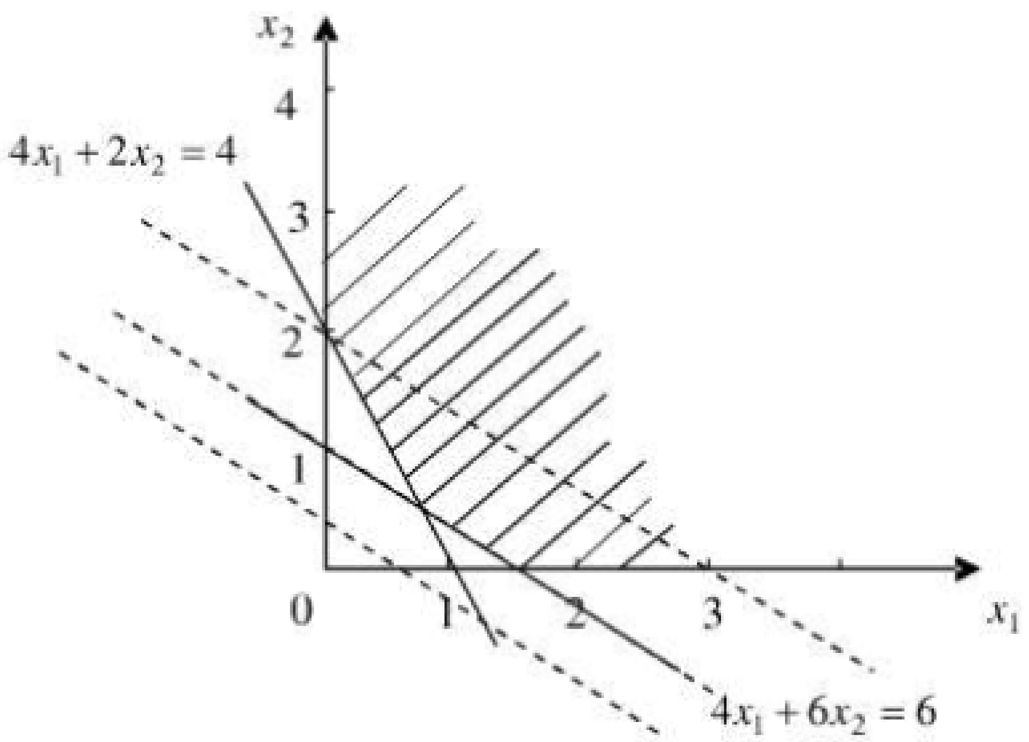
运筹学基础及应用 习题解答

习题一 P46

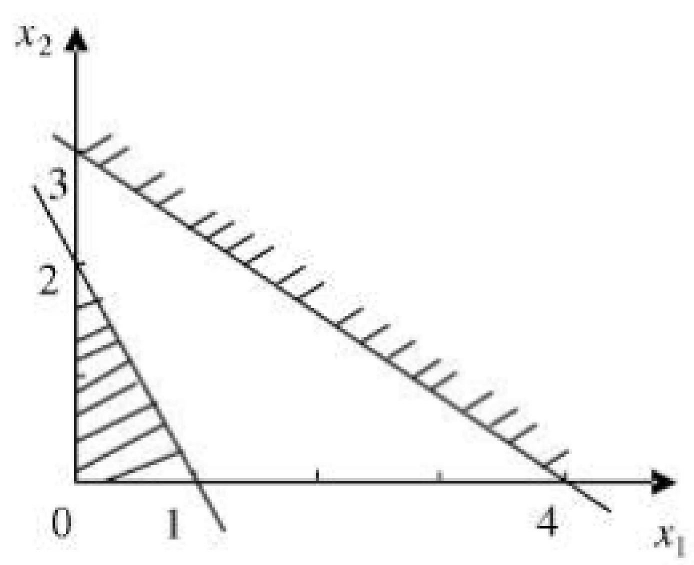
1.1

(a)



该问题有无穷多最优解，即满足 $4x_1+6x_2=6$ 且 $0\le x_2\le \frac{1}{2}$ 的所有 (x_1,x_2)，此时目标函数值 $z=3$。

(b)



用图解法找不到满足所有约束条件的公共范围，所以该问题无可行解。

1.2

(a) 约束方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0\\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

基	基解						是否基可行解	目标函数值
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
p_1 p_2 p_3	0	$\frac{16}{3}$	$-\frac{7}{6}$	0	0	0	否	
p_1 p_2 p_4	0	10	0	7	0	0	是	10
p_1 p_2 p_5	0	3	0	0	$\frac{7}{2}$	0	是	3

$p_1\quad p_2\quad p_6$	$\frac{7}{4}\quad -4\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{21}{4}$	否	
$p_1\quad p_3\quad p_4$	$0\quad 0\quad -\frac{5}{2}\quad 8\quad 0\quad 0$	否	
$p_1\quad p_3\quad p_5$	$0\quad 0\quad \frac{3}{2}\quad 0\quad 8\quad 0$	是	3
$p_1\quad p_3\quad p_6$	$1\quad 0\quad -\frac{1}{2}\quad 0\quad 0\quad 3$	否	
$p_1\quad p_4\quad p_5$	$0\quad 0\quad 0\quad 3\quad 5\quad 0$	是	0
$p_1\quad p_4\quad p_6$	$\frac{5}{4}\quad 0\quad 0\quad -2\quad 0\quad \frac{15}{4}$	否	

最优解 $x=(0,10,0,7,0,0)^T$。

(b) 约束方程组的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

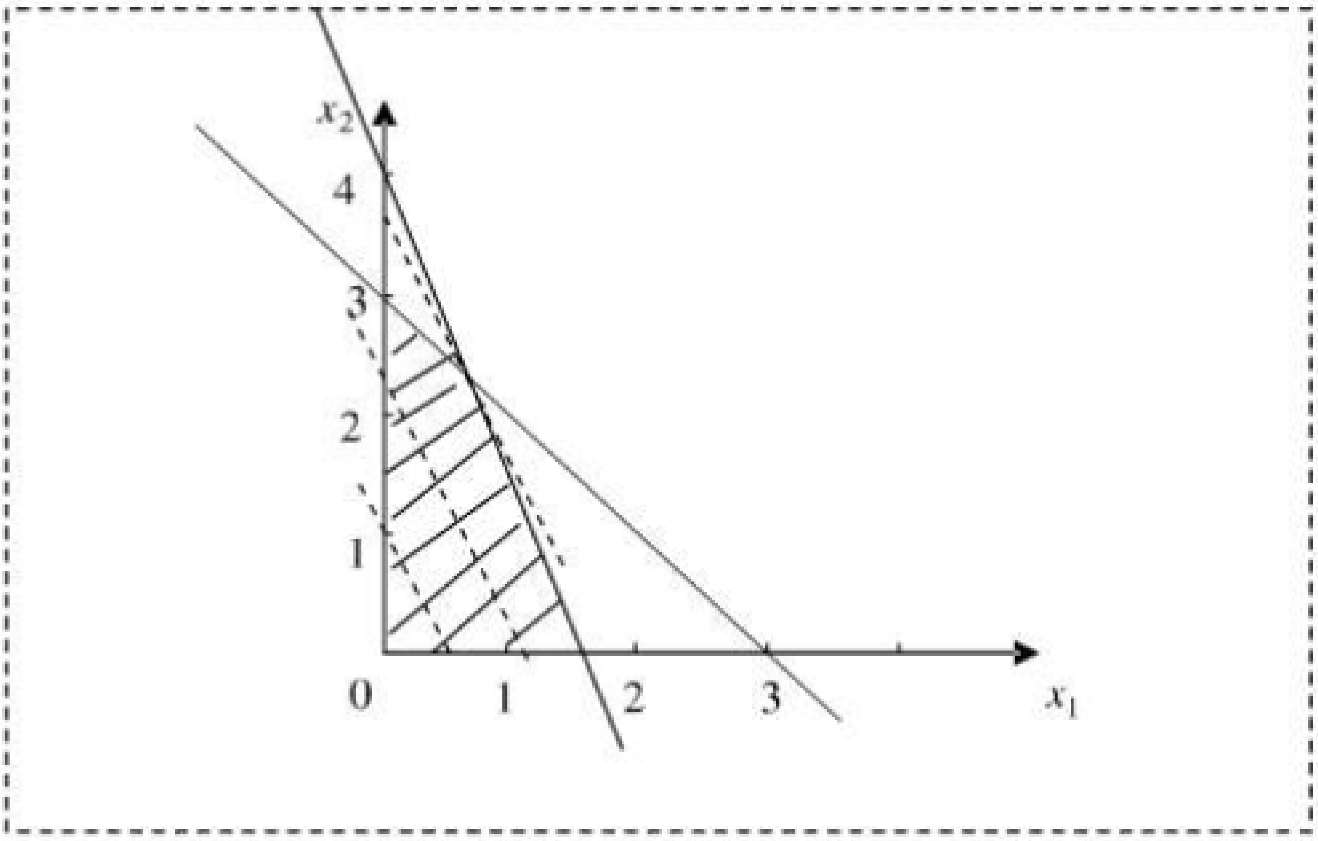
基	基解				是否基可行解	目标函数值
	x_1	x_2	x_3	x_4		
$p_1\quad p_2$	-4	$\frac{11}{2}$	0	0	否	
$p_1\quad p_3$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{11}{5}$	0	是	$\frac{43}{5}$
$p_1\quad p_4$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{11}{6}$	否	
$p_2\quad p_3$	0	$\frac{1}{2}$	2	0	是	5
$p_2\quad p_4$	0	$-\frac{1}{2}$	0	2	否	
$p_3\quad p_4$	0	0	1	1	是	5

最优解 $x=\left(\frac{2}{5},0,\frac{11}{5},0\right)^T$。

1.3

(a)

(1) 图解法



最优解即为$\begin{cases}3x_1+4x_2=9\\5x_1+2x_2=8\end{cases}$的解 $x=\left(1,\frac{3}{2}\right)$，最大值 $z=\frac{35}{2}$

(2)单纯形法

首先在各约束条件上添加松弛变量，将问题转化为标准形式

$$\max z=10x_1+5x_2+0x_3+0x_4$$
$$s.t.\quad\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3=9\\5x_1+2x_2+x_4=8\end{cases}$$

则 P_3,P_4 组成一个基。令 $x_1=x_2=0$

得基可行解 $x=(0,0,9,8)$，由此列出初始单纯形表

$c_j\to$			10	5	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	9	3	4	1	0
0	x_4	8	[5]	2	0	1
c_j-z_j			10	5	0	0

$\sigma_1>\sigma_2$。$\theta=\min\left(\frac{8}{5},\frac{9}{3}\right)=\frac{8}{5}$

$c_j\to$			10	5	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	$\frac{21}{5}$	0	$\left[\frac{14}{5}\right]$	1	$-\frac{3}{5}$
10	x_1	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

$c_j - z_j$	0　1　0　-2

$\sigma_2 > 0$，$\theta = \min\left(\frac{21}{14}, \frac{8}{2}\right) = \frac{3}{2}$

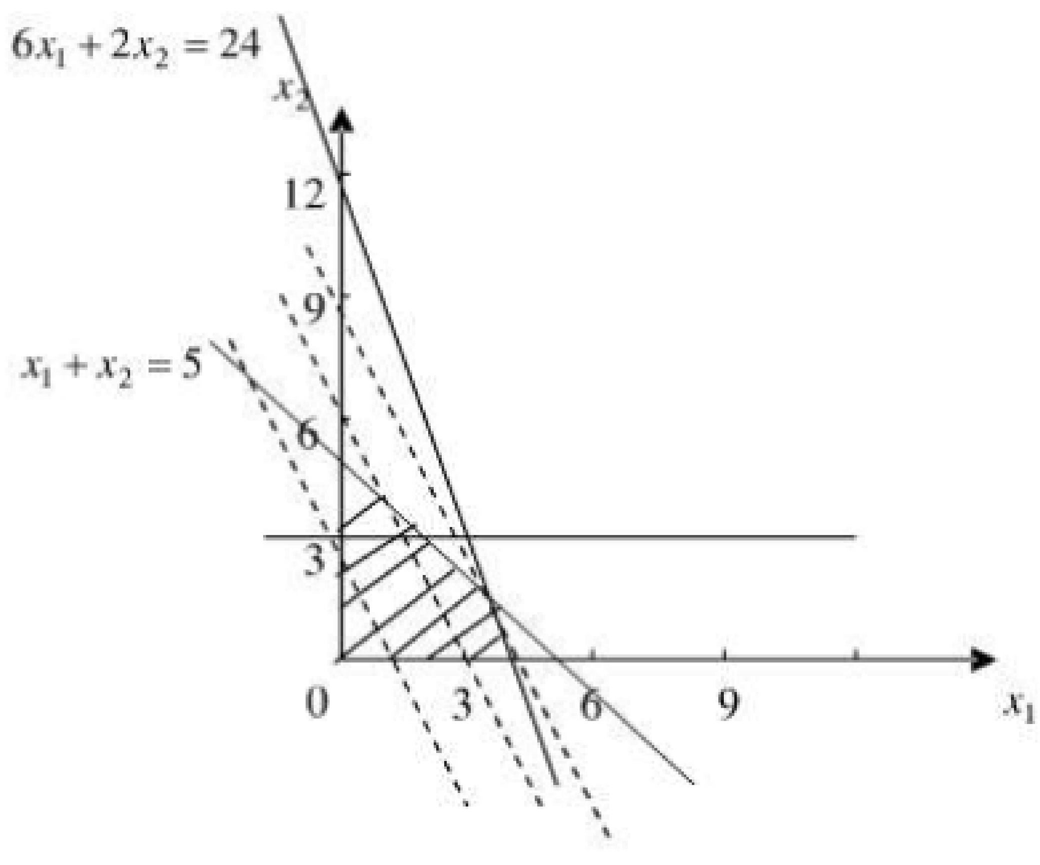
新的单纯形表为

$c_j \rightarrow$			10	5	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4
5	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{5}{14}$	$-\frac{3}{14}$
10	x_1	1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
$c_j - z_j$			0	0	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{25}{14}$

$\sigma_1, \sigma_2 < 0$，表明已找到问题最优解 $x_1 = 1$，$x_2 = \frac{3}{2}$，$x_3 = 0$，$x_4 = 0$。最大值 $z^* = \frac{35}{2}$

(b)

(1) 图解法



最优解即为 $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 24 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$ 的解 $x = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$，最大值 $z = \frac{17}{2}$

(2) 单纯形法

首先在各约束条件上添加松弛变量，将问题转化为标准形式

$$\max\ z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t. \quad \begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

则P_3，P_4，P_5组成一个基。令$x_1 = x_2 = 0$

得基可行解$x = (0,0,15,24,5)$，由此列出初始单纯形表

$c_j \to$			2	1	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
0	x_4	24	[6]	2	0	1	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1
$c_j - z_j$			2	1	0	0	0

$\sigma_1 > \sigma_2$。$\theta = \min\left(-, \frac{24}{6}, \frac{5}{1}\right) = 4$

$c_j \to$			2	1	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	5	1	0	0
2	x_4	4	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0
0	x_5	1	0	$\left[\frac{2}{3}\right]$	0	$-\frac{1}{6}$	1
$c_j - z_j$			0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0

$\sigma_2 > 0$，$\theta = \min\left(\frac{15}{5}, 24, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

新的单纯形表为

$c_j \to$			2	1	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	$\frac{15}{2}$	0	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{15}{2}$

2	x_4	$\frac{7}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	x_5	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
$c_j - z_j$			0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$

$\sigma_1, \sigma_2 < 0$，表明已找到问题最优解 $x_1 = 1$， $x_2 = \frac{7}{2}$ ， $x_3 = \frac{15}{2}$， $x_4 = 0$， $x_5 = 0$。最大值 $z^* = \frac{17}{2}$

1.6

(a) 在约束条件中添加松弛变量或剩余变量，且令 $x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}\ \left(x_2^{'} \geq 0, x_2^{''} \geq 0\right)$，

$x_3^{'} = -x_3$，$z' = -z$

该问题转化为

$$\max z' = -3x_1 - x_2^{'} + x_2^{''} - 2x_3^{'} + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2^{'} - 3x_2^{''} + 4x_3^{'} + x_4 = 12 \\ 4x_1 + x_2^{'} - x_2^{''} - 2x_3^{'} - x_5 = 8 \\ 3x_1 - x_2^{'} + x_2^{''} - 3x_3^{'} = 6 \\ x_1, x_2^{'}, x_2^{''}, x_3^{'}, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

其约束系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在 A 中人为地添加两列单位向量 P_7, P_8

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\max z' = -3x_1 - x_2^{'} + x_2^{''} - 2x_3^{'} + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$

得初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			-3	-1	1	-2	0	0	$-M$	$-M$
c_B	基	b	x_1	$x_2^{'}$	$x_2^{''}$	$x_3^{'}$	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	12	2	3	-3	4	1	0	0	0
$-M$	x_6	8	4	1	-1	-2	0	-1	1	0
$-M$	x_7	6	3	-1	1	-3	0	0	0	1

$c_j - z_j$	$-3+7\text{M}$ -1 1 $-2-5\text{M}$ 0 $-\text{M}$ 0 0

(b) 在约束条件中添加松弛变量或剩余变量，且令 $x_3 = x_3^{'} - x_3^{''}$ $\left(x_3^{'} \geq 0, x_3^{''} \geq 0\right)$, $z' = -z$

该问题转化为

$$\max\ z' = -3x_1 - 5x_2 + x_3^{'} - x_3^{''} + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3^{'} - x_3^{''} - x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3^{'} - 3x_3^{''} + x_5 = 16 \\ x_1 + x_2 + 5x_3^{'} - 5x_3^{''} = 10 \\ x_1, x_2, x_3^{'}, x_3^{''}, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

其约束系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在 A 中人为地添加两列单位向量 P_7, P_8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 $\max\ z' = -3x_1 - 5x_2 + x_3^{'} - x_3^{''} + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$

得初始单纯形表

$c_j \rightarrow$			-3	-5	1	-1	0	0	-M	$-$M
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4	x_5	x_6	x_7
$-M$	x_6	6	1	2	1	-1	-1	0	1	0
0	x_5	16	2	1	3	-3	0	1	0	0
$-M$	x_7	10	1	1	5	-5	0	0	0	1
$c_j - z_j$			$-3+2M$	$5+3M$	$1+6M$	$-1-6M$	$-M$	0	0	0

1.7

(a)解 1：大 M 法

在上述线性规划问题中分别减去剩余变量 x_4, x_6, x_8, 再加上人工变量 x_5, x_7, x_9, 得

$$\max z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 0x_4 - Mx_5 + 0x_6 - Mx_7 + 0x_8 - Mx_9$$

$$
s,t,\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=6 \\ -2x_1+x_3-x_6+x_7=2 \\ 2x_2-x_3-x_8+x_9=0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9\ge 0 \end{cases}
$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表

$c_j \to$			2	-1	2	0	$-M$	0	$-M$	0	$-M$	θ_i
c_b	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
$-M$	x_5	6	1	1	1	-1	1	0	0	0	0	6
$-M$	x_7	-2	-2	0	1	0	0	-1	1	0	0	$-$
$-M$	x_9	0	0	$[2]$	-1	0	0	0	0	-1	1	0
c_j-z_j			$2-M$	$3M-1$	$2+M$	$-M$	0	$-M$	0	$-M$	0	
$-M$	x_5	6	1	0	$3/2$	-1	1	0	0	$1/2$	$-1/2$	4
$-M$	x_7	2	-2	0	$[1]$	0	0	-1	1	0	0	2
-1	x_2	0	0	1	$-1/2$	0	0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	$-$
c_j-z_j			$2-M$	0	$\frac{5M}{2}+\frac{3}{2}$	$-M$	0	$-M$	0	$\frac{M}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{3M}{2}$	
$-M$	x_5	3	$[4]$	0	0	-1	1	$3/2$	$-3/2$	$1/2$	$-1/2$	$3/4$
2	x_3	2	-2	0	1	0	0	-1	1	0	0	$-$
-1	x_2	1	-1	1	0	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-$
c_j-z_j			$4M+5$	0	0	$-M$	0	$\frac{3M+3}{2}$	$\frac{-5M-3}{2}$	$\frac{M-1}{2}$	$\frac{1-3M}{2}$	
2	x_1	$3/4$	1	0	0	$-1/4$	$1/4$	$3/8$	$-3/8$	$1/8$	$-1/8$	
2	x_3	$7/2$	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$-1/4$	$1/4$	$1/4$	$-1/4$	
-1	x_2	$7/4$	0	1	0	$-1/4$	$1/4$	$-1/8$	$1/8$	$-3/8$	$3/8$	
c_j-z_j			0	0	0	$-5/4$	$-M-\frac{5}{4}$	$-3/8$	$\frac{3}{8}-M$	$\frac{-9}{8}$	$\frac{9}{8}-M$	

由单纯形表计算结果可以看出，$\sigma_4>0$ 且 $a_{i4}<0(i=1,2,3)$，所以该线性规划问题有无界解

解 2：两阶段法。

现在上述线性规划问题的约束条件中分别减去剩余变量 x_4,x_6,x_8，再加上人工变量

x_5,x_7,x_9，得第一阶段的数学模型

据此可列出单纯形表

c_b	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	θ_i
$c_j \to$			0	0	0	0	1	0	1	0	1	
1	x_5	6	1	1	1	−1	1	0	0	0	0	6
1	x_7	−2	−2	0	1	0	0	−1	1	0	0	–
1	x_9	0	0	[2]	−1	0	0	0	0	−1	1	0
$c_j - z_j$			1	−3	−1	1	0	1	0	1	0	
1	x_5	6	1	0	3/2	−1	1	0	0	1/2	−1/2	4
1	x_7	2	−2	0	[1]	0	0	−1	1	0	0	2
0	x_2	0	0	1	−1/2	0	0	0	0	−1/2	−1/2	–
$c_j - z_j$			1	0	−5/2	1	0	−1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
1	x_5	3	[4]	0	0	−1	1	3/2	−3/2	1/2	−1/2	3/4
0	x_3	2	−2	0	1	0	0	−1	1	0	0	–
0	x_2	1	−1	1	0	0	0	−1/2	1/2	−1/2	1/2	–
$c_j - z_j$			0	0	0	0	1	0	1	0	1	
2	x_1	3/4	1	0	0	−1/4	1/4	3/8	−3/8	1/8	−1/8	
2	x_3	7/2	0	0	1	−1/2	1/2	−1/4	1/4	1/4	−1/4	
−1	x_2	7/4	0	1	0	−1/4	1/4	−1/8	1/8	−3/8	3/8	
$c_j - z_j$			0	0	0	0	1	0	1	0	1	

第一阶段求得的最优解 $X^* = (\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{7}{2}, 0,0,0,0,0,0)^T$，目标函数的最优值 $\omega^* = 0$。

因人工变量 $x_5 = x_7 = x_9 = 0$，所以 $X^* = (\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{7}{2}, 0,0,0,0,0,0)^T$ 是原线性规划问题的基可行解。于是可以进行第二阶段运算。将第一阶段的最终表中的人工变量取消，并填入原问题的目标函数的系数，进行第二阶段的运算，见下表。

c_b	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_8		θ_i
$c_j - z_j$			2	−1	2	0	0	0	0	
2	x_1	3/4	1	0	0	−1/4	3/8	−1/8		
2	x_3	7/2	0	0	1	−1/2	−1/4	1/4		
−1	x_2	7/4	0	1	0	−1/4	−1/8	−3/8		

$c_j - z_j$	0	0	0	$5/4$	$-3/8$	$-9/8$	

由表中计算结果可以看出，$\sigma_4 > 0$ 且 $a_{i4} < 0(i=1,2,3)$，所以原线性规划问题有无界解。

(b)解 1：大 M 法

在上述线性规划问题中分别减去剩余变量 x_4, x_6, x_8，再加上人工变量 x_5, x_7, x_9，得

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 - Mx_7$$

$$s,t,\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 6 \\ \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

其中 M 是一个任意大的正数。据此可列出单纯形表

$c_j \rightarrow$	2	-1	2	0	$-M$	0	$-M$	0	$-M$	θ_i
c_b 基 b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7			
M x_6 8	1	[4]	2	-1	0	1	0			2
M x_7 6	3	2	0	0	-1	0	1			3
$c_j - z_j$	$2-4M$	$3-6M$	$1-2M$	M	M	0	0			
3 x_2 2	$1/4$	1	$1/2$	$-1/4$	0	$1/4$	0			8
M x_7 2	[$5/2$]	0	-1	$1/2$	-1	$-1/2$	1			$4/5$
$c_j - z_j$	$\frac{5}{4}-\frac{5}{2}M$	0	$M-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}-\frac{1M}{2}$	M	$\frac{3M}{2}-\frac{3}{4}$	0			
3 x_2 $9/5$	0	1	$3/5$	$-3/10$	$1/10$	$3/10$	$-1/10$			
2 x_1 $4/5$	1	0	$-2/5$	$1/5$	$-2/5$	$-1/5$	$2/5$			
$c_j - z_j$	0	0	0	$1/2$	$1/2$	$M-1/2$	$M-1/2$			

由单纯形表计算结果可以看出，最优解 $X^{*}=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优解值

$z^{*} = 2\times\frac{4}{5} + 3\times\frac{9}{5} = 7$。X 存在非基变量检验数 $\sigma_3 = 0$，故该线性规划问题有无穷多最优解。

解 2：两阶段法。

现在上述线性规划问题的约束条件中分别减去剩余变量x_4, x_5，再加上人工变量x_6, x_7，得第一阶段的数学模型$\min \omega = x_6 + x_7$

$$s,t,\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 6 \\ \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

据此可列出单纯形表

$c_j \to$	0	0	0	0	0	1	1	θ_i
c_b 基 b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1 x_6 8	1	[4]	2	-1	0	1	0	2
1 x_7 6	3	2	0	0	-1	0	1	3
$c_j - z_j$	-4	-6	-2	1	1	0	0	
0 x_2 2	1/4	1	1/2	$-1/4$	0	1/4	0	8
1 x_7 2	[5/2]	0	-1	1/2	-1	$-1/2$	1	4/5
$c_j - z_j$	$-5/2$	0	1	$-1/2$	1	3/2	0	
0 x_2 9/5	0	1	3/5	$-3/10$	1/10	3/10	$-1/10$	
0 x_1 4/5	1	0	$-2/5$	1/5	$-2/5$	$-1/5$	2/5	
$c_j - z_j$	0	0	0	0	0	1	1	

第一阶段求得的最优解$X^{*}=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优值$\omega^{*}=0$。

因人工变量$x_6 = x_7 = 0$，所以$(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$是原线性规划问题的基可行解。于是可以进行第二阶段运算。将第一阶段的最终表中的人工变量取消，并填入原问题的目标函数的系数，进行第二阶段的运算，见下表。

$c_j - z_j$	2	3	1	0	0	θ_i
c_b 基 b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

3 x_2 9/5 2 x_1 4/5	0 1	1 0	3/5 −2/5	−3/10 1/5	1/10 −2/5	
$c_j - z_j$	0	0	0	1/2	1/2	

由单纯形表计算结果可以看出，最优解 $X^{*}=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，目标函数的最优解值 $z^{*}=2\times\frac{4}{5}+3\times\frac{9}{5}=7$。由于存在非基变量检验数 $\sigma_3=0$，故该线性规划问题有无穷多最优解。

1.8

表 1-23

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	6	2	4	-2	1	0
x_5	1	−1	3	2	0	1
$c_j - z_j$		3	−1	2	0	0

表 1-24

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	3	1	2	−1	1/2	0
x_5	1	0	5	1	1/2	1
$c_j - z_j$		0	−7	5	−3/2	0

1.10

			3	5	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0
0	x_5	14/3	−4/3	0	[5]	−2/3	1	0
0	x_6	29/3	5/3	0	4	−2/3	0	1
$c_j - z_j$			−1/3	0	4	−5/3	0	0

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	8/3	2/3	1	0	1/3	0	0
4	x_3	14/15	−4/15	0	1	−2/15	1/5	0

0	x_6	89/15	$[41/15]$	0	0	$-2/15$	$-4/5$	1
$c_j - z_j$			11/15	0	0	$-17/15$	$-4/5$	0

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	50/41	0	1	0	15/41	8/41	$-10/41$
4	x_3	62/41	0	0	1	$-6/41$	5/41	4/41
3	x_1	89/41	1	0	0	$-2/41$	$-12/41$	15/41
$c_j - z_j$			0	0	0	$-45/41$	$-24/41$	$-11/41$

最后一个表为所求。

习题二　P76

2.1 写出对偶问题

(a)

$$\min\ z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_4 \le 3 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

对偶问题为：

$$\max\ w = 2y_1 + 3y_2 + 5y_3$$
$$s.t.\ \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \le 2 \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \le 2 \\ 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 = 4 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

(b)

$$\max\ z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$
$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \ge 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \le 8 \\ x_1\text{无约束}, x_2 \ge 0, x_3 \le 0 \end{cases}$$

对偶问题为：

$$\min\ w = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$
$$s.t.\ \begin{cases} y_1 - y_2 + 4y_3 = 5 \\ 2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \ge 6 \\ 2y_1 - y_2 + 3y_3 \le 3 \\ y_1\text{无约束}, y_2 \le 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

2.2

(a)错误。原问题存在可行解，对偶问题可能存在可行解，也可能无可行解。

(b)错误。线性规划的对偶问题无可行解，则原问题可能无可行解，也可能为无界解。

(c)错误。

(d)正确。

2.6 对偶单纯形法

(a)

$$\min\ z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$$
$$s.t.\ \begin{cases} x_1 \qquad + 3x_3 \ge 3 \\ \qquad 2x_2 + 2x_3 \ge 5 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：先将问题改写为求目标函数极大化，并化为标准形式

$$\max\ z' = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\ \begin{cases} -x_1 \quad -3x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_2 - 2x_3 \quad + x_5 = -5 \\ x_i \geq 0 (i = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

列单纯形表，用对偶单纯形法求解，步骤如下

$c_j \rightarrow$			-4	-12	-18	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	0	-3	1	0
0	x_5	-5	0	[-2]	-2	0	1
$c_j - z_j$			-4	-12	-18	0	0
0	x_4	-3	-1	0	[-3]	1	0
-12	x_2	$\frac{5}{2}$	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$			-4	0	-6	0	-6
-18	x_3	1	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0
-12	x_2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$c_j - z_j$			-2	0	0	-2	-6

最优解为 $x = \left(0, 1, \frac{3}{2}\right)^T$， 目标值 $z = 39$ 。

(b)

$$\min\ z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：先将问题改写为求目标函数极大化，并化为标准形式

$$\max\ z' = -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\ \begin{cases} -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ -6x_1 - 3x_2 - 5x_3 \quad + x_5 = -10 \\ x_i \geq 0 (i = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

列单纯形表，用对偶单纯形法求解

$c_j \rightarrow$	-5	-2	-4	0	0

c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-4	-3	-1	-2	1	0
0	x_5	-10	-6	$[-3]$	-5	0	1
c_j-z_j			-5	-2	-4	0	0
0	x_4	$-\frac{2}{3}$	-1	0	$\left[-\frac{1}{3}\right]$	1	$-\frac{1}{3}$
-2	x_2	$\frac{10}{3}$	2	1	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
c_j-z_j			-1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
-4	x_3	-2	3	0	1	-3	1
-2	x_2	0	-3	1	0	5	-2
c_j-z_j			1	0	0	-2	0

最优解为 $x=(0,0,2)^T$， 目标值 $z=8$。

2.8 将该问题化为标准形式：

$$\max\ z=2x_1-x_2+x_3+0x_4+0x_5$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=6 \\ -x_1+2x_2+x_5=4 \\ x_i\ge 0(i=1,\cdots 5) \end{cases}$$

用单纯形表求解

$c_j\rightarrow$			2	-1	1	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	6	[1]	1	1	1	0
0	x_5	4	-1	2	0	0	1
c_j-z_j			2	-1	1	0	0
$\theta=6$							
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	6	1	1	1	1	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1
c_j-z_j			0	-3	-1	-2	0

由于$\sigma_j<0$，所以已找到最优解$X^*=(6,0,0,0,10)$，目标函数值$z^*=12$

(a) 令目标函数

max $z=(2+\lambda_1)\ x_1+(-1+\lambda_2)\ x_2+(1+\lambda_3)\ x_3$

(1)令$\lambda_2=\lambda_3=0$，将λ_1反映到最终单纯形表中

$c_j\to$			$2+\lambda_1$	-1	1	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$2+\lambda_1$	x_4	6	1	1	1	1	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1
c_j-z_j			0	$-3-\lambda_1$	$-1-\lambda_1$	$-2-\lambda_1$	0

表中解为最优的条件：$-3-\lambda_1\le 0$，$-1-\lambda_1\le 0$，$-2-\lambda_1\le 0$，从而$\lambda_1\ge -1$

(2)令$\lambda_1=\lambda_3=0$，将λ_2反映到最终单纯形表中

$c_j\to$			2	$-1+\lambda_2$	1	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	6	1	1	1	1	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1
c_j-z_j			0	λ_2-3	-1	-2	0

表中解为最优的条件：$\lambda_2-3\le 0$， 从而$\lambda_2\le 3$

(3) 令$\lambda_1=\lambda_2=0$，将λ_3反映到最终单纯形表中

$c_j\to$			2	-1	$1+\lambda_3$	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	6	1	1	1	1	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1
c_j-z_j			0	-3	λ_3-1	-2	0

表中解为最优的条件：$\lambda_3-1\le 0$， 从而$\lambda_3\le 1$

(b) 令线性规划问题为

$$\max\ z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t.\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 + \lambda_4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 + \lambda_5 \\ x_i \ge 0 (i = 1, \cdots 3) \end{cases}$$

(1)先分析的变化

$$\Delta b^* = B^{-1}\Delta b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

使问题最优基不变的条件是$b^* + \Delta b^* = \begin{pmatrix} 6+\lambda_1 \\ 10+\lambda_1 \end{pmatrix} \ge 0$，从而 $\lambda_1 \ge -6$

(2)同理有$\begin{pmatrix} 6 \\ 10+\lambda_2 \end{pmatrix} \ge 0$，从而 $\lambda_2 \ge -10$

(c) 由于 $x^* = (6,0,0,0,10)$ 代入 $-x_1 + 2x_3 = -6 < 2$，所以将约束条件减去剩余变量后的方程 $-x_1 + 2x_3 - x_6 = 2$ 直接反映到最终单纯形表中

$c_j \to$			2	-1	1	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	6	1	1	1	1	0	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1	0
0	x_6	-2	1	0	-2	0	0	1
$c_j - z_j$			0	-3	-1	-2	0	0

对表中系数矩阵进行初等变换，得

$c_j \to$			2	-1	1	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	6	1	1	1	1	0	0
0	x_5	10	0	3	1	1	1	0
0	x_6	-8	0	-1	[-3]	-1	0	1

$c_j - z_j$	0	-3	-1	-2	0	0

$c_j \rightarrow$			2	-1	1	0	0	0
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	x_1	$10/3$	1	$2/3$	0	$2/3$	0	$1/3$
0	x_5	$22/3$	0	$8/3$	0	$2/3$	1	$1/3$
0	x_6	$8/3$	0	$1/3$	1	$1/3$	0	$-\frac{1}{3}$
$c_j - z_j$			0	$-\frac{8}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

因此增加约束条件后，新的最优解为

$x_1 = \frac{10}{3}$，$x_3 = \frac{8}{3}$，$x_5 = \frac{22}{3}$，最优值为 $\frac{28}{3}$

2.12

(a) 线性规划问题

$$\max\ z = 3x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\ \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 45 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 30 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

单纯形法求解

c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	45	6	3	5	1	0
0	x_5	30	3	4	[5]	0	1
$c_j - z_j$			3	1	4	0	0
0	x_4	15	[3]	-1	0	1	-1
4	x_3	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$
$c_j - z_j$			$\frac{3}{5}$	$-\frac{11}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$
3	x_1	5	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
4	x_3	3	0	1	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

$c_j - z_j$	$0 \quad -2 \quad 0 \quad -\frac{1}{5} \quad -\frac{3}{5}$

最优解为$(x_1, x_2, x_3) = (5,0,3)$ ，目标值$z = 27$。

(a) 设产品 A 的利润为$3+\lambda$，线性规划问题变为

$$\max\ z = (3+\lambda)x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 45 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 30 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

单纯形法求解

基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	45	6	3	5	1	0
x_5	30	3	4	[5]	0	1
$c_j - z_j$		$3+\lambda$	1	4	0	0
x_4	15	[3]	-1	0	1	-1
x_3	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$
$c_j - z_j$		$\frac{3}{5}+\lambda$	$-\frac{11}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$
x_1	5	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	3	0	1	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$c_j - z_j$		0	$-2+\frac{\lambda}{3}$	0	$-\frac{1}{5}-\frac{\lambda}{3}$	$-\frac{3}{5}+\frac{\lambda}{3}$

为保持最优计划不变，应使$-2+\frac{\lambda}{3}$，$-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\lambda$，$-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\lambda$都小于等于 0，解得$-\frac{3}{5} \le \lambda \le \frac{9}{5}$。

(b) 线性规划问题变为

$$\max\ z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4$$

$$s.t.\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 \le 45 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

单纯形法求解

c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_5	45	6	3	5	8	1	0
0	x_6	30	3	4	[5]	2	0	1

$c_j - z_j$			3	1	4	3	0	0
0	x_4	15	[3]	-1	0	6	1	-1
4	x_3	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$c_j - z_j$			$\frac{3}{5}$	$-\frac{11}{5}$	0	$\frac{7}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$
3	x_1	5	1	$-\frac{1}{3}$	0	[2]	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
4	x_3	3	0	1	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$c_j - z_j$			0	-2	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$
0	x_4	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
4	x_3	5	$\frac{2}{5}$	$\frac{13}{15}$	1	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$
$c_j - z_j$			$-\frac{1}{10}$	$-\frac{29}{15}$	0	0	$-\frac{7}{30}$	$-\frac{17}{30}$

此时最优解为$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,5)$，目标值$z = 20$，小于原最优值，因此该种产品**不值得生产**。

(c) 设购买材料数量为y，则规划问题变为

$$\max\ z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 0.4y$$
$$s.t. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 45 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - y \le 30 \\ x_1, x_2, x_3, y \ge 0 \end{cases}$$

单纯形法求解

c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	y	x_4	x_5
0	x_5	45	6	3	5	0	1	0
0	x_6	30	3	4	[5]	-1	0	1
$c_j - z_j$			3	1	4	$-\frac{2}{5}$	0	0
0	x_4	15	[3]	-1	0	1	1	-1
4	x_3	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$c_j - z_j$			$\frac{3}{5}$	$-\frac{11}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$
3	x_1	5	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\left[\frac{1}{3}\right]$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

4 x_3 3	0	1	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
c_j-z_j	0	-2	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$
0 y 15	3	-1	0	1	1	-1
4 x_3 9	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0
c_j-z_j	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{9}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$

此时最优解为$(x_1,x_2,x_3,y)=(0,0,9,15)$，目标值$z=30$，大于原最优值，因此**应该购进原材料扩大生产**，以购材料 15 单位为宜。

运筹学基础及应用第四版胡运权主编课后练习答案（3—5 章）

第三章 3.1 表 3.36

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	9	8	12	13	18
A2	10	10	12	14	24
A3	8	9	11	12	6
A4	10	10	11	12	12
销量	6	14	35	5	

用 vogel 法求解得

B \ A	B1	B2	B3	B4
A1		14		4
A2			24	
A3	6		0	
A4			11	

用位势法检验，把上表中有数字的地方换成运价

B \ A	B1	B2	B3	B4	Ui

A1		8		13	8
A2			12		8
A3	8		11		7
A4			11	12	7
Vj	1	0	4	5	

令 $v_1=1$

则 $u_1+v_2=8$

$u_1+v_4=13$

$u_2+v_3=12$

$u_3+v_1=8$

$u_3+v_3=11$

$u_4+v_3=11$

$u_4+v_4=12$

所以 $u_3=7$

$v_3=4$

$u_4=7$

$v_5=8$

$u_2=8$

$v_2=0$

得检验数表

B / A	B1	B2	B3	B4
A1	0		0	
A2	1	2		1
A3		2		0
A4	2	3		

表中所有的数字均大于等于零，故所求方案为最优方案

3.3

解：（a）用运价代替表 3.39 中有数字的地方，求出位势和检验数

B / A	B1	B2	B3	B4	Ui
A1		1		11	12-k
A2	12	k	9		11
A3	2				1
Vj	1	k-11	-2	k-1	

令 $v_1=1$ 则 $u_1+v_2=1$

$u_1+v_4=11$

$u_2+v_1=12$

$u_2+v_2=k$

$u_2+v_3=9$

$u_3+v_1=2$

故 $v_3=-2$

$u_2=11$

$v_2=k-11$

$u_1=12-k$

$v_4=k-1$

$u_3=1$

得检验数表

B / A	B1	B2	B3	B4
A1	k-3		10-k	
A2				30-k
A3		24-k	15	18-k

令表中所有的检验数均大于等于零，得 3≤k≤10

(b)由表 3.39 和表 3.40 计算出位势和检验数，令 C24=M

位势表

B / A	B1	B2	B3	B4	Ui
A1		1		11	5
A2	12	7	9		11
A3	2				1
Vj	1	-4	-2	6	

检验数表

B / A	B1	B2	B3	B4
A1	4		17	
A2				M-17
A3		17	17	11

当存在某非基变量的检验数大于等于零的时候有无穷多最优解

则 M-17=0 所以 M=17　　故运价 C24=17

3.5

销地 / 产地	A1	A2	A3	供应量
B1	500	540	580	2
B1’	570	610	650	3
B2	M	600	640	4
B2’	M	670	710	2
B3	M	M	550	1
B3’	M	M	620	3
S	40	80	120	2
销量	3	3	4	

由于产大于销，设有一个理想的销地 A4，则

销地 产地	A1	A2	A3	A4	供应量
B1	500	540	580	0	2
B1’	570	610	650	0	3
B2	M	600	640	0	4
B2’	M	670	710	0	2
B3	M	M	550	0	1
B3’	M	M	620	0	3
S	40	80	120	0	2
销量	3	3	4	7	

第五章

5.4 解：

$\text{Min } z=P_1 d_1^- +P_2(d_2^-+d_2^+)$

s.t. $11x_1+3x_2\geqslant 25$

$100x_1+50x_2+d_1^- - d_1^+ = \mathbf{1900}$

$10x_1+16x_2+d_2^- - d_2^+ = \mathbf{200}$

$x_1,x_2, d_1^-,d_1^+, d_2^-,d_2^+ \geqslant \mathbf{0}$

5.6 解：

目标规划模型为

$\text{Min } z = P_1 d_1^- +P_2(d_2^-+d_2^+) +P_2(d_3^-+d_3^+) +P_3(d_4^-+d_4^+) +P_3 d_5^+$

s.t. $300x_1+450x_2+d_1^- - d_1^+ = \mathbf{10000}$

$x_1+d_2^- - d_2^+ = \mathbf{10}$

$x_2+d_3^- - d_3^+ = \mathbf{15}$

$4x_1+6x_2+d_4^- - d_4^+ = \mathbf{150}$

$3x_1+2x_2+d_5^- - d_5^+ = \mathbf{75}$

$x_1,x_2, d_1^-,d_i^+, d_i^- \geqslant \mathbf{0}\quad, \mathbf{i=1,\cdots,5}$