7}{4}$, 则菱形的边长为 $8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$, 周长为 $4\times\frac{25}{4}=25$, 故菱形 $AFCE$ 的周长为 25.

26. **解**:(1)当 $1\leqslant x\leqslant 8$ 时, $y=4\,000-30(8-x)=4\,000-240+30x=30x+3\,760$;

当 $9\leqslant x\leqslant 23$ 时, $y=4\,000+50(x-8)=4\,000+50x-400=50x+3\,600$.

∴ 所求函数解析式为

$y=\begin{cases}30x+3\,760(1\leqslant x\leqslant 8, x\text{ 为整数}),\\ 50x+3\,600(9\leqslant x\leqslant 23, x\text{ 为整数}).\end{cases}$

(2)当 $x=16$ 时,

方案一的总费用为 $w_1=120\times(50\times 16+3\,600)\times(1-8\%)-a=485\,760-a$(元).

方案二的总费用为 $w_2=120\times(50\times 16+3\,600)\times(1-10\%)=475\,200$(元).

∴ 当 $w_1<w_2$, 即 $485\,760-a<475\,200$ 时, $a>10\,560$;

当 $w_1=w_2$, 即 $485\,760-a=475\,200$ 时, $a=10\,560$;

当 $w_1>w_2$, 即 $485\,760-a>475\,200$ 时, $a<10\,560$.

因此当每套房赠送装修基金多于 10 560 元时, 选择方案一合算;

当每套房赠送装修基金等于 10 560 元时, 两种方案一样;

当每套房赠送装修基金少于 10 560 元时, 选择方案二合算.

第1招　巧用勾股定理求最短路径的长

名师点金

求最短距离的问题，第一种情况是通过计算和比较解最短距离问题；第二种情况是平面图形，将分散的条件通过几何变换（平移或轴对称）进行集中，然后借助勾股定理解决；第三种情况是立体图形，将立体图形展开为平面图形，在平面图形中将最短路径的长转化为两点间的距离，然后借助直角三角形利用勾股定理求出最短路程（距离）.

典例剖析

例 如图1-1，有一个圆柱形玻璃杯，高为12 cm，底面周长为18 cm，在杯内离杯底4 cm的点C处有一滴蜂蜜，此时一只蚂蚁正好在杯外壁，离杯上沿4 cm与蜂蜜相对的点A处，则蚂蚁到蜂蜜的最短路线长为________.

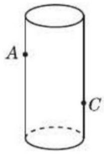


图1-1

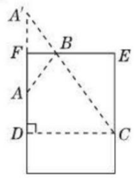


图1-2

解题秘方：化曲为直，即将圆柱侧面展开成平面图形，再结合轴对称的知识求解.

具体过程如下：

如图1－2，将圆柱侧面的一半展开，作$CD\perp FA$于D，作A关于直线EF的对称点A'，

连接$A'C$，与EF交于B，连接AB，则$AB=A'B$，所以$A\to B\to C$为最短路线.

由题意知$DC=9$ cm，$FD=8$ cm，$FA'=4$ cm，

在Rt$\triangle A'DC$中，$A'C^2=A'D^2+DC^2=(FA'+FD)^2+DC^2=(4+8)^2+9^2=225=15^2$，

故$A'C=15$ cm.

因为$AB+BC=A'B+BC=A'C$，

所以最短路线长为15 cm.

答案：15 cm

分类训练

☞（答案见27页）

技巧1　用计算法求平面中的最短问题

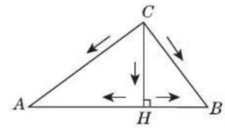
1. 如图，A，B两块试验田相距200 m，C为水源，$AC=160$ m，$BC=120$ m，为了方便灌溉，现有两种修筑水渠的方案.

甲方案：从水源C直接修筑两条水渠分别到试验田A，B.

乙方案：过点C作AB的垂线，垂足为H，先从水源C修筑一条水渠到线段AB上的H处，再从H分别向试验田A，B修筑水渠.

(1) 试判断$\triangle ABC$的形状，并说明理由.

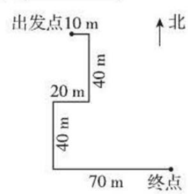
(2) 两种方案中，哪一种方案所修的水渠较短？请通过计算说明.



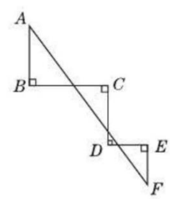
（第1题）

技巧2　用平移法求平面中的距离问题

2. 如图，小明在广场上先向东走10 m，又向南走40 m，再向西走20 m，又向南走40 m，再向东走70 m. 则小明到达的终点与出发点的距离是________.



（第2题）

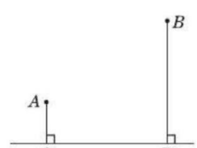


（第3题）

3. 如图，已知$\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=90°$，且$AB=CD=3$，$BC=4$，$DE=EF=2$，则$AF$的长是________.

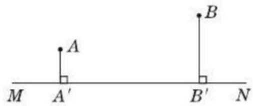
技巧3　用对称法求平面中的最短问题

4. 如图，A，B两村在河边CD的同侧，A，B两村到河边CD的距离分别为$AC=1$ km，$BD=3$ km. 又$CD=3$ km，现要在河边CD上建一水厂，分别向A，B两村输送自来水，铺设水管时工程费用为每千米20 000元，请你在CD上选择水厂的位置O，使铺设水管的费用最省，并求出铺设水管的总费用.



（第4题）

5. 高速公路的同一侧有 A,B 两城镇，如图所示，它们到高速公路所在直线 MN 的距离分别为 $AA'=2$ km，$BB'=4$ km，且 $A'B'=8$ km. 要在高速公路上 A',B'之间建一个出口 P，使 A,B 两城镇到 P 的距离之和最短. 求这个最短距离.

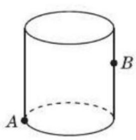


（第 5 题）

技巧 4 用展开法求立体图形中的最短问题

类型 1：圆柱中的最短问题

6. 有一只蚂蚁要从一个圆柱形玻璃杯的点 A 爬到点 B 处（点 A,B 均在玻璃杯外部），如图所示，已知杯子高 8 cm，点 B 距杯口 3 cm，杯子底面半径为 4 cm. 蚂蚁从 A 点爬到 B 点的最短距离为多少？（π 取 3）



（第 6 题）

类型 2：圆锥中的最短问题

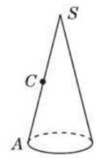
7. 如图，观察图形解答下面的问题：

（1）此图形的名称为________.

（2）请你与同伴一起做一个这样的立体图形，并把它的侧面沿 AS 剪开，铺在桌面上，则它的侧面展开图是一个________.

（3）如果点 C 是 SA 的中点，在 A 处有一只蜗牛，在 C 处恰好有蜗牛想吃的食物，且它只能绕此立体图形的侧面爬行一周到 C 处. 你能在侧面展开图中画出蜗牛爬行的最短路线吗？

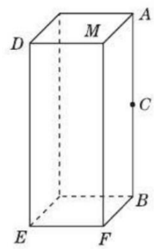
（4）SA 的长为 10，侧面展开图的圆心角为 90°，请你求出蜗牛爬行的最短路程的平方.



（第 7 题）

类型 3：长方体中的最短问题

8. 如图，桌子上放着一个长方体盒子，长、宽、高分别是 12 cm，8 cm，30 cm，在 AB 的中点 C 处有一滴蜜糖，一只小虫从 E 处沿盒子表面爬到 C 处去吃. 求小虫爬行的最短路程.

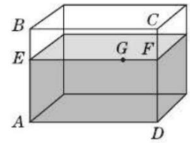


（第 8 题）

9. 有一个如图所示的长方体透明玻璃鱼缸，其长 $AD=80$ cm，高 $AB=60$ cm，水深 $AE=40$ cm，在水面上紧贴内壁 G 处有一鱼饵，G 在水面线 EF 上，且$EG=60$ cm. 一小虫想从鱼缸外的 A 点沿壁爬进鱼缸内 G 处吃鱼饵.

（1）小虫应该走怎样的路线才能使爬行的路线最短呢？请你在图中画出它爬行的路线，并用箭头标注.

（2）求小虫爬行的最短路线长.



（第 9 题）

第2招　利用勾股定理巧解折叠问题

名师点金

折叠图形的主要特征是折叠前后的两个图形关于折痕所在的直线对称，解答折叠问题的关键是巧用轴对称及全等的性质探索折叠中的变化规律．利用勾股定理解答折叠问题的一般步骤：1．运用折叠图形的性质找出相等的线段或角；2．在图形中找到一个直角三角形，然后设图形中某一线段的长为 x，将此直角三角形的三边长用数或含有 x 的式子表示出来；3．利用勾股定理列方程求出 x；4．进行相关计算解决问题．

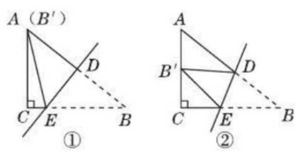
分类训练 (答案见28页)

技巧1　巧用对称法求折叠中线段的长

1．在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，D，E 分别是斜边 AB 和直角边 CB 上的点，把△ABC 沿着直线 DE 折叠，顶点 B 的对应点是 B'．

(1)如图①，如果点 B' 和顶点 A 重合，求 CE 的长；

(2)如图②，如果点 B' 是 AC 的中点，求 CE 的长．



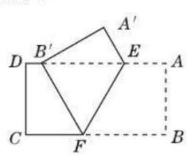
(第1题)

技巧2　巧用全等法求折叠中线段的长

2．如图，把长方形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使点 B 落在边 AD 上的点 B' 处，点 A 落在点 A' 处．

(1)试说明：$B'E=BF$；

(2)若 $AE=3$，$AB=4$，求 BF 的长．



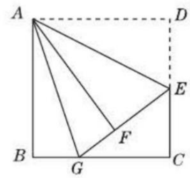
(第2题)

技巧3　巧用方程思想求折叠中线段的长

3．如图，在边长为6的正方形 $ABCD$ 中，E 是边 CD 的中点，将△ADE 沿 AE 折叠至△AFE，延长 EF 交 BC 于点 G，连接 AG．

(1)试说明：△ABG≌△AFG；

(2)求 BG 的长．



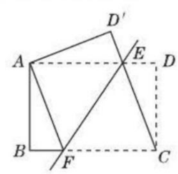
(第3题)

技巧4　巧用折叠探究线段之间的数量关系

4．如图，将长方形 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠，使点 C 与点 A 重合，折痕交 AD 于点 E，交 BC 于点 F，连接 CE．

(1)试说明：$AE=AF=CE=CF$；

(2)设 $AE=a$，$ED=b$，$DC=c$，请写出 a，b，c 三者之间的数量关系式．



(第4题)

第3招 特殊四边形的性质在动点问题中的巧用

名师点金

利用特殊四边形的性质解动点问题，一般将动点看成特殊点解决问题，再运用**从特殊到一般的思想**，将特殊点转化为一般点（动点）来解答.

典例剖析

例 如图3-1，在$\triangle ABC$中，点O是AC边上一动点，过点O作直线$MN /\!/ BC$，设MN交$\angle BCA$的平分线于点E，交$\triangle ABC$的外角$\angle ACH$的平分线于点F.

（1）证明：$EO=FO$.

（2）当点O运动到何处时，四边形$AECF$是矩形？简要说明理由.

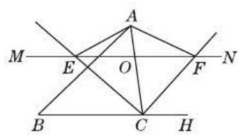


图 3-1

解题秘方：（1）根据已知条件证明$\triangle OEC$与$\triangle OCF$都是等腰三角形，即$OE=OC=OF$；（2）由（1）知$OE=OC=OF$，只要$OA=OC$，即当点O为AC的中点时，四边形$AECF$就是矩形.

（1）**证明：** $\because MN /\!/ BC$，

$\therefore \angle CEO=\angle ECB$，$\angle CFO=\angle FCH$.

$\because CE$，CF分别是$\angle BCA$，$\angle ACH$的平分线，

$\therefore \angle ECO=\angle ECB$，$\angle FCO=\angle FCH$.

$\therefore \angle CEO=\angle ECO$，$\angle CFO=\angle FCO$.

$\therefore EO=OC$，$FO=OC$.

$\therefore EO=FO$.

（2）**解：** 当点O运动到AC的中点时，四边形$AECF$是矩形.

理由如下：由（1）知$OE=OF$.

又$\because AO=CO$，

$\therefore$四边形$AECF$是平行四边形.

$\because OE=OC$，

$\therefore AC=EF$.

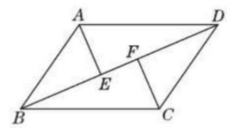
$\therefore$四边形$AECF$是矩形.

分类训练

（答案见28页）

技巧1 巧用平行四边形的性质解动点问题

1. 如图，在▱$ABCD$中，E，F两点在对角线BD上运动（E，F不重合，且E点在F点的左侧），且保持$BE=DF$，连接AE，CF. 请你猜想AE与CF有怎样的数量关系和位置关系，并说明理由.



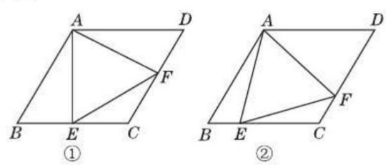
（第1题）

技巧2 巧用菱形的性质解动点问题

2. 如图，在菱形$ABCD$中，$\angle B=60°$，动点E在边BC上，动点F在边CD上.

（1）如图①，若E是BC的中点，$\angle AEF=60°$，求证：$BE=DF$；

（2）如图②，若$\angle EAF=60°$，求证：$\triangle AEF$是等边三角形.



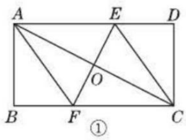
（第2题）

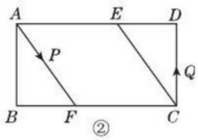
技巧③ 巧用矩形的性质解动点问题

3. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$ cm，$BC=8$ cm，AC 的垂直平分线 EF 分别交 AD，BC 于点 E，F，垂足为 O.

(1) 如图①，连接 AF，CE. 试说明四边形 $AFCE$ 为菱形，并求 AF 的长.

(2) 如图②，动点 P，Q 分别从 A，C 两点同时出发，沿 $\triangle AFB$ 和 $\triangle CDE$ 各边匀速运动一周，即点 P 自 $A\rightarrow F\rightarrow B\rightarrow A$ 停止，点 Q 自 $C\rightarrow D\rightarrow E\rightarrow C$ 停止. 在运动过程中，已知点 P 的速度为 5 cm/s，点 Q 的速度为 4 cm/s，运动时间为 t s，当以 A，C，P，Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，求 t 的值.





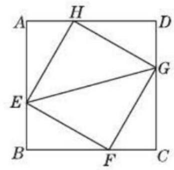
(第 3 题)

技巧④ 巧用正方形的性质解动点问题

4. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 8 cm，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 上的动点，且 $AE=BF=CG=DH$.

(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是正方形；

(2) 判断直线 EG 是否经过一个定点，并说明理由.



(第 4 题)

第4招 巧用一次函数解决方案设计问题

名师点金

做一件事情,有时有不同的方案,比较这些方案,从中选择最佳方案作为行动计划,是非常必要的.解决这些问题时,先要弄清题意,根据题意构建恰当的一次函数模型,然后借助方程、不等式求出自变量的取值范围,最后结合实际问题确定最佳方案.

典例剖析

例 某移动通信公司开设了两种通信业务:"全球通"使用者先缴50元月租费,然后每通话1 min,再付话费0.4元;"神州行"使用者不缴月租费,每通话1 min,付话费0.6元(均指市内通话).若一个月内通话时间为 x min,两种通信业务的费用分别为 y_1 元与 y_2 元.

(1)分别写出 y_1,y_2 与 x 之间的函数关系式.

(2)一个月内通话时间为多少分时,两种通信业务的费用相同?

(3)若某人一个月的话费为200元,则选择哪种通信业务比较合算?

解题秘方:这是一道实际生活中的应用题,解题时务必对这两种不同的通信业务仔细分析、比较,方可得出正确结论.

解:(1) $y_1=50+0.4x(x\geqslant0)$;

$y_2=0.6x(x\geqslant0)$.

(2)令 $y_1=y_2$,则 $50+0.4x=0.6x$,解得 $x=250$.

所以一个月内通话时间为250 min时,两种通信业务的费用相同.

(3)当 $y_1=200$ 时,有 $200=50+0.4x$,解得 $x=375$.

当 $y_2=200$ 时,有 $200=0.6x$,解得 $x=333\frac{1}{3}$.

因为 $375>333\frac{1}{3}$,

所以若某人一个月的话费为200元,则选择"全球通"比较合算.

分类训练

(答案见29页)

技巧1 合理决策问题

1. 某商场计划投入一笔资金采购一批紧俏商品,经市场调研发现,如果本月初出售,可获利10%,然后将本利再投资其他商品,到下月初又可获利10%;如果下月初出售可获利25%,但要支付仓储费8 000元.设商场投入资金 x 元,请你根据商场的资金情况,向商场提出合理化建议,说明何时出售获利较多.

技巧2 选择方案问题

2. 某教育行政部门计划今年暑假组织部分教师到外地进行学习,预订宾馆住宿时,有住宿条件一样的甲、乙两家宾馆供选择,其收费标准均为每人每天120元,并且各自推出不同的优惠方案.甲家是35人(含35人)以内的按标准收费,超过35人的,超出部分按九折收费;乙家是45人(含45人)以内的按标准收费,超过45人的,超出部分按八折收费.如果你是这个部门的负责人,你认为选择哪家宾馆更实惠些?

技巧3 购物优惠问题

3. 【中考·包头】甲、乙两个商场出售相同的某种商品,每件售价均为3 000元,并且多买都有一定的优惠.甲商场的优惠条件是:第一件按原售价收费,其余每件优惠30%.乙商场的优惠条件是:每件优惠25%.设所买商品为 x 件时,甲商场收费为 y_1 元,乙商场收费为 y_2 元.

(1)分别求出 y_1,y_2 与 x 之间的关系式.

(2)当甲、乙两个商场的收费相同时,所买商品为多少件?

(3)当所买商品为5件时,选择哪个商场更优惠?请说明理由.

第5招　巧用勾股定理判定直角的六种方法

名师点金

说明垂直的方法：1. 在同一平面内，如果一条直线垂直于两条平行线中的一条，那么它也垂直于另一条；2. 等腰三角形中“三线合一”；3. 直角三角形的判定. 在几何中，我们常常先说明垂直，再利用垂直的性质来解相关问题.

典例剖析

例 某校把一块三角形的废地开辟为植物园，如图5-1，测得 $AC=80$ m，$BC=60$ m，$AB=100$ m.

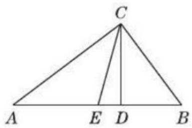


图5-1

(1)若入口 E 在边 AB 上，且与 A，B 的距离相等. 求从入口 E 到出口 C 的最短路线的长；(提示：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半)

(2)若线段 CD 是一条水渠，且点 D 在边 AB 上，点 D 距点 A 多远时，水渠最短？

解题秘方：这是一道实际生活中的问题，先将实际问题通过建立数学模型转化为数学问题，再利用数学知识进行解答.

已知 $\triangle ABC$ 中，$AC=80$ m，$BC=60$ m，$AB=100$ m.

(1)若 $AE=EB$，求 CE 的长；(提示：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半)

(2)若 $CD\perp AB$，求 AD 的长.

解：(1)因为 $AC=80$ m，$BC=60$ m，$AB=100$ m，

所以 $AC^2+BC^2=80^2+60^2=6\,400+3\,600=100^2=AB^2$.

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 AB 为斜边.

又因为 $AE=EB$，

所以 $CE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times100=50(\text{m})$(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半).

即从入口 E 到出口 C 的最短路线的长为50 m.

(2)当 $CD\perp AB$ 时，CD 最短. 因为 $\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$.

所以 $CD=48$ m.

在 $Rt\triangle ACD$ 中，因为 $AC^2=AD^2+CD^2$，

所以 $80^2=AD^2+48^2$.

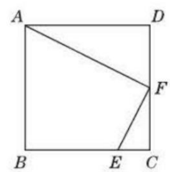
所以 $AD=64$ m，

即点 D 距点 A 64 m时，水渠最短.

分类训练 (答案见29页)

方法1　利用三边的数量关系说明直角

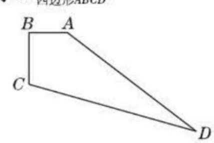
1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，F 为 DC 的中点，E 为 BC 上一点，且 $CE=\frac{1}{4}BC$. 你能说明 $\angle AFE$ 是直角吗？



(第1题)

方法2　利用转化为三角形法构造直角三角形

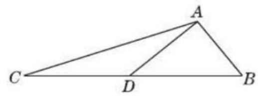
2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=3$，$BC=4$，$CD=13$，$AD=12$. 求 $S_{四边形ABCD}$.



(第2题)

方法③ 利用倍长中线法构造直角三角形

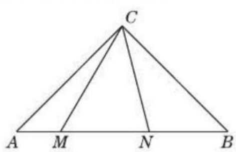
3. 如图，在△ABC 中，D 为边 BC 的中点，$AB=5$，$AD=6$，$AC=13$. 试说明：$AB\perp AD$.



（第 3 题）

方法④ 利用化分散为集中法构造直角三角形

4. 如图，在等腰直角三角形 ABC 的斜边上取两点 M，N，使$\angle MCN=45^\circ$，设 $AM=a$，$MN=x$，$BN=b$，判断以 x，a，b 为边长的三角形的形状.

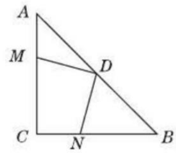


（第 4 题）

方法⑤ 利用“三线合一”法构造直角三角形

5. 如图，在△ABC 中，$CA=CB$，$\angle ACB=90^\circ$，D 为 AB 的中点，M，N 分别为 AC，BC 上的点，且 $DM\perp DN$.

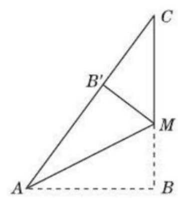
试说明：$AB^2=2(CM+CN)^2$.



（第 5 题）

方法⑥ 利用轴对称的性质构造直角三角形

6. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=3$，$AC=5$，将△ABC 折叠，使点 B 恰好落在边 AC 上，与点 B'重合，AM 为折痕，则 MB'的长为多少？



（第 6 题）

第6招　常用构造中位线的五种方法

名师点金

三角形的中位线具有两方面的性质

一是位置上的平行关系，二是数量上的倍分关系. 因此，当题目中给出三角形两边的中点时，可以直接连出中位线；当题目中给出一边的中点时，往往需要找另一边的中点，作出三角形的中位线.

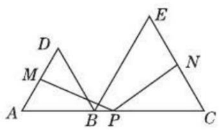
分类训练 (答案见30页)

方法1　连接两点构造三角形的中位线

1. 如图，点 B 为 AC 上一点，分别以 AB，BC 为边在 AC 同侧作等边三角形 ABD 和等边三角形 BCE，点 P，M，N 分别为 AC，AD，CE 的中点.

(1)求证：$PM=PN$；

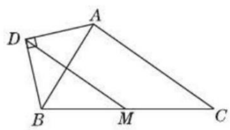
(2)求 $\angle MPN$ 的度数.



(第1题)

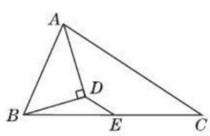
方法2　已知角平分线及垂直构造中位线

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M 为 BC 的中点，AD 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线，且 $AD\perp BD$，若 $AB=12$，$AC=18$，求 DM 的长.



(第2题)

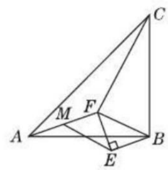
3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=6$，$AC=10$，AD 平分 $\angle BAC$，$BD\perp AD$ 于点 D，点 E 为 BC 的中点，求 DE 的长.



(第3题)

方法3　倍长法构造三角形的中位线

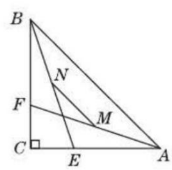
4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$BA=BC$，$\triangle BEF$ 为等腰直角三角形，$\angle BEF=90°$，M 为 AF 的中点，求证：$ME=\frac{1}{2}CF$.



(第4题)

方法4　已知一边中点，取另一边中点构造三角形的中位线

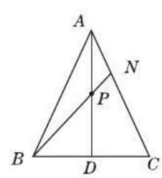
5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CA=CB$，E，F 分别为 CA，CB 上一点，$CE=CF$，M，N 分别为 AF，BE 的中点，求证：$AE=\sqrt{2}MN$.



(第5题)

方法5　已知两边中点，取第三边中点构造三角形的中位线

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AD\perp BC$ 于点 D，点 P 是 AD 的中点，延长 BP 交 AC 于点 N，求证：$AN=\frac{1}{3}AC$.



(第6题)

第7招 巧用二次根式的有关概念求字母或代数式的值

名师点金

理解二次根式的定义要明确：被开方数是非负数；最简二次根式的特征：一是被开方数中不含分母；二是被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；被开方数相同的最简二次根式要确保在最简二次根式这一前提下看其被开方数是否相同.

分类训练 (答案见31页)

训练角度1 利用二次根式的定义判定二次根式

1. 下列式子中为二次根式的是(　　)

A. $\sqrt[3]{8}$　　　B. $\sqrt{-1}$

C. $\sqrt{2}$　　　D. $\sqrt{x}(x<0)$

训练角度2 利用二次根式有意义的条件求字母的取值范围

2. 无论 x 取何实数，式子 $\sqrt{x^2-4x+m}$ 都有意义，化简式子 $\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{(4-m)^2}$.

训练角度3 利用最简二次根式的定义识别最简二次根式

3. 下列二次根式中，哪些是最简二次根式？哪些不是？不是最简二次根式的请说明理由.

$\sqrt{41^2-40^2}$，$\sqrt{8-x^2}$，$\sqrt{22}$，$\sqrt{x^2-4x+4}(x>2)$，$-x\sqrt{\frac{1}{2x}}$，$\sqrt{0.75ab}$，$\sqrt{ab^2}(b>0,a>0)$，$\sqrt{9x^2+16y^2}$，$\sqrt{(a+b)^2(a-b)}(a>b>0)$，$\sqrt{\frac{x}{3}}$，$\frac{\sqrt{x}}{3}$.

4. 把下列各式化成最简二次根式.

(1) $\sqrt{1.25}$；(2) $\sqrt{4a^3b+8a^2b}(a\geqslant0,b\geqslant0)$；

(3) $\sqrt{-\frac{n}{m^2}}(mn>0)$；(4) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}(x\neq y)$.

训练角度4 利用被开方数相同的最简二次根式的条件求字母的值

5. 如果最简根式 $\sqrt[b-a]{3b}$ 和 $\sqrt{2b-a+2}$ 是被开方数相同的最简二次根式，那么(　　)

A. $a=0,b=2$　　　B. $a=2,b=0$

C. $a=-1,b=1$　　　D. $a=1,b=-2$

6. 若最简二次根式 $\sqrt{5a+b}$ 和 $\sqrt{2a-b}$ 能合并，则式子 $-\frac{3a}{2b}+(3a+2b)^2$ 的值为________.

7. 如果最简二次根式 $\sqrt{3a-8}$ 与 $\sqrt{17-2a}$ 在二次根式加减运算中可以合并，求使 $\sqrt{4a-2x}$ 有意义的 x 的取值范围.

8. 若 m,n 均为有理数，且 $\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{\frac{3}{4}}=m+n\sqrt{3}$，求 $(m-n)^2+2n$ 的值.

第8招　利用特殊四边形的性质巧解折叠问题

名师点金

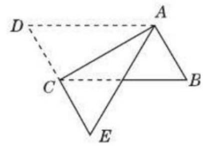
四边形的折叠问题是指将四边形按照某种方式折叠，然后在平面图形内按照要求完成相应的计算和证明. 折叠的本质是图形的轴对称变换，折叠后的图形与原图形全等.

分类训练 (答案见32页)

类型1　平行四边形的折叠问题

1. 在▱$ABCD$中，$AB=6$，$AD=8$，$\angle B$是锐角，将$\triangle ACD$沿对角线AC所在直线折叠，点D落在$\triangle ABC$所在平面内的点E处. 如果AE恰好经过BC的中点，那么▱$ABCD$的面积是________.

2. 如图，将平行四边形纸片$ABCD$沿对角线AC所在直线折叠，点D落在点E处，AE恰好经过BC边的中点. 若$AB=3$，$BC=6$，求$\angle B$的度数.



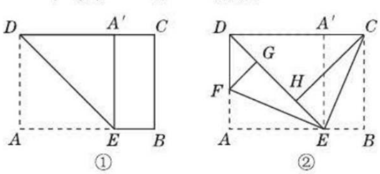
(第2题)

类型2　矩形的折叠问题

3. 【中考·衢州】如图①，将矩形$ABCD$沿DE折叠，使顶点A落在DC上的点A'处，然后将矩形展平，沿EF折叠，使顶点A落在折痕DE上的点G处. 再将矩形$ABCD$沿CE折叠，此时顶点B恰好落在DE上的点H处. 如图②.

(1)求证：$EG=CH$；

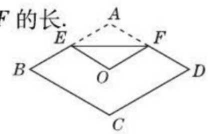
(2)已知$AF=\sqrt{2}$，求AD和AB的长.



(第3题)

类型3　菱形的折叠问题

4. 如图，将菱形纸片$ABCD$折叠，使点A恰好落在菱形的对角线交点O处，折痕为EF. 若菱形的边长为2，$\angle A=120°$，求EF的长.



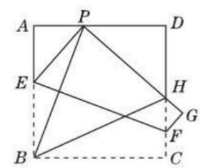
(第4题)

类型4　正方形的折叠问题

5. 【中考·德州】如图，现有一张边长为4的正方形纸片$ABCD$，点P为正方形AD边上的一点(不与点A、点D重合). 将正方形纸片折叠，使点B落在P处，点C落在G处，PG交DC于H，折痕为EF，连接BP，BH.

(1)求证：$\angle APB=\angle BPH$.

(2)当点P在边AD上移动时，$\triangle PDH$的周长是否发生变化？并证明你的结论.



(第5题)

第9招 特殊平行四边形的性质和判定的综合应用的四种类型

名师点金

特殊平行四边形的性质主要从边、角及对角线三个方面进行区分；而判定主要从建立在其他特殊四边形的基础上再附加什么条件进行判定. 应用特殊平行四边形的性质和判定解决的问题主要有折叠问题、操作型问题、探究型问题、阅读理解型问题等.

典例剖析

例 如图9-1，设四边形 $ABCD$ 是边长为1的正方形，以对角线 AC 为边作第二个正方形 $ACEF$，再以对角线 AE 为边作第三个正方形 $AEGH$，…，如此下去，若正方形 $ABCD$ 的边长记为 a_1，按上述方法所作的正方形的边长依次为 a_2，a_3，a_4，…，a_n，则 a_n = ________.

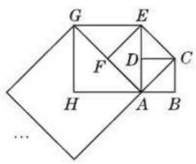


图9-1

解题秘方：由勾股定理可计算出部分正方形的边长，从而发现其中的规律进行解答.

由勾股定理得，$a_2=\sqrt{2}=(\sqrt{2})^1$，$a_3=2=(\sqrt{2})^2$，$a_4=2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^3$，…，发现规律，得到一般性结论：$a_n=(\sqrt{2})^{n-1}$.

答案： $(\sqrt{2})^{n-1}$

分类训练

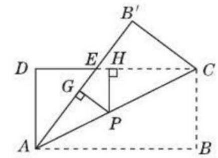
（答案见33页）

类型1 利用矩形的性质巧求折叠中线段的和

1. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，使点 B 落到点 B' 的位置，AB' 与 CD 交于点 E.

(1)试找出一个与 $\triangle AED$ 全等的三角形，并加以证明；

(2)若 $AB=8$，$DE=3$，P 为线段 AC 上的任意一点，$PG\perp AB'$ 于点 G，$PH\perp DC$ 于点 H，试求 $PG+PH$ 的值.



（第1题）

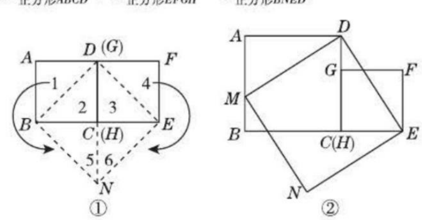
类型2 特殊平行四边形中的操作型问题

2. 对于边长均为 a 的两个正方形 $ABCD$ 和 $EFGH$，按图①所示的方式摆放，沿虚线 BD，EG 剪开后，可以按图中所示的移动方式拼接为四边形 $BNED$.

从拼接的过程容易得到结论：

①四边形 $BNED$ 是正方形.

② $S_{正方形ABCD}+S_{正方形EFGH}=S_{正方形BNED}$.



（第2题）

实践与操作：

(1)对于边长分别为a,b($a>b$)的两个正方形$ABCD$和$EFGH$,按图②所示的方式摆放,连接DE,过点D作$DM\perp DE$,交AB于点M,过点M作$MN\perp DM$,过点E作$EN\perp DE$,MN与EN相交于点N.

(ⅰ)证明四边形$MNED$是正方形,并用含a,b的代数式表示正方形$MNED$的面积;

(ⅱ)在图②中,将正方形$ABCD$和正方形$EFGH$剪开后,能够拼接成正方形$MNED$,请简略说明你的拼接方法(类比图①,用数字表示对应的图形);

(2)对于n(n是大于2的自然数)个任意的正方形,能否通过若干次拼接,将其拼接为一个正方形?请简略说明你的理由.

3.(1)如图①,在平行四边形纸片$ABCD$中,$AD=5$,$S_{\square ABCD}=15$.过点A作$AE\perp BC$,垂足为E,沿AE剪下$\triangle ABE$,将它平移至$\triangle DCE'$的位置,拼成四边形$AEE'D$,则四边形$AEE'D$的形状为(　　)

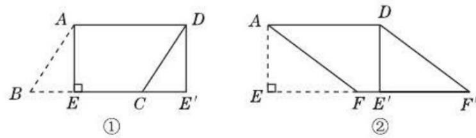
A.平行四边形　　B.菱形

C.矩形　　D.正方形

(2)如图②,在(1)的四边形纸片$AEE'D$中,在EE'上取一点F,使$EF=4$,剪下$\triangle AEF$,将它平移至$\triangle DE'F'$的位置,拼成四边形$AFF'D$.

①求证:四边形$AFF'D$是菱形;

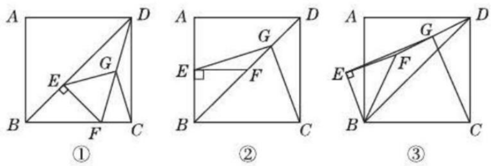
②求四边形$AFF'D$的两条对角线的长.



(第3题)

类型 3 特殊平行四边形中的探究型问题

4. 如图①，已知正方形 $ABCD$ 中，点 E 为对角线 BD 上一点，过点 E 作 $EF \perp BD$ 交 BC 于点 F，连接 DF，点 G 为 DF 的中点，连接 EG, CG.



（第 4 题）

(1) 求证：$EG = CG$.

(2) 将图①中的 $\triangle BEF$ 绕点 B 逆时针旋转 $45°$，如图②，取 DF 的中点 G，连接 EG, CG. 问 (1) 中的结论是否仍然成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由.

(3) 将图①中的 $\triangle BEF$ 绕点 B 旋转任意角度，如图③，再连接相应的线段，问 (1) 中的结论是否仍然成立？通过观察你还能得出什么结论？（均不要求证明）

类型 4 特殊平行四边形中的阅读理解型问题

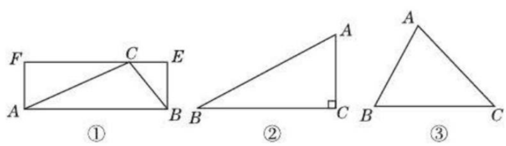
5. 阅读以下材料，然后解决问题：

如果一个三角形和一个矩形满足条件：三角形的一边与矩形的一边重合，且三角形的这边所对的顶点在矩形这边的对边上，则称这样的矩形为三角形的"友好矩形"，如图①所示，矩形 $ABEF$ 为 $\triangle ABC$ 的"友好矩形"，显然，当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，其"友好矩形"只有一个.

(1) 仿照以上叙述，说明什么是一个三角形的"友好平行四边形"；

(2) 如图②，若 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle C = 90°$，在图②中画出 $\triangle ABC$ 的所有"友好矩形"，并比较这些矩形面积的大小；

(3) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，且 $BC > AC > AB$，在图③中画出 $\triangle ABC$ 的所有"友好矩形"，指出其中周长最小的矩形并加以证明.



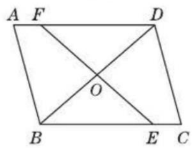
（第 5 题）

第 10 招　构造平行四边形解题的应用类型

分类训练 ☞(答案见 34 页)

类型 1　证两线段相等

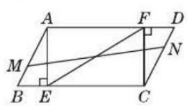
1. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AB=DC$,$AD=BC$,点 E 在 BC 上,点 F 在 AD 上,$AF=CE$,EF 与对角线 BD 相交于点 O. 求证:O 是 BD 的中点.



(第 1 题)

类型 2　证两线段互相平分

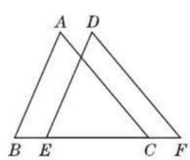
2. 如图所示,在▱$ABCD$ 中,$AE\perp BC$,$CF\perp AD$,$DN=BM$. 求证:EF 与 MN 互相平分.



(第 2 题)

类型 3　证两条线段平行

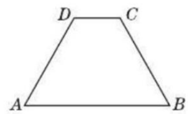
3. 如图,B,E,C,F 在同一直线上,$AB /\!/ DE$,$AB=DE$,$BE=CF$,求证:$AC /\!/ DF$.



(第 3 题)

类型 4　证线段的和差关系

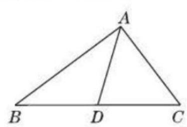
4. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$AB /\!/ CD$,且 $\angle ADC=2\angle ABC$. 求证:$AB=AD+CD$.



(第 4 题)

类型 5　求线段的取值范围

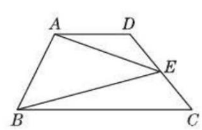
5. 如图,$\triangle ABC$ 中,$AB=8$,$AC=6$,AD 为 $\triangle ABC$ 的中线,则 AD 的取值范围是____________.



(第 5 题)

类型 6　解决面积问题

6. 如图,四边形 $ABCD$ 中,$AD /\!/ BC$,E 为 DC 的中点. 求证:$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$.



(第 6 题)

第 11 招　一次函数常见的四类易错题

分类训练 (答案见 35 页)

类型 1 忽视函数定义中的隐含条件而致错

1. 已知关于 x 的函数 $y=(m+3)x^{|m+2|}$ 是正比例函数，求 m 的值.

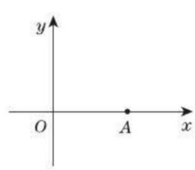
2. 已知关于 x 的函数 $y=kx^{-2k+3}-x+5(x\neq0)$ 是一次函数，求 k 的值.

类型 2 忽视分类或分类不全而致错

3. 已知一次函数 $y=kx+4$ 的图象与两坐标轴围成的三角形的面积为 16，求这个一次函数的表达式.

4. 一次函数 $y=kx+b$，当 $-3\leq x\leq1$ 时，对应的函数值的取值范围为 $1\leq y\leq9$，求 $k+b$ 的值.

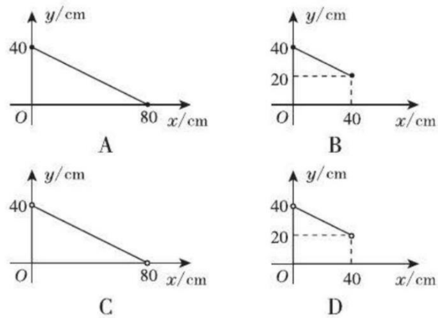
5. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是 $(4,0)$，点 P 在直线 $y=-x+m$ 上，且 $AP=OP=4$，求 m 的值.



(第 5 题)

类型 3 忽视自变量的取值范围而致错

6. 【中考·齐齐哈尔】若等腰三角形的周长是 80 cm，则能反映这个等腰三角形的腰长 y(cm) 与底边长 x(cm) 的函数关系的图象是(　　)



7. 若函数 $y=\begin{cases}x^2+6(x\leq3),\\5x(x>3),\end{cases}$ 则当 $y=20$ 时，自变量 x 的值是(　　)

A. $\pm\sqrt{14}$　　B. 4

C. $\pm\sqrt{14}$ 或 4　　D. 4 或 $-\sqrt{14}$

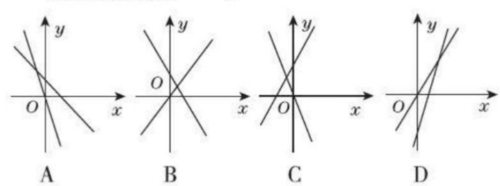
8. 现有 450 本图书供给学生阅读，每人 9 本，求余下的图书本数 y(本)与学生人数 x(人)之间的函数表达式，并求自变量 x 的取值范围.

类型 4 忽视一次函数的性质而致错

9. 若正比例函数 $y=(2-m)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围是(　　)

A. $m<0$　　B. $m>0$　　C. $m<2$　　D. $m>2$

10. 下列各图中，表示一次函数 $y=mx+n$ 与正比例函数 $y=mnx$ (m,n 是常数，且 $mn\neq0$) 的大致图象的是(　　)



11. 若一次函数 $y=kx+b$ 的图象不经过第三象限，则 k,b 的取值范围分别为 k ________ 0，b ________ 0.

第 12 招　二元一次方程（组）与一次函数的四种常见应用

名师点金

二元一次方程(组)与一次函数的关系很好地体现了"数"与"形"的结合，其常见应用有：利用两直线的交点坐标确定方程组的解，利用方程组的解求两直线的交点坐标，方程组的解与两个一次函数的关系，利用二元一次方程组求一次函数的表达式.

典例剖析

例 一次函数 $y=kx+b$，当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$3\leqslant y\leqslant 6$，则 $\frac{b}{k}$ 的值是________.

解题秘方：由于 k 的符号不能确定，故应分 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况进行解答.

①当 $k>0$ 时，$\frac{b}{k}=2$.

②当 $k<0$ 时，$\frac{b}{k}=-7$.

答案：2 或 -7

分类训练 (答案见 35 页)

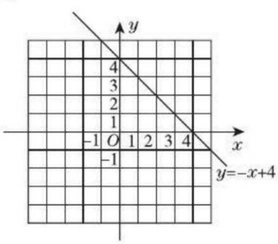
应用 1　利用两直线的交点坐标确定方程组的解

1. 在平面直角坐标系中，一次函数 $y=-x+4$ 的图象如图所示.

(1)在同一坐标系中，画出一次函数 $y=2x-5$ 的图象；

(2)用作图的方法解方程组 $\begin{cases}x+y=4,\\2x-y=5;\end{cases}$

(3)求直线 $y=-x+4$，$y=2x-5$ 与 x 轴所围成的三角形的面积.



(第 1 题)

应用 2　利用方程组的解求两直线的交点坐标

2. 已知 $\begin{cases}-mx+y=n,\\ex+y=f\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=6,\end{cases}$ 则直线 $y=mx+n$ 与 $y=-ex+f$ 的交点坐标为(　　)

A. $(4,6)$　　B. $(-4,6)$

C. $(4,-6)$　　D. $(-4,-6)$

3. 已知 $\begin{cases}x=3,\\y=-2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$ 是二元一次方程 $ax+by=-3$ 的两个解，则一次函数 $y=ax+b$ 的图象与 y 轴的交点坐标是(　　)

A. $(0,-7)$　　B. $(0,4)$

C. $\left(0,-\frac{3}{7}\right)$　　D. $\left(-\frac{3}{7},0\right)$

应用 3　方程组的解与两个一次函数的关系

4. 若方程组 $\begin{cases}x+y=2,\\2x+2y=3\end{cases}$ 没有解，则一次函数 $y=2-x$ 与 $y=\frac{3}{2}-x$ 的图象必定(　　)

A. 重合　　B. 平行

C. 相交　　D. 无法确定

5. 直线 $y=-a_1x+b_1$ 与直线 $y=a_2x+b_2$ 有唯一交点，则二元一次方程组 $\begin{cases}a_1x+y=b_1,\\a_2x-y=-b_2\end{cases}$ 的解的情况是(　　)

A. 无解　　B. 有一个解

C. 有两个解　　D. 有无数个解

应用 4　利用二元一次方程组求一次函数的表达式

6. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(3,-3)$，且与直线 $y=4x-3$ 的交点 B 在 x 轴上. 求：

(1)直线 AB 对应的函数表达式；

(2)直线 AB 与坐标轴所围成的 $\triangle BOC$(O 为坐标原点，C 为直线 AB 与 y 轴的交点)的面积.

第 13 招 分析数据做决策的三种常见类型

名师点金

解决决策问题时，经常从数据的变化趋势及**平均数**、**众数**、**中位数**、**方差**等多个统计量进行分析，根据实际需要结合数据的特征，选择恰当的数据，做出合理的决策.

分类训练

☞(答案见 36 页)

类型 1 用平均数做决策

1. 某校欲招聘一名数学教师，学校对甲、乙、丙三位候选人进行了三项能力测试，各项测试成绩满分均为 100 分，根据结果择优录用. 三位候选人的各项测试成绩如下表所示：

测试项目	测试成绩/分		
	甲	乙	丙
教学能力	85	73	73
科研能力	70	71	65
组织能力	64	72	84

(1)若根据三项测试的平均成绩，谁将被录用？说明理由.

(2)根据实际需要，学校将教学、科研和组织三项能力测试成绩按 5∶3∶2 的比例确定每人的最终成绩，谁将被录用？说明理由.

类型 2 用中位数、众数做决策

2. 某家电商场的一个柜组出售容积分别为 268 L，228 L，185 L，182 L 四种型号同一品牌的冰箱，每卖出一台冰箱，售货员就在一张纸上写出它的容积作为原始记录，到月底，柜组长清点原始记录，得到一组由 10 个 182，18 个 185，66 个 228 和 16 个 268 组成的数据.

(1)这组数据的平均数有实际意义吗？

(2)这组数据的中位数、众数分别是多少？

(3)这个商场的总经理关心的是中位数还是众数？说明理由.

3. 公园里有甲、乙两群游客正在做团体游戏，甲群是同一居民小区的初中生在进行联谊游戏；乙群是居民小区的两位退休教师义务带领一群学前儿童在做游戏. 调查这两群游客的年龄(单位：周岁)得到甲、乙两组数据：

甲：12，13，13，13，14，14，14，14，14，15，15，15，16.

乙：3，4，4，5，5，5，5，5，6，6，56，58.

(1)求甲、乙两组数据的平均数、中位数、众数；

(2)在各组数据的平均数、中位数和众数中，哪几个能反映各群游客的年龄特征？

类型 3 用方差做决策

4. 为选派一名学生参加全市实践活动技能竞赛，A，B 两名学生在校实习基地现场进行加工直径为 20 mm 的零件的测试，他俩各加工的 10 个零件的相关数据如下表和如图所示.

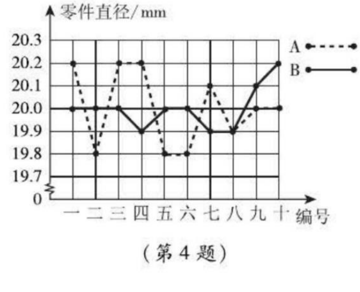
	平均数/mm	方差	完全符合要求个数
A	20	0.026	2
B	20	s_B^2	5

根据测试得到的有关数据，解答下列问题：

(1)考虑平均数与完全符合要求的个数，你认为________的成绩好些.

(2)计算出 s_B^2 的大小，考虑平均数与方差，说明谁的成绩好些.

(3)考虑图中折线走势及竞赛中加工零件个数远远超过 10 个的实际情况，你认为派谁去参加竞赛较合适？说明你的理由.



(第 4 题)

第 14 招　数形结合思想在解题中的巧用

名师点金

所谓数形结合就是根据数学问题的条件和结论之间的内在联系分析其代数含义，并结合其几何图形，使数量与空间形式和谐结合在一起的方法.通过对"**以形助数**"和"**以数辅形**"这两大题型的具体分析，揭示出"数"与"形"之间的紧密关系，从而把问题优化，获得解决.

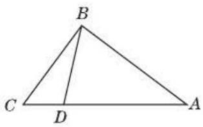
分类训练 (答案见 36 页)

技巧 1　特殊三角形的规律在求动点问题中的应用

1. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，$AB=20$，$BC=15$，点 D 为 AC 边上的动点，点 D 从点 C 出发，沿边 CA 往点 A 运动，当运动到点 A 时停止，设点 D 运动的时间为 t 秒，速度为每秒 2 个单位长度.

(1) 当 $t=$______时，△CBD 是直角三角形；

(2) 若△CBD 是等腰三角形，求 t 的值.



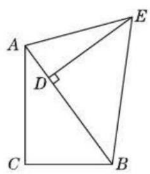
(第 1 题)

技巧 2　三角形三边的数量关系在直角三角形中的应用

2. 如图，在△ABC 中，$BC=6$，$AC=8$，$DE\perp AB$，$DE=7$，△ABE 的面积为 35. 求：

(1) AB 的长；

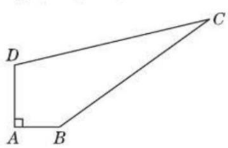
(2) 四边形 $ACBE$ 的面积.



(第 2 题)

技巧 3　数与形的关系在解实际问题中的应用

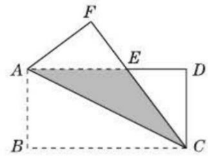
3. 某开发区有一块四边形的空地 $ABCD$，如图，现计划在空地上种植草皮，经测量 $\angle A=90°$，$AB=3$ m，$BC=12$ m，$CD=13$ m，$AD=4$ m. 若每平方米的草皮需要 200 元，则要投入多少元？



(第 3 题)

技巧 4　数与形的关系在解折叠问题中的应用

4. 如图，将长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 落在点 F 处，FC 交 AD 于点 E. 若 $AB=4$，$BC=8$，求图中阴影部分的面积.



(第 4 题)

技巧 5　数与形的关系在求最值中的应用

5. 如图，要在河边 l 修建一个水泵站 P，分别向张村 A 和李庄 B 送水. 已知张村 A、李庄 B 到河边 l 的距离分别为 2 km 和 7 km，且张村 A、李庄 B 相距 13 km.

(1) 水泵站 P 应建在什么地方，可使所铺设的水管最短？请在图中画出水泵站 P 的位置.

(2) 如果铺设水管的工程费用为每千米 15 000 元，请求出最节省的铺设水管的费用.

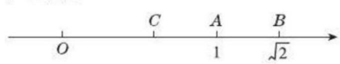
(第 5 题)

技巧 6　实数与数轴上的点的对应关系在求值中的应用

6. 如图，数轴上表示 1，$\sqrt{2}$ 的点分别为 A，B，C 为点 B 关于点 A 的对称点，设点 C 所表示的数为 x.

(1) 写出实数 x 的值；

(2) 求 $(x+\sqrt{2})^2$ 的值.

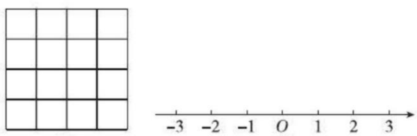


(第 6 题)

技巧7 直角三角形三边关系与在数轴上表示实数的综合应用

7. (1) 如图①，每个小正方形的边长是 1，在图①中画出一个面积是 2 的直角三角形和一个面积是 2 的正方形.（直角三角形和正方形的顶点都为格点，给画出的两个图形涂上阴影）

(2) 如图②，请作出 $-\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}$ 在数轴上对应的点的位置.



① ②

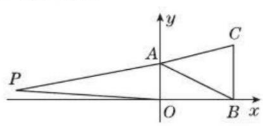
（第 7 题）

技巧8 数与形的关系在求点的坐标中的应用

8. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $A(0,4)$，$B(8,0)$，$C(8,6)$ 三点.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 如果在第二象限内有一点 $P(m,1)$，且四边形 $ABOP$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的两倍，求满足条件的点 P 的坐标.



（第 8 题）

技巧9 数的几何性质在求函数表达式中的应用

9. 已知直线 AB 对应的函数表达式为 $y=\frac{4}{3}x+4$，且直线 AB 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B. 动点 C 从点 A 出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿 x 轴正方向运动，设运动时间为 t 秒.

(1) 求 A，B 两点的坐标.

(2) 当 t 为何值时，经过 B，C 两点的直线与直线 AB 关于 y 轴对称？并求出直线 BC 对应的函数表达式.

(3) 在第(2)问的前提下，在直线 AB 上是否存在一点 P，使得 $S_{\triangle BCP}=2S_{\triangle ABC}$？如果存在，请求出此时点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由.

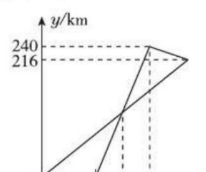
技巧10 图象的几何信息在解实际问题中的应用

10. 十一期间，小明和小亮相约从长春出发到 A 市某游乐园游玩，小明乘私家车从长春出发 1 h 后，小亮乘“和谐号”动车从长春出发，先到 A 市火车站，然后乘出租车去游乐园（换车时间忽略不计），两人恰好同时到达游乐园，他们离长春的距离 y(km) 与小明乘车的时间 t(h) 的函数图象如图所示.

(1) 求“和谐号”动车的速度；

(2) 当小亮到达 A 市火车站时，求小明与游乐园的距离；

(3) 若小明乘私家车从长春到达游乐园的时间比原来要提前 18 min，则私家车的速度应比原来的速度增加多少？



（第 10 题）

第15招　方程思想解题技巧荟萃

名师点金

所谓**方程思想**，就是从分析问题的数量关系入手，通过设定未知数，把问题中的已知量与未知量的数量关系转化为方程或方程组等数学模型，然后利用方程的理论或方法，使问题得到解决. 用方程思想分析、处理问题，思路清晰，计算简便.

1. **方程思想的最基本观点**——几个未知数，列几个独立的方程；

2. **方程思想解题的核心**——构造方程，建立已知与未知的联系.

用方程思想解题的核心是揭示题目中隐含的等量关系，设未知数、构造方程，建立已知与未知的联系，从而使问题得到解决.

典例剖析

例 已知：如图15-1所示，AB 比 AC 长 2 cm，BC 的垂直平分线交 AB 于 D，交 BC 于 E，$\triangle ACD$ 的周长是 14 cm，求 AB 和 AC 的长.

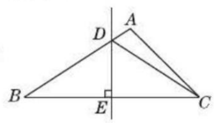


图 15-1

解题秘方：此题用代数方法解较好. 可设 AB，AC 的长分别为 x cm，y cm，已知 AB 比 AC 长2 cm，只需再找到 AB 与 AC 的另一个等量关系即可列出二元一次方程组.

解：$\because$ DE 垂直平分 BC，$\therefore$ $DB=DC$.

$\because$ $AC+AD+DC=14$ cm，

$\therefore$ $AC+AD+DB=14$ cm，

即 $AC+AB=14$ cm.

设 $AB=x$ cm，$AC=y$ cm，则：

$\begin{cases}x+y=14,\\x-y=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=8,\\y=6.\end{cases}$

$\therefore$ $AB=8$ cm，$AC=6$ cm.

分类训练

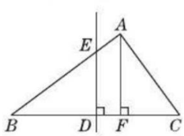
(答案见38页)

技巧1　方程思想在证三角形形状中的应用

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$AC=3$，DE 是 BC 的垂直平分线，交 BC 于点 D，交 AB 于点 E，$AF\perp BC$ 于点 F.

(1) 若 $\angle BAC=90°$，求 AE 的长；

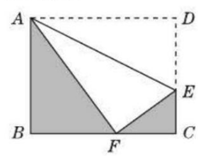
(2) 若 $DF=0.7$，求证：$\triangle ABC$ 为直角三角形.



（第1题）

技巧2　方程思想在求阴影部分的面积中的应用

2. 如图，将长方形 $ABCD$ 沿直线 AE 折叠，顶点 D 恰好落在 BC 边上的点 F 处. 已知 $CE=3$ cm，$AB=8$ cm，求图中阴影部分的面积.



（第2题）

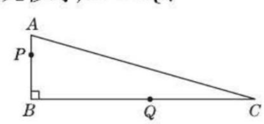
技巧3　方程思想在探究线段相等的条件中的应用

3. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$AB=7$ cm，$AC=25$ cm. 点 P 从点 A 沿 AB 方向以 1 cm/s 的速度运动至点 B，点 Q 从点 B 沿 BC 方向以 6 cm/s的速度运动至点 C，P，Q 两点同时出发.

(1) 求 BC 的长；

(2) 当运动 2 s 时，求 P，Q 两点之间的距离；

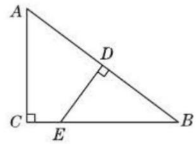
(3) 当 P，Q 两点运动几秒时，$AP=CQ$？



（第3题）

技巧4 方程思想在求线段长中的应用

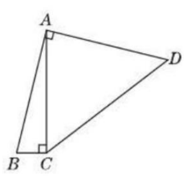
4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$AB=10$，AB 的垂直平分线 DE 交 AB 于点 D，交 BC 于点 E，求 CE 的长.



（第 4 题）

技巧5 方程思想在求几何中函数解析式的应用

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle ACB=90°$，$AB=AD$，$AC=4BC$，设 CD 的长为 x，四边形 $ABCD$ 的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数解析式.



（第 5 题）

技巧6 方程思想在解实际问题缴费中的应用

6. 某电信公司手机的 A 类收费标准如下：不管通话时间多长，每部手机每月必须缴月租费 50 元，另外，每通话 1 分钟收费 0.4 元. B 类收费标准如下：没有月租费，但每通话 1 分钟收费 0.6 元.

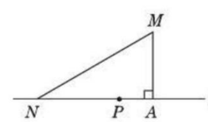
(1)若 A 类、B 类两种收费标准每月应缴费用分别为 y_1 元和 y_2 元，分别写出 y_1，y_2 与通话时间 x（分钟）之间的关系式.

(2)若每月平均通话时间为 300 分钟，你选择哪类收费标准？

(3)每月通话多长时间时，按 A，B 两类收费标准缴费，所缴费用相等？

技巧7 方程思想在解实际问题等距中的应用

7. 如图，某校（点 M）距公路（直线 l）的距离（MA 的长）为 1 km，在公路上距该校 2 km 处有一个车站（点 N），该校拟在公路上建一个公交车停靠站（点 P），以便于该校职工乘车上下班，要求停靠站到该校与车站的距离相等，请问：停靠站应建在什么位置？并计算停靠站到车站的距离.



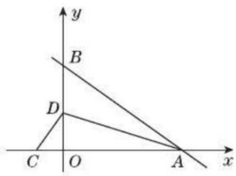
（第 7 题）

技巧8 方程思想在求平面直角坐标系中函数解析式的应用

8. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，点 D 在线段 OB 上，将 $\triangle ADB$ 沿 AD 折叠，使点 B 落在 x 轴负半轴的点 C 处. 求：

(1) A，B 两点的坐标；

(2) 线段 CD 所在直线对应的函数解析式.



（第 8 题）

技巧9 方程思想在求实际问题最值中的应用

9. 丽君花卉基地出售两种盆栽花卉：太阳花 6 元/盆，绣球花 10 元/盆. 若一次购买的绣球花超过 20 盆时，超过 20 盆部分的绣球花价格打 8 折.

(1) 分别写出两种花卉的付款金额 y（元）关于购买量 x（盆）的函数解析式.

(2) 为了美化环境，花园小区计划到该基地购买这两种花卉共 90 盆，其中太阳花的数量不超过绣球花数量的一半，两种花卉各购买多少盆时，总费用最少？最少费用是多少元？

第16招 整体思想在解题中的五种技巧

名师点金

有一些数学问题，如果从局部入手，难以各个突破，但若能从宏观上进行整体分析，运用整体思想方法，则常常能出奇制胜，简捷解题.

整体思想，就是在研究和解决有关数学问题时，通过研究问题的整体形式、整体结构、整体特征，从而对问题进行整体处理的解题方法.整体思想的主要表现形式有**整体代换**、**整体换元**、**整体变形**、**整体补形**、**整体配凑**、**整体构造**等.在初中数学中的数与式、几何与图形等方面，整体思想都有很好的应用.

典例剖析

例 已知 $x=\sqrt{6}-\sqrt{5}$，$y=\sqrt{6}+\sqrt{5}$，求 x^3y+xy^3 的值.

解题秘方：如果直接将 x，y 的值代入计算，显然比较麻烦，但注意到 x^3y+xy^3 可以化为 $xy[(x+y)^2-2xy]$，将 $x+y$，xy 均作为一个整体代入求值，可简化计算.

解：因为 $x=\sqrt{6}-\sqrt{5}$，$y=\sqrt{6}+\sqrt{5}$，

所以 $xy=(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})=1$，$x+y=\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{5}=2\sqrt{6}$.

所以 $x^3y+xy^3=xy(x^2+y^2)=xy[(x+y)^2-2xy]=1\times[(2\sqrt{6})^2-2\times1]=22$.

分类训练

(答案见39页)

技巧1 整体代换在求值中的应用

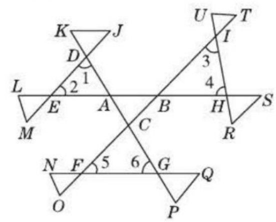
1. 已知 $a+\dfrac{1}{a}=1+\sqrt{10}$，求 $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ 的值.

技巧2 整体变形在求值中的应用

2. 已知 $a-b=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$b-c=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ 的值.

技巧3 整体代换在求角度中的应用

3. 如图，先求 $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6$，再求 $\angle J+\angle K+\angle L+\angle M+\angle N+\angle O+\angle P+\angle Q+\angle R+\angle S+\angle T+\angle U$.



（第3题）

技巧4 整体代换在解方程组中的应用

4. 解方程组：$\begin{cases}4x-5y-7=0,\\ 4y+\dfrac{4x-5y+5}{6}=6.\end{cases}$

技巧5 整体换元在解方程组中的应用

5. 解方程组：$\begin{cases}\dfrac{2(x-y)}{3}-\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{1}{2},\\ 3(x+y)-2(x-y)=3.\end{cases}$

第 17 招　建模思想应用的常见类型归类

名师点金

数学建模思想是人类用数学知识探索自然和实际应用的一种最有效的方法，也是数学应用于科技和社会的最基本途径；它是对现象和过程进行合理的抽象和量化，然后用数学知识进行模拟和验证的一种模式化思维；初中数学建模，就是用初中所学的数学知识和实际问题之间构建一个桥梁来加以沟通，便于把实际问题用数学问题表示出来；这个桥梁就是数学模型，构建这个桥梁的思维方法就是数学建模思想.

典例剖析

例 为解决楼房的采光问题，某地区规定：两幢楼房间的距离至少为 40 m，中午 12 时不挡光. 如图 17-1，某旧楼的一楼窗台高 1 m，要在此楼正南方 40 m 处建一幢新楼. 已知该地区冬天中午 12 时阳光从正南方照射，并且光线与水平线的夹角最小为 30°，在不违反规定的情况下，请问：新建楼房最高多少米？（结果精确到 1 m. $\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{2}\approx 1.414$）

解：如图 17-1，过点 C 作 $CE\perp BD$，垂足为点 E.

由题意可得，四边形 $ABEC$ 为矩形，

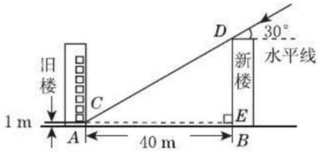


图 17-1

则 $CE=AB=40$ m，$BE=AC=1$ m，

易知 $\angle DCE=30°$. $\therefore CD=2DE$.

在 Rt$\triangle CDE$ 中，$DE^2+CE^2=CD^2=(2DE)^2$，

$\therefore DE=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$ m，

$\therefore BD=DE+BE=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}+1\approx 24$（m）.

$\therefore$ 新建楼房最高约为 24 m.

分类训练

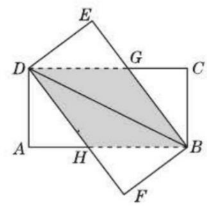
☞（答案见 40 页）

类型 1 建立方程模型求几何图形面积

1. 将两张完全相同的矩形纸片 $ABCD$、$FBED$ 按如图所示方式放置，BD 为重合的对角线. 重叠部分为四边形 $DHBG$.

（1）试判断四边形 $DHBG$ 为何种特殊的四边形，并说明理由；

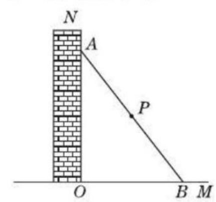
（2）若 $AB=8$，$AD=4$，求四边形 $DHBG$ 的面积.



（第 1 题）

类型 2 建立几何模型解释生活中的现象

2. 如图，一根长 a m 的木棍（AB）斜靠在与地面（OM）垂直的墙（ON）上，设木棍的中点为 P，若木棍 A 端沿墙下滑，且 B 端沿地面向右滑行，则木棍滑动的过程中，点 P 到点 O 的距离________（填“发生”或“不发生”）变化. 理由是________________________________.

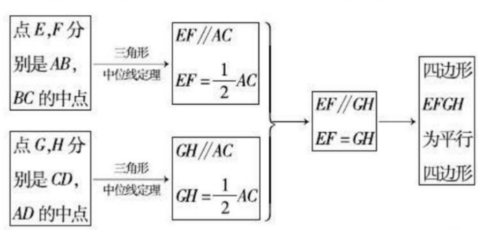


（第 2 题）

类型 3 建立特殊四边形的模型探寻条件

3. 在数学课上，老师请同学思考如下问题：如图①，我们把一个四边形 $ABCD$ 的四边中点 E，F，G，H 依次连接起来得到的四边形 $EFGH$ 是平行四边形吗？

小敏在思考问题时，有如下思路：连接 AC.



结合小敏的思路作答：

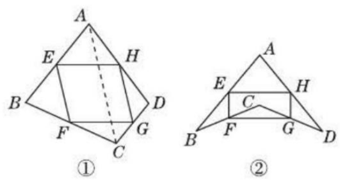
(1)若只改变图①中四边形 $ABCD$ 的形状（如图②），则四边形 $EFGH$ 还是平行四边形吗？说明理由；

参考小敏思考问题的方法，解决下列问题：

(2)如图②，在(1)的条件下，若连接 AC，BD.

(ⅰ)当 AC 与 BD 满足什么条件时，四边形 $EFGH$ 是菱形？写出结论并证明；

(ⅱ)当 AC 与 BD 满足什么条件时，四边形 $EFGH$ 是矩形？直接写出结论.



（第 3 题）

类型 4 建立方程模型解实际应用

4.【2019·广元】某水果商计划购进甲、乙两种水果进行销售，经了解，甲种水果的进价比乙种水果的进价每千克少 4 元，且用 800 元购进甲种水果的数量与用 1 000 元购进乙种水果的数量相同.

(1)求甲、乙两种水果的单价分别是多少元？

(2)该水果商根据该水果店平常的销售情况确定，购进两种水果共 200 千克，其中甲种水果的数量不超过乙种水果数量的 3 倍，且购买资金不超过 3 420 元，购回后，水果商决定甲种水果的销售价定为每千克 20 元，乙种水果的销售价定为每千克 25 元，则水果商应如何进货，才能获得最大利润，最大利润是多少？

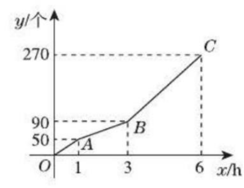
类型 5 建立函数模型解图象信息的应用

5.【2019·绥化】甲、乙两台机器共同加工一批零件，一共用了 6 h，在加工过程中乙机器因故障停止工作，排除故障后，乙机器提高了工作效率且保持不变，继续加工，甲机器在加工过程中工作效率保持不变，甲、乙两台机器加工零件的总数 y(个)与甲加工时间 x(h)之间的函数图象为折线 $OA-AB-BC$，如图所示.

(1)这批零件一共有________个，甲机器每小时加工________个零件，乙机器排除故障后每小时加工________个零件；

(2)当 $3\leqslant x\leqslant 6$ 时，求 y 与 x 之间的函数解析式；

(3)在整个加工过程中，甲加工多长时间时，甲与乙加工的零件个数相等？



（第 5 题）

参考答案及点拨

第1招 巧用勾股定理求最短路径的长

1. 解:(1)$\triangle ABC$ 是直角三角形. 理由如下:

因为 $AC^2+BC^2=160^2+120^2=40\ 000$,$AB^2=200^2=40\ 000$,

所以 $AC^2+BC^2=AB^2$.

所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle ACB=90°$.

(2)甲方案所修的水渠较短.

因为 $\triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle ACB=90°$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}AB\cdot CH=\frac{1}{2}AC\cdot BC$.

所以 $CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{160\times120}{200}=96(\mathrm{m})$.

因为 $AC+BC=160+120=280(\mathrm{m})$,$CH+AH+BH=CH+AB=96+200=296(\mathrm{m})$,

所以 $AC+BC<CH+AH+BH$.

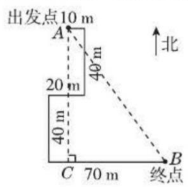
所以甲方案所修的水渠较短.

2. 100 m **点拨**:如图,连接 AB,作 $AC\perp BC$ 于点 C.

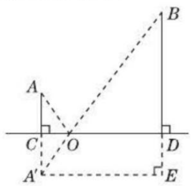
因为 $AC=40+40=80(\mathrm{m})$,

$BC=70-20+10=60(\mathrm{m})$,

所以 $AB^2=60^2+80^2=100^2$,则 $AB=100$ m.



(第2题)



(第4题)

3. 10

4. 解:如图,作点 A 关于直线 CD 的对称点 A',连接 $A'B$ 交 CD 于点 O,则点 O 即为水厂的位置. 连接 AO,过点 A' 作 $A'E\perp BD$ 交 BD 的延长线于点 E,则 $A'E=CD=3$ km,$DE=A'C=AC=1$ km.

所以 $BE=BD+DE=3+1=4(\mathrm{km})$.

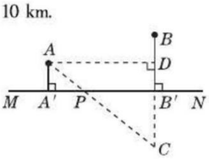
在 $\mathrm{Rt}\triangle A'EB$ 中,$A'B^2=A'E^2+BE^2=3^2+4^2=25$,

所以 $A'B=5$ km.

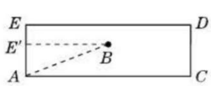
所以 $OA+OB=OA'+OB=A'B=5$ km.

所以总费用为 $5\times20\ 000=100\ 000$(元).

5. 解:如图,作点 B 关于 MN 的对称点 C,连接 AC 交 MN 于点 P,则点 P 即为出口的位置. 此时 A,B 两城镇到出口 P 的距离之和最短,最短距离为 AC 的长. 作 $AD\perp BB'$ 于点 D,在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中,$AD=A'B'=8$ km,$DC=6$ km,所以 $AC^2=AD^2+DC^2=100$. 所以 $AC=10$ km. 所以这个最短距离为 10 km.



(第5题)



(第6题)

6. 解:此圆柱的侧面展开图为长方形 $ACDE$,如图所示,其中 AC 的长为圆柱的底面周长,连接 AB,过点 B 作 $BE'\perp AE$ 于 E'.

所以 $AC=2\pi r\approx2\times3\times4=24(\mathrm{cm})$,

则 $E'B=\frac{1}{2}AC\approx12$ cm.

又因为 $EA=8$ cm,$EE'=3$ cm,

所以 $AE'=EA-EE'=8-3=5(\mathrm{cm})$.

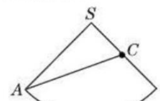
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE'$ 中,$AB^2=AE'^2+E'B^2\approx5^2+12^2=13^2$,

所以 $AB\approx13$ cm.

即蚂蚁从 A 点爬到 B 点的最短距离约为 13 cm.

7. 解:(1)圆锥 (2)扇形

(3)把此立体图形的侧面展开,如图所示,连接 AC,则 AC 为蜗牛爬行的最短路线.



(第7题)

(4)由题易知 $SC=5$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ASC$ 中,由勾股定理,得 $AC^2=10^2+5^2=125$.

故蜗牛爬行的最短路程的平方为 125.

8. 解:分三种情况.

情况一:如图①,连接 EC.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBC$ 中,$EB=12+8=20(\mathrm{cm})$,$BC=\frac{1}{2}\times30=15(\mathrm{cm})$.

由勾股定理,得 $EC^2=20^2+15^2=625$,所以 $EC=25$ cm.

情况二:如图②,连接 EC.

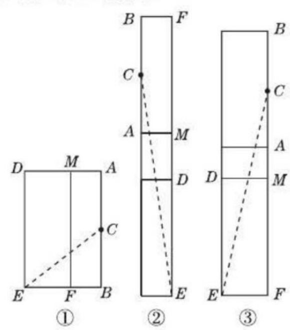
根据勾股定理可求得 $EC^2=8^2+(30+12+15)^2=3\ 313$,所以 $EC=\sqrt{3\ 313}$ cm.

情况三:如图③,连接 EC.

根据勾股定理可求得 $EC^2=12^2+(30+8+15)^2=2\ 953$,所以 $EC=\sqrt{2\ 953}$ cm.

因为 $25<\sqrt{2\ 953}<\sqrt{3\ 313}$,

所以小虫爬行的最短路程是 25 cm.



(第8题)

9. 解:(1)如图,作点 A 关于直线 BC 的对称点 A',连接 $A'G$,与 BC 交于点 Q,连接 AQ.

则 $AQ—QG$ 为最短路线.

(2)因为 $AE=40\ \text{cm}$，$AA'=60+60=120(\text{cm})$，

所以 $A'E=80\ \text{cm}$.

又 $EG=60\ \text{cm}$，

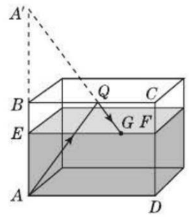
所以在 Rt△$A'EG$ 中，

$A'G^2=80^2+60^2=10\ 000$.

所以 $A'G=100\ \text{cm}$.

所以 $AQ+QG=A'Q+QG=A'G=100\ \text{cm}$.

即最短路线长为 100 cm.



（第 9 题）

第 2 招 利用勾股定理巧解折叠问题

1. 解：(1)设 $CE=x$，则 $BE=8-x$，

由题意得 $AE=BE=8-x$，

由勾股定理得 $x^2+6^2=(8-x)^2$.

解得 $x=\frac{7}{4}$.

即 CE 的长为$\frac{7}{4}$.

(2)因为点 B'是 AC 的中点，

所以 $CB'=\frac{1}{2}AC=3$.

设 $CE=y$，类比(1)中的解法，可列出方程 $y^2+3^2=(8-y)^2$，解得 $y=\frac{55}{16}$.

即 CE 的长为$\frac{55}{16}$.

2. 解：(1)过点 B'作 $B'M\perp EF$ 于点 M.

因为在长方形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，

所以$\angle B'EF=\angle EFB$.

由题意得$\angle B'FE=\angle EFB$，

所以$\angle B'FE=\angle B'EF$.

因为 $B'M\perp EF$，所以$\angle B'ME=\angle B'MF=90°$.

又因为 $B'M=B'M$，所以$\triangle B'EM\cong\triangle B'FM$.

所以 $B'E=B'F$.

又易知 $BF=B'F$，所以 $B'E=BF$.

(2)在 Rt△$A'B'E$ 中，$A'B'=AB=4$，$A'E=AE=3$，

所以 $B'E^2=A'B'^2+A'E^2=4^2+3^2=25$.

所以 $B'E=5$.

所以 $BF=B'E=5$.

3. 解：(1)在正方形 $ABCD$ 中，$AD=AB=BC=CD$，$\angle D=\angle B=\angle C=90°$.

因为将△ADE 沿 AE 折叠至△AFE，

所以 $AD=AF$，$DE=FE$，

$\angle D=\angle AFE=90°$.

所以 $AB=AF$，$\angle B=\angle AFG=90°$.

又因为 $AG=AG$，

所以 Rt△ABG≌Rt△AFG(HL).

(2)因为△ABG≌△AFG，

所以 $BG=FG$.

设 $BG=FG=x$，则 $GC=6-x$.

因为 E 为 CD 的中点，

所以 $CE=EF=DE=3$.

所以 $EG=3+x$.

所以在 Rt△CEG 中，$3^2+(6-x)^2=(3+x)^2$，解得 $x=2$.

所以 $BG=2$.

4. 解：(1)过点 A 作 $AM\perp EF$ 于点 M. 由题意知 $AF=CF$，$AE=CE$，$\angle AFE=\angle CFE$.

因为四边形 $ABCD$ 是长方形，所以 $AD/\!/BC$.

所以$\angle AEF=\angle CFE$.

所以$\angle AFE=\angle AEF$.

因为 $AM\perp EF$，所以$\angle AME=\angle AMF=90°$.

又因为 $AM=AM$，所以$\triangle AME\cong\triangle AMF$(AAS).

所以 $AE=AF$.

所以 $AE=AF=CE=CF$.

(2)由题意知，$AE=CE=a$，$ED=b$，$DC=c$. 由$\angle D=90°$知 $ED^2+DC^2=CE^2$，

即 $b^2+c^2=a^2$.

第 3 招 特殊四边形的性质在动点问题中的巧用

1. 解：$AE=CF$，$AE/\!/CF$. 理由如下：

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB=CD$，$AB/\!/CD$.

∴ $\angle ABE=\angle CDF$.

又∵ $BE=DF$，

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CDF$.

∴ $AE=CF$，$\angle AEB=\angle CFD$.

∵ $\angle AEB+\angle AED=\angle CFD+\angle CFB=180°$，

∴ $\angle AED=\angle CFB$.

∴ $AE/\!/CF$.

点拨：证$\triangle ABE\cong\triangle CDF$ 得到 $AE=CF$，即得到数量关系，证$\angle AED=\angle CFB$ 得到 $AE/\!/CF$，即得到位置关系.

2. 证明：(1)连接 AC. ∵ 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$，$AB=BC$，$AB/\!/CD$，

∴ $\angle BCD=180°-\angle B=120°$，△$ABC$ 是等边三角形. 又∵ E 是 BC 的中点，∴ $AE\perp BC$. ∵ $\angle AEF=60°$，

∴ $\angle FEC=90°-\angle AEF=30°$. ∴ $\angle CFE=180°-\angle FEC-\angle BCD=180°-30°-120°=30°$. ∴ $\angle FEC=\angle CFE$.

∴ $EC=CF$.

又∵ $BC=CD$，∴ $BC-EC=CD-CF$.

∴ $BE=DF$.

(2)连接 AC. 由(1)知△ABC 是等边三角形，

∴ $AB=AC$，$\angle ACB=\angle BAC=\angle EAF=60°$.

∴ $\angle BAE=\angle CAF$.

∵ $\angle BCD=120°$，$\angle ACB=60°$，

∴ $\angle ACF=60°=\angle B$.

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ACF$.

∴ $AE=AF$. ∴ △AEF 是等边三角形.

3. 解：(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AD/\!/BC$.

∴ $\angle OAE=\angle OCF$，$\angle AEO=\angle CFO$.

$\because EF$ 垂直平分 AC,垂足为 O,

$\therefore OA=OC$.

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$. $\therefore OE=OF$.

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为平行四边形.

又$\because EF\perp AC$,$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为菱形.

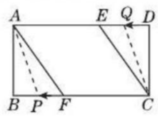
$\therefore AF=CF$.

设 $AF=CF=x$ cm,则 $BF=(8-x)$cm,

在 Rt$\triangle ABF$ 中,$AB=4$ cm,由勾股定理得 $4^2+(8-x)^2=x^2$,解得 $x=5$,

$\therefore AF=5$ cm.

(2)显然当 P 点在 AF 上,Q 点在 CD 上时,以 A,C,P,Q 四点为顶点不可能构成平行四边形;同理当 P 点在 AB 上,Q 点在 DE 或 CE 上时,也不可能构成平行四边形. 因此只有当 P 点在 BF 上,Q 点在 ED 上时,才能构成平行四边形,如图,连接 AP,CQ. 若以 A,C,P,Q 四点为顶点的四边形是平行四边形,则 $PC=QA$.



(第 3 题)

$\because$ 四边形 $AFCE$ 是菱形,点 P 的速度为 5 cm/s,点 Q 的速度为 4 cm/s,运动时间为 t s,

$\therefore PC=PF+FC=PF+FA=5t$ cm,

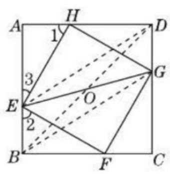
$QA=(AD+CD)-(QD+CD)=(12-4t)$cm.

$\therefore 5t=12-4t$,解得$t=\dfrac{4}{3}$.

$\therefore$ 当以 A,C,P,Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时,$t=\dfrac{4}{3}$.

点拨:本题考查了矩形的性质、菱形的判定、勾股定理、平行四边形的判定与性质,是一道综合性较强的题目. 注意建立方程求解.

4. (1)**证明**:如图,$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,



(第 4 题)

$\therefore \angle A=\angle ABC=\angle C=\angle ADC=90^\circ$,$AB=BC=CD=AD$.

又$\because AE=BF=CG=DH$,

$\therefore BE=CF=DG=AH$.

$\therefore \triangle AEH\cong\triangle BFE\cong\triangle CGF\cong\triangle DHG$.

$\therefore EH=EF=FG=GH$,$\angle 1=\angle 2$.

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为菱形.

$\because \angle 1+\angle 3=90^\circ$,$\angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle 2+\angle 3=90^\circ$. $\therefore \angle HEF=90^\circ$.

又$\because$ 四边形 $EFGH$ 为菱形,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是正方形.

(2)**解**:直线 EG 经过一个定点. 理由如下:如图,连接 BD,DE,BG. 设 EG 与 BD 交于 O 点.

$\because BE \mathrel{\underline{\parallel}} DG$,

$\therefore$ 四边形 $BGDE$ 为平行四边形.

$\therefore BD,EG$ 互相平分. $\therefore BO=OD$.

$\therefore$ 点 O 为正方形 $ABCD$ 的中心.

$\therefore$ 直线 EG 必过正方形 $ABCD$ 的中心.

点拨:(1)先证四边形 $EFGH$ 是菱形,再证$\angle HEF=90^\circ$,得到四边形 $EFGH$ 是正方形;(2)通过添加辅助线 BD,DE,BG,证 BD 与 EG 互相平分,从而得出 EG 经过正方形 $ABCD$ 的中心.

第 4 招 巧用一次函数解决方案设计问题

1. **解**:设如果商场本月初出售,下月初可获利 y_1 元,

则 $y_1=10\%x+(1+10\%)x\cdot 10\%=0.1x+0.11x=0.21x$.

设如果商场下月初出售,可获利 y_2 元,则 $y_2=25\%x-8\,000=0.25x-8\,000$.

当 $y_1=y_2$ 时,$0.21x=0.25x-8\,000$,解得 $x=200\,000$.

所以若商场投入资金为 20 万元,两种出售方式获利相同;若商场投入资金少于20 万元,本月初出售获利较多;若商场投入资金多于 20 万元,下月初出售获利较多.

2. **解**:设总人数是 x 人,甲、乙宾馆的收费分别为 $y_甲$ 元、$y_乙$ 元.

当 $x\leqslant 35$ 时,选择两家宾馆是一样的;

当 $35<x\leqslant 45$ 时,选择甲宾馆更实惠些;

当 $x>45$ 时,$y_甲=35\times 120+0.9\times 120\times(x-35)$,即 $y_甲=108x+420$,

$y_乙=45\times 120+0.8\times 120\times(x-45)=96x+1\,080$.

当 $y_甲=y_乙$ 时,可得 $x=55$;

当 $y_甲>y_乙$ 时,可得 $x>55$;

当 $y_甲<y_乙$ 时,可得 $x<55$.

综上可得,当 $x\leqslant 35$ 或 $x=55$ 时,选择两家宾馆是一样的;

当 $35<x<55$ 时,选择甲宾馆更实惠些;

当 $x>55$ 时,选择乙宾馆更实惠些.

3. **解**:(1)当 $x=1$ 时,$y_1=3\,000$;当 $x>1$ 时,$y_1=3\,000+3\,000(x-1)\times(1-30\%)=2\,100x+900$.

所以 $y_1=\begin{cases}3\,000(x=1),\\ 2\,100x+900(x>1\text{ 且 }x\text{ 为整数});\end{cases}$

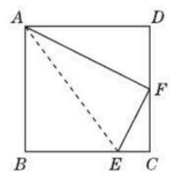
$y_2=3\,000x\times(1-25\%)=2\,250x$($x$ 为正整数).

(2)当甲、乙两个商场的收费相同时,$2\,100x+900=2\,250x$,解得 $x=6$. 故当甲、乙两个商场的收费相同时,所买商品为 6 件.

(3)选择乙商场更优惠. 理由:当 $x=5$ 时,$y_1=2\,100x+900=2\,100\times 5+900=11\,400$,$y_2=2\,250x=2\,250\times 5=11\,250$,因为 $11\,400>11\,250$,所以当所买商品为 5 件时,选择乙商场更优惠.

第 5 招 巧用勾股定理判定直角的六种方法

1. **解**:如图,连接 AE,设 $CE=a$,则 $BC=4a$,$BE=3a$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形,且 F 为 DC 的中点,所以 $AB=AD=CD=BC=4a$,$DF=CF=2a$. 由勾股定理得 $AF^2=AD^2+DF^2=(4a)^2+(2a)^2=20a^2$,$EF^2=CE^2+CF^2=a^2+(2a)^2=$

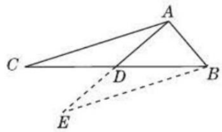


(第 1 题)

$5a^2$, $AE^2=AB^2+BE^2=(4a)^2+(3a)^2=25a^2$. 因为 $AF^2+EF^2=20a^2+5a^2=25a^2$，所以 $AF^2+EF^2=AE^2$. 由直角三角形的判定方法得 $\angle AFE=90°$，即 $\angle AFE$ 是直角.

2. 解：连接 AC. 在 $Rt\triangle ACB$ 中，
$AB^2+BC^2=AC^2$，
所以 $AC=5$. 所以 $AC^2+AD^2=5^2+12^2=13^2=CD^2$.
所以 $\triangle ACD$ 为直角三角形，且 $\angle CAD=90°$.
所以 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times5\times12=36$.

3. 解：如图，延长 AD 至点 E，使 $ED=AD$，连接 BE.

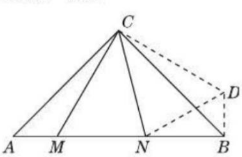


（第 3 题）

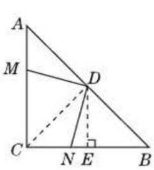
因为 D 为 BC 的中点，所以 $CD=BD$.
又因为 $AD=ED$，
$\angle ADC=\angle EDB$，
所以 $\triangle ADC\cong\triangle EDB$.
所以 $EB=AC=13$.
在 $\triangle ABE$ 中，$AE=2AD=12$，$AB=5$，
所以 $AE^2+AB^2=12^2+5^2=169$.
又因为 $EB^2=13^2=169$，
所以 $AE^2+AB^2=EB^2$.
所以 $\triangle ABE$ 是直角三角形，且 $\angle BAE=90°$，
即 $AB\perp AD$.

点拨：本题运用倍长中线法构造全等三角形说明线段相等，再利用直角三角形的判定方法说明三角形为直角三角形，从而说明两条线段垂直.

4. 解：因为 $AC=BC$，$\angle ACB=90°$，所以将 $\triangle ACM$ 绕点 C 逆时针旋转 $90°$，可得 $\triangle BCD$，连接 ND，如图所示.
则 $\angle A=\angle CBD$，$CM=CD$，$BD=AM=a$，$\angle MCD=90°$.
因为 $\angle MCN=45°$，
所以 $\angle DCN=\angle MCN=45°$.
又因为 $CN=CN$，
所以 $\triangle MCN\cong\triangle DCN$，所以 $DN=MN=x$.
又易知 $\angle A=\angle CBA=45°$，
所以 $\angle NBD=\angle CBA+\angle CBD=90°$.
所以 $\triangle NBD$ 为直角三角形，即以 x,a,b 为边长的三角形是直角三角形.



（第 4 题）



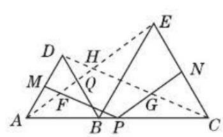
（第 5 题）

5. 解：如图，连接 CD，过点 D 作 $DE\perp BC$ 于点 E.
因为 $DM\perp DN$，
所以 $\angle MDC+\angle CDN=90°$.
因为 $\angle ACB=90°$，$CA=CB$，D 为 AB 的中点，
所以 $CD\perp AB$，$\angle ACD=\angle BCD=45°$，$\angle A=\angle B=45°$.
所以 $\angle CDN+\angle NDB=90°$.
所以 $\angle MDC=\angle NDB$. 由 $\angle BCD=\angle B=45°$，$DE\perp BC$，易得 $\triangle DBE\cong\triangle DCE$.
所以 $CD=BD$.
在 $\triangle CMD$ 和 $\triangle BND$ 中，因为 $\angle MDC=\angle NDB$，$CD=BD$，$\angle MCD=\angle NBD=45°$，所以 $\triangle CMD\cong\triangle BND$.
所以 $CM=BN$.
所以 $CM+CN=BN+CN=BC$.
又因为 $AB^2=AC^2+BC^2=2BC^2$，所以 $AB^2=2(CM+CN)^2$.

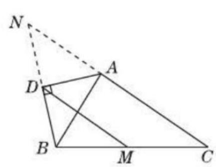
6. 解：在 $Rt\triangle ABC$ 中，根据勾股定理得 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=4$，根据折叠的性质可知 $AB'=AB=3$，$\angle AB'M=\angle B=90°$，
设 $B'M=BM=x$，
则 $B'C=AC-AB'=5-3=2$，$CM=4-x$，
在 $Rt\triangle B'CM$ 中，根据勾股定理得
$B'M^2+B'C^2=CM^2$，代入得
$x^2+2^2=(4-x)^2$，求得 $x=\frac{3}{2}$.
故 MB' 的长为 $\frac{3}{2}$.

第 6 招 常用构造中位线的五种方法

1. (1) **证明**：如图，连接 CD，AE. 由三角形中位线定理可得 $PM\underline{\parallel}\frac{1}{2}CD$，$PN\underline{\parallel}\frac{1}{2}AE$. ∵ $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 是等边三角形，∴ $AB=DB$，$BE=BC$，$\angle ABD=\angle CBE=60°$，∴ $\angle ABE=\angle DBC$.
∴ $\triangle ABE\cong\triangle DBC$，
∴ $AE=DC$. ∴ $PM=PN$.
(2) **解**：如图，设 PM 交 AE 于 F，PN 交 CD 于 G，AE 交 CD 于 H，AE 交 BD 于 Q. 由 (1) 知 $\triangle ABE\cong\triangle DBC$，
∴ $\angle BAE=\angle BDC$.
又∵ $\angle DQH=\angle BQA$，
∴ $\angle AHD=\angle ABD=60°$，
∴ $\angle FHG=120°$.
易证四边形 $PFHG$ 为平行四边形，
∴ $\angle MPN=120°$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 解：如图，延长 BD，CA 交于 N.
由题易知 $\angle NAD=\angle BAD$，$\angle ADN=\angle ADB=90°$. 又 $AD=AD$，
∴ $\triangle AND\cong\triangle ABD$.
∴ $DN=DB$，$AN=AB$.
又∵ M 为 BC 的中点，
∴ DM 为 $\triangle BNC$ 的中位线，
∴ $DM=\frac{1}{2}NC=\frac{1}{2}(AN+AC)=\frac{1}{2}(AB+AC)=15$.

3. **解**:如图,延长 BD 交 AC 于点 F,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

$\because BD\perp AD$,$\therefore \angle ADB=\angle ADF=90°$,

又$\because AD=AD$,$\therefore \triangle ADB\cong\triangle ADF$(ASA).

$\therefore AF=AB=6$,$BD=FD$.

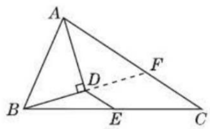
$\because AC=10$,

$\therefore CF=AC-AF=10-6=4$.

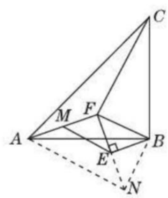
$\because E$ 为 BC 的中点,

$\therefore DE$ 是$\triangle BCF$ 的中位线.

$\therefore DE=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}\times4=2$.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. **证明**:如图,延长 FE 至 N,使 $EN=EF$,连接 BN,AN. 易得 $ME=\frac{1}{2}AN$.

$\because EF=EN$,$\angle BEF=90°$,

$\therefore BE$ 垂直平分 FN.

$\therefore BF=BN$.

$\therefore \angle BNF=\angle BFN$.

$\because \triangle BEF$ 为等腰直角三角形,$\angle BEF=90°$,

$\therefore \angle BFN=45°$. $\therefore \angle BNF=45°$,

$\therefore \angle FBN=90°$,即$\angle FBA+\angle ABN=90°$.

又$\because \angle FBA+\angle CBF=90°$,

$\therefore \angle CBF=\angle ABN$.

在$\triangle BCF$ 和$\triangle BAN$ 中,

$$\begin{cases}BF=BN,\\ \angle CBF=\angle ABN,\\ BC=BA,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BCF\cong\triangle BAN$.

$\therefore CF=AN$. $\therefore ME=\frac{1}{2}AN=\frac{1}{2}CF$.

5. **证明**:如图,取 AB 的中点 H,连接 MH,NH,则 $MH=\frac{1}{2}BF$,$NH=\frac{1}{2}AE$.

$\because CE=CF$,$CA=CB$,$\therefore AE=BF$.

$\therefore MH=NH$.

$\because$ 点 M,H,N 分别为 AF,AB,BE 的中点,

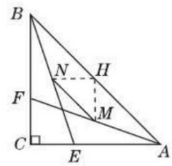
$\therefore MH\parallel BF$,$NH\parallel AE$.

$\therefore \angle AHM=\angle ABC$,$\angle BHN=\angle BAC$.

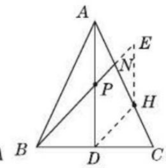
$\therefore \angle MHN=180°-(\angle AHM+\angle BHN)=180°-(\angle ABC+\angle BAC)=90°$.

$\therefore NH=\frac{\sqrt{2}}{2}MN$.

$\therefore AE=2NH=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}MN=\sqrt{2}MN$.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. **证明**:如图,取 NC 的中点 H,连接 DH,过点 H 作 $HE\parallel AD$,交 BN 的延长线于 E.

$\because AB=AC$,$AD\perp BC$,

$\therefore D$ 为 BC 的中点.

又$\because H$ 为 NC 的中点,$\therefore DH\parallel BN$.

又$\because PD\parallel HE$,

$\therefore$ 四边形 $PDHE$ 是平行四边形.

$\therefore HE=PD$.

又$\because P$ 为 AD 的中点,$\therefore AP=PD$.

$\therefore AP=HE$,

易证$\triangle APN\cong\triangle HEN$,$\therefore AN=NH$.

$\therefore AN=NH=HC$,$\therefore AN=\frac{1}{3}AC$.

第 7 招 巧用二次根式的有关概念求字母或代数式的值

1. C

2. **解**:$\because \sqrt{x^2-4x+m}=\sqrt{(x-2)^2+m-4}$,

且无论 x 取何实数,式子 $\sqrt{x^2-4x+m}$ 都有意义,

$\therefore m-4\geqslant0$,$\therefore m\geqslant4$.

当 $m\geqslant4$ 时,$\sqrt{(m-3)^2}+\sqrt{(4-m)^2}=(m-3)+(m-4)=2m-7$.

3. **解**:$\sqrt{8-x^2}$,$\sqrt{22}$,$\sqrt{9x^2+16y^2}$,$\frac{\sqrt{x}}{3}$是最简二次根式. 其余式子都不是.

$\because \sqrt{41^2-40^2}=\sqrt{(41-40)\times(41+40)}=\sqrt{81}=9$,

$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=x-2(x>2)$,

$-x\sqrt{\frac{1}{2x}}=\frac{-x\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{2x}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2x}$,

$\sqrt{0.75ab}=\sqrt{0.25\times3ab}=\frac{1}{2}\sqrt{3ab}$,$\sqrt{ab^2}=b\sqrt{a}(b>0,a>0)$,

$\sqrt{(a+b)^2(a-b)}=(a+b)\sqrt{a-b}(a>b>0)$,

$\sqrt{\frac{x}{3}}=\frac{\sqrt{3x}}{3}$,

$\therefore \sqrt{41^2-40^2}$,$\sqrt{x^2-4x+4}(x>2)$,$-x\sqrt{\frac{1}{2x}}$,$\sqrt{0.75ab}$,$\sqrt{ab^2}(b>0,a>0)$,$\sqrt{(a+b)^2(a-b)}(a>b>0)$,$\sqrt{\frac{x}{3}}$不是最简二次根式.

4. 解：(1) $\sqrt{1.25}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2) $\sqrt{4a^3b+8a^2b}=\sqrt{4a^2(ab+2b)}=2a\sqrt{ab+2b}\ (a\geqslant0,b\geqslant0)$.

(3) 由 $-\frac{n}{m^2}\geqslant0$，$mn>0$ 知：$m<0$，$n<0$，$\therefore\sqrt{-\frac{n}{m^2}}=\frac{\sqrt{-n}}{\sqrt{m^2}}=\frac{\sqrt{-n}}{-m}=-\frac{\sqrt{-n}}{m}$.

(4) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x-y}(x\neq y)$.

5. A　**点拨**：由题意得 $\begin{cases}b-a=2,\\3b=2b-a+2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=0,\\b=2.\end{cases}$ 故选 A.

6. 1　**点拨**：$\because$ 最简二次根式 $\sqrt{5a+b}$ 和 $\sqrt{2a-b}$ 能合并，$\therefore 5a+b=2a-b$，

$\therefore 3a+2b=0$，$\therefore 3a=-2b$. $\therefore -\frac{3a}{2b}+(3a+2b)^2=1+0=1$.

7. 解：由题意得 $3a-8=17-2a$.

$\therefore a=5$. $\therefore\sqrt{4a-2x}=\sqrt{20-2x}$.

要使 $\sqrt{4a-2x}$ 有意义，只需 $\sqrt{20-2x}$ 有意义即可.

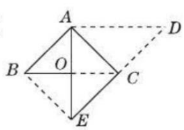
$\therefore 20-2x\geqslant0$，$\therefore x\leqslant10$.

8. 解：$\because\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7}{2}\sqrt{3}=m+n\sqrt{3}$，$m,n$ 均为有理数，$\therefore m=0,n=\frac{7}{2}$.

$\therefore (m-n)^2+2n=\left(0-\frac{7}{2}\right)^2+2\times\frac{7}{2}=\frac{49}{4}+7=\frac{77}{4}$.

第 8 招　利用特殊四边形的性质巧解折叠问题

1. $12\sqrt{7}$　**点拨**：如图，设 AE,BC 的交点为 O，连接 BE，已知 O 是 BC 的中点.



（第 1 题）

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，$AB=CD$，$BC=DA$，$AC=CA$，$\therefore\triangle ABC\cong\triangle CDA$，则 $\triangle ABC\cong\triangle CEA$，

$\therefore\angle ACB=\angle CAE$，$BC=AE$，即在四边形 $ABEC$ 中，两条对角线相等. $\because$ 在 $\triangle AOC$ 中，$\angle ACB=\angle CAE$，$\therefore AO=OC$，则易得 O 是 AE 的中点.

$\therefore$ 四边形 $ABEC$ 是矩形. 在 Rt$\triangle AEC$ 中，$CE=AB=6$，$AE=AD=8$，由勾股定理得 $AC=\sqrt{AE^2-CE^2}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$.

$\therefore$ ▱$ABCD$ 的面积 $=AB\cdot AC=6\times2\sqrt{7}=12\sqrt{7}$.

2. 解：设 AE 与 BC 相交于点 F，如图.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AD/\!/BC$. $\therefore\angle1=\angle3$.

$\because$ 平行四边形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 所在直线折叠，点 D 落在点 E 处，

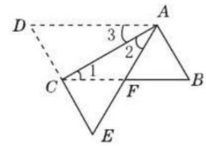
$\therefore\angle2=\angle3$，$\therefore\angle1=\angle2$. $\therefore FC=FA$.

$\because F$ 为 BC 边的中点，$BC=6$，

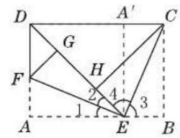
$\therefore AF=CF=BF=\frac{1}{2}\times6=3$.

又 $\because AB=3$，

$\therefore\triangle ABF$ 是等边三角形. $\therefore\angle B=60°$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. (1) **证明**：由折叠知 $\angle ADE=\angle A'DE$，$AE=EG$，$BC=CH$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD=BC$，$AB/\!/CD$.

$\therefore\angle A'DE=\angle AED$. $\therefore\angle AED=\angle ADE$.

$\therefore AE=AD$. $\therefore EG=CH$.

(2) **解**：易知 $\angle ADE=45°$，$\angle FGE=\angle A=90°$，

$\therefore\angle DFG=\angle ADE=45°$，$\therefore DG=FG$.

$\because GF=AF=\sqrt{2}$，

$\therefore DG=\sqrt{2}$，$\therefore DF=2$. $\therefore AD=2+\sqrt{2}$.

如图，由折叠知，$\angle1=\angle2$，$\angle3=\angle4$，

$\therefore\angle1+\angle3=90°$.

$\because\angle1+\angle AFE=90°$，$\therefore\angle3=\angle AFE$.

由(1)知，$AE=BC$，

又 $\because\angle A=\angle B=90°$，

$\therefore\triangle EFA\cong\triangle CEB$.

$\therefore AF=BE$. $\therefore AB=AE+BE=AD+AF=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$.

4. 解：如图，连接 BD,AC，则 O 为 AC 与 BD 的交点.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC\perp BD$，AC 平分 $\angle BAD$.

$\because\angle BAD=120°$，$\therefore\angle BAC=60°$.

$\therefore\angle ABO=90°-60°=30°$.

$\therefore AO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times2=1$.

由勾股定理，得 $BO=DO=\sqrt{3}$.

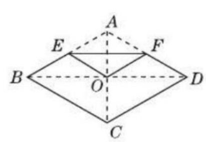
$\because$ 点 A 沿 EF 折叠与点 O 重合，

$\therefore EF\perp AC$，EF 平分 AO.

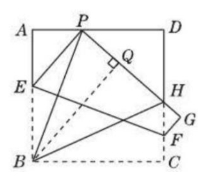
$\because AC\perp BD$，$\therefore EF/\!/BD$，

易得 EF 为 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore EF=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+\sqrt{3})=\sqrt{3}$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. (1)**证明**:$\because PE=BE$,

$\therefore \angle EBP=\angle EPB$.

又$\because \angle EPH=\angle EBC=90°$,

$\therefore \angle EPH-\angle EPB=\angle EBC-\angle EBP$,

即$\angle BPH=\angle PBC$.

又$\because AD/\!/BC$,$\therefore \angle APB=\angle PBC$,

$\therefore \angle APB=\angle BPH$.

(2)**解**:$\triangle PDH$的周长不变且为定值8.

证明如下:过B作$BQ\perp PH$,垂足为Q.如图.

由(1)知$\angle APB=\angle BPH$,

又$\because \angle A=\angle BQP=90°$,$BP=BP$,

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle QBP$.

$\therefore AP=QP$,$AB=BQ$.

又$\because AB=BC$,$\therefore BC=BQ$.

又$\because \angle C=\angle BQH=90°$,$BH=BH$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BCH\cong\mathrm{Rt}\triangle BQH$,$\therefore CH=QH$.

$\therefore \triangle PDH$的周长为:$PD+DH+PH=AP+PD+DH+HC=AD+CD=8$.

第9招 特殊平行四边形的性质和判定的综合应用的四种类型

1. **解**:(1)$\triangle AED\cong\triangle CEB'$.

证明:$\because$ 四边形$ABCD$是矩形,

$\therefore BC=DA$,$\angle B=\angle D$.

由折叠的性质,

知$BC=B'C$,$\angle B=\angle B'$,

$\therefore B'C=DA$,$\angle B'=\angle D$.

在$\triangle AED$和$\triangle CEB'$中,

$$\begin{cases}\angle DEA=\angle B'EC,\\ \angle D=\angle B',\\ DA=B'C,\end{cases}$$

$\therefore \triangle AED\cong\triangle CEB'$.

(2)如图,延长HP交AB于点M,则$PM\perp AB$.

由折叠的性质可知$\angle 1=\angle 2$,

又$\because PG\perp AB'$,$\therefore PM=PG$.

$\because$ 四边形$ABCD$为矩形,

$\therefore CD=AB=8$,$CD/\!/AB$.

$\therefore \angle 2=\angle 3$.$\therefore \angle 1=\angle 3$.

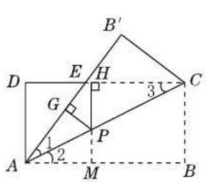
$\therefore AE=CE=8-3=5$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ADE$中,$DE=3$,$AE=5$,

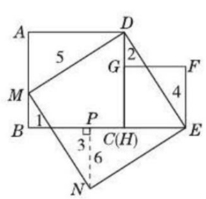
$\therefore AD=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

易得$PH+PM=AD$,

$\therefore PG+PH=AD=4$.



(第1题)



(第2题)

2. **解**:(1)①由作图的过程可知四边形$MNED$是矩形.

$\because \angle ADM+\angle MDC=\angle CDE+\angle MDC=90°$,

$\therefore \angle ADM=\angle CDE$.

在$\triangle ADM$与$\triangle CDE$中,$\begin{cases}\angle A=\angle DCE=90°,\\ AD=CD,\\ \angle ADM=\angle CDE,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADM\cong\triangle CDE(\mathrm{ASA})$,

$\therefore DM=DE$,

$\therefore$ 矩形$MNED$是正方形.

$\because DE^2=CD^2+CE^2=a^2+b^2$,

$\therefore$ 正方形$MNED$的面积为a^2+b^2.

②如图,过点N作$NP\perp BE$,垂足为P.

可证明图中的6与5位置的两个直角三角形全等,4与3位置的两个直角三角形全等,1与2位置的两个直角三角形全等,因此将5放到6的位置,将4放到3的位置,将1放到2的位置,恰好拼接成正方形$MNED$.

(2)能.理由如下:

从上述的拼接过程可以看出:任意的两个正方形都可以拼接为一个正方形,而拼接出的这个正方形可以与第三个正方形再拼接为一个正方形,…,以此类推.由此可见,对于n(n是大于2的自然数)个任意的正方形,可以通过$(n-1)$次拼接,得到一个正方形.

点拨:本题考查了正方形的判定定理在操作型问题中的应用.

3. (1)C

(2)①**证明**:$\because AF \underline{\underline{/\!/}} DF'$,

$\therefore$ 四边形$AFF'D$是平行四边形.

$\because S_{\square ABCD}=AD\cdot AE=15$,$AD=5$,

$\therefore AE=3$.

$\because EF=4$,$\angle AEF=90°$,

$\therefore AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

又$\because AD=5$,$\therefore AD=AF$.

$\therefore$ 四边形$AFF'D$是菱形.

②**解**:如图,连接AF',DF.

在$\mathrm{Rt}\triangle AEF'$中,$AE=3$,$EF'=EF+FF'=4+5=9$,

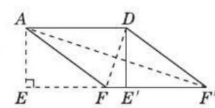
由勾股定理可得$AF'=3\sqrt{10}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DFE'$中,$FE'=EE'-EF=5-4=1$,

$DE'=AE=3$,

由勾股定理得$DF=\sqrt{10}$.

$\therefore$ 四边形$AFF'D$的两条对角线的长分别是$3\sqrt{10}$和$\sqrt{10}$.



(第3题)

4. (1)**证明**:在$\mathrm{Rt}\triangle FCD$中,

$\because$ 点G为DF的中点,

$\therefore CG=\dfrac{1}{2}DF$.同理,$EG=\dfrac{1}{2}DF$.

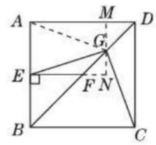
$\therefore EG=CG$.

(2)**解**:仍然成立.证明如下:

如图,连接AG,过点G作直线$MN\perp AD$交AD于点M,与

EF 的延长线交于点 N.

易知四边形 $AENM$ 为矩形.



（第 4 题）

在 $\triangle DMG$ 与 $\triangle FNG$ 中，

$\because \angle DGM=\angle FGN$,

$\angle DMG=\angle FNG=90^\circ$, $DG=FG$,

$\therefore \triangle DMG\cong\triangle FNG$,

$\therefore MG=NG$.

在矩形 $AENM$ 中，$AM=EN$.

在 $\triangle AMG$ 与 $\triangle ENG$ 中，

$\because AM=EN$, $\angle AMG=\angle ENG=90^\circ$, $MG=NG$,

$\therefore \triangle AMG\cong\triangle ENG$,

$\therefore AG=EG$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，BD 为对角线，

$\therefore \angle ADG=\angle CDG$.

又$\because AD=CD$, $DG=DG$,

$\therefore \triangle ADG\cong\triangle CDG$,

$\therefore AG=CG$,

$\therefore EG=CG$.

(3) **解**：(1) 中的结论仍然成立，即 $EG=CG$，

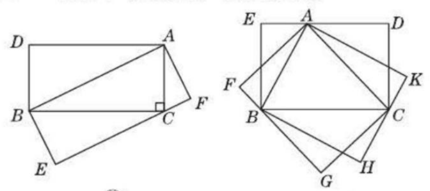
其他结论还有 $EG\perp CG$.

5. **解**：(1) 如果一个三角形和一个平行四边形满足条件：三角形的一边与平行四边形的一边重合，且三角形的这边所对的顶点在平行四边形这边的对边上，则称这样的平行四边形为三角形的“友好平行四边形”.

(2) 如图①，共有两个“友好矩形”，分别为矩形 $BCAD$，矩形 $ABEF$.

易知，矩形 $BCAD$、矩形 $ABEF$ 的面积都等于 $\triangle ABC$ 面积的 2 倍，

$\therefore \triangle ABC$ 的两个“友好矩形”的面积相等.



①　　②

（第 5 题）

(3) 如图②，共有 3 个“友好矩形”，分别为矩形 $BCDE$、矩形 $CAFG$ 和矩形 $ABHK$，其中矩形 $ABHK$ 的周长最小.

证明如下：易知这三个矩形面积相等，设它们的面积为 S.

设矩形 $BCDE$、矩形 $CAFG$ 及矩形 $ABHK$ 的周长分别为 L_1, L_2, L_3, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$，则

$L_1=\frac{2S}{a}+2a$, $L_2=\frac{2S}{b}+2b$, $L_3=\frac{2S}{c}+2c$.

$L_1-L_2=\left(\frac{2S}{a}+2a\right)-\left(\frac{2S}{b}+2b\right)=\frac{2S}{ab}(b-a)+2(a-b)$

$=2(a-b)\cdot\frac{ab-S}{ab}$.

$\because a-b>0$, $ab>S>0$,

$\therefore L_1-L_2>0$，即 $L_1>L_2$，

同理可得，$L_2>L_3$，

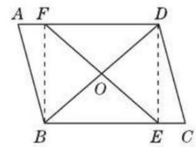
$\therefore L_1>L_2>L_3$，

$\therefore L_3$ 最小，即矩形 $ABHK$ 的周长最小.

点拨：理解该题中的新定义. 能根据新定义正确画出符合要求的图形，掌握三角形和矩形的面积公式，能够运用作差法比较大小.

第 10 招 构造平行四边形解题的应用类型

1. **证明**：如图，连接 BF, DE.



（第 1 题）

$\because AB=CD$, $AD=BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\therefore AD/\!/BC$.

$\because AF=CE$, $AD=BC$,

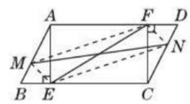
$\therefore DF=BE$,

又$\because DF/\!/BE$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

$\therefore OB=OD$, $\therefore O$ 是 BD 的中点.

2. **证明**：如图，连接 MF, FN, NE, EM.



（第 2 题）

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB\underline{/\!/}CD$, $AD\underline{/\!/}BC$, $\angle B=\angle D$.

$\because AD/\!/BC$, $AE\perp BC$, $\therefore AE\perp AD$.

又$\because CF\perp AD$,

$\therefore AE/\!/CF$. 又$\because AF/\!/EC$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\therefore AF=CE$,

$\therefore BE=FD$,

又$\because BM=DN$, $\angle B=\angle D$,

$\therefore \triangle BEM\cong\triangle DFN$.

$\therefore EM=FN$. 同理，$MF=EN$.

$\therefore$ 四边形 $MENF$ 是平行四边形.

$\therefore MN$ 与 EF 互相平分.

3. **证明**：如图，连接 AD.

$\because AB/\!/DE$, $AB=DE$,

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形.

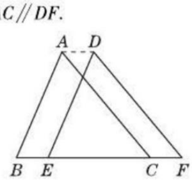
$\therefore AD/\!/BE$, $AD=BE$.

$\because BE=CF$, $\therefore AD=CF$.

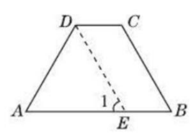
又 $AD/\!/CF$,

$\therefore$ 四边形 $ACFD$ 是平行四边形.

$\therefore AC/\!/DF$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. **证明**：如图，过 D 点作 $DE/\!/BC$，交 AB 于 E.

$\therefore \angle B=\angle 1$.

$\because AB/\!/CD$, $DE/\!/BC$,

$\therefore$ 四边形 $DEBC$ 是平行四边形.

$\therefore \angle B=\angle CDE$, $CD=BE$.

又$\because \angle ADC = 2\angle ABC$,

$\therefore \angle ADE = \angle CDE = \angle B = \angle 1$.

$\therefore AD = AE$,

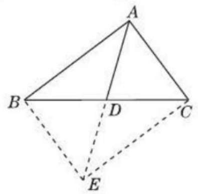
$\therefore AB = AE + EB = AD + CD$.

5. $1 < AD < 7$ **点拨**:如图,延长 AD 到 E,使 $ED = AD$,连接 BE,CE.

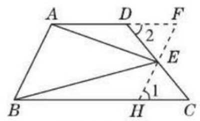
又 $DC = BD$,$\therefore$ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

$\therefore AC = BE = 6$. 在$\triangle ABE$ 中,$8-6 < AE < 8+6$,

即 $2 < 2AD < 14$,$\therefore 1 < AD < 7$.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 证明:如图,过 E 作 $FH /\!/ AB$,交 AD 的延长线于 F,交 BC 于 H.

$\because AD /\!/ BC$,$FH /\!/ AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABHF$ 为平行四边形. $\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\square ABHF}$.

$\because AD /\!/ BC$,$\therefore \angle F = \angle 1$,$\angle 2 = \angle C$.

又$\because DE = CE$,$\therefore \triangle DEF \cong \triangle CEH$,

$\therefore S_{\square ABHF} = S_{四边形ABCD}$. $\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$.

第 11 招 一次函数常见的四类易错题

1. 解:若关于 x 的函数 $y = (m+3)x^{|m+2|}$ 是正比例函数,则需满足 $m+3 \neq 0$ 且 $|m+2| = 1$,解得$m = -1$.

2. 解:若关于 x 的函数 $y = kx^{-2k+3} - x + 5(x \neq 0)$ 是一次函数,则有以下三种情况:

情况一,$-2k+3 = 1$,解得 $k = 1$,

当 $k = 1$ 时,函数 $y = kx^{-2k+3} - x + 5$ 即为 $y = 5(x \neq 0)$,不是一次函数.

情况二,kx^{-2k+3} 的系数为 0,即 $k = 0$,则函数的表达式为 $y = -x + 5(x \neq 0)$,是一次函数,

所以 $k = 0$.

情况三,$-2k+3 = 0$,解得 $k = \frac{3}{2}$,则函数的表达式为 $y = -x + \frac{13}{2}(x \neq 0)$,是一次函数,

所以 $k = \frac{3}{2}$.

综上可知,k 的值为 0 或$\frac{3}{2}$.

3. 解:设函数 $y = kx + 4$ 的图象与 x 轴、y 轴的交点分别为 A,B,坐标原点为 O. 当 $x = 0$ 时,$y = 4$,所以点 B 的坐标为$(0,4)$. 所以 $OB = 4$. 因为 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 16$,所以 $OA = 8$. 所以点 A 的坐标为$(8,0)$或$(-8,0)$.

把点$(8,0)$的坐标代入 $y = kx + 4$,得 $0 = 8k + 4$,解得 $k = -\frac{1}{2}$.

把点$(-8,0)$的坐标代入 $y = kx + 4$,得$0 = -8k + 4$,解得 $k = \frac{1}{2}$.

所以这个一次函数的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 或 $y = \frac{1}{2}x + 4$.

4. 解:系数 k 分两种情况:①若 $k > 0$,则 y 随 x 的增大而增大,

所以当 $x = 1$ 时,$y = 9$,所以 $k + b = 9$.

②若 $k < 0$,则 y 随 x 的增大而减小,

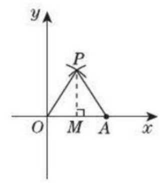
所以当 $x = 1$ 时,$y = 1$,所以 $k + b = 1$.

综上可知,$k + b$ 的值为 9 或 1.

5. 解:以 O,A 分别为圆心,4 为半径画弧,两弧的交点即为点 P,作 $PM \perp OA$,垂足为 M.

因为 $OA = AP = OP = 4$,

所以 $\triangle AOP$ 是等边三角形. 当点 P 在第一象限时,如图,因为 $OP = AP$,$PM \perp OA$,所以 $OM = 2$.



(第 5 题)

在 Rt$\triangle OPM$ 中,$PM = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

所以点 P 的坐标为$(2, 2\sqrt{3})$.

因为点 P 在直线 $y = -x + m$ 上,

所以 $m = 2 + 2\sqrt{3}$.

当点 P 在第四象限时,根据对称性,知点 P 的坐标为$(2, -2\sqrt{3})$.

因为点 P 在直线 $y = -x + m$ 上,

所以 $m = 2 - 2\sqrt{3}$.

综上所述,m 的值为 $2 + 2\sqrt{3}$或 $2 - 2\sqrt{3}$.

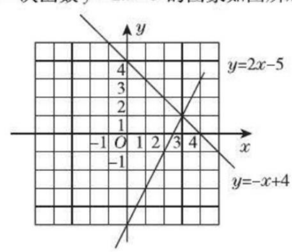
6. D **7.** D

8. 解:余下的图书本数 y(本)与学生人数x(人)之间的函数表达式为 $y = 450 - 9x$,自变量 x 的取值范围是$0 \leqslant x \leqslant 50$,且 x 为整数.

9. D **10.** A **11.** $<$;$\geqslant$

第 12 招 二元一次方程(组)与一次函数的四种常见应用

1. 解:(1)画一次函数 $y = 2x - 5$ 的图象如图所示.



(第 1 题)

(2)由图象看出两直线的交点坐标为$(3,1)$,所以方程组

的解为$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

(3)直线 $y=-x+4$ 与 x 轴的交点坐标为(4,0)，直线 $y=2x-5$ 与 x 轴的交点坐标为$\left(\frac{5}{2},0\right)$，所以两条直线与 x 轴所围成的三角形的面积 $=\frac{1}{2}\times\left|4-\frac{5}{2}\right|\times1=\frac{3}{4}$.

2. A **3.** C **4.** B **5.** B

6. 解：(1)因为一次函数 $y=kx+b$ 的图象与直线 $y=4x-3$ 的交点 B 在 x 轴上，

所以将 $y=0$ 代入 $y=4x-3$ 中，得 $x=\frac{3}{4}$，即 $B\left(\frac{3}{4},0\right)$，

把 $A(3,-3)$，$B\left(\frac{3}{4},0\right)$的坐标分别代入 $y=kx+b$ 中，

得$\begin{cases}3k+b=-3,\\\frac{3}{4}k+b=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=-\frac{4}{3},\\b=1.\end{cases}$

故直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+1$.

(2)由(1)知直线 AB 对应的函数表达式为 $y=-\frac{4}{3}x+1$，

所以直线 AB 与 y 轴的交点 C 的坐标为(0,1).

所以 $OC=1$. 又因为 B 的坐标为$\left(\frac{3}{4},0\right)$，所以 $OB=\frac{3}{4}$，

所以 $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times1=\frac{3}{8}$.

即直线 AB 与坐标轴所围成的△BOC 的面积为$\frac{3}{8}$.

第 13 招 分析数据做决策的三种常见类型

1. 解：(1)丙将被录用. 理由：甲的平均成绩为$\bar{x}_{甲}=(85+70+64)\div3=73$(分)，乙的平均成绩为$\bar{x}_{乙}=(73+71+72)\div3=72$(分)，丙的平均成绩为$\bar{x}_{丙}=(73+65+84)\div3=74$(分).

因为 $74>73>72$，所以候选人丙将被录用.

(2)甲将被录用. 理由：甲的最终成绩为$(85\times5+70\times3+64\times2)\div(5+3+2)=76.3$(分)，乙的最终成绩为$(73\times5+71\times3+72\times2)\div(5+3+2)=72.2$(分)，丙的最终成绩为$(73\times5+65\times3+84\times2)\div(5+3+2)=72.8$(分).

因为 $76.3>72.8>72.2$，所以候选人甲将被录用.

2. 解：(1)这组数据的平均数没有实际意义.

(2)这组数据共有 110 个，中位数应是从小到大排列后第 55 个和第 56 个数据的平均数，这两个数据都是 228，这组数据中 228 出现的次数最多，所以这组数据的中位数、众数都是 228.

(3)这个商场的总经理关心的是众数. 理由：众数是 228，表明容积为 228 L 的冰箱的销量最大，它能为商场带来较多的利润.

3. 解：(1)甲组数据的平均数是 14，中位数是 14，众数是 14；乙组数据的平均数是 13.5，中位数是 5，众数是 5.

(2)对于甲群游客，平均数、众数、中位数都能反映这群游客的年龄特征；对于乙群游客，只有中位数和众数能反映这群游客的年龄特征.

4. 解：(1)B

(2)由统计图可知 $s_B^2=\frac{1}{10}\times[5\times(20-20)^2+3\times(19.9-20)^2+(20.1-20)^2+(20.2-20)^2]=0.008$，而 $s_A^2=0.026$，所以$s_A^2>s_B^2$，所以 B 的波动性小. 又因为 A，B 的平均数相同，所以 B 的成绩好些.

(3)派 A 去参加竞赛较合适. 理由：从图中折线走势可知，尽管 A 的成绩前面起伏较大，但后来逐渐稳定，误差小，预测 A 的潜力大，选派 A 去参加竞赛更容易出好成绩.

第 14 招 数形结合思想在解题中的巧用

1. 解：(1)4.5 或 12.5

(2)在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，$AB=20$，$BC=15$，

$\therefore AC=25$.

①当 $CD=BC$ 时，$CD=15$，$\therefore t=15\div2=7.5$.

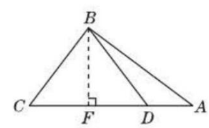
②当 $CD=BD$ 时，$\angle C=\angle DBC$，$\because \angle C+\angle A=\angle DBC+\angle DBA=90°$. $\therefore \angle A=\angle DBA$. $\therefore BD=AD$. $\therefore CD=AD=\frac{1}{2}AC=12.5$. $\therefore t=12.5\div2=6.25$.

③当 $BD=BC$ 时，如图，过点 B 作 $BF\perp AC$ 于点 F，根据等腰三角形三线合一的性质可得 $CF=DF$，即 $CD=2CF$. 易知 $BF=12$，$\therefore CF^2=BC^2-BF^2=15^2-12^2=81$.

$\therefore CF=9$. $\therefore CD=2CF=2\times9=18$.

$\therefore t=18\div2=9$.

综上所述，当 $t=6.25$ 或 7.5 或 9 时，△CBD 是等腰三角形.



（第 1 题）

2. 解：(1)$\because$ 在△ABE 中，$DE\perp AB$，$DE=7$，△ABE 的面积为 35，$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}AB\times7=35$.

$\therefore AB=10$.

(2)$\because$ 在△ABC 中，$BC=6$，$AC=8$，$AB=10$，$\therefore AC^2+BC^2=8^2+6^2=100$，$AB^2=10^2=100$. $\therefore AC^2+BC^2=AB^2$.

$\therefore \angle C=90°$，即△ABC 是直角三角形.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\times8\times6=24$. $\therefore$ 四边形 $ACBE$ 的面积 $=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABE}=24+35=59$.

点拨：本题的关键是由直角三角形的判定方法判定出直角三角形，再结合三角形的面积公式进行求解.

3. 解：连接 BD，在 Rt△ABD 中，$BD^2=AB^2+AD^2=3^2+4^2=$

25，在$\triangle BCD$中，$CD^2=13^2=169$，$BC^2=12^2=144$. $\because 144+25=169$，即$BC^2+BD^2=CD^2$，$\therefore \triangle BCD$是直角三角形，且$\angle CBD=90°$，$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AD\cdot AB+\frac{1}{2}BD\cdot BC=\frac{1}{2}\times4\times3+\frac{1}{2}\times5\times12=36(\mathrm{m}^2)$.

$\therefore$ 要投入$36\times200=7\ 200$(元).

4. 解：$\because$ 四边形$ABCD$是长方形，$\therefore AB=CD$，$\angle B=\angle D=90°$. $\because$ 将长方形$ABCD$沿对角线AC折叠，点B落在点F处，$\therefore \angle F=\angle B=90°$，$AB=AF$，$BC=CF$.

$\therefore AF=CD$，$\angle F=\angle D$.

在$\triangle AFE$和$\triangle CDE$中，$\begin{cases}\angle F=\angle D,\\ \angle AEF=\angle CED,\\ AF=CD,\end{cases}$

$\therefore \triangle AFE\cong\triangle CDE$(AAS). $\therefore FE=DE$.

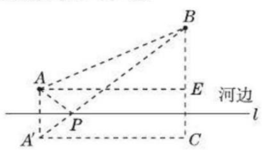
$\because AB=CD=4$，$BC=CF=8$，在$\mathrm{Rt}\triangle CDE$中，由勾股定理，得$DE^2+CD^2=CE^2$，即$DE^2+4^2=(8-DE)^2$，

$\therefore DE=3$. $\therefore FE=3$.

$\therefore$ 图中阴影部分的面积$=S_{\triangle ACF}-S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AF\cdot CF-\frac{1}{2}AF\cdot FE=\frac{1}{2}\times4\times8-\frac{1}{2}\times4\times3=10$.

5. 解：(1) 如图，作点A关于河边l的对称点A'，连接$A'B$交l于点P，连接AP，则点P为水泵站的位置，易得$PA=PA'$，$\therefore PA+PB=PA'+PB=A'B$. 此时$PA$与$PB$的长度之和最短，即所铺设的水管最短.

(2) 如图，连接AB，过点B作l的垂线，过点A'作l的平行线，这两条线交于点C，则$\angle C=90°$. 过点A作$AE\perp BC$于点E，依题意，得$BE=7-2=5(\mathrm{km})$，$AB=13\ \mathrm{km}$. 易得$AE^2=AB^2-BE^2$. $\therefore AE=12\ \mathrm{km}$. 易得$A'C=AE=12\ \mathrm{km}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle BA'C$中，$A'C=12\ \mathrm{km}$，易得$BC=7+2=9(\mathrm{km})$，$A'B^2=A'C^2+BC^2$. $\therefore A'B=15\ \mathrm{km}$. $\therefore PA+PB=A'B=15\ \mathrm{km}$. $\therefore 15\ 000\times15=225\ 000$(元)，即最节省的铺设水管的费用为225 000元.

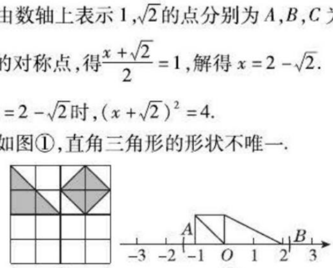


(第5题)

6. 解：(1) 由数轴上表示1，$\sqrt{2}$的点分别为A，B，C为点B关于点A的对称点，得$\frac{x+\sqrt{2}}{2}=1$，解得$x=2-\sqrt{2}$.

(2) 当$x=2-\sqrt{2}$时，$(x+\sqrt{2})^2=4$.

7. 解：(1) 如图①，直角三角形的形状不唯一.



(第7题)

(2) 如图②，$-\sqrt{2}$和$\sqrt{5}$在数轴上对应的点分别是A，B.

8. 解：(1) $\because B(8,0)$，$C(8,6)$，$\therefore OB=8$，$BC=6$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times8=24$.

(2) $\because A(0,4)$，$\therefore OA=4$. $\because$ 点$P(m,1)$在第二象限内，$\therefore$ 点P到OA的距离为$-m$. $\therefore S_{四边形ABOP}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}\times4\times8+\frac{1}{2}\times4\times(-m)=16-2m$. 又$\because S_{四边形ABOP}=2S_{\triangle ABC}=48$，$\therefore 16-2m=48$，解得$m=-16$. $\therefore$ 点P的坐标为$(-16,1)$.

9. 解：(1) 在$y=\frac{4}{3}x+4$中，令$x=0$，则$y=4$. $\therefore$ 点B的坐标为$(0,4)$. 令$y=0$，则$\frac{4}{3}x+4=0$，解得$x=-3$，$\therefore$ 点A的坐标为$(-3,0)$.

(2) 易得当点C运动到点$(3,0)$时，直线BC与直线AB关于y轴对称，易得$t=\frac{6}{2}=3$. 设此时直线BC对应的函数表达式为$y=kx+b$，把点$C(3,0)$和点$B(0,4)$的坐标分别代入，得$\begin{cases}3k+b=0,\\ b=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-\frac{4}{3},\\ b=4.\end{cases}$

$\therefore$ 直线BC对应的函数表达式为$y=-\frac{4}{3}x+4$.

(3) 存在. 当点P在第三象限时，设$P(m,n)$.

$\because S_{\triangle BCP}=2S_{\triangle ABC}$，$\therefore S_{\triangle ACP}=S_{\triangle ABC}$.

易得$n=-4$. 把点$P(m,-4)$的坐标代入$y=\frac{4}{3}x+4$中，得$\frac{4}{3}m+4=-4$，解得$m=-6$，

$\therefore P(-6,-4)$.

当点P在第一象限时，设$P(a,c)$.

$\because S_{\triangle BCP}=2S_{\triangle ABC}$. $\therefore S_{\triangle ACP}=3S_{\triangle ABC}$.

易得$c=12$.

把点$P(a,12)$的坐标代入$y=\frac{4}{3}x+4$中，得$\frac{4}{3}a+4=12$，解得$a=6$，$\therefore P(6,12)$.

$\therefore$ 点P的坐标为$(-6,-4)$或$(6,12)$.

10. 解：(1) $240\div(2-1)=240(\mathrm{km/h})$，

$\therefore$ "和谐号"动车的速度为240 km/h.

(2) 由(1)知，小亮离长春的距离$y(\mathrm{km})$与小明乘车的时间$t(\mathrm{h})$的函数表达式为$y=240(t-1)=240t-240$ $(1\leqslant t\leqslant2)$. 当$t=1.5$时，$y=240\times1.5-240=120$. 设小明离长春的距离$y(\mathrm{km})$与小明乘车的时间$t(\mathrm{h})$的函数表达式为$y=kt$. 则有$120=1.5k$，解得$k=80$.

$\therefore y=80t$. 当$t=2$时，$y=80\times2=160$，$216-160=56(\mathrm{km})$. $\therefore$ 当小亮到达A市火车站时，小明与游乐园的距离为56 km.

(3) 当$y=216$时，有$80t=216$，解得$t=2.7$.

$18\ \mathrm{min}=0.3\ \mathrm{h}$，$2.7-0.3=2.4(\mathrm{h})$.

$216\div2.4=90(\mathrm{km/h})$，$90-80=10(\mathrm{km/h})$.

$\therefore$ 私家车的速度应比原来的速度增加10 km/h.

第 15 招 方程思想解题技巧荟萃

1. (1)**解**:如图,连接 CE. 设 $AE=x$,

$\because AB=4.\therefore BE=4-x.$

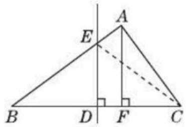
$\because DE$ 是 BC 的垂直平分线,

$\therefore CE=BE=4-x.$

$\because \angle BAC=90°, AC=3$,

$\therefore AE^2+AC^2=CE^2$,即 $x^2+3^2=(4-x)^2$.

$\therefore x=\frac{7}{8}$,即 $AE=\frac{7}{8}$.



(第 1 题)

(2)**证明**:$\because DE$ 是 BC 的垂直平分线,

$\therefore BD=CD$. 设 $BD=y$,则 $CD=y$.

$\because DF=0.7,\therefore BF=y+0.7, CF=y-0.7$.

$\because AF\perp BC,\therefore AB^2-BF^2=AF^2, AC^2-CF^2=AF^2$.

$\therefore AB^2-BF^2=AC^2-CF^2$,

即 $4^2-(y+0.7)^2=3^2-(y-0.7)^2$.

$\therefore y=2.5$,即 $BD=CD=2.5$.

$\therefore BC=5$.

$\because 3^2+4^2=5^2$,

$\therefore AC^2+AB^2=BC^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

2. 解:由折叠可知,$AF=AD, EF=DE=CD-CE=AB-CE=8-3=5(\text{cm})$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中,$EF^2=CE^2+CF^2$,$\therefore CF=4$ cm.

设 $BF=x$ cm,则 $AF=AD=BC=BF+CF=(x+4)$cm.

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中,由勾股定理,得 $AB^2+BF^2=AF^2$,即 $8^2+x^2=(x+4)^2$.

解得 $x=6$,即 $BF=6$ cm.

$\therefore$ 阴影部分的面积 $=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle ECF}=\frac{1}{2}AB\cdot BF+\frac{1}{2}CE\cdot FC=\frac{1}{2}\times 8\times 6+\frac{1}{2}\times 3\times 4=30(\text{cm}^2)$.

3. 解:(1)$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle B=90°, AB=7$ cm, $AC=25$ cm,

$\therefore BC^2=AC^2-AB^2=25^2-7^2=24^2$.

$\therefore BC=24$ cm.

(2)如图,连接 PQ. 当运动 2 s 时,$AP=1\times 2=2(\text{cm})$,$BQ=6\times 2=12(\text{cm})$.

$\therefore BP=AB-AP=7-2=5(\text{cm})$.

在 $\text{Rt}\triangle BPQ$ 中,由勾股定理,得 $PQ^2=BP^2+BQ^2=5^2+12^2=13^2$,

$\therefore PQ=13$ cm. 即 P,Q 两点之间的距离为 13 cm.

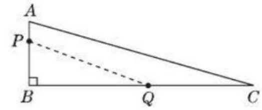
(3)设当 P,Q 两点运动 t s 时,$AP=CQ$,则 $AP=t$ cm,$BQ=6t$ cm.

$\therefore CQ=BC-BQ=(24-6t)$cm.

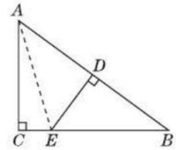
由 $AP=CQ$,得 $t=24-6t$.

解得 $t=\frac{24}{7}$.

$\therefore$ 当 P,Q 两点运动 $\frac{24}{7}$s 时,$AP=CQ$.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 解:如图,连接 AE.

$\because DE$ 为 AB 的垂直平分线,

$\therefore AE=BE$.

在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°, AC=6, AB=10$,

由勾股定理,得 $BC=8$.

设 CE 的长为 x,则 $AE=BE=BC-CE=8-x$.

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中,由勾股定理,得 $CE^2+AC^2=AE^2$,

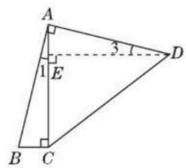
即 $x^2+6^2=(8-x)^2$,解得 $x=\frac{7}{4}$.

$\therefore CE$ 的长为 $\frac{7}{4}$.

5. 解:如图,过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E,设 $BC=a$,则 $AC=4a$.

由 $\angle BAD=90°$, $\angle DEA=90°$,

易得 $\angle 3=\angle 1$.



(第 5 题)

$\because \angle ACB=90°,\therefore \angle DEA=\angle ACB$.

又 $\because DA=AB$,

$\therefore \triangle DAE\cong\triangle ABC$.

$\therefore AE=BC=a, DE=AC=4a$.

$\therefore EC=AC-AE=4a-a=3a$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 中,

$CD=\sqrt{EC^2+DE^2}=5a$.

$\therefore x=5a$,即 $a=\frac{1}{5}x$.

又 $\because S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}$,

$\therefore y=\frac{1}{2}\times a\times 4a+\frac{1}{2}\times 4a\times 4a=10a^2=\frac{2}{5}x^2$,即 y 与 x 之间的函数解析式是 $y=\frac{2}{5}x^2$.

6. 解:(1)A 类:$y_1=0.4x+50$,

B 类:$y_2=0.6x$.

(2)当 $x=300$ 时,A 类:$y_1=0.4x+50=0.4\times 300+50=170$,B 类:$y_2=0.6x=0.6\times 300=180$.

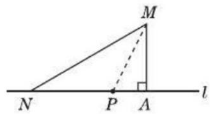
$\because 170<180$,

$\therefore$ 选择 A 类收费标准.

(3)由题意,可得 $0.4x+50=0.6x$,解得 $x=250$.

$\therefore$ 每月通话时间为 250 分钟时,按 A,B 两类收费标准缴费,所缴费用相等.

7. 解:如图,连接 MP.



(第 7 题)

在 Rt△MAN 中,$MA=1$ km,$MN=2$ km,由勾股定理,得 $AN=\sqrt{MN^2-AM^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$(km).

设 $NP=x$ km,则 $PM=x$ km.

$\therefore PA=(\sqrt{3}-x)$km.

在 Rt△MAP 中,由勾股定理,得 $MA^2+PA^2=PM^2$,即 $1^2+(\sqrt{3}-x)^2=x^2$,解得 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. $\therefore NP=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ km.

$\therefore$ 停靠站应建在公路(线段 AN)上离车站的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$km 处.

8. 解:(1)当 $x=0$ 时,$y=-\frac{3}{4}x+3=3$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为(0,3).

当 $y=0$ 时,$-\frac{3}{4}x+3=0$,解得 $x=4$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为(4,0).

(2)由折叠的性质可知,$AB=AC$,$BD=CD$.

$\because A(4,0)$,$B(0,3)$,

$\therefore OA=4$,$OB=3$.

$\therefore$ 在 Rt△AOB 中,$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$.

$\therefore AC=5$.

$\therefore OC=AC-OA=5-4=1$.

$\therefore$ 点 C 的坐标为$(-1,0)$.

设 $OD=m$,则 $CD=BD=3-m$.

在 Rt△COD 中,$OC^2+OD^2=CD^2$,即 $1^2+m^2=(3-m)^2$,

解得 $m=\frac{4}{3}$.

$\therefore OD=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $\left(0,\frac{4}{3}\right)$. 设线段 CD 所在直线对应的函数解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$,将 $C(-1,0)$,$D\left(0,\frac{4}{3}\right)$的坐标分别代入,得 $-k+b=0$,$b=\frac{4}{3}$.

$\therefore k=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ 线段 CD 所在直线对应的函数解析式为 $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$.

9. 解:(1)太阳花的付款金额 y(元)关于购买量 x(盆)的函数解析式是 $y=6x$.

当一次购买的绣球花不超过 20 盆时,付款金额 y(元)关于购买量 x(盆)的函数解析式是 $y=10x\ (0\leq x\leq 20)$;当一次购买的绣球花超过 20 盆时,付款金额 y(元)关于购买量 x(盆)的函数解析式是 $y=10\times 20+10\times 0.8\times(x-20)=200+8x-160=8x+40\ (x>20)$.

综上所述,可得绣球花的付款金额 y(元)关于购买量 x(盆)的函数解析式是 $y=\begin{cases}10x(0\leq x\leq 20),\\8x+40(x>20).\end{cases}$

(2)根据题意,可得太阳花的数量不超过 $90\times\frac{1}{3}=30$(盆).

设太阳花购买 a 盆,购买两种花卉的总费用是 w 元,则绣球花购买$(90-a)$盆,其中 $0\leq a\leq 30$.

由题意,得$w=6a+[8(90-a)+40]=6a+(760-8a)=760-2a$.

$\because 0\leq a\leq 30$,

$\therefore$ 当 $a=30$ 时,$w_{最小}=760-2\times 30=700$,此时 $90-a=60$,即当太阳花购买 30 盆,绣球花购买 60 盆时,总费用最少,最少费用是 700 元.

第 16 招 整体思想在解题中的五种技巧

1. 解:因为 $a+\frac{1}{a}=1+\sqrt{10}$,

所以$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=11+2\sqrt{10}$,

即 $a^2+\frac{1}{a^2}+2=11+2\sqrt{10}$,

所以 $a^2+\frac{1}{a^2}=9+2\sqrt{10}$.

点拨:本题利用整体代换思想求值,把 $a+\frac{1}{a}$ 看成一个整体,平方即可得到关于 $a^2+\frac{1}{a^2}$ 的式子,再进行求解即可.

2. 解:因为 $a-b=\sqrt{5}+\sqrt{3}$,$b-c=\sqrt{5}-\sqrt{3}$,

所以 $a-c=2\sqrt{5}$.

所以 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2ab)+\frac{1}{2}(b^2+c^2-2bc)+\frac{1}{2}(a^2+c^2-2ac)$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$

$=\frac{1}{2}(8+2\sqrt{15}+8-2\sqrt{15}+20)$

$=18$.

点拨:本题利用整体变形思想求值,把所求式子变形成关于 $a-b$,$b-c$,$a-c$ 的平方式,再根据所给条件求值.

3. 解:由题图可知,$\angle 1+\angle 2=\angle DAB$,$\angle 3+\angle 4=\angle IBA$,$\angle 5+\angle 6=\angle GCB$,$\because \angle DAB+\angle IBA+\angle GCB=(180°-\angle BAC)+(180°-\angle ABC)+(180°-\angle BCA)=540°-(\angle BAC+\angle ABC+\angle BCA)=540°-180°=360°$,

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=360°$.

$\therefore \angle J+\angle K+\angle L+\angle M+\angle N+\angle O+\angle P+\angle Q+\angle R+\angle S+\angle T+\angle U=(180°-\angle 1)+(180°-\angle 2)+(180°-\angle 3)+(180°-\angle 4)+(180°-\angle 5)+(\angle 180°-\angle 6)=180°\times 6-(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6)=720°$.

4. 解:$\begin{cases}4x-5y-7=0,①\\4y+\frac{4x-5y+5}{6}=6.②\end{cases}$

由①,得 $4x-5y=7$. ③

将③代入②,得 $4y+2=6$,

解得 $y=1$.

把 $y=1$ 代入③,得 $x=3$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

5. **解**：令 $x-y=m$，$x+y=n$.

则 $\begin{cases}\frac{2}{3}m-\frac{1}{4}n=\frac{1}{2},\\3n-2m=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{3}{2},\\n=2.\end{cases}$

即 $\begin{cases}x-y=\frac{3}{2},\\x+y=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{7}{4},\\y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

即原方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{7}{4},\\y=\frac{1}{4}.\end{cases}$

点拨：本题利用整体换元思想，将 $x-y$ 看成一个整体，用 m 表示，将 $x+y$ 看成一个整体，用 n 表示，即将关于 x,y 的方程组转化为关于 m,n 的方程组，使计算简便.

第 17 招 建模思想应用的常见类型归类

1. **解**：(1)四边形 $DHBG$ 是菱形. 理由如下：

∵ 四边形 $ABCD$，$FBED$ 是完全相同的矩形，

∴ $\angle A=\angle E=90°$，$AD=ED$，$AB=EB$.

在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle DEB$ 中，$\begin{cases}AD=ED,\\\angle A=\angle E,\\AB=EB,\end{cases}$

∴ $\triangle DAB\cong\triangle DEB$(SAS)，

∴ $\angle ABD=\angle EBD$.

∵ $AB/\!/CD$，$DF/\!/BE$，

∴ 四边形 $DHBG$ 是平行四边形，$\angle HDB=\angle EBD$，

∴ $\angle HDB=\angle HBD$，

∴ $DH=BH$，

∴ ▱$DHBG$ 是菱形.

(2)由(1)，设 $DH=BH=x$，则 $AH=8-x$，

在 Rt$\triangle ADH$ 中，$AD^2+AH^2=DH^2$，即 $4^2+(8-x)^2=x^2$，

解得 $x=5$，即 $BH=5$，

∴ 菱形 $DHBG$ 的面积为 $HB\cdot AD=5\times4=20$.

点拨：建立方程模型，将 DH，HB 的长设为 x，由勾股定理列方程求得 HB 的长，进而再求面积.

2. 不发生；在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半

点拨：连接 OP. ∵ $\angle AOB=90°$，点 P 是线段 AB 的中点，

∴ $OP=\frac{1}{2}AB$.

∵ 木棍(AB)的长度不发生改变，

∴ 滑动过程中，点 P 到点 O 的距离不发生变化.

3. **解**：(1)四边形 $EFGH$ 还是平行四边形.

理由如下：连接 AC.

∵ E，F 分别是 AB，BC 的中点，

∴ $EF/\!/AC$，$EF=\frac{1}{2}AC$.

∵ G，H 分别是 CD，AD 的中点，

∴ $GH/\!/AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$，

∴ $EF/\!/GH$，$EF=GH$，

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

(2)(ⅰ)当 $AC=BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是菱形.

证明：由(1)可知四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

易知 $FG=\frac{1}{2}BD$，$EF=\frac{1}{2}AC$，

∵ $AC=BD$，

∴ $FG=EF$，

∴ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

(ⅱ)当 $AC\perp BD$ 时，四边形 $EFGH$ 是矩形.

点拨：由(1)可知 $EF/\!/AC$，且四边形 $EFGH$ 是平行四边形，

∵ $AC\perp BD$，

∴ $EF\perp BD$，

∵ G，F 分别是 CD，BC 的中点，

∴ $FG/\!/BD$.

∵ $EF\perp BD$，

∴ $EF\perp FG$，即 $\angle EFG=90°$，

∴ ▱$EFGH$ 是矩形.

4. **解**：(1)设甲种水果的单价是 x 元，则乙种水果的单价是 $(x+4)$ 元，

$\frac{800}{x}=\frac{1\,000}{x+4}$，

解得 $x=16$.

经检验，$x=16$ 是原分式方程的解，

∴ $x+4=20$.

答：甲、乙两种水果的单价分别是 16 元、20 元.

(2)设购进甲种水果 a 千克，利润为 w 元，则购进乙种水果 $(200-a)$ 千克，

$w=(20-16)a+(25-20)(200-a)=-a+1\,000$.

∵ 甲种水果的数量不超过乙种水果数量的 3 倍，且购买资金不超过 3 420 元，

∴ $\begin{cases}a\leqslant3(200-a),\\16a+20(200-a)\leqslant3\,420.\end{cases}$

解得 $145\leqslant a\leqslant150$.

∴ 当 $a=145$ 时，w 取得最大值，此时 $w=-145+1\,000=855$，$200-a=55$.

答：水果商应进甲种水果 145 千克，乙种水果 55 千克，才能获得最大利润，最大利润是 855 元.

5. **解**：(1)270；20；40

(2)当 $3\leqslant x\leqslant6$ 时，设 y 与 x 之间的函数解析式为 $y=kx+b$，

把 $B(3,90)$，$C(6,270)$ 的坐标代入解析式，得

$\begin{cases}3k+b=90,\\6k+b=270,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=60,\\b=-90.\end{cases}$

∴ 当 $3\leqslant x\leqslant6$ 时，y 与 x 之间的函数解析式为 $y=60x-90$.

(3) $50-20=30$(个). 分两种情况：

①当 $20x=30$ 时，解得 $x=1.5$；

②当 $20x=30+40(x-3)$ 时，解得 $x=4.5$.

答：甲加工 1.5 h 或 4.5 h 时，甲与乙加工的零件个数相等.

练准知识 练通考点
练透方法 练出高分

提分一定有方法！

绿色印刷产品

荣德基初中频道

本书导学号 9941874

ISBN 978-7-5450-6287-8

定价：44.90元