

本资料由贾晓伟收集

2010 年 12 月

# 前言

本书根据高等院校自动控制原理教学大纲的基本要求编写。书中精辟地总结了自动控制理论的主要内容,列出各章主要知识点,有助于初学者把握重点,理解概念和掌握方法;针对学习过程中的重点、难点,设计组织了大量帮助深入理解概念和掌握分析问题方法的各类习题,类型有单个知识点的简单应用题,也有包含多个知识点的综合应用题,利于循序渐进地培养分析解决问题的能力;参考近年几所重点高等院校的自动控制理论硕士研究生入学试题,列选了有代表性的硕士研究生入学试题及详细解答。另外,本书加强了 MATLAB 软件在自动控制系统分析中的应用,精选了部分利用 MATLAB 分析控制系统的例题,使读者通过实例进一步提高分析和设计控制系统的能力。

本书由蒋国平教授、万佑红副教授主编,各章编写作者还有杨敏老师(第 5~7 章)、程艳云老师(第 8~10 章)。南京邮电大学自动化学院的领导和同事曾对此习题集的编写和出版提供了极大的关心和帮助,在此,向他们表示深深的感谢。

由于作者水平和经验有限,书中难免有不当之处,恳请读者批评指正。

# 目 录

## 第 1 章 自动控制的一般概念

1.1 基本术语 .....	1
1.2 基本控制方式 .....	1
1.3 自动控制系统的分类 .....	2
习题解答 .....	4

## 第 2 章 控制系统的数学模型

2.1 数学模型 .....	11
2.2 微分方程 .....	11
2.3 传递函数 .....	12
2.4 结构图 .....	13
2.5 信号流图 .....	13
2.6 梅森增益公式 .....	14
习题解答 .....	14

## 第 3 章 线性系统的时域分析法

3.1 典型输入信号 .....	37
3.2 动态过程与稳态过程 .....	37
3.3 动态性能与稳态性能 .....	38
3.4 一阶系统的时域分析 .....	38
3.5 二阶系统的时域分析 .....	39
3.6 高阶系统的时域分析 .....	41
3.7 稳定性分析 .....	41
3.8 线性系统的稳态误差计算 .....	42
3.9 减小或消除稳态误差的措施 .....	43
习题解答 .....	43

## 第 4 章 线性系统的根轨迹法

4.1 根轨迹法的基本概念 .....	74
4.2 根轨迹方程 .....	74

4.3 根轨迹绘制的基本法则 .....	75
4.4 广义根轨迹 .....	76
4.5 系统性能的分析 .....	76
习题解答 .....	76
<b>第5章 线性系统的频域分析法</b>	
5.1 频率特性 .....	90
5.2 典型环节的频率特性 .....	91
5.3 开环频率特性曲线的绘制 .....	93
5.4 频率域稳定判据 .....	94
5.5 稳定裕度 .....	96
习题解答 .....	97
<b>第6章 系统的校正与综合</b>	
6.1 系统的设计与校正问题 .....	109
6.2 控制系统的校正设计方法 .....	109
习题解答 .....	112
<b>第7章 线性离散系统的分析与校正</b>	
7.1 基本概念 .....	123
7.2 信号的采样与保持 .....	124
7.3 离散系统的数学模型 .....	126
7.4 离散系统的稳定性与稳态误差 .....	127
7.5 离散系统的动态性能分析 .....	128
7.6 离散系统的数字校正 .....	131
习题解答 .....	132
<b>第8章 非线性控制系统分析</b>	
8.1 非线性系统 .....	142
8.2 常见非线性因素对系统运动的影响 .....	143
8.3 相平面法定义 .....	143
8.4 描述函数法 .....	146
习题解答 .....	148
<b>第9章 线性系统的状态空间分析和综合</b>	
9.1 线性系统的状态空间描述 .....	166
9.2 线性系统的可控性和可观测性 .....	171
9.3 线性变换 .....	172

9.4 反馈结构和状态观测器 .....	175
9.5 李雅普诺夫稳定性分析 .....	177
习题解答 .....	178
<b>第 10 章 动态系统的最优控制方法</b>	
10.1 最优控制的一般概念 .....	197
10.2 最优控制中的变分法 .....	198
10.3 极小值原理及其应用 .....	201
10.4 线性二次型问题的最优控制 .....	203
习题解答 .....	206
<b>参考文献</b> .....	218

# 第 1 章 自动控制的一般概念

## 1.1 基本术语

1. 自动控制：在无人直接参与的情况下，通过控制器使被控对象或过程自动地按照预定的规律运行。
2. 自动控制系统：将被控对象和控制装置(控制器)按照一定的方式连接起来构成的有机总体。
3. 输入量：作用于控制系统输入端，可使系统具有预定功能或预定输出的物理量。
4. 被控量：被控对象的输出量，是要求严格加以控制(按给定规律)的物理量。
5. 自动控制理论：研究自动控制共同规律的技术科学。

## 1.2 基本控制方式

### 1. 开环控制

系统只有输入到输出量的顺向作用，而不存在反向联系。又可以分为按给定量控制(如图 1-1)和按扰动控制(如图 1-2)两种形式。没有修正偏差能力，抗扰动性较差。结构简单、调整方便、成本低。



图 1-1 按给定量控制

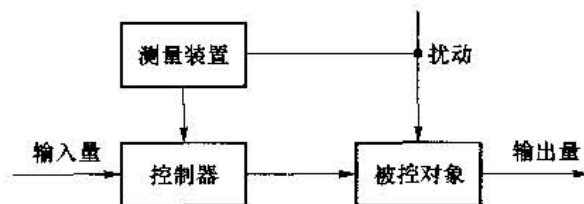


图 1-2 按扰动控制

### 2. 闭环控制

闭环控制又称反馈控制(如图 1-3)。凡是系统输出信号对控制作用有直接影响的系统，都称为闭环系统。输入信号和反馈信号(反馈信号可以是输出信号本身，也可以是输

出信号的函数或导数)之差,称为误差信号。误差信号加到控制器上,以减小系统的误差,并使系统的输出量趋于所希望的值。换句话说,“闭环”这个术语的涵义,就是应用反馈作用来减小系统的误差。

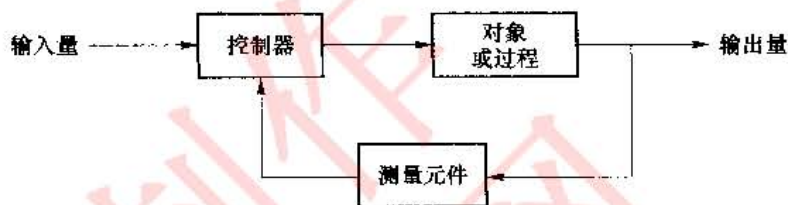


图 1-3 反馈控制

反馈控制可以抑制内、外扰动对被控制量产生的影响。其特点是精度高、结构复杂,但设计、分析麻烦。

### 3. 复合控制方式

复合控制方式是将开环控制和闭环控制相结合的一种控制方式(如图 1-4)。对于主要扰动采用适当的补偿装置实现按扰动控制,同时,再组成反馈系统实现按偏差控制,以消除其余扰动产生的偏差。复合控制方式常用于高精度的控制系统中,如火炮随动系统、飞机自动驾驶仪、人造卫星发射系统等。

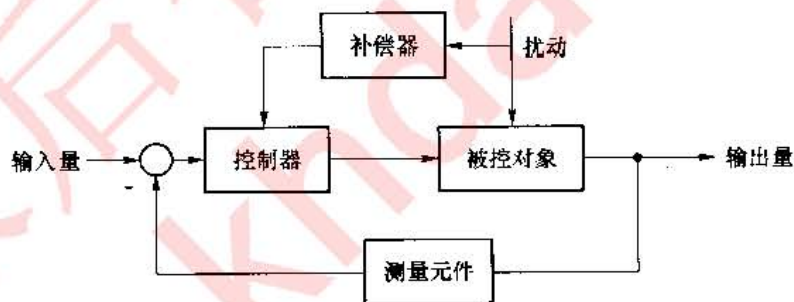


图 1-4 复合控制

## 1.3 自动控制系统的分类

自动控制系统有很多种分类方法。按系统性能可以分为:

### (1) 线性连续控制系统

这类系统可以用线性微分方程式描述,即

$$\begin{aligned}
 & a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d c(t)}{dt} + a_n c(t) \\
 & = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{d r(t)}{dt} + b_m r(t)
 \end{aligned}$$

式中:  $c(t)$  为被控量;  $r(t)$  为系统输入量。

系数  $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m$  若是常数时,称为定常系统;若随时间变化,称为时变系统。

线性定常连续系统按其输入量的变化规律又可分为：

- 恒值控制系统。参据量是一个常值,要求被控量也等于一个常值。这类系统分析、设计的重点是研究各种扰动对被控对象的影响以及抗扰动的措施。
- 随动系统(跟踪系统)。参据量是预先未知的随时间任意变化的函数,要求被控量以尽可能小的误差跟随参据量的变化。这类系统分析、设计的重点是研究被控量跟随的快速性和准确性。
- 程序控制系统。参据量是按预定规律随时间变化的函数,要求被控量迅速、准确地加以复现。

## (2) 线性定常离散控制系统

这类系统可以用差分方程式描述,即

$$\begin{aligned} & a_0 c(k+n) + a_1 c(k+n-1) + \cdots + a_{n-1} c(k+1) + a_n c(k) \\ & = b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \cdots + b_{m-1} r(k+1) + b_m r(k) \end{aligned}$$

式中:  $m \leq n$ ,  $n$  为差分方程的次数;系数  $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m$  为常系数;  $r(k), c(k)$  分别为输入和输出采样序列。

## (3) 非线性控制系统

至少存在一个元部件的输入/输出特性是非线性的元部件。譬如:

$$\dot{y}(t) + y(t) \dot{y}(t) + y^2(t) = r(t)$$

非线性方程的特点为:

- 系数与变量有关;
- 方程中含有变量及其导数的高次幂、乘积项或者方程中包含常数项。

## (4) 自动控制系统基本要求

可以归结为稳(稳定性)、快(快速性)、准(准确性)。

### ① 稳定性

1) 对恒值系统,要求当系统受到扰动后,经过一定时间的调整能够回到原来的期望值。

2) 对随动系统,被控制量始终跟踪参据量的变化。

稳定性是系统正常工作的前提,不稳定的系统不能实现预定任务。

稳定性通常由系统的结构决定,与外界因素无关。

### ② 快速性

对过渡过程的形式和快慢提出要求,一般称为动态性能。

例如稳定高射炮射角随动系统,虽然炮身最终能跟踪目标,但如果目标变动迅速,而炮身行动迟缓,仍然抓不住目标。

### ③ 准确性

在参考输入信号作用下,当系统达到稳态后,其稳态输出与参考输入所要求的期望输出之差,用稳态误差来表示。显然,这种误差越小,表示系统的输出跟随参考输入的精度越高。

## 习题解答

1.1 图 1-5 是液位自动控制系统原理的示意图。在任意情况下,希望液面高度  $C$  维持不变,试说明系统工作原理并画出系统方框图。

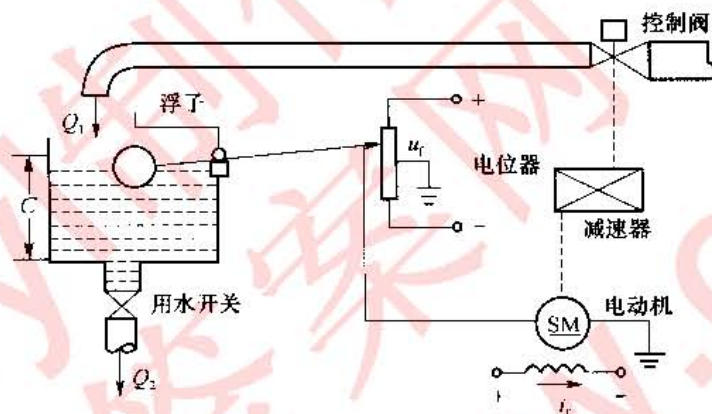


图 1-5 液位自动控制系统

解

首先确定系统被控对象是水箱,被控量(系统的输出量)是水箱的液位高度。当电位器电刷位于中点位置时,电动机输入电压为零,电动机保持不动,此时控制阀门有一定的开度,使水箱中留入水量与留出水量相等,从而液面保持在希望高度  $C$  上,一旦流入水量或流出水量发生变化,水箱的液面高度便相应地发生变化。例如,当液面升高时,浮子位置就相应地升高,通过杠杆作用使电位器电刷从中点位置下移,从而给发电机提供一定的控制电压,驱动电动机通过减速器减小阀门开度,使进入水箱的流量减少。此时,水箱液面下降,浮子位置也相应地下降,直到电位器电刷回到中点位置,系统重新处于平衡状态,液面恢复给定高度。反之,若水箱液位下降,则系统会自动增大阀门开度,加大流入水量,使液位回到给定高度  $C$ 。液位自动控制系统原理方框图如图 1-6 所示。

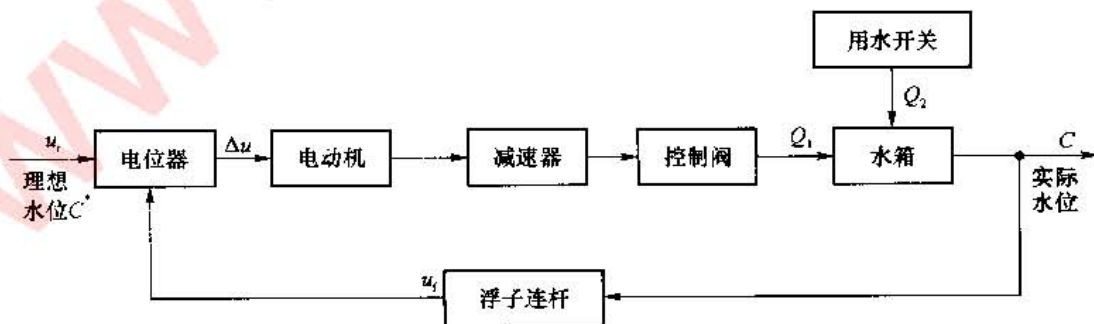


图 1-6 液位自动控制系统原理方框图

1.2 图 1-7(a)和(b)均为自动调压系统。设空载时,图(a)与图(b)的发电机端电压为 110 V。试问带上负载后,图(a)与图(b)中哪个系统能保持 110 V 电压不变? 哪个系统的电压会稍低于 110 V,为什么?

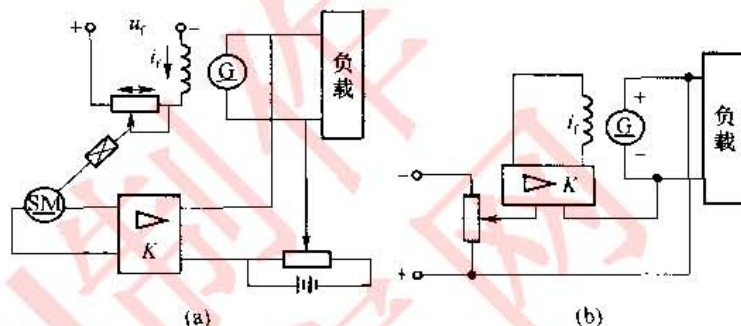


图 1-7 自动调压系统

解

对于图(a)中的自动调压系统,当发电机两端电压低于给定电压时,其偏差电压经放大器放大使执行电机 SM 转动,经减速器带动电刷,使发电机的激磁电流增大,发电机输出电压增大,从而偏差电压减小,直到偏差电压为零,执行电机才停止转动。因此,图(a)中的自动调压系统能保持端电压 110 V 不变。

对于图(b)中的自动调压系统,当发电机两端电压低于给定电压时,其偏差电压直接经放大器使发电机的激磁电流增大,发电机 G 的端电压回升,此时偏差电压减小,但偏差电压始终不能为零。因为当偏差电压为零时,激磁电流也为零,发电机不能工作。因此,图(b)的自动调压系统端电压会低于 110 V。

1.3 图 1-8 为水温控制系统示意图。冷水在热交换器中由通入的蒸气加热,从而得到一定温度的热水。冷水流量变化用流量计测量。试绘制系统方块图,并说明为了保持热水温度期望值,系统是如何工作的? 系统的被控对象和控制装置各是什么?

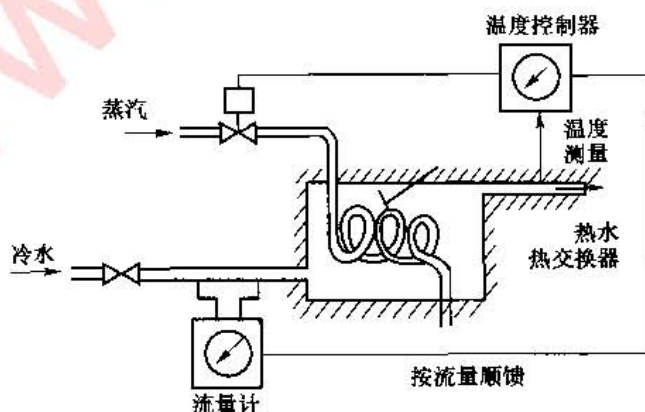


图 1-8 水温控制系统

解

水温控制系统的方框图如图 1-9 所示。



图 1-9 水温控制系统的方框图

系统是复合控制系统,它的控制方式是按偏差控制和按扰动控制结合起来。

采用温度负反馈,由温度控制器对热水温度进行自动控制。若热水温度过高,控制器使阀门关小,蒸汽量减小,热水温度回到给定值。冷水流量是主要扰动量,用流量计测量扰动信号,将其送到控制器输入端,进行扰动顺馈补偿。当冷水流量减少时,补偿量减少,通过温度控制器使阀门关小,蒸汽量减少,以保持热水温度恒定。

系统的被控对象是热交换器,被控量是热水温度,控制装置是温度控制器。

1.4 远距离操作的机器人手臂系统工作原理如图 1-10 所示,试简述其工作原理并画出系统方框图。

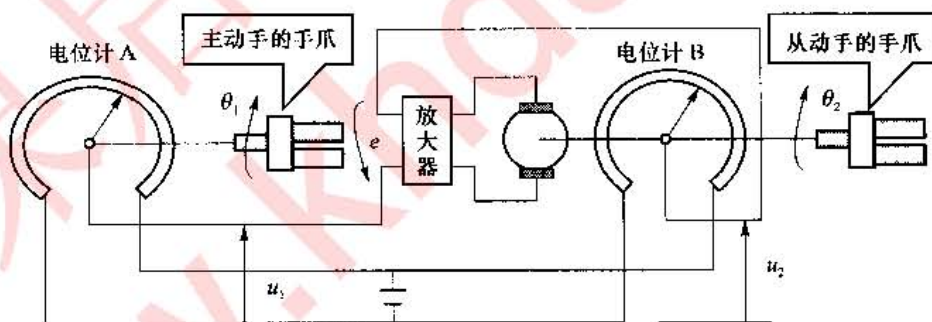


图 1-10 机器人手臂系统工作原理图

解

系统的任务是控制从动手的手爪角度  $\theta_2$  跟踪主动手的手爪角度  $\theta_1$ ,从动手的角位移是被控量,主动手的角位移是给定量,电位计 A 的作用是将主动手手爪的角度  $\theta_1$  转换成电压  $u_1$ ,电位计 B 的作用是将从动手手爪的角度  $\theta_2$  转换成电压  $u_2$ 。

当从动手手爪的角位移  $\theta_2$  与主动手手爪的角位移  $\theta_1$  相等时,  $u_1 = u_2$ , 环形电位计 A、B 组成的桥式电路处于平衡状态,输出电压  $e = 0$ ,电机不动。

当主动手手爪的角位移  $\theta_1$  变化,从动手手爪的角度  $\theta_2$  不等于  $\theta_1$  时,输出电压  $e$  被送到放大器,使直流伺服电机向误差角减小的方向运转。直到  $\theta_1 = \theta_2$  时,  $u_1 = u_2$ ,  $e = 0$ 。因此,从动手手爪的旋转角度几乎与主动手手爪的角度一致。

系统中的主动手手爪是给定元件,电位计 A、B 组成的电桥电路作为测量、比较元件,

电机和从动手手爪组成执行机构。系统方框图如图 1-11 所示。

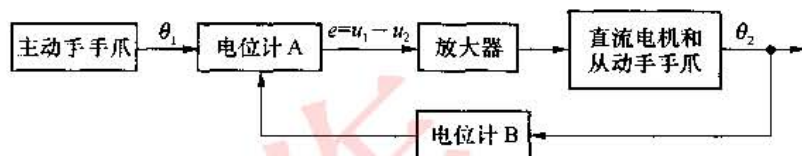


图 1-11 系统方框图

1.5 图 1-12 所示的为直流电动机双闭环调速系统的原理图。试画出该系统的方框图,并分析哪些装置起测量、比较、执行和校正等作用。

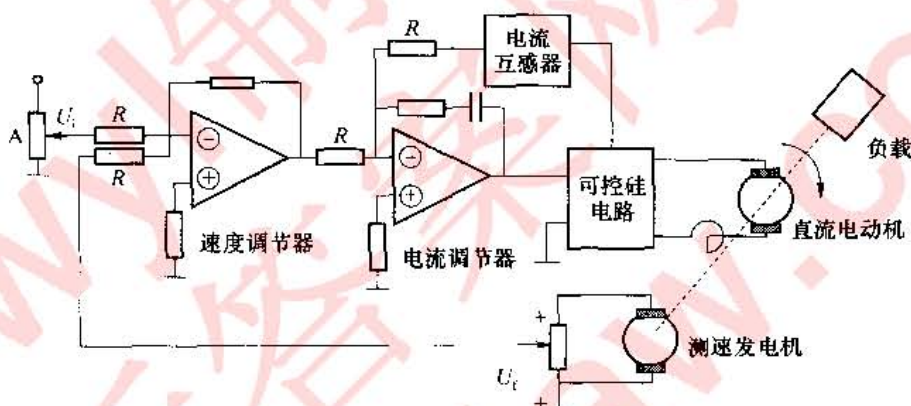


图 1-12 直流电动机双闭环调速系统的原理图

解

该系统除具有速度反馈(通常称为主反馈)外,还具有电流反馈(通常称为局部反馈)。可控硅电路的电流输出经电流互感器局部反馈,可控硅电路的电压输出加在直流电动机的电枢上,使电动机旋转,电动机输出转速经测速发电机形成主反馈。

电位器 A 输出作为系统给定量;电流互感器是电流反馈的检测元件,积分器是校正元件,电流调节器在电流反馈中起比较、放大作用;测速发电机是速度反馈的测量元件,它将电动机的转速转换为电压信号反馈到输入端,速度调节器起比较、放大作用。可控硅电路和直流电动机是执行机构。其方框图如图 1-13 所示。

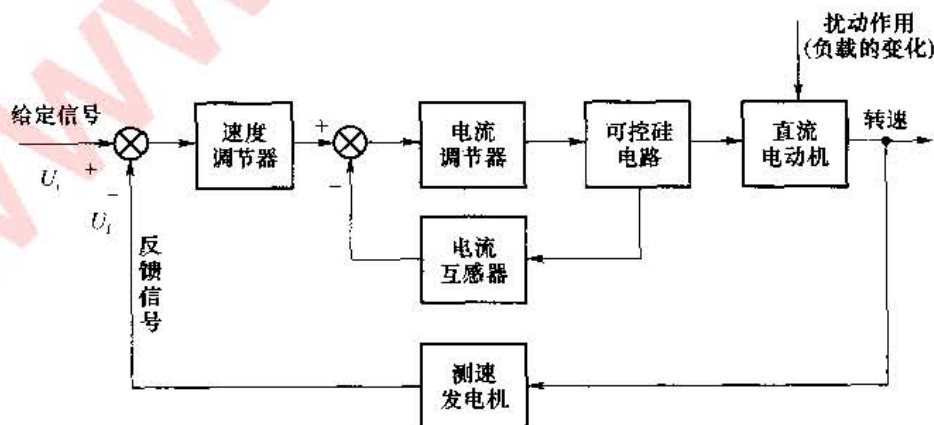


图 1-13 直流电动机双闭环调速系统方框图

1.6 图 1-14 是电炉控制系统原理示意图。试分析系统保持电路温度恒定的工作过程,指出系统的被控对象、被控量以及各部件的作用,最后画出系统的方框图。

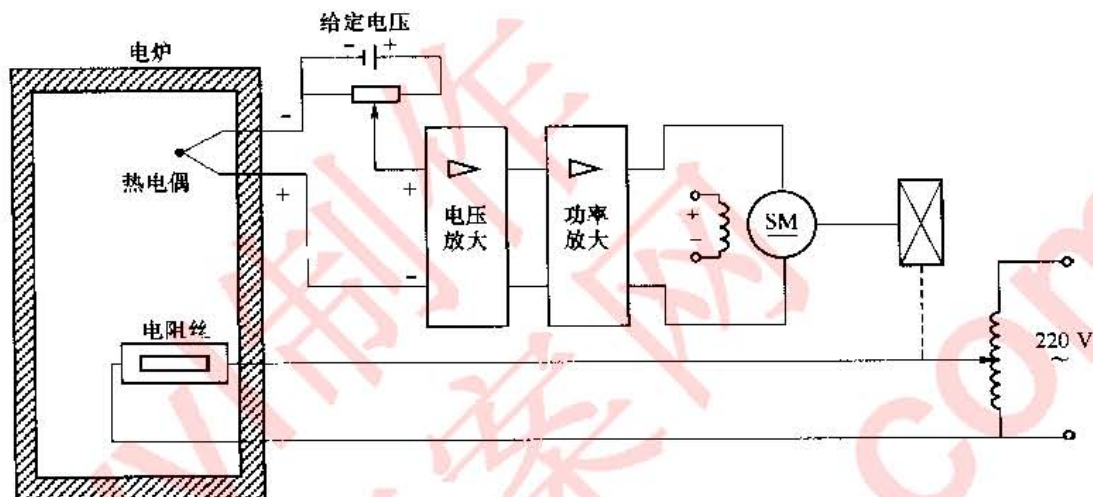


图 1-14 电炉控制系统原理图

解

电炉使用电阻丝加热,并要求保持炉温恒定。图 1-14 中采用热电偶测量炉温并将其转化为电压信号,将此电压信号反馈到输入端与给定电压比较,测量得到的电压信号与给定电压信号反极性连接,实现负反馈。两者的差值称为偏差电压,它经电压放大和功率放大后驱动直流电动机。电动机经减速器带动调压变压器的滑动触头,改变电阻丝的供电电压,从而调节炉温。

譬如,当炉温偏低时,测量电压小于给定电压,两者比较得到偏差电压,偏差电压为正时,电动机“正”转,使调节器的滑动触头上移,电阻丝的供电电压增大,电流加大,炉温上升,直至炉温升至给定值为止,电动机停止转动,炉温保持恒定。

系统的被控对象是电炉,被控量是电炉温度,电动机、减速器、调压器是执行机构,热电偶是检测元件。

电炉温度控制系统的方框图如图 1-15 所示。

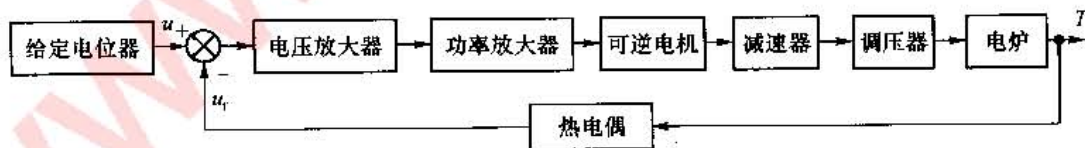


图 1-15 电炉温度控制系统的方框图

1.7 图 1-16 是自整角机随动系统原理示意图。系统的功能是使接收自整角机 TR 的转子角位移  $\theta_r$  与发送自整角机 TX 的转子角位移  $\theta_t$  始终保持一致。试说明系统是如何工作的,并指出被控对象、被控量以及控制装置各部件的作用并画出系统方框图。

解

发送自整角机的转子与给定轴相连;接收自整角机的转子与负载轴(从动轴)相连。TX 与 TR 组成角差测量线路。若发送自整角机的转子离开平衡位置转过一个角度  $\theta_t$ ,

则在接收自整角机转子的单相绕组上将感应出一个偏差电压  $u_e$ ，它是一个振幅为  $u_{em}$ ，频率与发送自整角机激磁频率相同的交流调幅电压，即

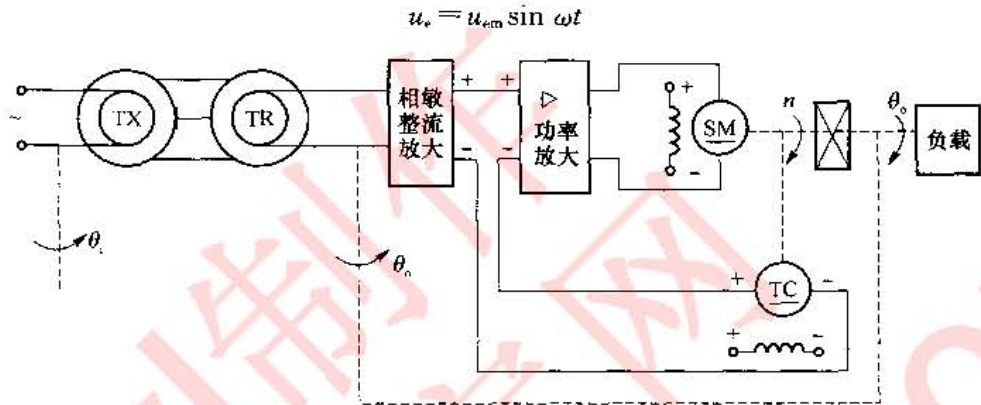


图 1-16 自整角机随动系统原理图

在一定范围内， $u_{em}$  正比于  $\theta_i - \theta_o$ ，即

$$u_{em} = K_e [\theta_i - \theta_o]$$

所以可得

$$u_e = K_e [\theta_i - \theta_o] \sin \omega t$$

$u_e$  先经过相敏整流放大器变为直流电压，再经过功率放大器放大，放大后的直流信号作用在电动机电枢两端。电动机通过减速器带动负载和接收自整角机的转子，使其跟随发送自整角机的转子旋转，实现  $\theta_i = \theta_o$ ，以达到跟随的目的。为了使电动机转速恒定、平稳，引入了测速负反馈。

系统的被控对象是负载轴，被控量是负载轴转角  $\theta_o$ ，电动机和减速器是执行机构。相敏整流放大器及功率放大器起放大信号的作用，测速发电机是检测反馈元件。

自整角机随动系统的方框图如图 1-17 所示。



图 1-17 自整角机随动系统的方框图

**1.8** 在按扰动控制的开环控制系统中，为什么说一种补偿装置只能补偿一种与之相应的扰动因素？对于图 1-18 中的按扰动控制的速度控制系统，当电动机的激磁电压变化时，转速如何变化？改补偿装置能否补偿这个转速的变化？

**解**

按扰动控制的开环控制系统，是对于可测量的扰动产生一种补偿作用，以减少或抵消扰动对输出量的影响。显然，这种控制方式是直接从扰动获取信息，并以此改变被控量，所以它只适用于扰动是可测量的场合，而且一个补偿装置只能补偿一种扰动因素，对其余扰动均不起补偿作用。

如图 1-18 中按电枢电流进行控制的速度控制系统,当电动机的激磁电压增大时,电动机的转速上升;当电动机的激磁电压减小时,电动机的转速下降。这种补偿装置不能补偿由激磁电压变化引起的转速变化。

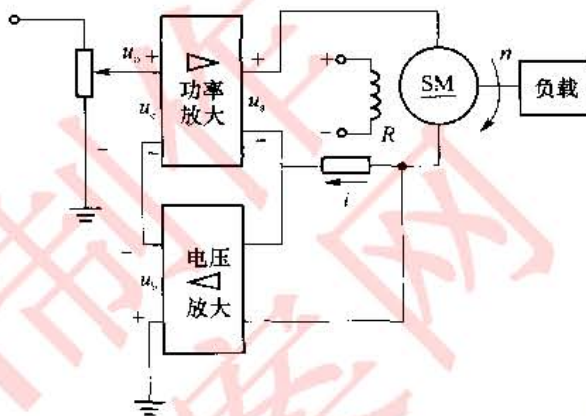


图 1-18 按扰动控制系统的速度控制系统

1.9 下列各式是描述系统的微分方程,其中  $c(t)$  为输出量,  $r(t)$  为输入量,试判断哪些是线性定常系统或时变系统,哪些是非线性系统。

$$(1) c(t) = 5 + r^2(t) + t \frac{d^2 r(t)}{dt^2}$$

$$(2) \frac{d^3 c(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 6 \frac{dc(t)}{dt} + 8c(t) = r(t)$$

$$(3) t \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) + 3 \frac{dr(t)}{dt}$$

$$(4) c(t) = r(t) \cos \omega t + 5$$

$$(5) c(t) = 3r(t) + 6 \frac{dr(t)}{dt} + 5 \int_{-\infty}^t r(\tau) d\tau$$

$$(6) c(t) = r^2(t)$$

$$(7) c(t) = \begin{cases} 0, & t < 6 \\ r(t), & t \geq 6 \end{cases}$$

解

(1) 非线性系统;(2) 线性定常系统;(3) 线性时变系统;(4) 非线性系统;(5) 线性定常系统;(6) 非线性系统;(7) 线性时变系统。

## 第 2 章 控制系统的数学模型

### 2.1 数学模型

#### 1. 数学模型的概念

控制系统的数学模型是描述系统内部物理量(或变量)之间关系的数学表达式。

##### (1) 静态数学模型

静态数学模型,即在静态条件下,描述变量之间关系的代数方程。静态条件,即变量各阶导数为零,如直流电路方程,直流电压,直流电流等。

##### (2) 动态数学模型

动态数学模型,即描述变量各阶导数之间关系的微分方程。

#### 2. 建立控制系统数学模型的方法

##### (1) 解析法

根据具体待处理系统所服从的运动规律,运用适当的数学工具分别列写相应的运动方程。

##### (2) 实验法

在系统内部关系十分复杂时,为了某特定目的,可以通过实验手段,测量该系统的输入输出量,然后运用“系统辨识”方法构建一个近似的数学模型。

#### 3. 建立控制系统数学模型的工具

常用的数学工具有微分方程、传递函数、结构图、信号流图、频率特性以及状态空间描述等。其中,结构图和信号流图是描述系统各元部件之间的信号传递关系的一种图形化表示,特别对于复杂控制系统的信号传递过程给出了一种直观的描述。对同一个系统来说,不同的数学模型之间应该可以相互转换。

### 2.2 微分方程

微分方程是描述自动控制系统动态特性的最基本模型。

#### 1. 用解析法建立系统微分方程的步骤

(1) 由系统原理图画系统方框图或直接确定系统中各个基本部件(元件),确定系统的输入、输出变量。

(2) 列写各方框图的输入/输出之间的微分方程,要注意前后连接的两个元件中,后级元件对前级元件的负载效应。

(3) 消去中间变量,得到系统的微分方程。

## 2. 线性定常微分方程求解方法

(1) 直接求解法:  $n$  阶线性定常微分方程的解可以分为通解和特解。通解由齐次方程的特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  所决定。称  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  为该微分方程的运动模态(当  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为不相等的实根);若  $\lambda_i = \lambda_j$  (重根)时,相应自由运动的模态为  $e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}$ ;若  $\lambda_{i,j} = \delta \pm j\omega$  (复根)时,对应的运动模态为  $e^{\delta t} \sin \omega t, e^{\delta t} \cos \omega t$ 。

(2) 变换域求解法: 拉普拉斯变换方法。

## 2.3 传递函数

设线性定常系统由  $n$  阶线性定常微分方程描述,即

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d c(t)}{dt} + a_n c(t) \\ = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d r(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned}$$

在零初始条件下,系统的输出量  $c(t)$  的拉普拉斯变换与输入量  $r(t)$  的拉普拉斯变换之比,即

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

可表征控制系统的动态性能,并用以求出在给定输入量时系统的零初始条件响应。

### 1. 传递函数的性质

- 因果系统的传递函数是  $s$  的有理真分式函数,具有复变函数的性质;
- 传递函数取决于系统或元件的结构和参数,与输入信号的形式无关;
- 传递函数与微分方程可相互转换  $\frac{d}{dt} = p, p \Leftrightarrow s$ ;
- 传递函数的拉普拉斯反变换是系统的脉冲响应。

### 2. 传递函数的两种形式

(1) 首 1 型

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} \\ &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \\ &= \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \\ &= K^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \end{aligned}$$

式中,  $z_i$  称为零点,  $p_j$  称为极点,  $K^* = b_0/a_0$  称为传递系数或根轨迹增益。

## (2) 尾 1 型

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$
$$= \frac{b_m (\tau_1 s + 1)(\tau_2^2 s^2 + 2\zeta_2 \tau_2 s + 1) \cdots (\tau_i s + 1)}{a_n (T_1 s + 1)(T_2^2 s^2 + 2\zeta_2 T_2 s + 1) \cdots (T_j s + 1)}$$

$$K = \frac{b_m}{a_n} = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} \quad \text{称为传递系数或增益。}$$

## 2.4 结构图

系统结构图一般由 4 个基本单元组成：信号线、引出点（或测量点）、比较点（或信号综合点）、方框（或环节）。

### 1. 绘制系统结构图基本步骤

- 分别列写各元部件的运动方程，并在零初始条件下进行拉普拉斯变换；
- 根据各元部件在系统中的工作关系，确定其输入量和输出量，并按照各自的运动方程画出每个元部件的方框图；
- 用信号线按信号流向依次将各元部件的方框连接起来。

### 2. 结构图的等效变换和简化

任何复杂的系统结构图，各方框之间的基本连接方式只有串联、并联和反馈连接 3 种。方框结构图的简化是通过移动引出点、比较点，交换比较点，进行方框运算后，将串联、并联和反馈连接的方框合并。

## 2.5 信号流图

### 1. 基本概念

信号流图是利用图示法来描述一个或一组线性代数方程式，由节点和支路组成的一种信号传递网络。

**节点：**表示方程式中的变量。

**支路：**连接两个节点的定向线段，用支路增益表示方程式中两个变量的因果关系。支路相当于乘法器。

信号在支路上，只能沿箭头单向传递。对于给定的系统，节点变量的设置是任意的。因此，信号流图不唯一。

- 源节点：输入节点；
- 阱节点：输出节点；
- 混合节点：若从混合节点引出一条具有单位增益的支路可将混合节点变为阱节点，称为系统的输出变量；
- 前向通路：信号从输入节点到输出节点传递时，每个节点只通过一次的通路，前向通路上各支路增益之乘积，称为前向通道增益，用  $P_k$  表示；

- 回路：起点和终点同在一个节点上，而且信号通过每个节点不多于一次的闭合通路；
- 不接触回路：回路之间没有公共节点时，该回路称为不接触回路。

## 2. 信号流图的绘制

- 由微分方程绘制信号流图：首先要对系统的每个变量指定一个节点，并按照系统中变量的因果关系，从左向右顺序排列，再用标明支路增益的支路，根据数学方程式将各节点变量正确连接；
- 由系统结构图绘制信号流图：在结构图的信号线上用节点标志所传递的信号，用支路代替结构图中的方框。

## 2.6 梅森增益公式

梅森(MASON)增益公式可以直接从系统的结构图或信号流图得到系统输出量与输入量之间的传递函数。

设系统的传递函数为  $P$ ，则梅森增益公式为

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n p_k \Delta_k$$

其中， $n$  为从源点到阱点的前向通路总数， $p_k$  为从源点到阱点的第  $k$  条前向通路增益，

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$$

称为流图特征式。

这里： $\sum L_a$  是所有单独回路之和； $\sum L_b L_c$  表示二二不接触回路增益的乘积之和； $\sum L_d L_e L_f$  表示三三不接触回路增益的乘积之和。 $\Delta_k$  称为流图余因子，等于流图特征式  $\Delta$  中去掉所有包含与第  $k$  条前向通道相接触的回路增益项后的剩余部分。

## 习题解答

2.1 在图 2-1 的液位自动控制系统中，设容器横截面积为  $A$ ，希望液位为  $c_0$ ，若液体高度变化率与液体流量差  $Q_1 - Q_2$  成正比，试列写以液位为输出量的微分方程式。

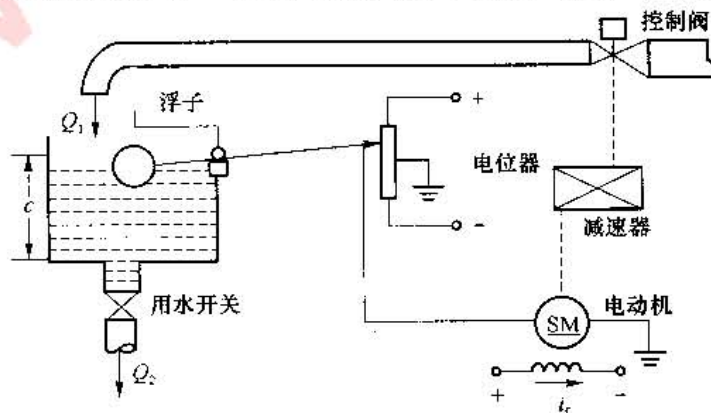


图 2-1 液位自动控制系统

解

当  $Q_1 = Q_2$  时, 液位的高度为  $c_0$ , 当  $Q_1 \neq Q_2$  时, 液位的高度  $c$  将发生变化。由于液体高度变化率与液体流量差  $Q_1 - Q_2$  成正比, 所以有

$$A \frac{dc}{dt} = Q_1 - Q_2$$

即

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{A} (Q_1 - Q_2)$$

2.2 试证明图 2-2(a) 的电网络与 (b) 的机械系统有相同的数学模型。

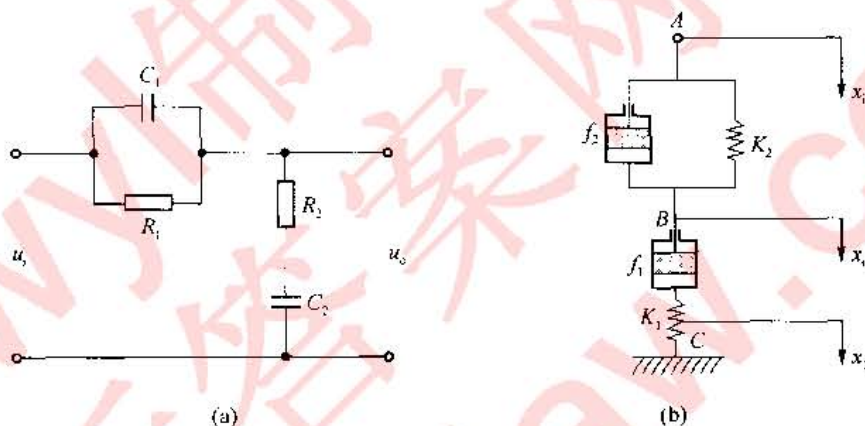


图 2-2 电网络与机械系统

解

对于图 2-2(a) 所示系统, 利用复数阻抗的方法可有

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} &= \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s} + (R_2 + \frac{1}{C_2 s})} \\ &= \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2) s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1} \end{aligned}$$

对于图 2-2(b) 所示系统, 引入中间变量 C 点, 并设图中 A, B, C 点的位移分别是  $x_i, x_o, x_1$ 。根据牛顿第二运动定律, 可知对于 B, C 点分别有

$$B \text{ 点: } K_2(x_i - x_o) + f_2(x_i - x_o)' = f_1(x_o - x_1)' \quad (1)$$

$$C \text{ 点: } K_1 x_1 = f_1(x_o - x_1)' \quad (2)$$

对等式(1)两边同时作拉氏变换, 则有

$$\begin{aligned} K_1 X_1(s) &= f_1 s X_o(s) - f_1 s X_1(s) \\ X_1(s) &= \frac{f_1 s}{K_1 + f_1 s} X_o(s) \end{aligned} \quad (3)$$

对等式(2)两边同时作拉氏变换, 则有

$$K_2 X_i(s) - K_2 X_o(s) + f_2 s X_i(s) - f_2 s X_o(s) = f_1 s X_o(s) - f_1 s X_1(s)$$

又由式(3)可得

$$(K_2 + f_2 s) X_i(s) = \left[ f_2 s + K_2 + \frac{K_1 f_1 s}{K_1 + f_1 s} \right] X_o(s)$$

$$G_b(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{f_1 f_2 s^2 + (K_2 f_1 + K_1 f_2) s + K_1 K_2}{f_1 f_2 s^2 + (K_2 f_1 + K_1 f_2 + K_1 f_1) s + K_1 K_2}$$

通过比较  $G_a(s)$ ,  $G_b(s)$  可知:  $G_a(s)$ ,  $G_b(s)$  两个传递函数的类型相同, 即两个系统具有相同的数学模型。

2.3 试分别写出图 2-3 中各无源网络的微分方程。

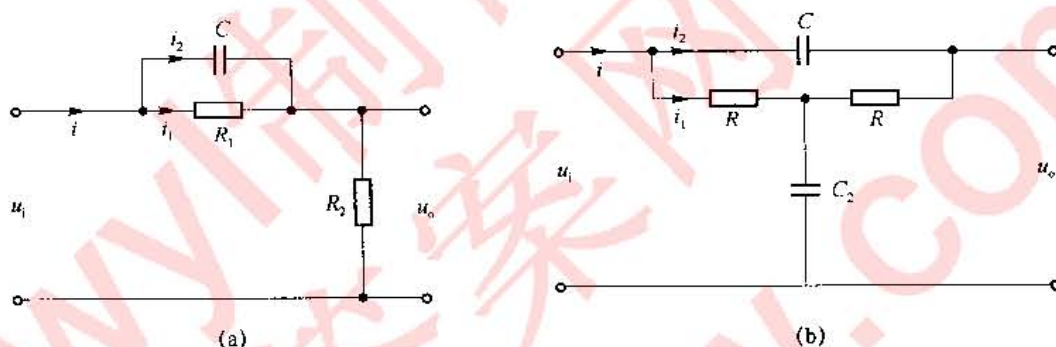


图 2-3 无源网络

解

对于图 2-3(a) 所示的无源网络, 根据电压平衡方程式可得

$$\begin{cases} R_1 i_1 = \frac{1}{C} \int i_2 dt \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} u_o = R_2 i \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_i = R_1 i_1 + u_o \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{由式(1)得} \quad i_2 = R_1 C \frac{di_1}{dt} \quad (5)$$

$$\text{将式(5)代入式(2)可得} \quad i = i_1 + R_1 C \frac{di_1}{dt} \quad (6)$$

$$\text{又由式(4)得} \quad i_1 = \frac{u_i - u_o}{R_1}$$

将  $i_1$  代入式(6), 再代入式(3)可得

$$u_o = R_2 \left[ \frac{u_i - u_o}{R_1} + R_1 C \frac{1}{R_1} \frac{d(u_i - u_o)}{dt} \right]$$

整理可得图 2-3(a) 所示无源网络的微分方程式

$$R_1 R_2 C \frac{du_o}{dt} + (R_1 + R_2) u_o = R_1 R_2 C \frac{du_i}{dt} + R_2 u_i$$

所以此系统为一阶系统。

对于图 2-3(b) 所示的无源网络, 根据电压平衡方程式可得

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} Ri_1 = Ri_2 + \frac{1}{C_1} \int i_2 dt \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{C_1} \int i_2 dt + u_o \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} u_o = Ri_2 + \frac{1}{C_2} \int i dt \end{cases} \quad (10)$$

由式(9)得

$$i_2 = C_1 \left( \frac{du_i}{dt} - \frac{du_o}{dt} \right) \quad (11)$$

由式(8)得

$$i_1 = i_2 + \frac{1}{RC_1} \int i_2 dt \quad (12)$$

将式(12)代入式(7)可得

$$i = i_1 + i_2 = 2i_2 + \frac{1}{RC_1} \int i_2 dt \quad (13)$$

又由式(10)可得

$$\frac{du_o}{dt} = R \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i = RC_1 \left( \frac{d^2 u_i}{dt^2} - \frac{d^2 u_o}{dt^2} \right) + \frac{2C_1}{C_2} \left( \frac{du_i}{dt} - \frac{du_o}{dt} \right) + \frac{1}{RC_1 C_2} C_1 (u_i - u_o)$$

整理可得图 2-3(b)所示无源网络的微分方程式:

$$R^2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o}{dt^2} + R(2C_1 + C_2) \frac{du_o}{dt} + u_o = R^2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i}{dt^2} + 2RC_1 \frac{du_i}{dt} + u_i$$

所以此系统为二阶系统。

**2.4** 设初始条件为零,试用拉氏变换法求解下列微分方程式,并概略绘制  $x(t)$  曲线,指出各方程的模式。

$$(1) 2\dot{x}(t) + x(t) = t$$

$$(2) \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \delta(t)$$

$$(3) \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 1(t)$$

**解**

(1) 将等式两边作拉氏变换,可得

$$X(s) = \frac{1}{s^2(2s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+0.5}$$

对上式作拉氏反变换,可得  $x(t) = t - 2 + 2e^{-0.5t}$

$x(t)$  的曲线如图 2-4(a)所示。

由  $x(t)$  的表达式易得系统的特征根为

$$\lambda = -0.5$$

故该方程的运动模式为  $e^{-0.5t}$ 。

(2) 将等式两边作拉氏变换,可得

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}/2}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

对上式作拉氏反变换,可得

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$x(t)$  的曲线如图 2-4(b) 所示。

由  $x(t)$  的表达式易得系统的特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故该方程的运动模态为  $e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$ 。

(3) 将等式两边作拉氏变换,可得

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

对上式作拉氏反变换,可得

$$x(t) = 1 - te^{-t} - e^{-t}$$

$x(t)$  的曲线如图 2-4(c) 所示。

由  $x(t)$  的表达式易得系统的特征根为

$$\lambda_{1,2} = -1$$

故该方程的运动模态为  $te^{-t}, e^{-t}$ 。

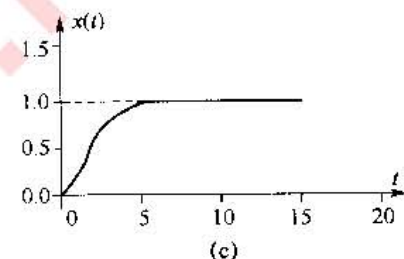
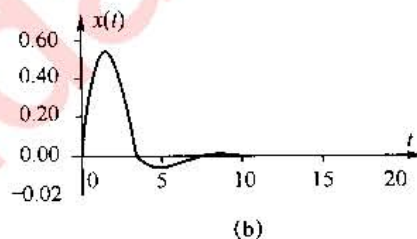
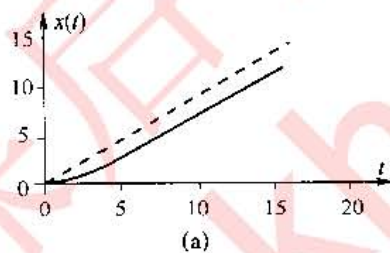


图 2-4  $x(t)$  的曲线图

**2.5** 若某系统在输入阶跃信号  $r(t) = 1(t)$  时,零初始条件下的输出响应  $c(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}$ ,试求系统的传递函数和脉冲响应。

**解**

$$r(t) = 1(t), \quad \text{则 } R(s) = \frac{1}{s}$$

对  $c(t)$  表达式取拉氏变换,得到系统的输出量为

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+1)(s+2)}$$

根据传递函数定义

$$G(s) = \frac{C(s)}{G(s)} = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

系统的脉冲响应为

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[1 - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right] = \delta(t) - e^{-t} + 2e^{-2t}$$

2.6 设系统传递函数为  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$ , 初始条件  $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$ , 试求阶跃输入  $r(t) = 1(t)$  时, 系统的输出响应  $c(t)$ 。

解

该题有两种解法。

方法(一): 时域求解

由传递函数可得系统的特征方程为

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

则  $s_1 = -1, s_2 = -2$ 。所以, 零输入响应可表示为

$$c_{zs}(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

把  $c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0$  代入得  $A = -2, B = 1$ 。

$$c_{zs}(t) = -2e^{-t} + e^{-2t}$$

而零状态响应

$$\begin{aligned} c_{zt}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[c(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{-2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right] \\ &= 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \\ c(t) &= c_{zs} + c_{zt} = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} \end{aligned}$$

方法(二): 频域求解

根据  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$ , 得到相应的微分方程为

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 3 \frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 2r(t)$$

考虑初始条件, 两边取拉氏变换, 得

$$s^2 C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) + 3[sC(s) - c(0)] + 2C(s) = \frac{2}{s}$$

$$C(s) = \frac{\frac{2}{s} + sc(0) + 3c(0) + \dot{c}(0)}{s^2 + 3s + 2}$$

再作拉氏反变换, 得到

$$c(t) = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

2.7 在图 2-5 中, 已知  $G(s)$  和  $H(s)$  两方框相对应的微分方程分别是

$$6 \frac{dc(t)}{dt} + 10c(t) = 20e(t)$$

$$20 \frac{db(t)}{dt} + 5b(t) = 10c(t)$$

且初始条件均为零,试求传递函数  $C(s)/R(s)$  及  $E(s)/R(s)$ 。

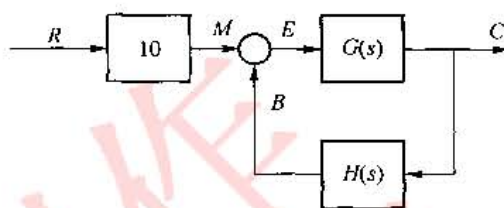


图 2-5 系统结构图

解

对微分方程两边同时作拉氏变换,已知初始条件均为零,所以有

$$\begin{cases} 6sC(s) + 10C(s) = 20E(s) \\ 20sB(s) + 5B(s) = 10C(s) \end{cases}$$

由上式可得

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{20}{6s+10} = \frac{10}{3s+5}$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{C(s)} = \frac{10}{20s+5} = \frac{2}{4s+1}$$

又由图 2-5 可得

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

将  $G(s)$ 、 $H(s)$  的表达式代入上式,可得

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10 \times \frac{10}{3s+5}}{1 + \frac{10}{3s+5} \times \frac{2}{4s+1}} = \frac{100(4s+1)}{12s^2+23s+25}$$

$$E(s) = 10R(s) - H(s)C(s) = [10 - H(s)\Phi(s)]R(s)$$

故

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 10 - H(s)\Phi(s) = 10 - \frac{2}{4s+1} \times \frac{100(4s+1)}{12s^2+23s+25} = \frac{10(12s^2+23s+5)}{12s^2+23s+25}$$

所以,传递函数  $C(s)/R(s)$ 、 $E(s)/R(s)$  分别为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{100(4s+1)}{12s^2+23s+25}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{10(12s^2+23s+5)}{12s^2+23s+25}$$

**2.8** 试参照配套课本 21 页例 2.2 给出的电枢控制直流电动机的三组微分方程式,画出直流电动机的结构图,并由结构图等效变换求出电动机的传递函数  $\Omega_m(s)/U_a(s)$  和  $\Omega_m(s)/M_c(s)$ 。

解

由

$$u_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a$$

$$E_a = C_e \Omega_m(t)$$

可得

$$U_a(s) = L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) + E_a = (L_a s + R_a) I_a(s) + C_e \Omega_m(s) \quad (1)$$

由  
可得

$$\begin{aligned} M_m(t) &= C_m i_a(t) \\ M_m(s) &= C_m I_a(s) \end{aligned} \quad (2)$$

由  
得

$$\begin{aligned} J_m \frac{d\Omega_m(t)}{dt} + f_m \Omega_m(t) &= M_m(t) - M_c(t) \\ J_m s \Omega_m(s) + f_m \Omega_m(s) &= M_m(s) - M_c(s) \\ (J_m s + f_m) \Omega_m(s) &= M_m(s) - M_c(s) \end{aligned} \quad (3)$$

由式(1)、(2)、(3),可得到系统结构图如图 2-6 所示。

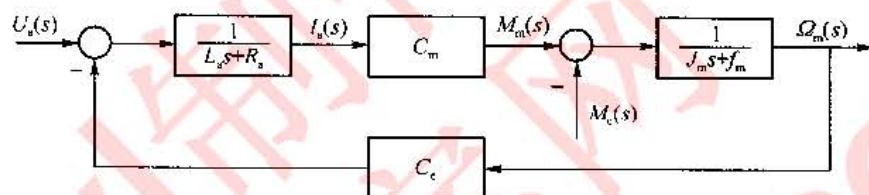


图 2-6 系统结构图

由结构图求出

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)} &= \frac{1}{L_a s + R_a} C_m \frac{1}{J_m s + f_m} \\ &= \frac{C_m}{1 + \frac{1}{J_m s + f_m} C_m C_e} \\ &= \frac{C_m}{L_a J_m s^2 + (L_a f_m + R_a J_m) s + R_a f_m + C_m C_e} \\ \frac{\Omega_m(s)}{M_c(s)} &= - \frac{\frac{1}{J_m s + f_m}}{1 + \frac{1}{J_m s + f_m} C_m C_e} \\ &= - \frac{L_a s + R_a}{L_a J_m s^2 + (L_a f_m + R_a J_m) s + R_a f_m + C_m C_e} \end{aligned}$$

2.9 某位置随动系统原理图如图 2-7 所示。已知电位器最大工作角度  $\theta_m = 330^\circ$ , 功率放大器放大系数为  $K_3$ , 要求:

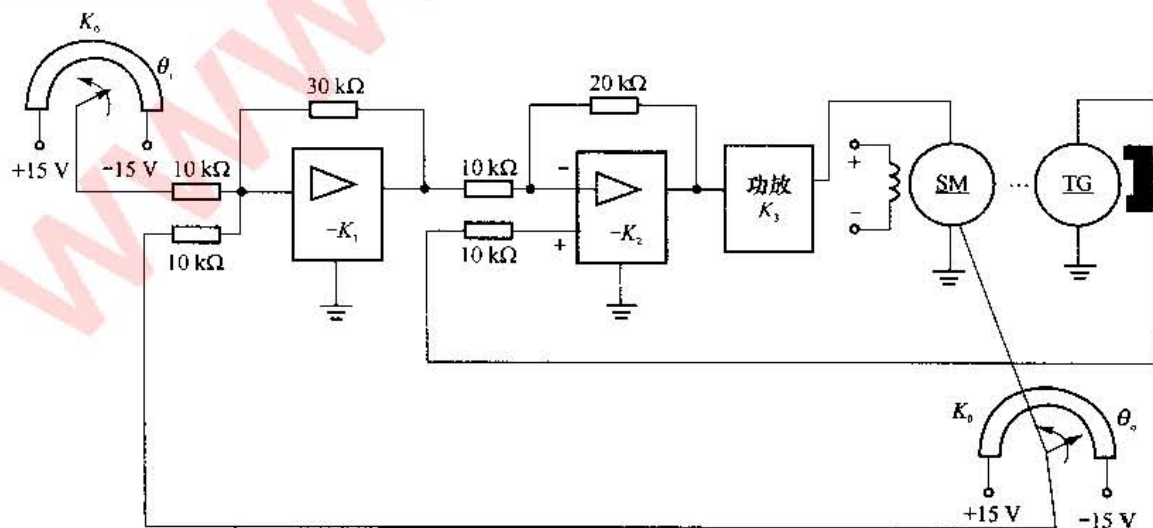


图 2-7 位置随动系统原理图

- (1) 分别求出电位器传递函数  $K_0$ , 第一级和第二级放大器的比例系数  $K_1$  和  $K_2$ ;
- (2) 画出系统结构图;
- (3) 简化结构图, 求系统传递函数  $\Theta_o(s)/\Theta_i(s)$ 。

解

$$(1) K_0 = \frac{E}{\theta_m} = \frac{30}{330^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}} = \frac{180}{11\pi} \text{ V/rad}$$

$$K_1 = \frac{-30 \times 10^3}{10 \times 10^3} = -3$$

$$K_2 = \frac{-20 \times 10^3}{10 \times 10^3} = -2$$

(2) 假设电动机的时间常数为  $T_m$ , 可得直流电动机的传递函数为(忽略电枢电感的影响)

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{T_m s + 1}$$

其中  $K_m$  为直流电动机的传递系数。

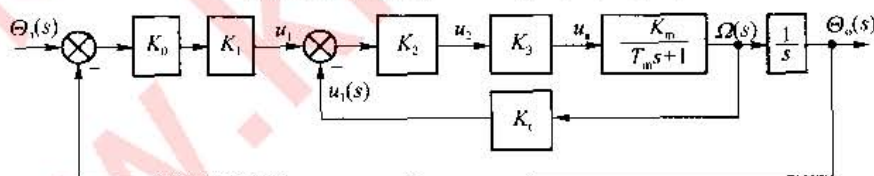
假设测速发电机的斜率为  $K_t$ , 则其传递函数为

$$\frac{U_t(s)}{\Omega(s)} = K_t$$

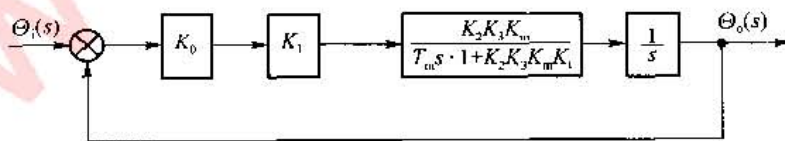
由此可得系统的结构图如图 2-8(a) 所示。

(4) 位置随动系统结构图的简化图如图 2-8(b) 所示。由图 2-8 可得系统的传递函数为

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{\frac{T_m}{K_0 K_1 K_2 K_3 K_m} s^2 + \frac{1 + K_2 K_3 K_m K_t}{K_0 K_1 K_2 K_3 K_m} s + 1}$$



(a)



(b)

图 2-8 位置随动系统结构图及其简化图

**2.10** 设直流电动机双闭环调速系统的原理线路如图 2-9 所示, 要求:

- (1) 分别求速度调节器和电流调节器的传递函数;
- (2) 画出系统结构图(设可控硅电路传递函数为  $K_3/(\tau_3 s + 1)$ ; 电流互感器和测速发电机的传递函数分别为  $K_4$  和  $K_5$ ; 直流电动机的结构图用题 2-8 的结果);

(3) 简化结构图,求系统传递函数  $\Omega(s)/U_i(s)$ 。

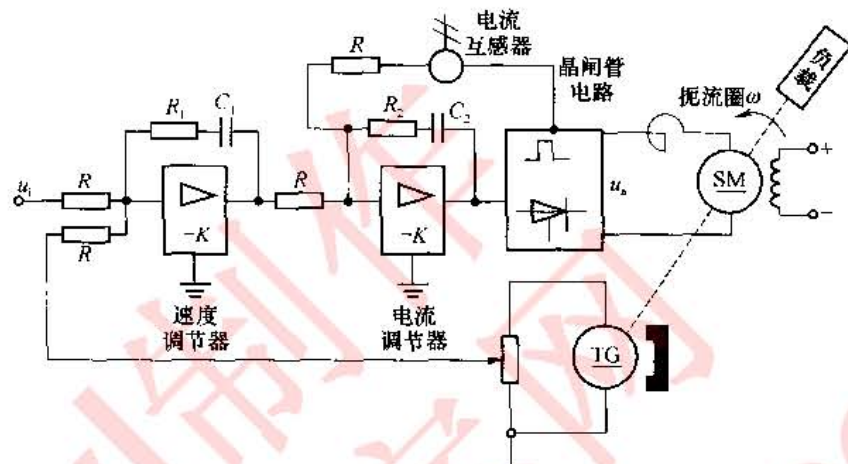


图 2-9 直流电动机双闭环调速系统原理线路

解

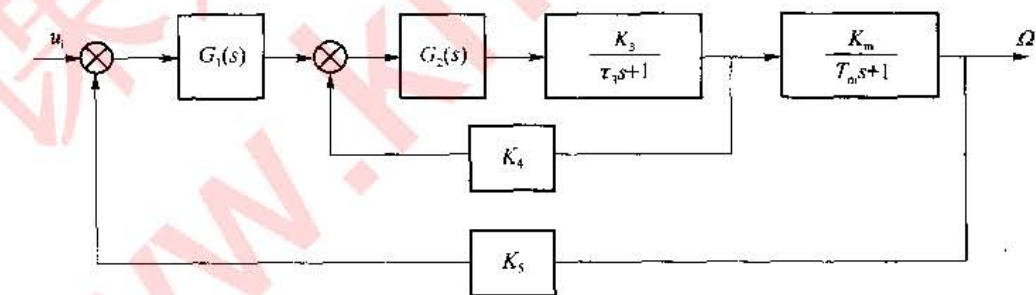
(1) 速度调节器的传递函数为

$$G_1(s) = -\frac{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{R} = -\left(\frac{R_1}{R} + \frac{1}{RC_1 s}\right)$$

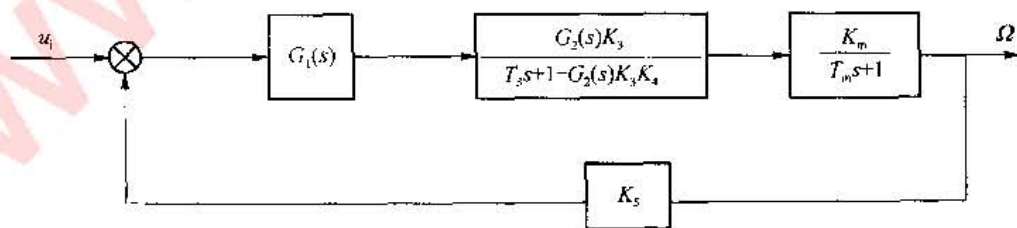
电流调节器的传递函数为

$$G_2(s) = -\frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R} = -\left(\frac{R_2}{R} + \frac{1}{RC_2 s}\right)$$

(2) 直流电动机调速系统的结构图如图 2-10(a)所示。



(a)



(b)

图 2-10 直流电动机调速系统的结构图及其简化图

(3) 直流电动机调速系统的结构图的简化图如图 2-10(b) 所示, 由结构图可知, 系统的传递函数为

$$\frac{\Omega(s)}{U_i(s)} = \frac{K(\tau_2 s^2 + \tau_1 s + 1)}{T_4 s^4 + T_3 s^3 + T_2 s^2 + T_1 s + 1}$$

其中

$$K = \frac{1}{K_5}, \tau_1 = C_1 R_1 + C_2 R_2, \tau_2 = C_2 C_2 R_1 R_2$$

$$T_1 = \frac{K_4(RC_1 + R_1 C_1 K_m + R_2 C_2 K_m)}{K_5 K_m}$$

$$T_2 = \frac{R_2^2 C_1 C_2 + K_3 K_4 R C_1 (T_m + C_2 R_2) + K_3 K_5 K_m C_1 C_2 R_1 R_2}{K_3 K_5 K_m}$$

$$T_3 = \frac{R C_1 C_2 (R \tau_3 + R T_m + K_3 K_4 T_m R_2)}{K_3 K_5 K_m}$$

$$T_4 = \frac{R^2 C_1 C_2 T_m \tau_3}{K_3 K_5 K_m}$$

2.11 已知控制系统结构图如图 2-11 所示。试通过结构图等效变换求系统传递函数  $C(s)/R(s)$ 。

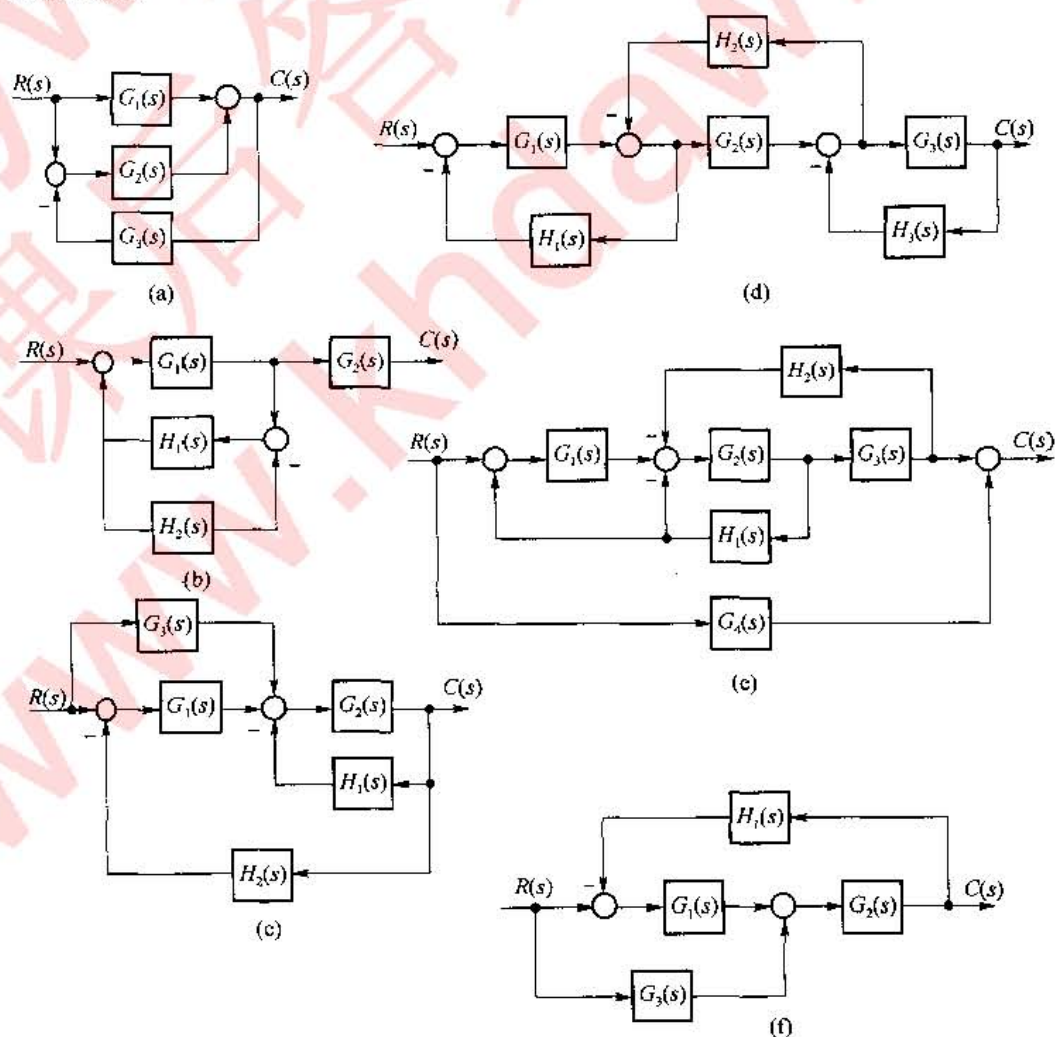
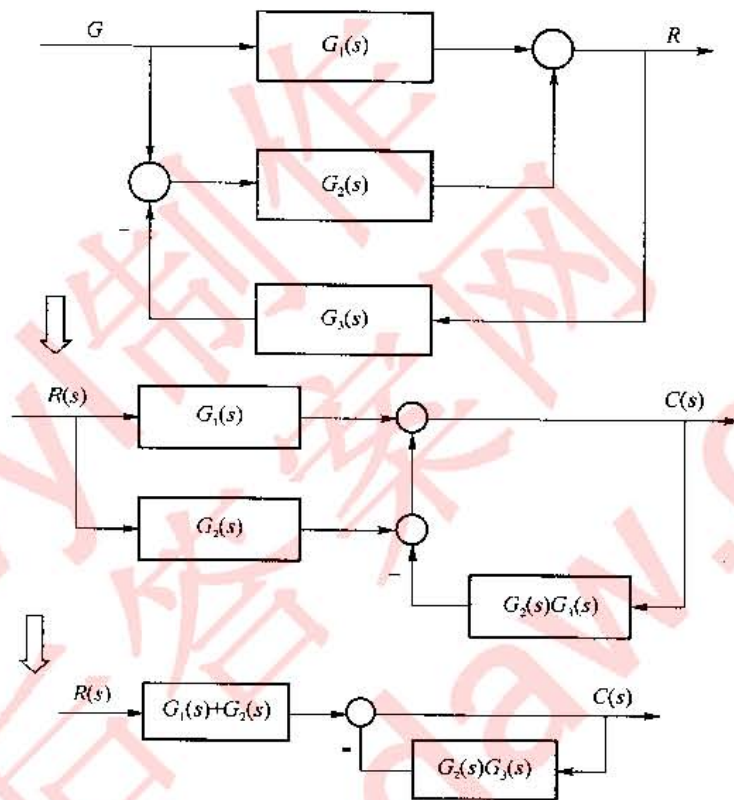


图 2-11 系统结构图

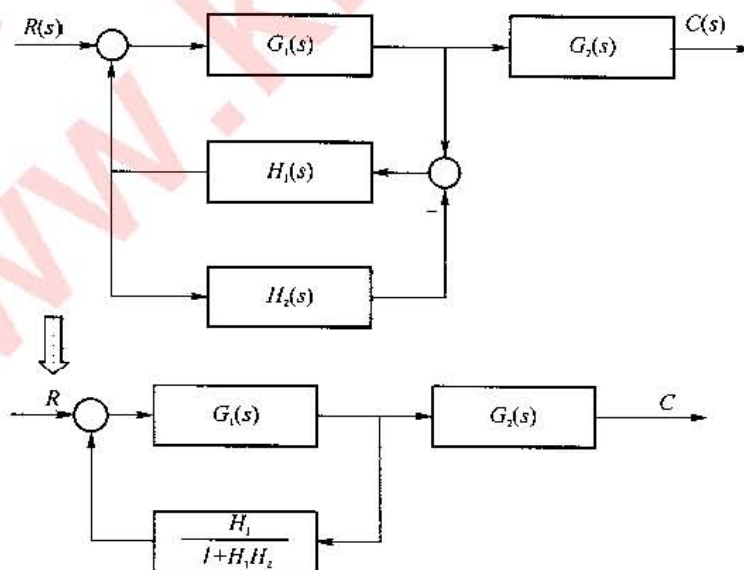
解

(a)



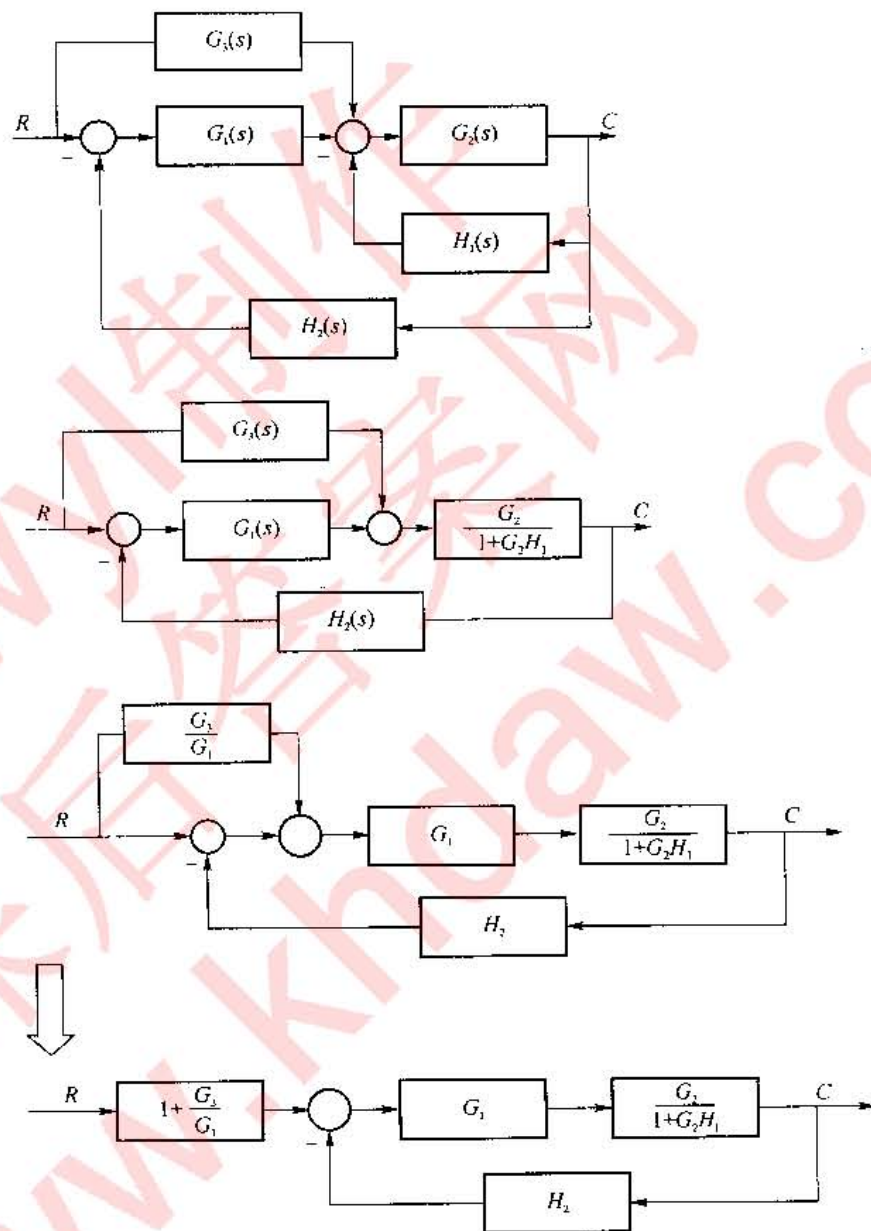
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_2 G_3}$$

(b)



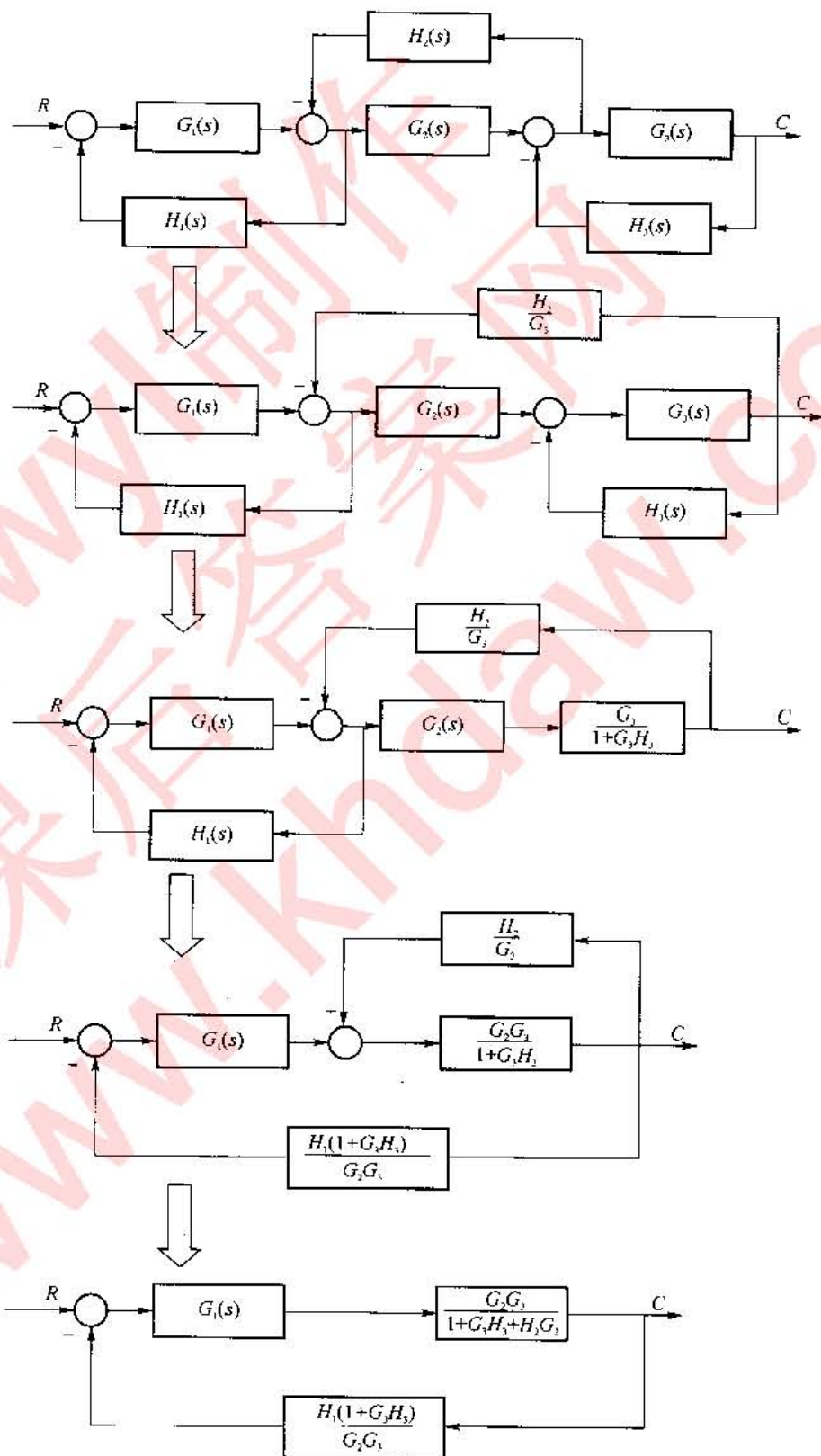
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 - \frac{G_1 H_1}{1 + H_1 H_2}} = \frac{G_1 G_2 + G_1 H_1 G_2 H_2}{1 + H_1 H_2 - G_1 H_1}$$

(c)



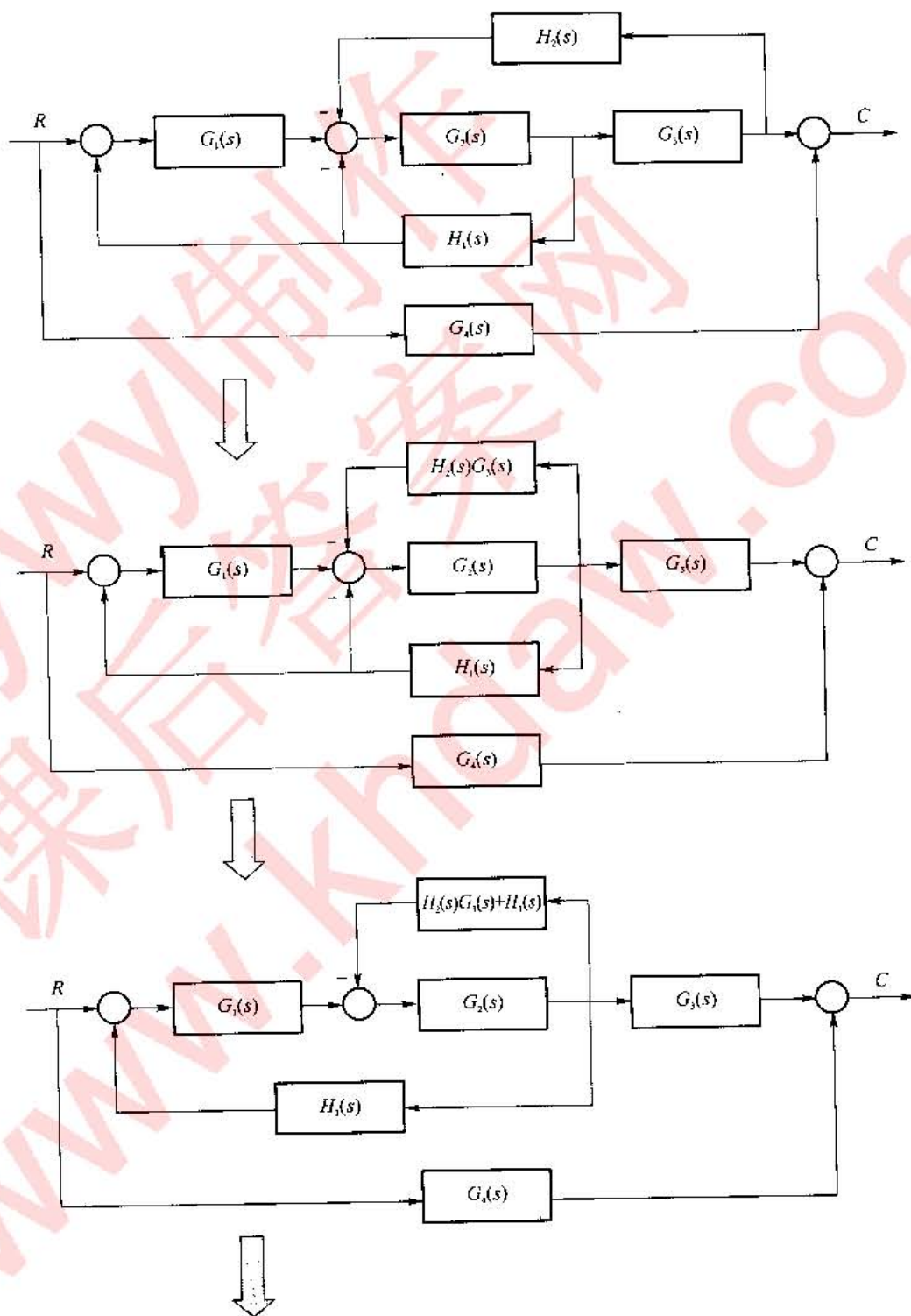
$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \left(1 + \frac{G_3}{G_1}\right) \frac{\frac{G_1 G_2}{1+G_2 H_1}}{1 + \frac{G_1 G_2 H_2}{1+G_2 H_1}} \\ &= \frac{G_2 G_3 + G_1 G_2}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 H_2} \end{aligned}$$

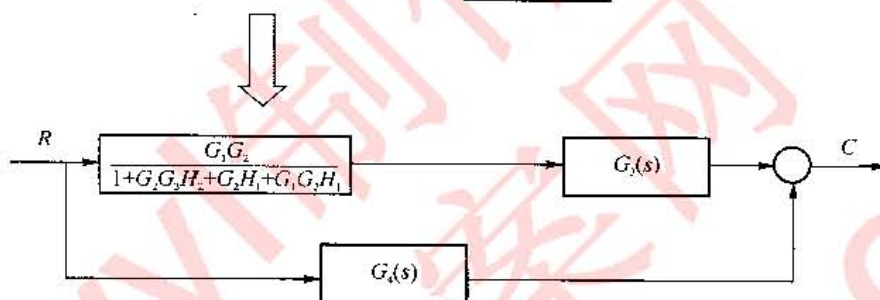
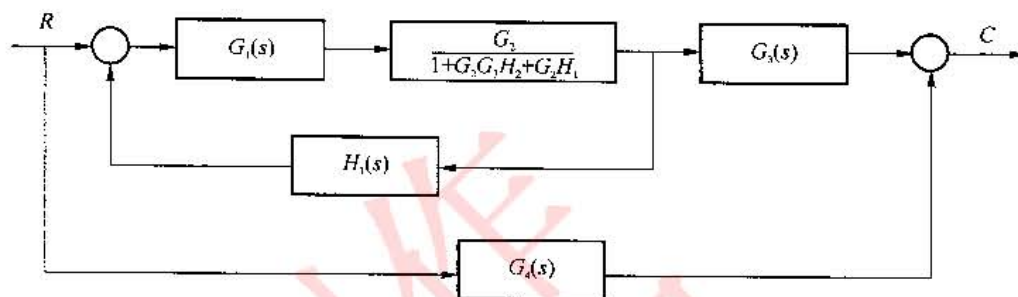
(d)



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_3 H_3 + H_2 G_2 + G_1 H_1 + G_1 H_1 G_3 H_3}$$

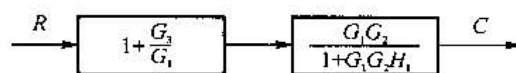
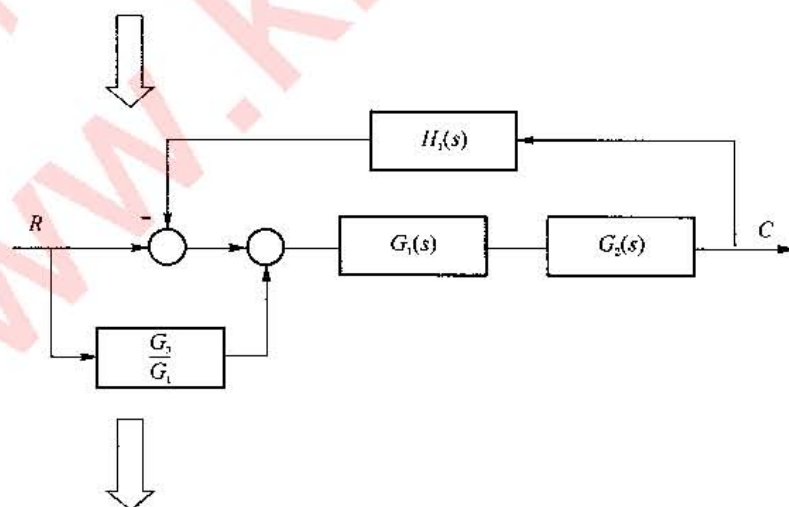
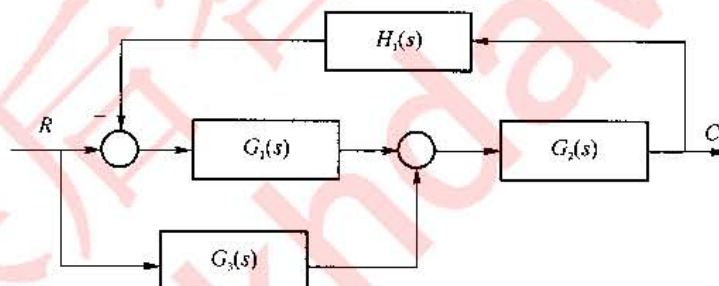
(e)





$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_2 H_1 + G_1 G_2 H_1} + G_4$$

(f)



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{G_3}{G_1}\right) \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_1} = \frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1}$$

2.12 画出如图 2-12 系统结构图对应的信号流程图,并用梅逊增益公式求各系统信号流程图的传递函数  $C(s)/R(s)$  和  $C(s)/N(s)$ 。

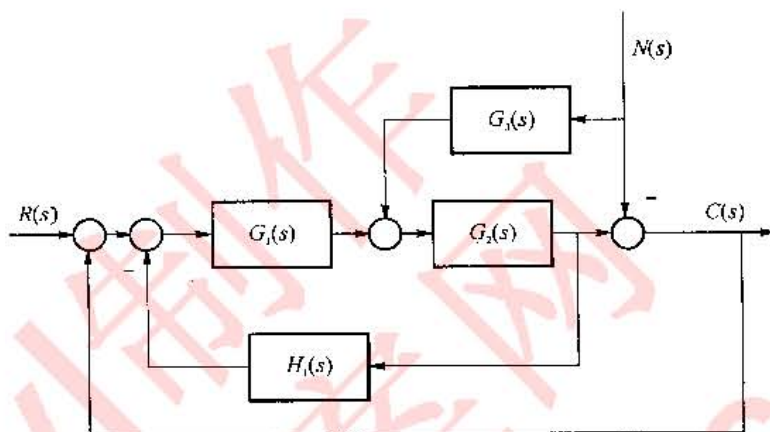


图 2-12 系统结构图

解

由结构图画系统信号流程图如图 2-13 所示。

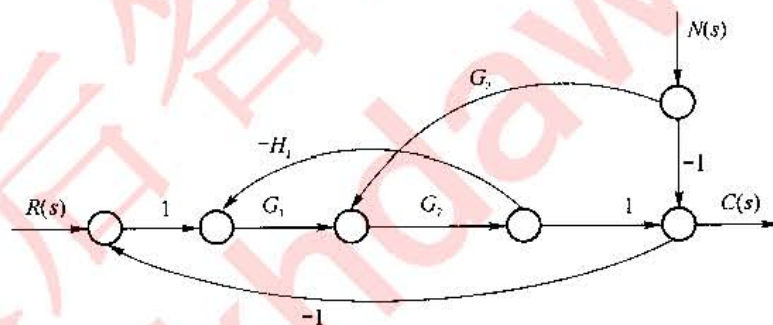


图 2-13 信号流程图

不考虑  $N(s)$  时,有两个单独回路,即  $\sum L_a = -G_1 G_2 H_1 - G_1 G_2$ ,无不接触回路。因此信号流程图特征式

$$\Delta = 1 - \sum L_a = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2$$

从源节点  $R(s)$  到节点  $C(s)$  的前向通路增益为  $G_1 G_2$ ,所以

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2}$$

不考虑  $R(s)$  时,有两个单独回路,即  $\sum L_a = -G_1 G_2 H_1 - G_1 G_2$ ,无不接触回路。因此信号流程图特征式

$$\Delta = 1 - \sum L_a = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2$$

从源节点  $R(s)$  到节点  $C(s)$  的前向通路有两条,其前向通路总增益及余子式分别为

$$p_1 = -1, \Delta_1 = 1 + G_1 G_2 H_1$$

$$p_2 = G_2 G_3, \Delta_2 = 1$$

$$\frac{N(s)}{R(s)} = \frac{p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_2 G_3 - G_1 G_2 H_1 - 1}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2}$$

2.13 画出如图 2-14 所示系统结构图对应的信号流程图,并用梅逊增益公式求各系统信号流程图的传递函数  $C(s)/R(s)$  和  $E(s)/R(s)$ 。

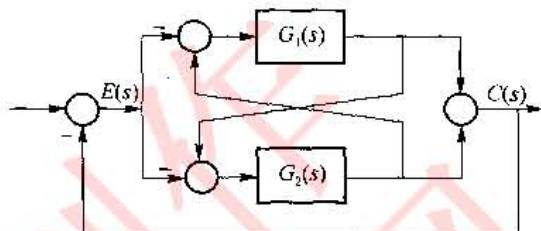


图 2-14 系统结构图

解

由结构图画系统信号流程图如图 2-15 所示。

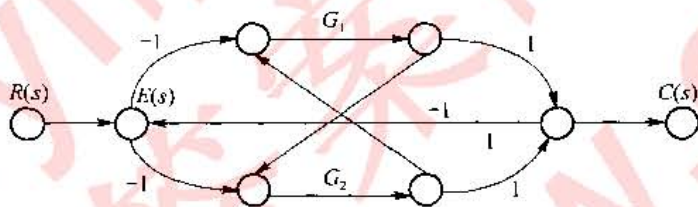


图 2-15 信号流程图

(1) 求  $C(s)/R(s)$

有单独回路  $\sum L_s = G_1 + G_2 + 3G_1G_2$ , 无不接触回路。因此信号流程图特征式

$$\Delta = 1 - \sum L_s = 1 - G_1 - G_2 - 3G_1G_2$$

源节点  $R(s)$  到节点  $C(s)$  的前向通路有 4 条, 其前向通路总增益及余子式分别为

$$p_1 = -G_1, \Delta_1 = 1$$

$$p_2 = -G_2, \Delta_2 = 1$$

$$p_3 = -G_1G_2, \Delta_3 = 1$$

$$p_4 = -G_1G_2, \Delta_4 = 1$$

$$\frac{N(s)}{R(s)} = \frac{p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2 + p_3\Delta_3 + p_4\Delta_4}{\Delta} = \frac{-G_1 - G_2 - 2G_1G_2}{1 - G_1 - G_2 - 3G_1G_2}$$

(2) 求  $E(s)/R(s)$

有单独回路  $\sum L_s = G_1 + G_2 + 3G_1G_2$ , 无不接触回路。因此信号流程图特征式

$$\Delta = 1 - \sum L_s = 1 - G_1 - G_2 - 3G_1G_2$$

源节点  $R(s)$  到节点  $E(s)$  的前向通路有一条, 其前向通路总增益及余子式分别为

$$p_1 = 1, \Delta_1 = 1 - G_1G_2$$

$$\frac{N(s)}{R(s)} = \frac{p_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{1 - G_1G_2}{1 - G_1 - G_2 - 3G_1G_2}$$

2.14 设有一复杂液位被控对象, 其液位阶跃响应试验结果如下所示:

$t/s$	0	10	20	40	60	80	100	140	180	250	300	400	500	600
$h/cm$	0	0	0.2	0.8	2.0	3.6	5.4	8.8	11.8	14.4	16.6	18.4	19.2	19.6

- (1) 画出液位对象的阶跃响应曲线；
- (2) 该对象可用有延迟的一阶惯性环节近似，试用近似法确定延迟时间  $\tau$  和时间常数  $T$ 。

解

(1) 液位对象的阶跃响应曲线如图 2-16 所示。

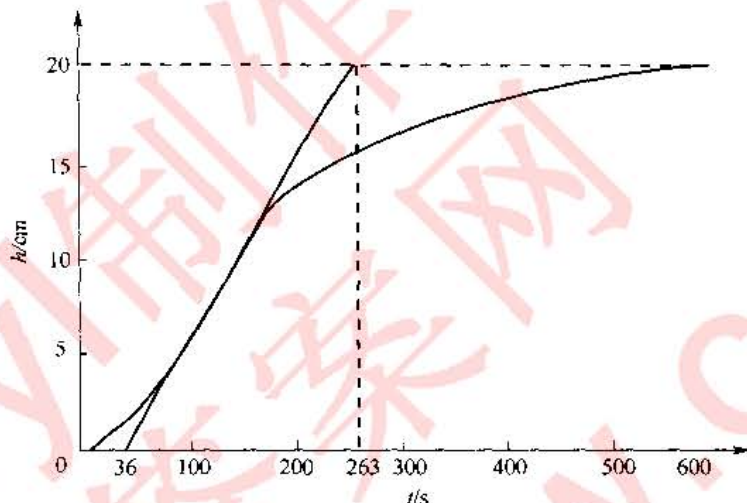


图 2-16 液位对象的阶跃响应曲线

(2) 由图 2-14 可得  $\tau=36\text{ s}$ ,  $T=263\text{ s}$ 。

**2.15** 已知被控对象的单位阶跃响应试验数据如下表所示，试用两点法确定该对象的传递函数。

$t/\text{s}$	0	15	30	45	60	75	90	105	120
$y(t)$	0	0.02	0.045	0.065	0.090	0.135	0.175	0.233	0.285
$t/\text{s}$	135	150	165	180	195	210	225	240	255
$y(t)$	0.330	0.379	0.430	0.485	0.540	0.595	0.650	0.710	0.780
$t/\text{s}$	270	285	300	315	330	345	360	375	390
$y(t)$	0.830	0.885	0.951	0.980	0.998	0.999	1.000	1.000	1.000

解

从表中选择如下两点来处理：

$$t_1=165\text{ s}, y(t_1)=0.43$$

$$t_2=195\text{ s}, y(t_2)=0.54$$

因此由公式可得

$$T = \frac{t_1 - t_2}{\ln[1 - y(t_2)] - \ln[1 - y(t_1)]} = \frac{165 - 195}{\ln 0.46 - \ln 0.57} = 140\text{ s}$$

$$\tau = \frac{t_1 \ln[1 - y(t_2)] - t_2 \ln[1 - y(t_1)]}{\ln[1 - y(t_2)] - \ln[1 - y(t_1)]} = 86.4\text{ s}$$

$$K = \frac{y(+\infty) - y(0)}{\Delta u} = 1$$

由此可得，该对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1} = \frac{e^{-86.4s}}{140s + 1}$$

2.16 已知系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

系统初始条件为  $c(0) = -1$ ,  $\dot{c}(0) = 0$ , 试求系统的单位阶跃响应。

解

由传递函数可知系统的微分方程为

$$\ddot{c}(t) + 3\dot{c}(t) + 2c(t) = 2r(t)$$

对上式等式两边同时进行拉氏变换, 可得

$$s^2 C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) + 3sC(s) - 3c(0) + 2C(s) = 2R(s)$$

由题目可得

$$c(0) = -1, \dot{c}(0) = 0, R(s) = \frac{1}{s}$$

即

$$s^2 C(s) + 3sC(s) + 2C(s) = \frac{2}{s} - s - 3$$

$$C(s) = \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s+1)(s+2)}$$

令

$$C(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+2}$$

其中

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s+1)(s+2)} = 1$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s+1)(s+2)} = -4$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{-s^2 - 3s + 2}{s(s+1)(s+2)} = 2$$

即

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

对上式进行反拉氏变换, 可得系统的单位阶跃响应

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right] = 1 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

2.17 已知一控制系统结构图如图 2-17 所示。

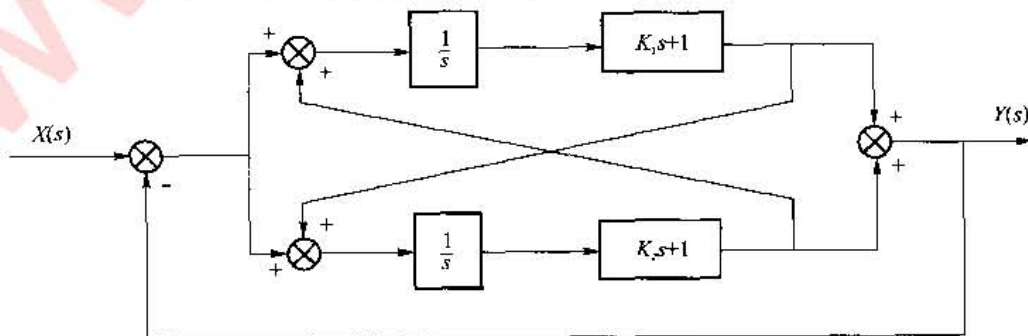


图 2-17 系统结构图

- (1) 画出其信号流图;  
 (2) 求从输入  $X(s)$  到输出  $Y(s)$  的传递函数。

解

- (1) 图 2-15 系统结构图相应的信号流程图如图 2-18 所示。

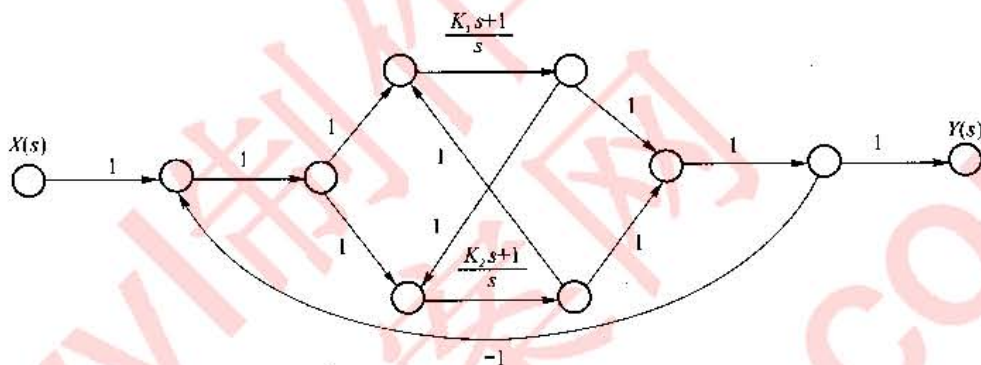


图 2-18 信号流程图

- (2) 由图 2-18 可以看出,此系统共有 5 个回路(其中无不接触回路):

$$L_1 = -\frac{K_1 s + 1}{s}$$

$$L_2 = -\frac{K_2 s + 1}{s}$$

$$L_3 = -\frac{(K_1 s + 1)(K_2 s + 1)}{s^2}$$

$$L_4 = -\frac{(K_1 s + 1)(K_2 s + 1)}{s^2}$$

$$L_5 = \frac{(K_1 s + 1)(K_2 s + 1)}{s^2}$$

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5$$

$$= 1 + \frac{K_1 s + 1}{s} + \frac{K_2 s + 1}{s} + (1 + 1 - 1) \frac{(K_1 s + 1)(K_2 s + 1)}{s^2}$$

$$= \frac{(1 + K_1 + K_2 + K_1 K_2) s^2 + (K_1 + K_2 + 2) s + 1}{s^2}$$

此系统有 4 条前向通道

$$p_1 = \frac{K_1 s + 1}{s}, \Delta_1 = 1$$

$$p_2 = \frac{K_2 s + 1}{s}, \Delta_2 = 1$$

$$p_3 = \frac{(K_1 s + 1)(K_2 s + 1)}{s^2}, \Delta_3 = 1$$

$$p_4 = \frac{(K_1 s + 1)(K_2 s + 1)}{s^2}, \Delta_4 = 1$$

由梅森公式得

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^4 p_k \Delta_k = \frac{(K_1 + K_2 + 2K_1 K_2)s^2 + 2(K_1 + K_2 + 1)s + 2}{(1 + K_1 + K_2 + K_1 K_2)s^2 + (K_1 + K_2 + 2)s + 1}$$

2.18 已知系统微分方程组如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r(t) - \tau \dot{c}(t) + K_1 n(t) \\ x_2(t) = K_0 x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - n(t) - x_5(t) \\ T \dot{x}_4(t) = x_3(t) \\ x_5(t) = x_4(t) - c(t) \\ \dot{c}(t) = x_5(t) - c(t) \end{cases}$$

试求系统的传递函数  $C(s)/R(s)$  及  $C(s)/N(s)$ 。其中  $r, n$  为输入,  $c$  为总输出,  $K_0, K_1, T, \tau$  均为常数。

解

在零初始条件下, 对微分方程组进行拉氏变换, 得

$$\begin{cases} X_1(s) = R(s) - \tau s C(s) + K_1 N(s) \\ X_2(s) = K_0 X_1(s) \\ X_3(s) = X_2(s) - N(s) - X_5(s) \\ T s X_4(s) = X_3(s) \\ X_5(s) = X_4(s) - C(s) \\ s C(s) = X_5(s) - C(s) \end{cases} \quad (1)$$

解法 1 对方程组(1)利用代入法消去  $X_1(s), X_2(s), X_3(s), X_4(s), X_5(s)$ , 得

$$[Ts^2 + (2T + K_0\tau + 1)s + 1]C(s) = K_0 R(s) + (K_0 K_1 - 1)N(s)$$

令  $N(s) = 0$ , 得

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_0}{Ts^2 + (2T + K_0\tau + 1)s + 1}$$

令  $R(s) = 0$ , 得

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{K_0 K_1 - 1}{Ts^2 + (2T + K_0\tau + 1)s + 1}$$

解法 2 由方程组(1)可得系统的结构图如图 2-19 所示。

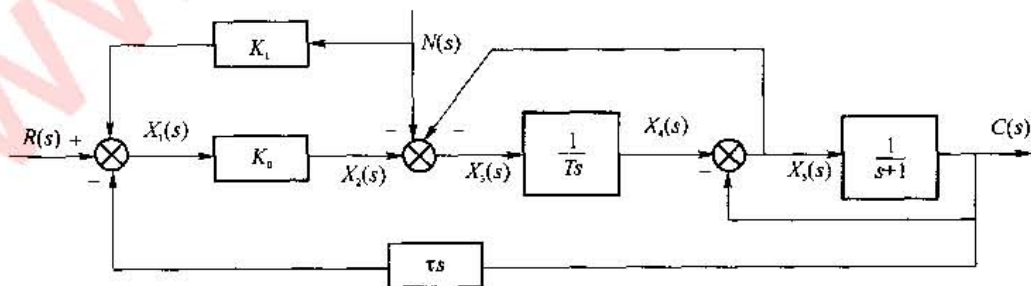


图 2-19 系统结构图

相应的信号流程图如图2-20所示,由梅森公式得

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_0}{Ts(s+1)}}{1 + \frac{1}{Ts} + \frac{1}{s+1} + \frac{K_0\tau s}{Ts(s+1)}} = \frac{K_0}{Ts^2 + (2T + K_0\tau + 1)s + 1}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{K_0K_1}{Ts(s+1)} - \frac{1}{Ts(s+1)}}{1 + \frac{1}{Ts} + \frac{1}{s+1} + \frac{K_0\tau s}{Ts(s+1)}} = \frac{K_0K_1 - 1}{Ts^2 + (2T + K_0\tau + 1)s + 1}$$

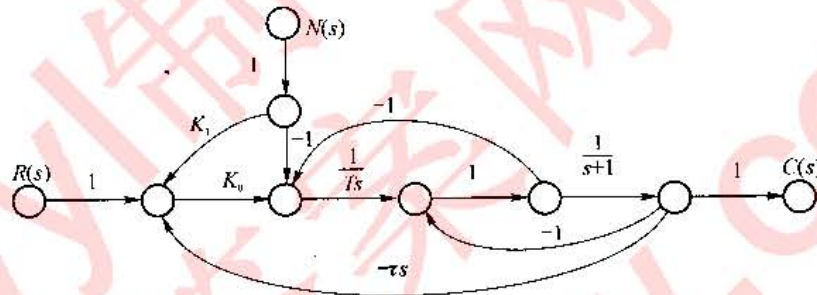


图 2-20 信号流程图

## 第3章 线性系统的时域分析法

### 3.1 典型输入信号

典型输入信号是根据系统常遇到的输入信号形式,在数学描述上加以理想化的一些基本输入函数。控制系统中常用的典型输入信号有:单位阶跃函数、单位斜坡函数、单位加速度函数、单位脉冲函数和正弦函数,如表 3-1 所示。

表 3-1 控制系统中常用的典型输入信号

名 称	时域表达式	复域表达式
单位阶跃函数	$1(t), t \geq 0$	$\frac{1}{s}$
单位斜坡函数	$t, t \geq 0$	$\frac{1}{s^2}$
单位加速度函数	$\frac{1}{2}t^2, t \geq 0$	$\frac{1}{s^3}$
单位脉冲函数	$\delta(t), t=0$	1
正弦函数	$A \sin \omega t$	$\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$

### 3.2 动态过程与稳态过程

在典型输入信号作用下,任何一个控制系统的时间响应可以分成动态过程和稳态过程两部分。

#### 1. 动态过程

动态过程又称过渡过程或瞬态过程,指系统在典型输入信号作用下,系统输出量从初始状态到最终状态的响应过程。表现为衰减、发散或等幅振荡形式。用动态性能描述动态过程的时域性能指标。

#### 2. 稳态过程

稳态过程又称为稳态响应。系统在典型输入信号作用下,当时间  $t$  趋于无穷时,系统输出量的表现方式。反映系统输出量最终复现输入量的程度。用稳态性能描述稳态过程的时域性能指标。

### 3.3 动态性能与稳态性能

#### 1. 动态性能

通常以阶跃响应来定义动态过程的时域性能指标,如图 3-1 所示。

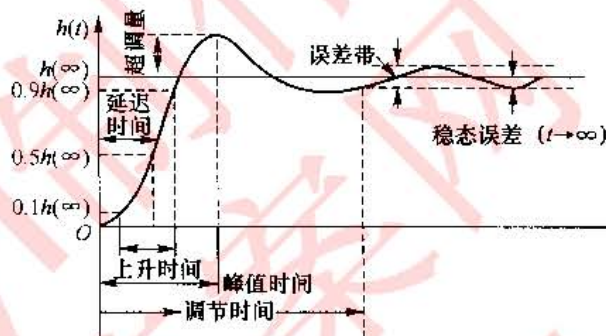


图 3-1 阶跃响应

其动态性能指标包括以下几个方面。

- 延迟时间  $t_d$  (delay time): 响应曲线第一次达到其终值  $h(\infty)$  的一半所需的时间;
- 上升时间  $t_r$  (rise time): 响应从终值的 10% 上升到终值的 90% 所需的时间, 对于有振荡的系统, 亦可定义为响应从零第一次上升到终值所需的时间;
- 峰值时间  $t_p$  (peak time): 响应超过其终值到达第一个峰值所需的时间;
- 调节时间  $t_s$  (settle time): 响应到达并保持在终值的 5% 之内所需的最短时间;
- 超调量  $\sigma\%$ :  $\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$ 。

#### 2. 稳态性能

通常用在阶跃函数、斜坡函数或加速度函数作用下系统的稳态误差来描述。用于衡量系统的控制精度和抗干扰能力。

### 3.4 一阶系统的时域分析

一阶系统的数学模型如下。

运动微分方程:

$$T\dot{c}(t) + c(t) = r(t)$$

传递函数:

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

其结构图如图 3-2 所示。

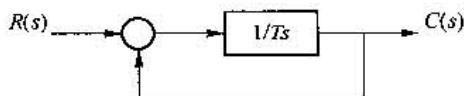


图 3-2 一阶系统结构图

一阶系统的单位脉冲响应:  $c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

一阶系统的单位阶跃响应:  $c(t) = 1 - e^{-t/T} (t \geq 0)$

一阶系统的单位斜坡响应:  $c(t) = (t - T) + T e^{-t/T} (t \geq 0)$

时间常数  $T$  反映系统的惯性, 惯性越小, 响应过程越快。

## 3.5 二阶系统的时域分析

### 1. 二阶系统的数学模型

传递函数

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其结构图如图 3-3 所示。

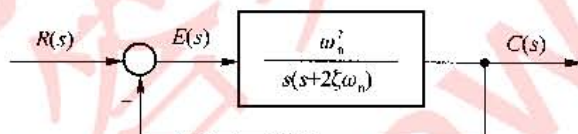


图 3-3 二阶系统结构图

其中,  $\omega_n$  称为自然频率(或无阻尼振荡频率),  $\zeta$  称为阻尼比(或相对阻尼系数)。

闭环特征方程:  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

其两个根  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

所以, 当  $\zeta < 0$ , 特征根的实部为正或为正实根, 系统的动态过程为发散的正弦振荡或单调发散的形式, 二阶系统是不稳定的; 当  $\zeta = 0$  时, 特征根为一对纯虚根, 系统动态过程为等幅振荡, 处于临界稳定; 当  $0 < \zeta < 1$  时, 动态过程表现为衰减振荡形式, 称为欠阻尼二阶系统; 当  $\zeta = 1$  时, 动态过程表现为无振荡形式, 称为临界阻尼系统; 当  $\zeta > 1$  时, 动态过程表现为无振荡形式, 称为过阻尼系统。动态过程曲线如图 3-4 所示。

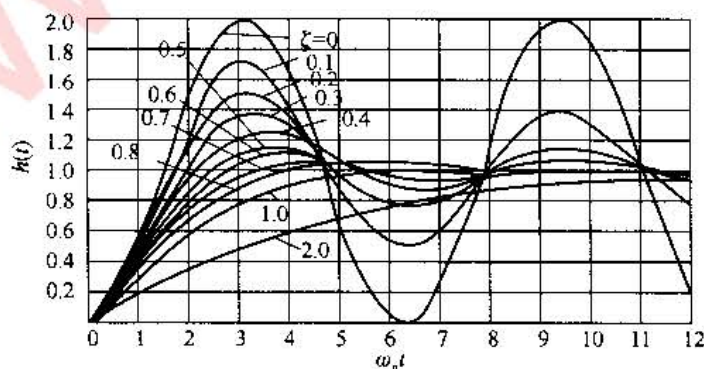


图 3-4 二阶系统动态响应曲线

## 2. 欠阻尼( $0 < \zeta < 1$ )二阶系统的单位阶跃响应

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \beta) \quad (t \geq 0)$$

式中:

$\beta = \arccos \zeta$  称为阻尼角, 表示闭环极点到原点的连线与负实轴的夹角;

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  称为有阻尼振荡频率, 大小等于闭环极点到实轴之间的距离;

$\sigma = \zeta \omega_n$  称为衰减系数, 大小等于闭环极点到虚轴之间的距离。

延迟时间

$$t_d = \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n}$$

上升时间

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

峰值时间

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

超调量

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$

调节时间

$$t_s = \frac{3.5}{\delta}$$

## 3. 比例-微分控制(PD)系统

系统结构图如图 3-5 所示。

PD 控制系统与原系统比较如表 3-2 所示。

表 3-2 PD 控制系统与原系统比较表

	开环传递函数	开环增益	闭环传递函数
原系统	$\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$	$\frac{\omega_n}{2\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
PD 控制系统	$\frac{(1+T_d s)\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$	$\frac{\omega_n}{2\zeta}$	$\frac{\omega_n^2(T_d s+1)}{s^2+2\zeta_d\omega_n s+\omega_n^2}$

其中  $\zeta_d = \zeta + \frac{\omega_n T_d}{2}$ , 表明比例-微分控制不改变系统的自然频率, 但可增大阻尼比。

PD 控制相当于给系统增加了一个闭环零点,  $-z = -1/T_d$ , 称为有零点的二阶系统。

$T_d = 0$ , 称为无零点的二阶系统。

## 4. 测速反馈控制系统

系统结构图如图 3-6 所示。

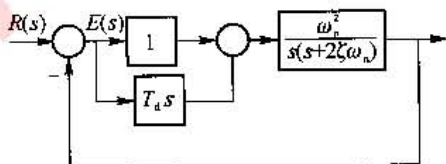


图 3-5 比例-微分控制系统结构图

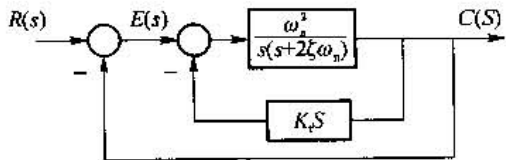


图 3-6 测速反馈控制系统结构图

测速反馈控制系统与原系统比较如表 3-3 所示。

表 3-3 测速反馈控制系统与原系统比较表

	开环传递函数	开环增益	闭环传递函数
原系统	$\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$	$\frac{\omega_n}{2\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
测速反馈控制系统	$\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta_1\omega_n)}$	$\frac{\omega_n}{2\zeta_1 \cdot K_1 \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta_1\omega_n s+\omega_n^2}$

其中  $\zeta_1 = \zeta + \frac{\omega_n K_1}{2}$ , 表明测速反馈控制不改变系统的自然频率, 但可增大阻尼比。测速反馈控制增大开环增益, 加大系统在斜坡输入时的稳态误差。

## 3.6 高阶系统的时域分析

闭环主导极点: 在所有的闭环极点中, 距虚轴最近、周围没有闭环零点、而又远离其他闭环极点的极点。它所对应的响应分量在系统的响应过程中起主导作用。

高阶系统的增益常常调整到使系统具有一对闭环共轭主导极点, 这时可以用二阶系统的动态性能指标来估算高阶系统的动态性能。

## 3.7 稳定性分析

### 1. 稳定性的基本概念

- 稳定性: 指系统在扰动消失后, 由初始偏差状态恢复到原平衡状态的性能;
- 线性控制系统的稳定性: 在初始扰动的影响下, 其动态过程随时间的推移逐渐衰减并趋于零(原平衡点), 则称系统渐近稳定。

### 2. 线性系统稳定的充要条件: 脉冲响应 $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$

- 闭环系统特征方程的所有根均有负实部;
- 或闭环传递函数的极点均严格位于左半  $s$  平面。

### 3. 赫尔维茨稳定判据

- 线性系统稳定的必要条件: 线性系统特征方程的各项系数为正数;
- 线性系统稳定的充分且必要条件: 由系统特征方程各项系数所构成的主行列式  $\Delta_n$  及其顺序主子式  $\Delta_i (i=1, 2, \dots, n-1)$  全部为正。

当  $n=2$  时, 即特征方程的各项系数为正;

当  $n=3$  时, 即特征方程的各项系数为正, 且  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ ;

当  $n=4$  时, 即特征方程的各项系数为正, 且  $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ , 以及  $\Delta_3 > a_1^2 a_4 / a_3$ 。

### 4. 劳斯判据

劳斯稳定判据: 当且仅当劳斯表(见表 3-4)第一列所有各元素均为正时, 特征方程是稳定的; 否则特征方程不稳定, 第一列各元素符号改变的次数等于特征方程的正实部

特征根的个数。

表 3-4 劳斯表

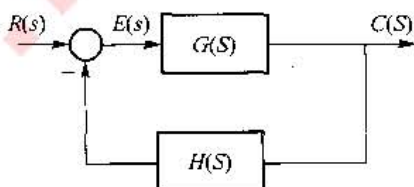
$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	...
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	...
$s^{n-2}$	$c_{13} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$c_{23} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$c_{33} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	$c_{43}$	...
$s^{n-3}$	$c_{14} = \frac{c_{13} a_3 - a_1 c_{23}}{c_{13}}$	$c_{24} = \frac{c_{13} a_5 - a_1 c_{33}}{c_{13}}$	$c_{34} = \frac{c_{13} a_7 - a_1 c_{43}}{c_{13}}$	$c_{44}$	...
$s^{n-4}$	$c_{15} = \frac{c_{14} c_{23} - c_{13} c_{24}}{c_{14}}$	$c_{25} = \frac{c_{14} c_{33} - c_{13} c_{34}}{c_{14}}$	$c_{35} = \frac{c_{14} c_{43} - c_{13} c_{44}}{c_{14}}$	$c_{45}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^2$	$c_{1,n-1}$	$c_{2,n-1}$			
$s^1$	$c_{1,n}$				
$s^0$	$c_{1,n-1} = a_n$				

- 劳斯表中某行的第一列项为零,而其余各项不为零,或不全为零。用因子 $(s+a)$ 乘以特征方程,其中 $a$ 可以为任意正数,再对新的特征方程应用劳斯判据。
- 劳斯表中出现全零行以全零行上面一行的系数构造一个辅助方程: $F(s)=0$ ,并对之求导,用所得导数方程的系数取代全零行的元,继续运算。

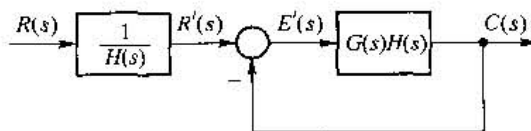
## 3.8 线性系统的稳态误差计算

### 1. 误差的基本定义

在系统输入端定义的误差:  $E(s) = R(s) - H(s)C(s)$



在系统输出端定义的误差:  $E'(s) = E(s)/H(s)$



误差本身是时间的函数,即

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\phi_e(s) \cdot R(s)] = e_{ts}(t) + e_{ss}(t)$$

式中,  $e_{ts}(t)$  为瞬态分量,  $e_{ss}(t)$  为稳态分量。

稳态误差:  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_{ss}(t)$

## 2. 系统型别

开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^{\nu} \prod_{j=1}^{n-g} (T_j s + 1)}$$

式中,  $K$  为开环增益;  $\tau_i$  和  $T_j$  为时间常数;  $\nu$  为开环系统在  $s$  平面坐标原点上的极点重数。  $\nu=0$ , 称为 0 型系统;  $\nu=1$ , 称为 I 型系统;  $\nu=2$ , 称为 II 型系统……

## 3. 终值定理法

根据终值定理

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

## 4. 静态误差系数法

利用静态误差系数法求稳态误差的前提条件与终值定理法相同。影响稳态误差的三个要素是: 系统型别、开环增益、输入信号的形式和幅值。

# 3.9 减小或消除稳态误差的措施

(1) 增大系统开环增益或扰动作用点之前系统的前向通道增益。

(2) 在系统的前向通道或主反馈通道设置串联积分环节。

- 扰动作用点之前的前向通道积分环节数与主反馈通道积分环节数之和决定系统响应扰动作用的型别, 该型别与扰动作用点之后前向通道的积分环节数无关;
- 如果在扰动作用点之前的前向通道积分环节或主反馈通道中设置  $\nu$  个积分环节, 必可消除系统在扰动信号作用下的稳态误差。

## 习题解答

3.1 设某高阶系统可用一阶微分方程近似描述:

$$T \dot{c}(t) + c(t) = \tau \dot{r}(t) + r(t)$$

其中  $1 > (T - \tau) > 0$ , 试证系统的动态性能为

$$t_d = [0.693 + \ln(T - \tau) - \ln(T)]T$$

$$t_r = 2.2T$$

$$t_s = [3 + \ln(T - \tau) - \ln(T)]T$$

解

$$H(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1} \frac{1}{s} = -\frac{T - \tau}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{1}{s}$$

$$h(t) = 1 - \frac{T - \tau}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

$t_d$  为  $h(t)$  第一次达到终值的  $1/2$  时的时间, 即

$$\frac{T-\tau}{T} e^{-\frac{t_d}{T}} = \frac{1}{2}$$

$$t_d = T \ln \left[ \frac{2(T-\tau)}{T} \right] = [0.693 + \ln(T-\tau) - \ln(T)]T$$

$t_{r1}$  为  $h(t)$  达到终值的  $0.1$  时的时间, 即有

$$1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-\frac{t_{r1}}{T}} = 0.1$$

$$t_{r1} = T \ln \left( \frac{T-\tau}{0.9T} \right)$$

$t_{r2}$  为  $h(t)$  达到终值的  $0.9$  时的时间, 即

$$1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-\frac{t_{r2}}{T}} = 0.9$$

$$t_{r2} = T \ln \left( \frac{T-\tau}{0.1T} \right)$$

所以

$$t_r = t_{r2} - t_{r1} = T \ln \left( \frac{T-\tau}{0.1T} \right) - T \ln \left( \frac{T-\tau}{0.9T} \right) = T \ln(9) = 2.2T$$

$t_s$  为  $h(t)$  达到并保持在终值  $\pm 5\%$  所需的最短时间, 即

$$1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-\frac{t_s}{T}} = 0.95$$

$$t_s = T \ln \left( \frac{T-\tau}{0.05T} \right) = [3 + \ln(T-\tau) - \ln(T)]T$$

**3.2** 已知各系统的脉冲响应, 试求系统的闭环传递函数  $\Phi(s)$ 。

(1)  $k(t) = 0.0125 e^{-1.25t}$

(2)  $k(t) = 5t + 10 \sin(4t + 45^\circ)$

(3)  $k(t) = 0.1(1 - e^{-t/3})$

解

(1)  $\Phi(s) = \mathcal{L}[k(t)] = \frac{0.0125}{s+1.25}$

$$\begin{aligned} (2) \Phi(s) &= \mathcal{L}[k(t)] = \mathcal{L}\left[5t + \frac{10}{\sqrt{2}}(\sin 4t + \cos 4t)\right] \\ &= \frac{5}{s^2} + 5\sqrt{2}\left(\frac{4}{s^2+4^2} + \frac{s}{s^2+4^2}\right) \\ &= \frac{5\left(\frac{\sqrt{2}}{16}s^3 + \frac{1+4\sqrt{2}}{16}s^2 + 1\right)}{s^2\left(\frac{s^2}{16} + 1\right)} \end{aligned}$$

(3)  $\Phi(s) = \mathcal{L}[k(t)] = 0.1 \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{3}} \right] = \frac{1}{10s(3s+1)}$

**3.3** 已知二阶系统的单位阶跃响应为  $h(t) = 10 - 12.5e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)$ , 试求系统的超调量  $\sigma\%$ 、峰值时间  $t_p$  和调节时间  $t_s$ 。

解

因为  $0 < \zeta < 1$ , 所以系统是欠阻尼状态。

阻尼比  $\zeta = \cos 53.1^\circ = 0.6$

自然频率  $\omega_n = 1.2/0.6 = 2$

阻尼振荡频率  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 2 \times \sqrt{1 - 0.6^2} = 1.6$

(1) 峰值时间  $t_p$  的计算

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{1.6} = 1.96$$

(2) 调节时间  $t_s$  的计算

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta \omega_n} = \frac{3.5}{0.6 \times 2} = 2.9$$

(3) 超调量  $\sigma\%$  的计算

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = e^{-\pi \times 0.6/\sqrt{1-0.6^2}} \times 100\% = 9.48\%$$

3.4 设单位反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}$ , 试求系统在单位阶跃输入下的动态性能。

解

方法一: 根据比例-微分一节推导出的公式

$$G(s) = \frac{K(T_d s + 1)}{s(s/2\zeta\omega_n + 1)} = \frac{0.4s + 1}{0.6 \times s \left( \frac{5}{3}s + 1 \right)}$$

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{z} \left( \frac{s + z}{s^2 + 2\zeta_d\omega_n s + \omega_n^2} \right) \\ &= \frac{0.4s + 1}{s(s + 0.6)} = \frac{0.4s + 1}{s^2 + s + 1} = \frac{0.4(s + 2.5)}{s^2 + s + 1} \\ &= \frac{0.4s + 1}{1 + \frac{0.4s + 1}{s(s + 0.6)}}\end{aligned}$$

$$h(t) = 1 + r e^{-\zeta_d \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta_d^2} t + \Psi)$$

$$r = \frac{\sqrt{z^2 - 2\zeta_d \omega_n + \omega_n^2}}{z \sqrt{1 - \zeta_d^2}}$$

$$\Psi = -\pi + \arctan\left(\frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta_d^2}}{z - \zeta_d \omega_n}\right) + \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta_d^2}}{\zeta_d}\right)$$

把  $z = 1/T_d = 2.5$ ,  $\omega_n = 1$ ,  $\zeta_d = 0.5$  代入, 可得

$$h(t) = 1 + 1.05 e^{-0.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 96.7^\circ\right)$$

$$= 1 - 1.05 e^{-0.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 83.3^\circ\right)$$

(1) 峰值时间的计算

$$\beta_d = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta_d^2}}{\zeta_d}\right) = 1.0472, \Psi = -1.6877$$

$$t_p = \frac{\beta_d - \Psi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta_d^2}} = 3.158$$

(2) 超调量的计算

$$\sigma\% = \frac{r\sqrt{1-\zeta_d^2}e^{-\zeta_d t_p}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}} \times 100\% = 21.65\%$$

(3) 调节时间的计算

$$t_s = \frac{3 + \frac{1}{2} \ln(z^2 - 2\zeta_d \omega_n + \omega_n^2) - \ln z - \frac{1}{2} \ln(1 - \zeta_d^2)}{\zeta_d \omega_n} = 6.29$$

方法二：根据基本定义来求解

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}}{1 + \frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}} = \frac{0.4s+1}{s^2+s+1}$$

当输入为单位阶跃函数时

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{0.4s+1}{s(s^2+s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{-s-0.6}{s^2+s+1} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{-(s+\frac{1}{2})}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{-0.1}{(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \end{aligned}$$

得单位阶跃响应

$$\begin{aligned} h(t) &= 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 0.1e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 84.3^\circ\right) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

(1) 峰值时间  $t_p$  的计算

对  $h(t)$  求导, 并令其等于零, 得

$$-0.5e^{-\frac{1}{2}t_p} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_p + 84.3^\circ\right) - e^{-\frac{1}{2}t_p} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_p + 84.3^\circ\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_p + 84.3^\circ\right) = \sqrt{3}$$

$$t_p = 2.9$$

(2) 超调量  $\sigma\%$  的计算

$$\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\% = 17.49\%$$

(3) 调节时间  $t_s$  的计算

$$\left| e^{-\frac{1}{2}t_s} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t_s - 84.5^\circ\right) \right| \leq 0.05$$

$$t_s = 5.33$$

**3.5** 已知控制系统的单位阶跃响应为  $h(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t}$ , 试确定系统的阻尼比  $\zeta$  和自然频率  $\omega_n$ 。

**解**

系统的单位脉冲响应为

$$k(t) = \dot{h}(t) = -12e^{-60t} + 12e^{-10t}$$

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \mathcal{L}[k(t)] = 12 \left( \frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+60} \right) = \frac{600}{s^2 + 10s + 600}$$

自然频率

$$\omega_n = \sqrt{600} = 24.5$$

阻尼比

$$\zeta = \frac{70}{2 \times \sqrt{600}} = 1.429$$

3.6 设图 3-7 是简化的飞行控制系统结构图, 试选择参数  $K_1$  和  $K_2$ , 使系统的  $\omega_n = 6, \zeta = 1$ 。

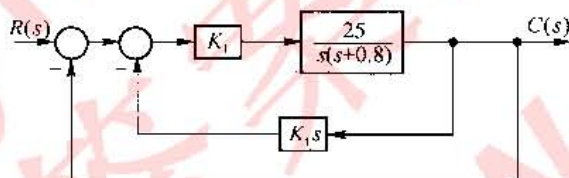


图 3-7 飞行控制系统结构图

解

通过简化图 3-7 所示的结构图, 得到系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{25K_1}{s^2 + (0.8 + 25K_1K_2)s + 25K_1}$$

将上式与二阶系统的传递函数的标准形式

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

相比较可得

$$\begin{cases} 25K_1 = \omega_n^2 \\ 0.8 + 25K_1K_2 = 2\zeta\omega_n \end{cases}$$

将  $\omega_n = 6, \zeta = 1$  代入上述方程组并解之可得

$$\begin{cases} K_1 = 1.44 \\ K_2 = 0.31 \end{cases}$$

3.7 分别求出图 3-8 中各系统的自然频率和阻尼比, 并列表比较其动态性能。

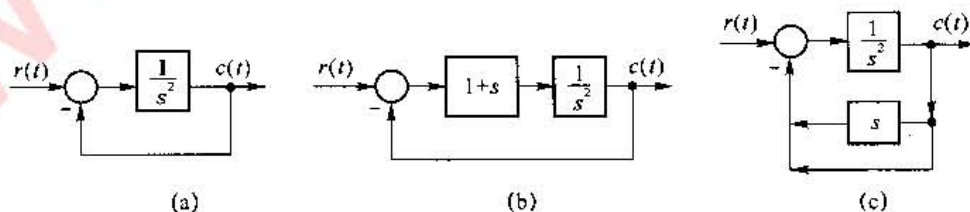


图 3-8 控制系统

解

(1) 由图 3-8(a)可得系统的闭环传递函数为

$$\Phi_1(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

由上式易得,此系统的动态性能指标为:

自然频率

$$\omega_n = 1$$

阻尼比

$$\zeta = 0$$

超调量

$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 100\%$$

调节时间

$$t_s = \infty$$

(2) 由图 3-8(b)可得系统闭环传递函数为

$$\Phi_2(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

显然,这是一个比例-微分控制二阶系统,因此有

$$\omega_n = 1, \zeta = 0.5, z = 1$$

$$r = \frac{\sqrt{z^2 - 2\zeta_d\omega_n + \omega_n^2}}{z\sqrt{1-\zeta_d^2}} = 1.155$$

$$\phi = -\pi + \arctan\left(\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta_d^2}}{z-\zeta_d\omega_n}\right) + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta_d^2}}{\zeta_d} = -\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -1.047$$

$$\beta_d = \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta_d^2}}{\zeta_d} - \frac{\pi}{3} = 1.047$$

此系统的动态性能指标为:

峰值时间

$$t_p = \frac{\beta_d - \phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta_d^2}} = 2.418$$

超调量

$$\sigma\% = \frac{r\sqrt{1-\zeta_d^2}e^{-\zeta_d t_p}}{\sqrt{1-\zeta_d^2}} = 35.1\%$$

调节时间

$$t_s = \frac{3 + \frac{1}{2}\ln(z^2 - 2\zeta_d\omega_n + \omega_n^2) - \ln z - \frac{1}{2}\ln(1-\zeta_d^2)}{\zeta_d\omega_n} = 6.29$$

(3) 由图 3-8(c)可得此系统闭环传递函数为

$$\Phi_3(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

由上式易得,此系统的动态性能指标为:

自然频率

$$\omega_n = 1$$

阻尼比  $\zeta=0.5$  (所以为欠阻尼二阶系统)  
超调量

$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 16.3\%$$

调节时间

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 7$$

动态性能的比较表如表 3-5 所示。

表 3-5 动态性能的比较表

(a)	(b)	(c)
$\omega_n=1$	$\omega_n=1$	$\omega_n=1$
$\zeta=0$	$\zeta=0.5$	$\zeta=0.5$
$h(t)=1-\cos t$	$h(t)=1-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-0.5t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+120^\circ\right)$	$h(t)=1-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-0.5t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ\right)$
	$t_r=0.9\text{ s}$	$t_r=2.42\text{ s}$
	$t_p=2.42\text{ s}$	$t_p=3.63\text{ s}$
	$t_s=6.29\text{ s}$	$t_s=7\text{ s}$
	$\sigma\%=24.7\%$	$\sigma\%=16.3\%$

3.8 设控制系统如图 3-9 所示。要求：

- (1) 取  $\tau_1=0, \tau_2=0.1$ , 计算测速反馈校正系统的超调量、调节时间和速度误差；
- (2) 取  $\tau_1=0.1, \tau_2=0$ , 计算比例-微分校正系统的超调量、调节时间和速度误差；

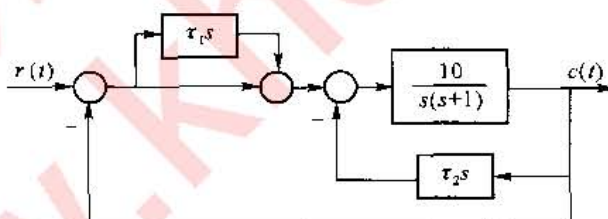


图 3-9 控制系统

解

(1) 取  $\tau_1=0, \tau_2=0.1$  时, 系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

$$\Phi(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

由开环传递函数可知, 此系统是一个 I 型系统, 其速度系数为  $K_v=5$ , 由静态误差系数法可得系统的速度误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.2$$

由闭环传递函数可知,  $\omega_n = \sqrt{10} = 3.16, \zeta = \frac{1}{3.16} = 0.316$ , 故

超调量 
$$\sigma\% = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 35.09\%$$

调节时间

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta \omega_n} = 3.5$$

(1) 取  $\tau_1 = 0.1, \tau_2 = 0$  时, 系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{10(0.1s + 1)}{s(s + 1)}$$

$$\Phi(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 2s + 10}$$

由开环传递函数可知, 此系统是一个 1 型系统, 其速度系数为  $K_v = 10$ , 由静态误差系数法可得系统的速度误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.1$$

由比例-微分校正系统的闭环函数可知

$$\omega_n = \sqrt{10} = 3.16, \zeta = \frac{1}{3.16} = 0.316, z = 10$$

$$r = \frac{\sqrt{z^2 - 2\zeta_d \omega_n + \omega_n^2}}{z \sqrt{1 - \zeta_d^2}} = 1.095$$

$$\phi = -\pi + \arctan \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta_d^2}}{z - \zeta_d \omega_n} + \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta_d^2}}{\zeta_d} = -\pi + 0.322 + 1.249 = -1.57$$

$$\beta_d = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta_d^2}}{\zeta_d} = 1.249$$

$$t_v = \frac{\beta_d - \phi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta_d^2}} = 0.94$$

超调量

$$\sigma\% = r \sqrt{1 - \zeta_d^2} e^{-\zeta_d t_v / \sqrt{1 - \zeta_d^2}} = 76\%$$

调节时间

$$t_s = \frac{3 + \frac{1}{2} \ln(z^2 - 2\zeta_d \omega_n + \omega_n^2) - \ln z - \frac{1}{2} \ln(1 - \zeta_d^2)}{\zeta_d \omega_n} = 3.09$$

3.9 已知系统特征方程为

$$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$$

试用劳斯判据和赫尔维茨判据确定系统的稳定性。

解

首先用劳斯判据来判定系统的稳定性, 列出劳斯表如下:

$s^4$	3	5	2
$s^3$	10	1	
$s^2$	$\frac{47}{10}$	2	
$s^1$	$-\frac{153}{47}$		
$s^0$	2		

显然, 由于表中第一列元素的符号有两次改变, 所以该系统在  $s$  右半平面有两个闭环极点。因此, 该系统不稳定。

再用赫尔维茨稳定判据来判定系统的稳定性。显然,特征方程的各项系数均为正,则

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 10 \times 5 - 3 \times 1 = 47 > 0$$

$$\frac{a_1^2 a_4}{a_3} = \frac{10^2 \times 2}{1} = 200 > \Delta_2$$

显然,系统不稳定。

**3.10** 已知系统特征方程如下,试求系统在  $s$  右半平面的根数及虚根值。

$$(1) s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$$

$$(2) s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$$

$$(3) s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 35s + 25 = 0$$

解

(1) 列劳斯表如下:

$s^5$	1	12	32
$s^4$	3	24	48
$s^3$	4	16	
$s^2$	12	48	
$s^1$	0	0	(列辅助方程 $12s^2 + 48 = 0$ )
	24	0	
$s^0$	28		

由上表可见,劳斯表中第一列元素全部大于零,所以系统在  $s$  右半平面无根。

列辅助方程为  $12s^2 + 48 = 0$

解之得  $s_{1,2} = \pm 2j$

故系统的虚根值为  $s_{1,2} = \pm 2j$

(2) 列劳斯表如下:

$s^6$	1	-4	-7	10
$s^5$	4	4	-8	
$s^4$	-5	-5	10	
$s^3$	0	0		(列辅助方程 $-5s^4 - 5s^2 + 10 = 0$ )
	-20	-10		
$s^2$	$-\frac{5}{2}$	10		
$s^1$	90			
$s^0$	10			

由上表可见,劳斯表中第一列元素的符号改变两次,所以系统在  $s$  右半平面有两个特征根。

列辅助方程为

$$-5s^4 - 5s^2 + 10 = 0$$

解之得  $s_{1,2} = \pm \sqrt{2}j, s_{3,4} = \pm 1$

故系统的虚根值为  $s_{1,2} = \pm \sqrt{2}j$

(3) 列劳斯表如下:

$s^5$	1	12	35
$s^4$	3	20	25
$s^3$	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	
$s^2$	$\frac{80}{3}$	$\frac{400}{3}$	
$s^1$	0	(列辅助方程 $\frac{80}{3}(s^2+5)=0$ )	
$s^0$	$\frac{400}{3}$		

由上表可知, 劳斯表中第一列元素全部大于零, 所以系统在  $s$  右半平面无根。  
列辅助方程为

$$\frac{80}{3}(s^2+5)=0$$

解之得

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{5}j$$

故系统的虚根值为

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{5}j$$

3.11 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(0.5s^2+s+1)}$$

试确定该系统稳定时的  $K$  值范围。

解

令  $1+G(s)=0$  可知系统的特征方程为

$$D(s)=s^4+3s^3+4s^2+(2+K)s+2K=0$$

列劳斯表如下:

$s^4$	1	4	$2K$
$s^3$	3	$2+K$	
$s^2$	$\frac{10-K}{3}$	$2K$	
$s^1$	$\frac{(10-K)(2+K)-6K}{3}$	$\frac{10-K}{3}$	
$s^0$	$2K$		

由劳斯稳定判据可得

$$\begin{cases} \frac{10-K}{3} > 0 \\ \frac{(10-K)(2+K)-6K}{3} > 0 \\ \frac{10-K}{3} > 0 \\ 2K > 0 \end{cases}$$

解上述方程组可得

$$0 < K < 1.705$$

3.12 已知系统结构图如图 3-10 所示。试用劳斯稳定判据确定能使系统稳定的反馈参数  $\tau$  的取值范围。

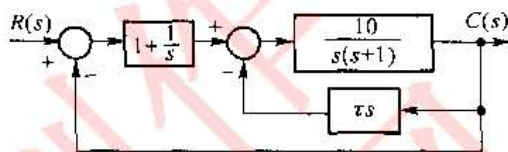


图 3-10 控制系统

解

由图 3-10 中结构图求得系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10(s+1)}{s^3 + (1+10\tau)s^2 + 10s + 10}$$

系统的特征方程为

$$s^3 + (1+10\tau)s^2 + 10s + 10 = 0$$

列劳斯表如下：

$s^3$	1	10
$s^2$	$1+10\tau$	10
$s^1$	$\frac{100\tau}{1+10\tau}$	
$s^0$	10	

由劳斯稳定判据可知：要使系统稳定，必须满足如下条件：

$$\begin{cases} 1+10\tau > 0 \\ \frac{100\tau}{1+10\tau} > 0 \end{cases}$$

解之得

$$\tau > 0$$

所以，使系统稳定的反馈参数  $\tau$  的取值范围为  $\tau > 0$ 。

3.13 已知单位反馈系统的开环传递函数：

$$(1) G(s) = \frac{100}{(0.1s+1)(s+5)}$$

$$(2) G(s) = \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$$

试求输入分别是  $r(t) = 2t$  和  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时，系统的稳态误差。

解

$$(1) G(s) = \frac{100}{(0.1s+1)(s+5)} = \frac{20}{(0.1s+1)(s+5)}$$

由上式可知，该系统是 0 型系统，且  $K = 20$ 。

0 型系统在  $1(t)$ ,  $t$ ,  $\frac{1}{2}t^2$  信号作用下的稳态误差分别为： $\frac{1}{1+K}$ ,  $\infty$ ,  $\infty$ 。该系统在输

人为  $r(t)=2t$  时的稳态误差为

$$e_{ss1} = \infty$$

根据线性叠加原理,该系统在输入为  $r(t)=2+2t+t^2$  时的稳态误差为

$$e_{ss2} = 2 \times \frac{1}{1+K} + 2\infty + \infty = \infty$$

$$(2) G(s) = \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)} = \frac{10}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

由上式可知,该系统是 I 型系统,且  $K=10$ 。

I 型系统在  $1(t)$ ,  $t$ ,  $\frac{1}{2}t^2$  信号作用下的稳态误差分别为:  $0$ ,  $\frac{1}{K}$ ,  $\infty$ 。该系统在输入为  $r(t)=2t$  时的稳态误差为

$$e_{ss1} = 2 \times \frac{1}{K} = 0.2$$

该系统在输入为  $r(t)=2+2t+t^2$  时的稳态误差为

$$e_{ss2} = 2 \times 0 + 2 \times \frac{1}{K} + \infty = \infty$$

(3) 首先需要判定此系统的稳定性,对于单位负反馈系统有  $H(s)=1$ ,所以系统的闭环特性方程为

$$D(s) = s^2(s^2+6s+100) + 10(2s+1) = s^4 + 6s^3 + 100s^2 + 20s + 10 = 0$$

用劳斯稳定判据来确定此系统的稳定性,列劳斯表如下:

$s^4$	1	100	10
$s^3$	6	20	
$s^2$	580/6	10	
$s^1$	11 240/280		
$s^0$	10		

显然,劳斯表中的第一列元素均大于零。由劳斯稳定判据可知系统是稳定的。

用终值定理来求系统的稳态误差,有

$$\begin{aligned} e_{ss1} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)H(s)} R(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{s^2(s^2+6s+100)}{s^2(s^2+6s+100)+10(2s+1)} \end{aligned}$$

当输入为  $r(t)=2t$  时,  $R(s)=\frac{2}{s^2}$ , 则

$$e_{ss1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2}{s^2} \frac{s^2(s^2+6s+100)}{s^2(s^2+6s+100)+10(2s+1)} = 0$$

当输入为  $r(t)=2+2t+t^2$  时,  $R(s)=\frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{2}{s^3} = \frac{2(s^2+s+1)}{s^3}$ , 则

$$e_{ss2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2(s^2+s+1)}{s^3} \frac{s^2(s^2+6s+100)}{s^2(s^2+6s+100)+10(2s+1)} = 20$$

**3.14** 已知单位反馈系统的开环传递函数:

$$(1) G(s) = \frac{50}{(0.1s+1)(2s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

试求位置误差系数  $K_p$ , 速度误差系数  $K_v$ , 加速度误差系数  $K_a$ 。

解

(1) 此系统是 0 型系统, 且  $K=50$ , 故查表可得

$$K_p = K = 50$$

$$K_v = 0$$

$$K_a = 0$$

(2) 根据误差系数的定义式可得

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s(s^2 + 4s + 200)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2 + 4s + 200} = \frac{K}{200}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK}{s^4 + 4s + 200} = 0$$

(3) 根据误差系数的定义式可得

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s(s^2+2s+10)} = \infty$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(2s+1)(4s+1)}{(s^2+2s+10)} = 1$$

3.15 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.25s+1)}$$

试求: (1) 使系统稳定的  $K$  值范围; (2) 要求闭环系统全部特征根都位于  $\text{Res} = -1$  直线之左, 确定  $K$  的取值范围。

解

(1) 特征方程为  $1+G(s)=0$ , 即

$$0.025s^3 + 0.35s^2 + s + K = 0$$

要使系统稳定, 根据赫尔维茨判据, 应有

$$\begin{cases} K > 0 \\ 0.35 > 0.025K \end{cases}$$

即

$$0 < K < 14$$

(2) 令  $s=z-1$ , 代入系统特征方程, 得

$$0.025z^3 + 0.275z^2 + 0.375z + K - 0.675 = 0$$

要使闭环系统全部特征根都位于  $s$  平面  $\text{Res} = -1$  直线之左, 即位于  $z$  平面左平面, 应有

$$\begin{cases} K-0.675>0 \\ 0.375 \times 0.275 > 0.025(K-0.675) \end{cases}$$

即

$$0.675 < K < 4.8$$

3.16 已知单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(1+Ts)(1+2s)}$$

确定使闭环系统稳定的  $T$  和  $K$  的范围,并以  $K$  和  $T$  为坐标轴做出稳定区域图。

解

系统特征方程为  $1+G(s)=0$ ,即

$$2Ts^3 + (2+T)s^2 + (1+K)s + K = 0$$

所以劳斯表为:

$s^3$	$2T$	$1+K$
$s^2$	$T+2$	$K$
$s^1$	$\frac{(T+2)(1+K)-2TK}{T+2}$	
$s^0$	$K$	

为使系统闭环稳定,有

$$\begin{cases} 2T > 0 \\ T+2 > 0 \\ \frac{(T+2)(1+K)-2TK}{T+2} > 0 \\ K > 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} T > 2 \\ 0 < K < \frac{T+2}{T-2} \end{cases}$$

稳定区域图如图 3-11 所示。

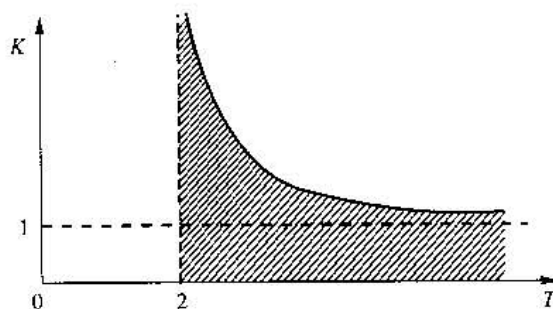


图 3-11 稳定区域图

3.17 系统结构图如图 3-12 所示。试判别系统闭环稳定性,并确定系统的稳态误差  $e_{ssr}$  及  $e_{ssn}$ 。

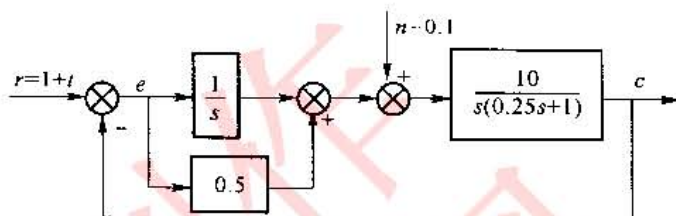


图 3-12 系统结构图

解

开环传递函数  $G(s) = \left( \frac{1}{s} + 0.5 \right) \frac{10}{s(0.25s+1)} = \frac{10+5s}{s^2(0.25s+1)}$

闭环传递函数  $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{10+5s}{0.25s^3+s^2+5s+10}$

即系统特征多项式为  $0.25s^3+s^2+5s+10=0$

劳斯表为

$s^3$	0.25	5
$s^2$	1	10
$s^1$	2.5	
$s^0$	10	

由于表中第一列元素全为正,所以系统闭环稳定,又因为  $G(s) = \frac{10+5s}{s^2(0.25s+1)}$  有两个积分环节,为 II 型系统,输入  $r(t)=1+t$ , II 型系统可无静差跟踪,所以  $e_{ssr}=0$ 。

对扰动输入,稳态误差取决于扰动点以前的传递函数  $G_1(s)$ ,由于本系统中,  $G_1(s) = \frac{1}{s} + 0.5 = \frac{0.5s+1}{s}$ ,有一个积分环节,且  $n(t)=0.1$  为阶跃输入,故可无静差跟踪,所以  $e_{ssn}=0$ 。

3.18 某复合控制系统结构图如图 3-13 所示,其中

$$G_1(s) = as^2 + bs, G_2(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)(1+0.02s)}$$

试选择  $a, b$  的值,使系统由 I 型系统提高为 III 型系统。

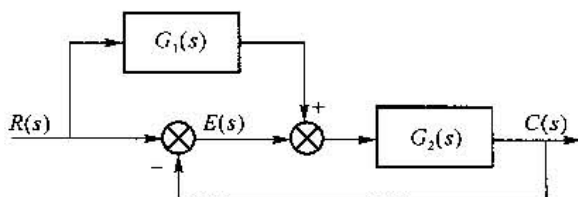


图 3-13 系统结构图

解

由梅森公式可求得系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2(s)[1+G_1(s)]}{1+G_2(s)} = \frac{10(as^2+bs+1)}{0.002s^3+0.12s^2+s+10}$$

因为  $0.12 - 0.02 > 0$ , 所以由赫尔维茨判据可知该系统稳定。

设  $G(s)$  为等效单位反馈系统开环传递函数, 则

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)} = \frac{10(as^2 + bs + 1)}{0.002s^3 + (0.12 - 10a)s^2 + (1 - 10b)s}$$

要使系统变为Ⅲ型系统,  $G(s)$  的分母应有  $s^3$  因子, 即  $0.12 - 10a = 0$  且  $1 - 10b = 0$ , 所以

$$a = 0.012, b = 0.1$$

**3.19** 一单位反馈的三阶系统, 其开环传递函数为  $G(s)$ , 要求:

(1) 在  $r(t) = t$  作用下的稳态误差为 1.2;

(2) 三阶系统的一对闭环主导极点为  $s_{1,2} = -1 \pm j1$ 。

求同时满足上述条件的系统开环传递函数  $G(s)$ 。

**解**

由条件(1)可知, 系统必为Ⅰ型系统, 又为三阶系统, 则开环传递函数可写成如下形式:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + as + b)}$$

$$\text{且 } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K}{b} = \frac{1}{1.2}, \text{ 即}$$

$$b = 1.2K$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s(s^2 + as + b) + K}$$

由条件(2)可知, 系统的闭环主导极点为  $s_{1,2} = -1 \pm j1$ , 设  $s_3 = -c$ , 则

$$\begin{aligned} s(s^2 + as + b) + K &= (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) \\ &= (s^2 + 2s + 2)(s + c) \\ &= s^3 + (2 + c)s^2 + (2 + 2c)s + 2c \end{aligned}$$

$$\text{得} \quad 2 + c = a, 2 + 2c = b, 2c = K$$

又  $b = 1.2K$ , 可解得  $a = 7, b = 12, c = 5, K = 10$ , 即

$$G(s) = \frac{10}{s(s^2 + 7s + 12)}$$

**3.20** 设系统如图 3-14 所示, 要求:

(1) 当  $a = 0$  时, 确定系统的阻尼比  $\zeta$ , 无阻尼自然振荡频率  $\omega_n$  和  $r(t) = t$  作用下系统的稳态误差;

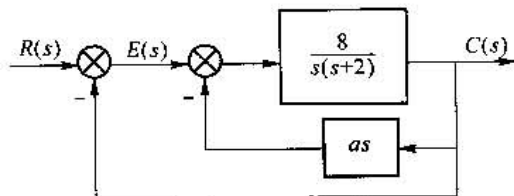


图 3-14 控制系统

(2) 当  $\zeta=0.7$  时, 确定参数  $a$  值及  $r(t)=t$  作用下系统的稳态误差;

(3) 在保证  $\zeta=0.7$  和  $e_{ssr}=0.25$  的条件下, 确定参数  $a$  及前向通道增益  $K$ 。

解

(1) 当  $a=0$  时,

$$\Phi_e(s) = \frac{\frac{8}{s(s+2)}}{1 + \frac{8}{s(s+2)}} = \frac{8}{s^2 + 2s + 8}$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 8 \\ 2\zeta\omega_n = 2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \zeta = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.354 \\ \omega_n = 2\sqrt{2} = 2.828 \end{cases}$$

$$\Phi_c(s) = \frac{1}{1 + \frac{8}{s(s+2)}} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 8}$$

所以

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_c(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 8} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{4}$$

或由开环传递函数

$$G(s) = \frac{8}{s(s+2)}$$

得

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 4, e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{4}$$

$$(3) \text{ 因为 } G(s) = \frac{\frac{8}{s(s+2)}}{1 + \frac{8}{s(s+2)}as} = \frac{8}{s^2 + (2+8a)s}$$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{8}{s^2 + (2+8a)s}}{1 + \frac{8}{s^2 + (2+8a)s}} = \frac{8}{s^2 + (2+8a)s + 8}$$

所以  $\omega_n^2 = 8$ , 即  $\omega_n = 2\sqrt{2}$ 。

$$2\zeta\omega_n = 2 + 8a$$

$$a = \frac{1}{8} (2\zeta\omega_n - 2) = \frac{1}{4} (0.7 \times 2\sqrt{2} - 1) = 0.245$$

此时

$$G(s) = \frac{\frac{8}{s(s+2)}}{1 + \frac{8as}{s(s+2)}} = \frac{8}{s(s+3.96)}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{8}{3.96} = 2.02$$

当  $r(t)=1$  时

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.495$$

(4) 设前向通路增益为  $K$ , 则

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1 + \frac{Kas}{s(s+2)}} = \frac{K}{s(s+2+aK)}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K}{2+aK}$$

$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + (2+aK)s + K}$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = K \\ 2\zeta\omega_n = 2+aK \end{cases}$$

由  $e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2+aK}{K} = 0.25$  及  $\zeta=0.7$  可解得

$$a=0.186, K=31.16$$

3.21 已知系统的结构如图 3-15 所示。

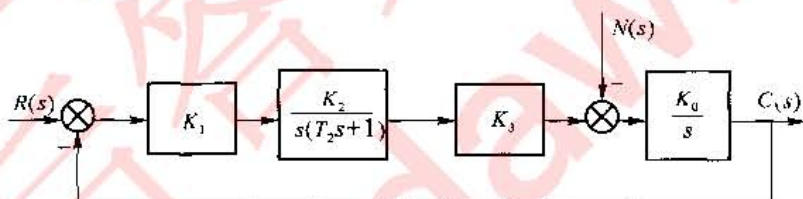


图 3-15 系统结构图

(1) 试判断系统是否稳定?

(2) 讨论消除系统不稳定可采取哪些措施?

解

$$(1) \Phi(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 K_3}{T_2 s^3 + s^2 + K_0 K_1 K_2 K_3}$$

由于闭环特征多项式中有一缺项, 因此系统肯定不稳定。

(2) 改善系统稳定的方法有两种。

方法一: 采用比例-微分控制, 如图 3-16 所示。

此时闭环特征方程为

$$T_2 s^3 + s^2 + K_0 K_1 K_2 K_3 \tau s + K_0 K_1 K_2 K_3 = 0$$

所以, 只要  $K_0, K_1, K_2, K_3, T_2$  均大于零, 且  $\tau > T_2$ , 闭环就稳定。

方法二: 对有积分环节的部分采用局部比例反馈, 如图 3-17 所示。参数请读者自行完成。

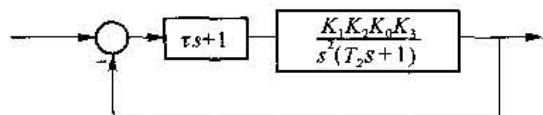


图 3-16 比例-微分控制

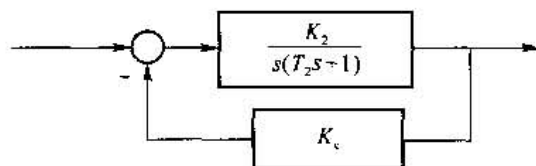


图 3-17 对积分环节采用局部比例反馈

3.22 控制系统的结构图如图 3-18 所示。

(1) 当  $K_f=0$  时, 确定系统的阻尼比  $\zeta$ , 无阻尼自然振荡频率  $\omega_n$  和  $r(t)=t$  作用下系统的稳态误差;

(2) 当  $\zeta=0.6$  时, 确定参数  $K_f$  值及  $r(t)=t$  作用下系统的稳态误差;

(3) 当  $r(t)=t$  时, 欲保持  $\zeta=0.6$  和  $e_{ssr}=0.2$ , 试确定系统中的  $K_f$  值, 此时放大器系数  $K_A$  应为多少?

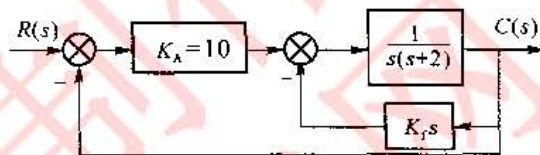


图 3-18 系统结构图

解

开环传递函数

$$G(s) = \frac{K_A \frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{1}{s(s+2)} K_f s} = \frac{K_A}{s^2 + (2+K_f)s}$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{K_A}{2+K_f}$$

$r(t)=t$  时的稳态误差

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2+K_f}{K_A}$$

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K_A}{s^2 + (2+K_f)s}}{1 + \frac{K_A}{s^2 + (2+K_f)s}} = \frac{K_A}{s^2 + (2+K_f)s + K_A}$$

(1) 当  $K_A=10, K_f=0$  时

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 10 \\ 2\zeta\omega_n = 2 + K_f = 2 \end{cases}$$

所以

$$\omega_n = 3.16, \zeta = 0.316$$

$r(t)=t$  时的静态误差

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2+K_f}{K_A} = 0.2$$

(2) 当  $K_A=10, \zeta=0.6$  时

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \\ 2\zeta\omega_n = 2 \times 0.6 \times 3.16 = 2 + K_f \end{cases}$$

所以

$$K_f = 1.792$$

$r(t)=t$  时

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2+K_f}{K_A} = 0.3792$$

(3) 因为  $\zeta=0.6, e_{ssr}=0.2$ , 所以

$$\frac{2+K_f}{K_A}=0.2$$

$$\omega_n^2=K_A, 2\zeta\omega_n=2+K_f$$

可得

$$K_f=5.2, K_A=36$$

**3.23** 设系统的结构如图 3-19 所示, 测得系统的阶跃响应曲线如图 3-20 所示。试判断每一种情况下系统的内环和外环的反馈极性, 以“+”表示正反馈, “-”表示负反馈, “0”表示断路。

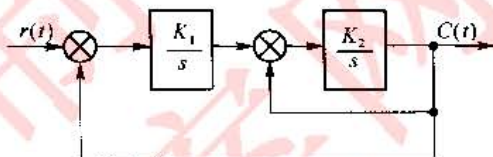


图 3-19 系统结构图

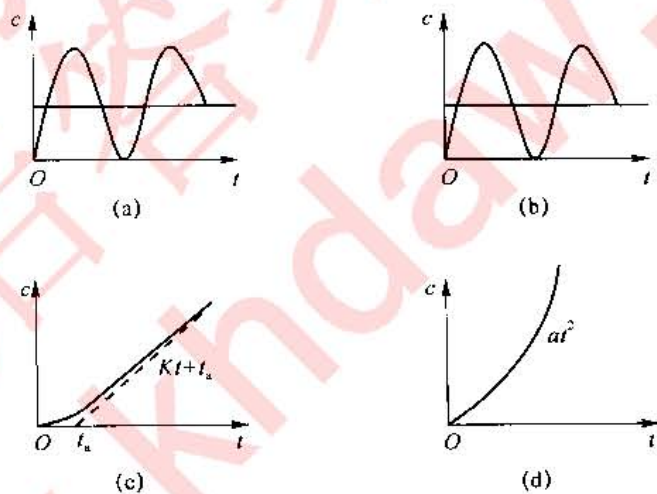


图 3-20 系统的阶跃响应曲线

解

由图 3-19 可得

$$\Phi(s)=\frac{K_1 K_2}{s^2 \mp K_2 s \mp K_1 K_2}$$

由图 3-20(a)可知, 系统阶跃响应为等幅振荡, 表示系统  $\zeta=0$ 。闭环特征方程应为  $s^2+K_1 K_2=0$ 。因此, 外环为“-”, 内环为“0”。

由图 3-20(b)可知, 系统阶跃响应为发散振荡, 表示系统  $\zeta<0$ , 存在正实部根。此时, 闭环特征方程应为  $s^2-K_2 s+K_1 K_2=0$ 。故外环为“-”, 内环为“+”。

由图 3-20(c)可知, 系统阶跃响应为一个斜坡函数, 表示闭环特征方程有一个积分环节。闭环传递函数为  $\Phi(s)=\frac{K_1 K_2}{s(s+K_2)}$ 。故外环为“0”, 内环为“-”。此时

$$c(t)=\mathcal{L}^{-1}[C(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1 K_2}{s^2(s+K_2)}\right]=K_1 t-\frac{K_1}{K_2}(1-e^{-K_2 t})$$

由图 3-20(d)可知,系统阶跃响应为加速度函数,表示闭环特征方程有两个积分环节。系统传递函数应为  $G(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2}$ 。故外环为“0”,内环也为“0”。此时

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)R(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1 K_2}{s^3}\right] = \frac{K_1 K_2}{2} t^2$$

**3.24** 已知系统的结构图如图 3-21 所示,其中  $n(t) = 1(t)$ 。试问,能否通过调整  $K_1$  值,使  $e_{ssn} = -0.1$ ?

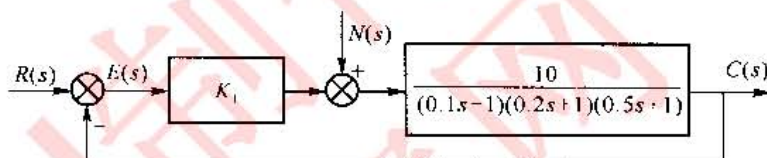


图 3-21 系统结构图

解

(1) 按题意,若使 
$$e_{ssn} \approx \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-N(s)}{G_1(s)} = -\frac{1}{K_1} = -0.1$$

故  $K_1 = 10$

(2) 核对当  $K_1 = 10$  时系统的稳定性。因为闭环特征方程为

$$(s+10)(s+5)(s+2) + 1000K_1 = 0$$

当  $K_1 = 10$  时,有

$$s^3 + 17s^2 + 80s + 10100 = 0$$

用赫尔维茨判据,有

$$17 \times 80 - 10100 \times 1 = -8740 < 0$$

所以闭环系统不稳定,表示  $K_1 = 10$  不可能使  $e_{ssn} = -0.1$ 。为了保证系统稳定,取  $0 < K_1 < 1.26$ ,故  $|e_{ssn}| \geq 0.735$ 。

**3.25** 某位置随动系统的方框图如图 3-22 所示。试用 MATLAB 求此系统的单位阶跃响应曲线。

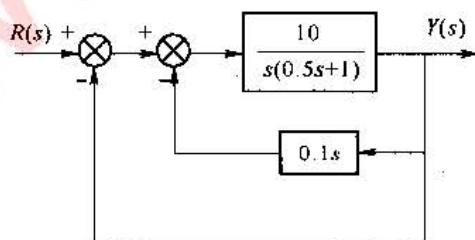


图 3-22 随动系统的方框图

解

先求系统的传递函数,代码如下:

```
>> G = tf([10], conv([1 0], [0.5 1]));
H = tf([0.1 1], [1]);
GH1 = feedback(G, H);
```

```
GH = feedback(GH1,1);
```

运算结果如下:

Transfer function,

10

-----  
0.5s<sup>2</sup> + 2s + 20

绘制阶跃响应曲线,代码如下:

```
>>GH = tf([10],[0.5 2 20]);
```

```
step(GH)
```

```
title('单位阶跃响应曲线');
```

```
grid
```

运行结果如图 3-23 所示。

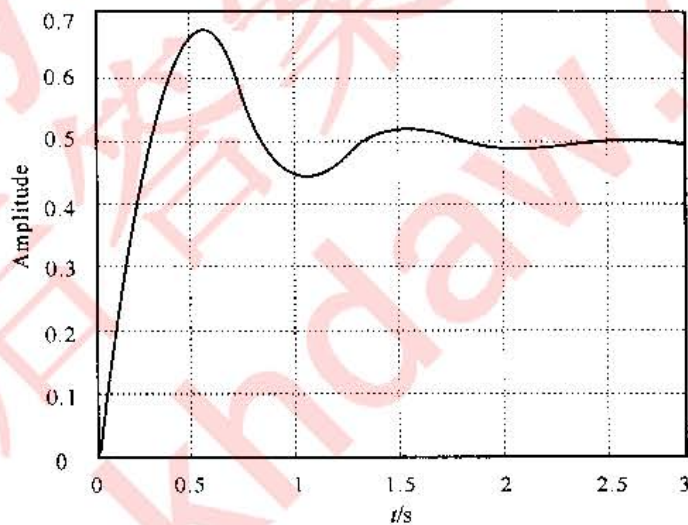


图 3-23 随动系统单位阶跃响应曲线

**3.26** 二阶控制系统传递函数  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ , 已知  $\zeta = 0.6$ ,  $\omega_n = 5$  rad/s。试

用 MATLAB 求单位阶跃响应曲线和脉冲响应曲线的性能参数指标。

**解**

子程序代码如下:

```
% 系统动态参数性能函数
```

```
function[Mo,tr,ts,tp] = tstats(t,ys)
```

```
dimt = length(t);
```

```
[mp,ind] = max(ys)
```

```
yss = ys(dimt);
```

```
% 超调量
```

```
Mo = 100 * (mp - yss)/yss;
```

```
% 峰值时间
```

```
tp = t(ind);
```

```

% 过渡过程时间
for i = 1:dimt
    if ys(i) > 1.02 * yss
        ts = t(i);
    elseif ys(i) < 0.98 * yss
        ts = t(i);
    end
end
% 上升时间
for i = 1:dimt;
    if ys(i) < 0.1 * yss
        t1 = t(i);
    elseif ys(i) == mp
        break;
    end
end
for i = 1:dimt;
    if ys(i) < 0.9 * yss
        t2 = t(i);
    elseif ys(i) == mp
        break;
    end
end
tr = t2 - t1;
单位阶跃响应曲线性能指标,主程序如下:
>>G = tf([5^2],[1 2 * 0.6 * 5 5^2]);
t = [0:0.01:10]';
ys = step(G,t);
[Mo,tr,ts,tp] = tstats(t,ys)

```

运行结果:

最大超调量:

Mo =

9.4755

上升时间

tr = 0.3800

过渡过程时间

ts =

1.1800

峰值时间

tp =  
0.7900

**3.27** 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{0.2(s+2)}{s(s+0.5)(s+0.8)(s+3)}$ , 试用 MATLAB 判断此闭环系统的稳定性。

**解**

首先求闭环系统的特征多项式, 程序代码如下:

```
>>z = -2;  
p = [0 -0.5 -0.8 -3];  
k = 0.2;  
Go = zpk(z,p,k);  
Gc = tf(feedback(Go,1));  
dc = Gc.den;  
dens = poly2str(dc{1},'s')
```

运行结果:

```
dens =  
s^4 + 4.3s^3 + 4.3s^2 + 1.4s + 0.4
```

根据多项式, 求其特征根来判断系统的稳定性。程序如下:

```
>>den = [1 4.3 4.3 1.4 0.4];  
p = roots(den)
```

运行之后, 得特征根如下:

```
p =  
-3.0121  
-1.0000  
-0.1440 + 0.3348j  
-0.1440 - 0.3348j
```

由于只有负实部的特征根, 故此单位负反馈控制系统是稳定的。

**3.28** 对题 3.27 中的系统, 利用 MATLAB 的零极点图来判断其系统的稳定性。

**解**

程序代码如下:

```
>>z = -2;  
p = [0 -0.5 -0.8 -3];  
k = 0.2;  
Go = zpk(z,p,k);  
Gc = tf(feedback(Go,1));  
[z,p,k] = zpkmdata(Gc,'v')  
pzmap(Gc)
```

运行后, 零极点及其增益的值如下:

$z =$   
 $-2.0000$   
 $p =$   
 $-3.0121$   
 $-1.0000$   
 $-0.1440 + 0.3348j$   
 $-0.1440 - 0.3348j$   
 $k =$   
 $0.2000$

零极点图如图 3-24 所示。

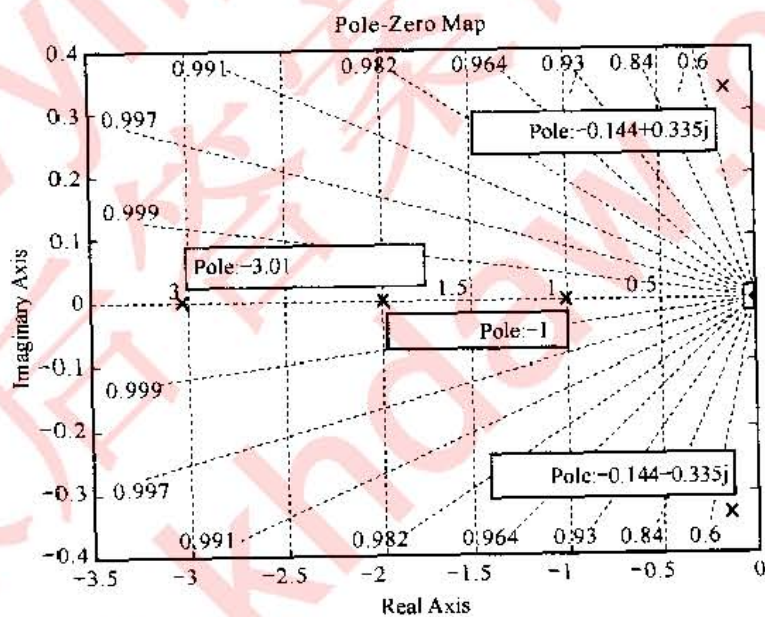


图 3-24 闭环系统零极点图

3.29 已知控制系统结构图如图 3-25 所示。试求：

- (1) 在输入  $u(t)$  与干扰  $f(t)$  作用下, 输出  $y(t)$  的拉氏变换  $Y(s)$ ;
- (2) 当输入  $u(t) = 6t + 4$ , 无干扰作用时, 求系统的静态误差  $e(\infty)$ ;
- (3) 在(2)的输入基础上, 再加上  $f(t) = 1$  的干扰, 求系统的静态误差  $e(\infty)$ 。

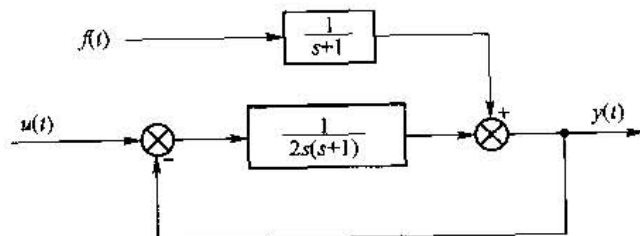


图 3-25 系统结构图

解

(1) 由图 3-13 可得

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{2s(s+1)}}{1 + \frac{1}{2s(s+1)}} = \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}$$

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{(s+1)}}{1 + \frac{1}{2s(s+1)}} = \frac{2s}{2s^2 + 2s + 1}$$

由上述式子可得

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_u(s)U(s) + Y_f(s)F(s) \\ &= \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}U(s) + \frac{2s}{2s^2 + 2s + 1}F(s) \end{aligned}$$

(2) 当  $f(t)=0$  时, 系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}$$

系统的闭环特征方程式为  $D(s) = 2s^2 + 2s + 1$ 。显然,  $D(s)$  不存在正实部的特征根, 即闭环系统不稳定。

由开环传递函数可知此系统为 I 型系统。根据静态误差系数法可得

$$K_p = \infty, K_v = 1/2$$

当输入为  $u(t) = 6t + 4$  时, 令  $u_1(t) = 4$ ,  $u_2(t) = 6t$ , 则  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ , 此时有

$$e_{ssu1} = 0, e_{ssu2} = 6/K_v = 12$$

则系统的稳态误差为

$$e(\infty) = e_{ssu} = e_{ssu1} + e_{ssu2} = 0 + 12 = 12$$

(3) 由图 3-25 可得

$$\Phi_{ef}(s) = 0 - \frac{Y(s)}{F(s)} = -\frac{2s}{2s^2 + 2s + 1}$$

即由  $f(t)$  引起的误差为

$$E_f(s) = \Phi_{ef}(s)F(s) = -\frac{2s}{2s^2 + 2s + 1} \frac{1}{s}$$

显然上式可以使用终值定理, 所以

$$e_{ssf} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( -\frac{2s}{2s^2 + 2s + 1} \frac{1}{s} \right) = 0$$

此时系统的稳态误差为

$$e(\infty) = e_{ssu} + e_{ssf} = 12 + 0 = 12$$

**3.30** 系统如图 3-26 所示 ( $K > 0, T > 0$ ), 假设输入是斜坡信号, 即  $r(t) = at$ , 式中  $a$  是一个任意非零常数。试通过适当地调节  $K_i$  的值, 使系统对斜坡输入的响应稳态误差达到零。

解

由图 3-26 可得系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = (K_i s + 1) \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1 + \frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{K(K_i s + 1)}{Ts^2 + s + K}$$

系统的特征方程式为  $D(s) = Ts^2 + s + K = 0$ , 因为  $T > 0, K > 0$ , 故闭环系统稳定。

由于  $r(t) = at$ ,  $R(s) = a/s^2$ , 所以

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) = R(s) - \Phi(s)R(s) \\ &= \frac{a}{s^2} - \frac{K(K_i s + 1)}{Ts^2 + s + K} \frac{a}{s^2} \\ &= \frac{a(Ts + 1 - KK_i)}{s(Ts^2 + s + K)} \end{aligned}$$

显然上式可以使用终值定理, 所以

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a(Ts + 1 - KK_i)}{s(Ts^2 + s + K)}$$

要使  $e_{ss} = 0$ , 必须有  $1 - KK_i = 0$ 。所以, 当调节  $K_i = 1/K$  时, 系统对斜坡输入响应的稳态误差达到零。

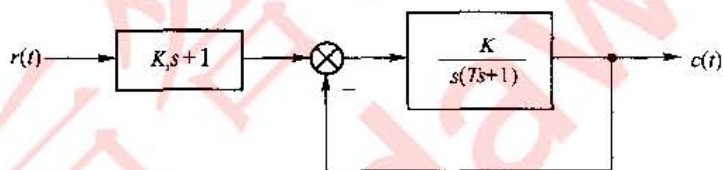


图 3-26 系统结构图

3.31 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\tau s + 1}{s(Ts + 1)(s + 1)}$$

以  $\tau$  为纵坐标轴,  $T$  为横坐标轴, 试绘出使该系统稳定的  $\tau$ 、 $T$  取值区域。

解

系统的闭环特征方程式为

$$D(s) = s(Ts + 1)(s + 1) + \tau s + 1 = Ts^3 + (T + 1)s^2 + 1 = 0$$

列劳斯表如下:

$s^3$	$T$	$\tau + 1$
$s^2$	$T + 1$	$1$
$s^1$	$\frac{(T + 1)(\tau + 1) - T}{T + 1}$	
$s^0$	$1$	

要使系统稳定, 必须同时满足以下三式:

$$T > 0$$

$$T + 1 > 0$$

$$\frac{(T + 1)(\tau + 1) - T}{T + 1} > 0$$

即

$$T > 0$$

$$\tau > -\frac{1}{T+1}$$

由上述式子绘制出使该系统稳定的  $\tau$ 、 $T$  取值区域为图 3-27 阴影部分。

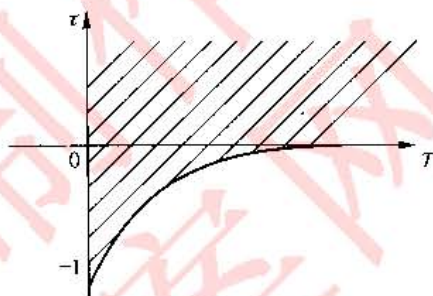


图 3-27 使系统稳定的  $\tau$ 、 $T$  取值范围

3.32 已知控制系统特征方程为

$$s^5 + 4s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 10s + 6 = 0$$

试判别系统的稳定性,并指出闭环极点在根的左平面、右平面和虚轴的个数。

解

由系统特征方程列出劳斯表如下:

$s^5$	1	4	10
$s^4$	4	8	6
$s^3$	2	$\frac{17}{2}$	
$s^2$	-9	6	
$s^1$	$\frac{59}{6}$		
$s^0$	59		

由上表可知,劳斯表的第一列元素符号变化两次,所以系统不稳定。系统的闭环极点有 2 个在复平面的右半平面;由于劳斯表中无全零行,所以虚轴上的闭环极点个数为 0;由于此系统共有 5 个闭环极点,所以有 3 个在复平面的左半平面。

3.33 已知单位反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{10}{s(0.01s+0.2)}$ 。试分析:

(1) 系统是否满足超调量  $\sigma\% \leq 5\%$  的要求?

(2) 若不满足要求,可采用速度反馈进行改进,画出改进后的系统的结构图,并确定速度反馈的参数。

(3) 求出改进后系统在输入信号  $r(t) = 2t$  作用下的稳态误差。

解

(1) 由开环传递函数可得系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1000}{s^2 + 20s + 1000}$$

由上式可得  $\omega_n^2 = 1\,000$ ,  $2\zeta\omega_n = 20$ , 即

$$\omega_n = 31.6, \zeta = 0.3$$

此时  $\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% > 5\%$ , 不满足超调量  $\sigma\% \leq 5\%$  的要求。

(2) 采用速度反馈进行改进后的系统的结构图如图 3-28 所示。

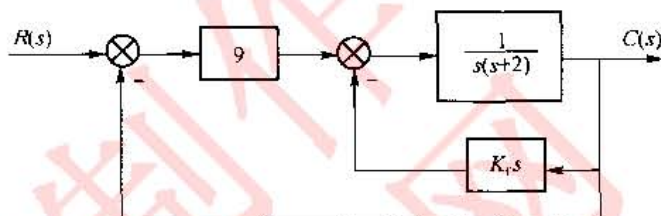


图 3-28 采用速度反馈后的系统结构图

此时系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1\,000}{s(s+1\,000\tau+20)}$$

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1\,000}{s^2(1\,000\tau+20)s+1\,000}$$

由上式可得

$$\omega_n^2 = 1\,000, 2\zeta\omega_n = 1\,000\tau+20$$

当  $\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 5\%$  时,  $\zeta = 0.69$ , 所以

$$2 \times 0.69 \times \sqrt{1\,000} = 1\,000\tau+20$$

$$\tau = 0.024$$

(3) 系统改进后, 由其开环传递函数可知, 此系统为 I 型系统。系统的开环增益为

$$K = \frac{1\,000}{1\,000\tau+20}$$

当输入信号为  $r(t) = 2t$  时, 由静态误差系数法可得

$$e_{ss} = \frac{2}{K_v} = \frac{2}{K} = \frac{2(1\,000\tau+20)}{1\,000} = 0.088$$

**3.34** 系统动态结构图如图 3-29 所示。试确定阻尼比  $\zeta = 0.6$  时的  $K_f$  值, 并求出此时系统阶跃响应的调节时间  $t_s$  和超调量  $\sigma\%$ 。

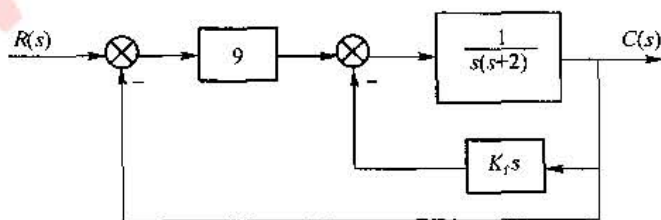


图 3-29 系统动态结构图

**解**

由图 3-29 可得系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{9}{s^2 + (K_f + 2)s + 9}$$

显然,  $\omega_n^2=9, 2\zeta\omega_n=K_t+2$ 。又由  $\zeta=0.6$  可得

$$K_t=2\zeta\omega_n-2=2\times 0.6\times 3-2=1.6$$

系统超调量为

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 9.5\%$$

系统的调节时间为

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 1.94 \text{ s}$$

**3.35** 某控制系统如图 3-30 所示。试确定  $K_1$  和  $K_2$ , 使闭环系统的无阻尼自然频率  $\omega_n=10 \text{ rad/s}$ , 阻尼比  $\zeta=0.5$ , 并求单位阶跃输入下的稳态误差。

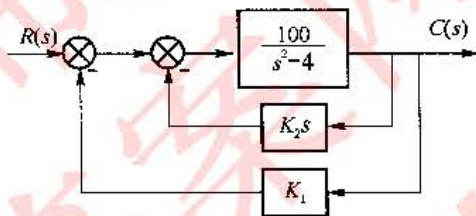


图 3-30 控制系统结构图

解

由图 3-30 可得, 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100K_1}{s^2 + 100K_2s - 4}$$

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{100K_1}{s^2 + 100K_2s + 100K_1 - 4}$$

系统的特征方程式为

$$D(s) = s^2 + 100K_2s + 100K_1 - 4 = 0$$

要想二阶系统稳定必须满足特征方程式的各阶系数都大于零, 即

$$K_1 > 0.04, K_2 > 0$$

由系统的闭环传递函数可得

$$\omega_n^2 = 100K_1 - 4 = 100$$

$$2\zeta\omega_n = 100K_2 = 10$$

即

$$K_1 = 1.04, K_2 = 0.1$$

当输入为单位阶跃函数时

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100K_1}{s^2 + 100K_2s - 4} = -26$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = -0.04$$

**3.36** 系统结构图如图 3-31 所示。若要求系统阶跃响应的性能指标: 超调量  $\sigma\% =$

20%，调节时间  $t_s = 1.8 \text{ s}$ ，试选择参数  $K_1$  和  $K_2$ ，并计算此时系统在单位斜坡信号作用下的稳态误差。

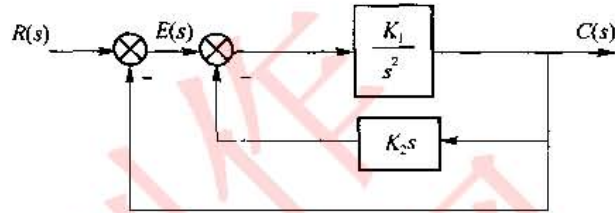


图 3-31 系统结构图

解

由题意可得

$$\sigma\% = e^{-\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 20\%, \quad t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 1.8 \text{ s}$$

即

$$\zeta = 0.46, \omega_n = 4.23$$

由图 3-31 可得，系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s + K_1 K_2)}$$

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{K_1}{s^2 + K_1 K_2 s + K_1}$$

由上式可得

$$\omega_n^2 = K_1 = 17.9$$

$$2\zeta\omega_n = K_1 K_2 = 3.9$$

即

$$K_1 = 17.9, K_2 = 0.22$$

由开环传递函数可知，这是一个 I 型系统，其开环增益为  $K = \frac{K_1}{K_1 K_2} = \frac{1}{K_2}$ 。所以，系统在单位斜坡信号作用下的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} = K_2 = 0.22$$

## 第 4 章 线性系统的根轨迹法

### 4.1 根轨迹法的基本概念

#### (1) 根轨迹

开环系统的某一参数从零到无穷变化时, 特征方程的根在  $s$  平面上变化的轨迹。

#### (2) 根轨迹与系统性能的关系

- 稳定性: 根轨迹不会穿越虚轴进入右半  $s$  平面, 则系统稳定;
- 临界开环增益: 根轨迹与虚轴交点处的  $k$  值;
- 稳态性能:

(a) 由坐标原点处的极点数确定系统类型;

(b) 根据稳态性能可以确定闭环极点位置的容许范围。

- 动态性能:

(a) 过阻尼: 所有闭环极点位于实轴上;

(b) 临界阻尼: 闭环两个实数极点重合;

(c) 欠阻尼: 闭环为复数极点。

### 4.2 根轨迹方程

设反馈控制系统闭环传递函数可写为

$$\Phi(s) = G(s)H(s) = \frac{K_G^* \prod_{i=1}^f (s - z_i) \prod_{j=1}^k (s - p_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K^* \prod_{j=1}^m (s - z_j)}$$

$K_G^*$  为开环前向通道根轨迹增益,  $K^*$  为开环根轨迹增益。

- 闭环根轨迹增益等于开环前向通道根轨迹增益;
- 闭环零点由开环前向通道传递函数的零点和反馈通道传递函数的极点组成;
- 闭环极点与开环零极点及根轨迹增益  $K^*$  有关。

根轨迹方程

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = -1$$

对应模值方程

$$K^* = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}$$

对应相角方程

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

### 4.3 根轨迹绘制的基本法则

1. 法则一：根轨迹起于开环极点，终于开环零点。
2. 法则二：根轨迹的分支数等于开环有限极点数  $n$  和有限零点数  $m$  的较大者，它们是连续的且对称于实轴。

3. 法则三：当  $n > m$  时，有  $n - m$  条根轨迹分支沿着与实轴交角为

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-m-1)$$

交点为

$$\delta_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$

的一组渐近线趋向无穷远处。

4. 法则四：若实轴上某一区域的右边开环零极点之和为奇数，则该区域必是根轨迹。

5. 法则五： $l$  条根轨迹的分离点坐标是方程

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d - p_i}$$

的解  $d$ ，分离角为  $(2k+1)\pi/l$ ，其中， $z_j$  表示开环零点， $p_i$  表示开环极点。

6. 法则六：根轨迹的起始角

$$\theta_{p_i} = (2k+1)\pi + \left( \sum_{j=1}^m \varphi_{z_j p_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{p_j p_i} \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

终止角

$$\varphi_{z_i} = (2k+1)\pi + \left( \sum_{j=1, j \neq i}^m \varphi_{z_j z_i} - \sum_{j=1}^n \theta_{p_j z_i} \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

7. 法则七：若根轨迹与虚轴相交，可用劳斯判据确定交点上的  $K^*$  和  $\omega$  值，也可令闭环特征方程中的  $s=j\omega$ ，然后分别令其实部、虚部为零而得。

8. 法则八：当  $n-m \geq 2$  时

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n p_i$$

可据此判断根轨迹的走向。

## 4.4 广义根轨迹

除根轨迹增益以外，系统其他参数发生变化时的根轨迹称为广义根轨迹。

## 4.5 系统性能的分析

- 主导极点对整个时间响应过程起主要作用；
- 相距很近的闭环零极点称为偶极子，偶极子越接近坐标原点，对系统动态性能影响越大；
- 闭环主导极点距虚轴 2~3 倍远时，可略去其影响；
- 稳定性：取决于闭环极点是否都位于  $s$  左半平面；
- 运动形式：如无闭环零点，则由闭环极点为实数或复数来决定；
- 超调量：由闭环复数主导极点来决定；
- 调节时间：由闭环主导极点来决定；
- 零点减小系统阻尼和峰值时间，超调增大；极点增大系统阻尼和峰值时间，超调减小；
- 接近原点的偶极子，必须考虑其影响。

## 习题解答

4.1 已知控制系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{s^3 + s^2 + 4}{s^3 + 3s^2 + 7s}$$

用 MATLAB 绘制根轨迹的起点和终点。

解

程序代码如下：

```
>> num = [1 1 0 4];
```

```
den = [1 3 7 0];
```

```
G = tf(num,den);
```

```

rlocus(G);
p = roots(den)
z = roots(num)

```

图 4-1 为由该控制系统的开环传递函数所得到根轨迹的起点和终点图。

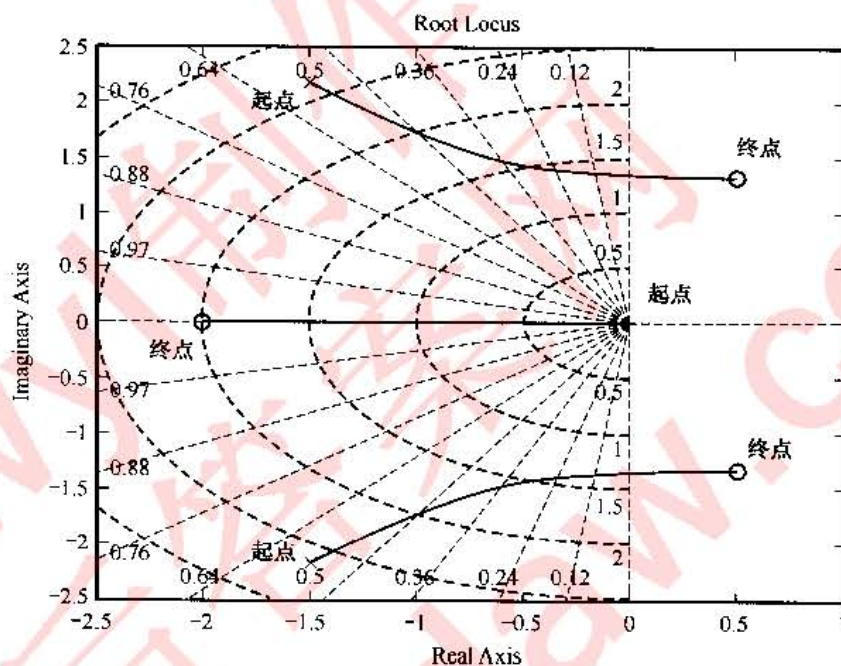


图 4-1 根轨迹的起点和终点

根轨迹零极点具体的值如下：

```

p =
      0
-1.5000 + 2.1794i
-1.5000 - 2.1794i
z =
-2.0000
 0.5000 + 1.3229i
 0.5000 - 1.3229i

```

图 4-1 显示了该系统的根轨迹。可以看到,该系统有 3 个开环极点和 3 个开环零点,因此根轨迹有 3 个分支,它们的起点是开环极点 0,  $-1.5 + 2.18i$  和  $-1.5 - 2.18i$ ,终点是开环零点  $-2$ ,  $0.5 + 1.32i$  和  $0.5 - 1.32i$ 。根轨迹的一个分支从极点 0 开始,终于零点  $-2$ ;另两条分支分别从极点  $-1.5 + 2.18i$  和  $-1.5 - 2.18i$  开始,从圆弧变化,最后分别终于零点  $0.5 + 1.32i$  和  $0.5 - 1.32i$ 。

4.2 已知控制系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 + 3s}$$

用 MATLAB 绘制根轨迹的起点和终点。

解

程序代码如下：

```
>> num = [1 0 4];
den = [1 3 0];
G = tf(num,den);
rlocus(G);
p = roots(den)
z = roots(num)
```

图 4-2 为分析控制系统所得到的根轨迹的起点和终点图。

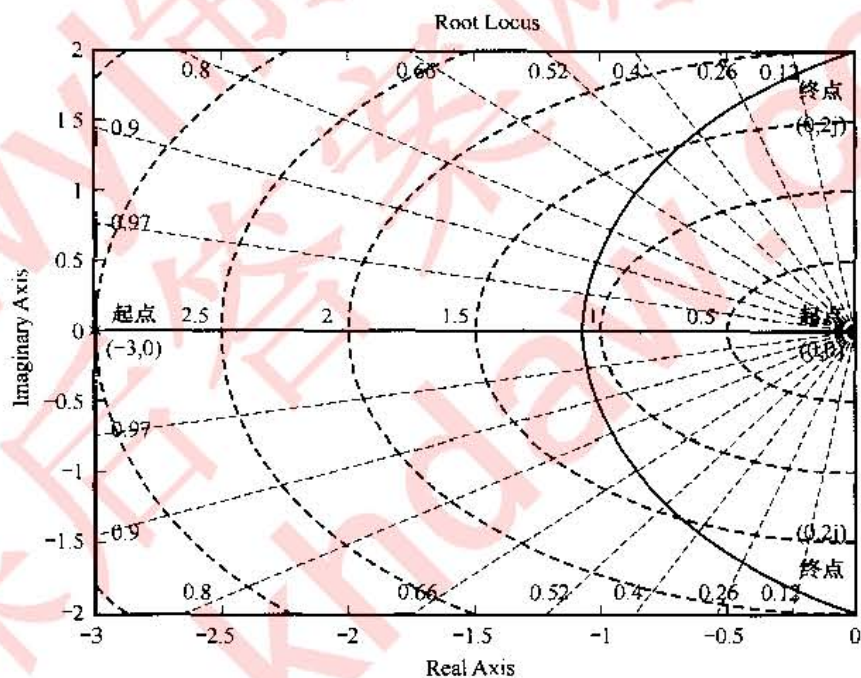


图 4-2 根轨迹的起点和终点

根轨迹零极点具体的值如下：

```
p =
    0
   -3
z =
    0 + 2.0000i
    0 - 2.0000i
```

如图 4-5 所示,该系统有 2 个开环极点和 2 个开环零点,因此根轨迹有 2 个分支,它们的起点是开环极点 0 和 -3,终点是开环零点 2i 和 -2i,根轨迹的一条分支从极点 0 开始,终于于零点 -2i,另一条分支分别从极点 -3 开始,终于于零点 2i。

4.3 已知控制系统的开环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{K}{s^4 + 5s^3 + 2s^2 + 7s}$$

用 MATLAB 绘制此系统的根轨迹和根轨迹的渐进线。

解

绘制根轨迹渐进线的子函数,程序代码如下:

```
>>function s = jjx(G)
G = tf(G);
num = G.num{1};
den = G.den{1};
dt = get(G,'inputdelay');
p = roots(den);
z = roots(num);
n = length(p);
m = length(z);\
if dt == 0
if n>m
    s = (sum(p) - sum(z))/(n - m);
sd = [];
if nargout<1
    for i = 1:n - m
        sd = [sd,s];
    end
    Ga = zpk([],sd,1);
    hold on;
    [r,k] = rlocus(Ga);
    for i = 1:n - m
        plot(real(r(i,:)),imag(r(i,:)),'r:');
    end
end
else
    disp('没有渐进线!');
    s = [];
end
else
    a = get(gca,'xlim');
    b = pi/dt;
    line(a,[b],'linesty','r:');
    line(a,[-b - b],'linesty','r:');
end
```

绘制根轨迹和根轨迹渐进线主程序代码如下:

```
>>num = [1];
```

```

den = [1 5 2 7 0];
G = tf(num,den);
rlocus(G);
grid off;
hold on;
jjx(G);

```

图 4-3 为分析控制系统开环传递函数所得到的根轨迹的渐进线。

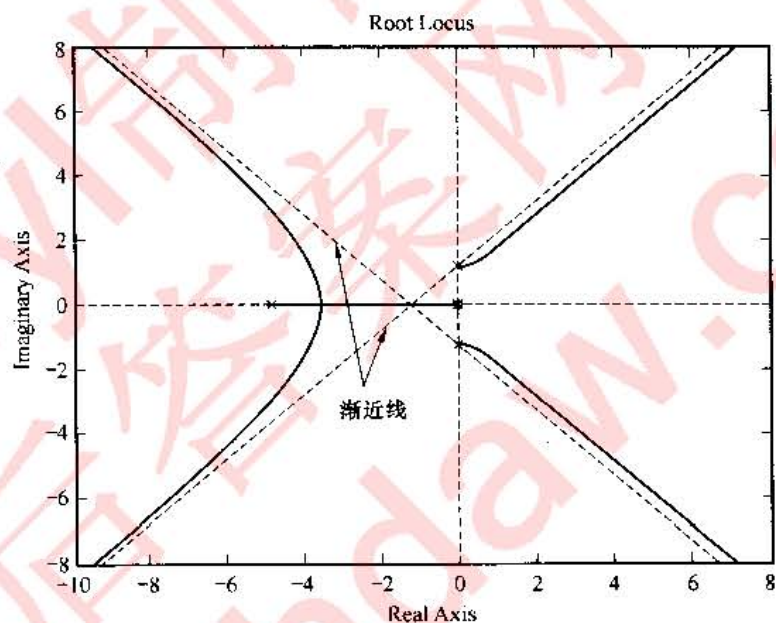


图 4-3 根轨迹的渐进线

4.4 已知单位反馈控制系统的前向通道传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

用 MATLAB 绘制系统根轨迹,并求系统根轨迹与虚轴交点处的频率和相应的增益。

**解**

根轨迹与虚轴交点的子函数,程序代码如下:

```
>>function [K,Wcg] = plzy(G)
```

```
G = tf(G);
```

```
num = G.num{1};
```

```
den = G.den{1};
```

```
AG = allmargin(G);
```

```
Wcg = AG.GMFrequency;
```

```
K = AG.GainMargin;
```

绘制系统根轨迹,系统根轨迹与虚轴交点处的频率和相应的增益的程序代码如下:

```
>>p = [0 0 -2 -4];
```

```

k = -1;
G = zpk(z,p,k);
H = 1;
GH = G * H;
rlocus(GH);
[K,Wcg] = plzr(GH)

```

图 4-4 为分析该控制系统开环传递函数所得到的根轨迹图。其中

```

K =
    0    11.9998
Wcg =
    0    1.4142

```

由程序运行结果可知,开环系统根轨迹与虚轴交点处的频率  $W_{cg}=1.4142 \text{ rad/s}$ ,相应的增益为  $K=12.0$ 。

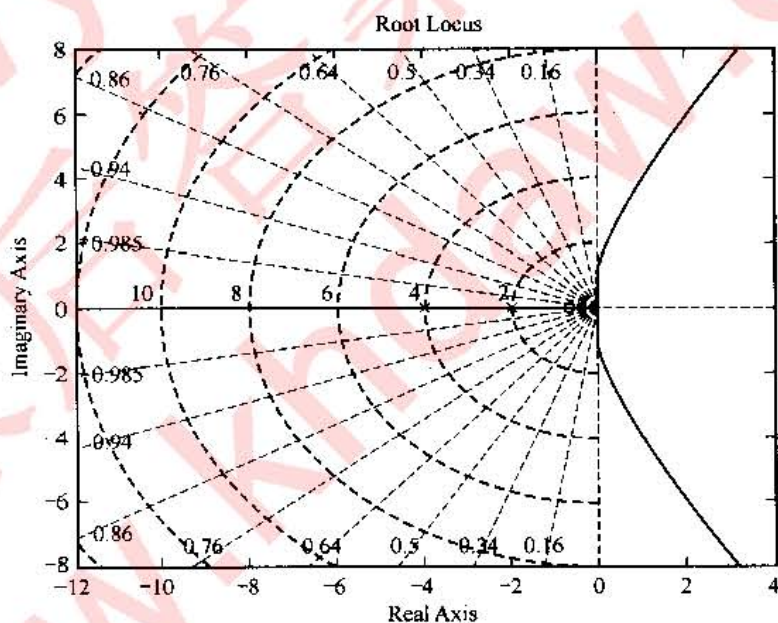


图 4-4 根轨迹图

4.5 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+6)(s+3)}$$

- (1) 绘制系统的根轨迹图 ( $0 < K < \infty$ );
- (2) 求系统临界稳定时的  $K$  值与系统的闭环极点。

解

(1) 绘制系统的根轨迹。

- ① 系统有 3 个开环极点  $p_1=0, p_2=-3, p_3=-6$ , 没有开环零点;
- ② 根轨迹有 3 条分支。这 3 条根轨迹分支分别起始于开环极点  $p_1=0, p_2=-3, p_3=-6$ , 终止于无穷远处;
- ③ 实轴上的根轨迹为  $(-\infty, -6], [-3, 0]$ ;

④ 渐近线如下:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-3-6}{3} = -3$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 160^\circ, 180^\circ$$

⑤ 分离点如下:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+3} + \frac{1}{d+6} = 0$$

解之得

$$d_1 = -1.27, d_2 = -4.72 (\text{舍去})$$

⑥ 与虚轴的交点: 将  $s=j\omega$  代入系统闭环特征方程, 令其实部、虚部都为零, 可得

$$\begin{cases} 18\omega - \omega^2 = 0 \\ K - 9\omega^2 = 0 \end{cases}$$

解之得

$$\omega = 4.24, K = 162$$

根据以上分析, 绘制系统的根轨迹图, 如图 4-5 所示。

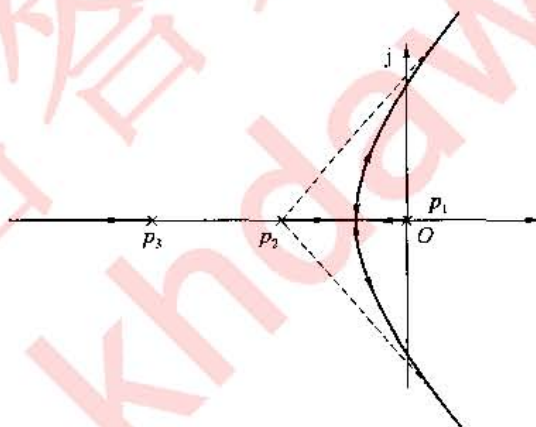


图 4-5 根轨迹图

(2) 系统临界稳定即为根轨迹与虚轴的交点处, 由以上分析可知:

临界稳定时的  $K$  值为  $K = 162$ ;

临界稳定时的闭环极点  $s = \pm j\omega = \pm j4.24$ 。

4.6 已知负反馈控制系统的闭环特征方程为

$$K^* + (s+14)(s^2+2s+2) = 0$$

(1) 绘制系统的根轨迹 ( $0 < K^* < \infty$ );

(2) 确定使复数闭环主导极点的阻尼系数  $\zeta = 0.5$  的  $K^*$  值。

解

(1) 系统的闭环特征方程为

$$K^* + (s+14)(s^2+2s+2) = 0$$

$$1 + \frac{K^*}{(s+14)(s^2+2s+2)} = 0$$

因此系统的等效开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{(s+14)(s^2+2s+2)}$$

- ① 系统有 3 个开环极点:  $p_{1,2} = -1 \pm j$ ,  $p_3 = -14$ , 没有开环零点;
- ② 根轨迹有 3 条分支, 这 3 条根轨迹分支分别起始于开环极点  $p_{1,2} = -1 \pm j$ ,  $p_3 = -14$ , 终止于无穷远处;
- ③ 实轴上的根轨迹为  $(-\infty, -14]$ ;
- ④ 渐近线如下:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{-16}{3}$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 160^\circ, 180^\circ$$

- ⑤ 分离点如下:

$$\frac{1}{d+14} + \frac{1}{d+1+j} + \frac{1}{d+1-j} = 0$$

解之得  $d_1 = -9.63$  (舍去),  $d_2 = -1.04$  (舍去);

- ⑥ 与虚轴的交点: 将  $s = j\omega$  代入系统闭环极点方程, 令其实部、虚部都为零, 可得

$$\begin{cases} 30\omega - \omega^3 = 0 \\ 28 + K^* - 16\omega^2 = 0 \end{cases}$$

解之得  $\omega = 5.48$ ,  $K^* = 452$ 。

根据以上分析, 绘制系统的根轨迹图, 如图 4-6 所示。

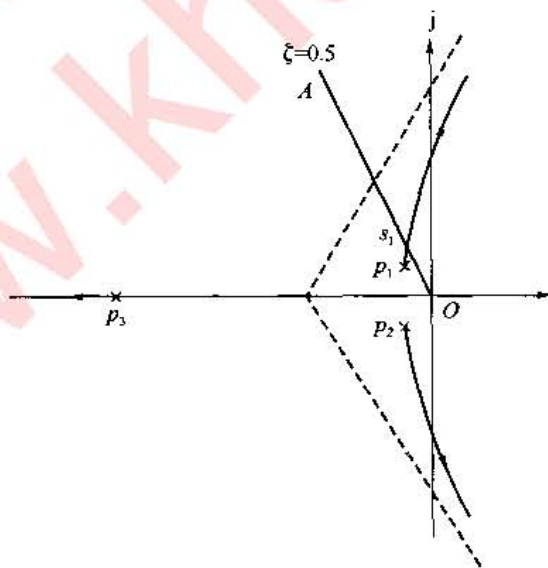


图 4-6 根轨迹

- (3) 设闭环主导极点为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 0.5\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{0.75}$$

由根之和可得

$$p_1 + p_2 + p_3 = s_1 + s_2 + s_3$$

即

$$s_3 = \omega_n - 16$$

由  $s_1, s_2, s_3$  可得系统的闭环传递特征方程为

$$D(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = s^3 + (\omega_n - s_3)s^2 + (\omega_n^2 - s_3\omega_n)s - s_3\omega_n^2$$

又由题目可得系统的闭环特征方程为

$$D(s) = s^3 + 16s^2 + 30s + K^* + 28$$

比较上述两个式子可得

$$\omega_n = \frac{15}{8}, s_3 = -\frac{113}{8}, K^* = 21.48$$

即使复数闭环主导极点的阻尼系数  $\zeta = 0.5$  的  $K^*$  值为

$$K^* = 21.48$$

4.7 如图 4-7 所示的系统, 试求:

- (1)  $K_c$  变化时的根轨迹;
- (2) 利用幅值条件求  $\zeta = 0$  时的  $K_c$  值。

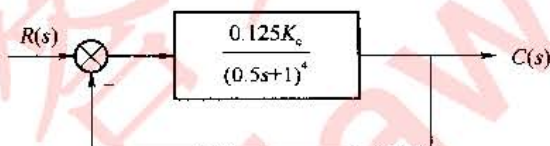


图 4-7 控制系统

解

(1) 系统的开环传递函数如下:

$$G(s) = \frac{0.125K_c}{(0.5s+1)^4} = \frac{2K_c}{(s+2)^4} = \frac{K^*}{(s+2)^4}$$

其中,  $K^* = 2K_c$ 。

- ① 系统有 4 个开环极点  $p_{1,2,3,4} = -2$ , 没有开环零点;
- ② 根轨迹有 4 条分支, 这 4 条根轨迹分支分别起始于开环极点  $p_{1,2,3,4} = -2$ , 终止于无穷远处;
- ③ 实轴上的根轨迹只有开环极点;
- ④ 渐近线如下:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{-2 \times 4}{4} = -2$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

- ⑤ 与虚轴的交点: 将  $s = j\omega$  代入系统闭环特征方程, 令其实部、虚部都为零, 可得

$$\begin{cases} 32\omega - 8\omega^3 = 0 \\ 16 + K^* - 24\omega^2 + \omega^4 = 0 \end{cases}$$

解之得

$$\omega = 2, K^* = 64, K_c = \frac{K^*}{2} = 32$$

根据以上分析,绘制系统的根轨迹图,如图 4-8 所示。

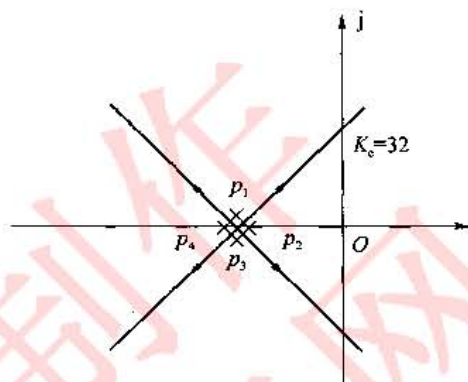


图 4-8 根轨迹图

(2)  $\zeta=0$  即根轨迹与虚轴交点处,根据幅值条件:

$$K^* |j\omega + p_1|^4 = |-2 + j2|^4 = 64$$

$$K_c = \frac{K^*}{2} = 32$$

4.8 为了克服在平衡弯道上产生巨大的离心力,高速列车配备了倾斜控制系统,其控制方程如图 4-9 所示,画出系统的根轨迹图(不要求计算开环复数起点的起始角),并画出  $K^*$  为 2 时系统单位阶跃响应曲线的大致形状。

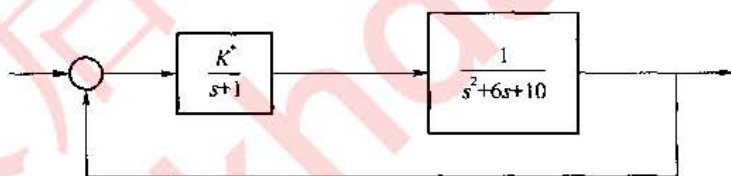


图 4-9 系统结构图

解

由图 4-9 可知,系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*}{(s+1)(s^2+6s+10)} = \frac{K^*}{(s+1)(s+3+j)(s+3-j)}$$

此时系统的开环增益为  $K = \frac{K^*}{10}$ 。

① 系统有 3 个开环极点  $p_1 = -1, p_{2,3} = -3 \pm j$ , 没有开环零点;

② 根轨迹有 3 条分支,这 3 条根轨迹分支分别起始于开环极点  $p_1 = -1, p_{2,3} = -3 \pm j$ , 终止于无穷远。

③ 实轴上的根轨迹为  $(-\infty, -1]$ ;

④ 渐近线如下:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} = \frac{-1 - 3 + j - 3 - j}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\varphi_s = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

⑤ 分离点如下:

$$\frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+3+j} + \frac{1}{d+3-j} = 0$$

即

$$3d^3 + 14d + 16 = 0$$

解之得

$$d_1 = -2.67, d_2 = -2$$

根据幅值方程可得:在分离点  $d_1 = -2.67$  处

$$K_1^* = |d_1 + 1| |d_1^2 + 6d_1 + 10| = 1.85$$

在分离点  $d_2 = -2$  处

$$K_2^* = |d_2 + 1| |d_2^2 + 6d_2 + 10| = 2$$

⑥ 与虚轴的交点:系统的闭环特征方程为

$$s^3 + 7s^2 + 16s + 10 + K^* = 0$$

列出劳斯表如下

$s^3$	1	16
$s^2$	7	$10 + K^*$
$s^1$	$\frac{102 - K^*}{7}$	
$s^0$	$10 + K^*$	

当根轨迹与虚轴有交点时,  $\frac{102 - K^*}{7} = 0$ , 即  $K^* = 102$ 。此时列出辅助方程如下:

$$7s^2 + 10 + K^* = 7s^2 + 112 = 0$$

解之得

$$s = \pm 4j$$

根据以上分析,绘制系统的根轨迹图,如图 4-10 所示。

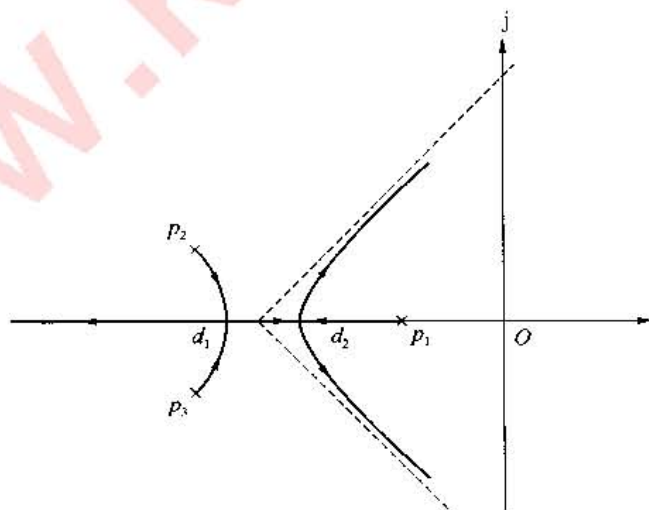


图 4-10 根轨迹

由以上分析⑤可知,当  $K^* = 2$  时,系统有两重根  $s_{1,2} = -2$ ,另一个根  $s_3 < -2.67$ ,所以系统的单位阶跃响应单调上升。由开环传递函数可知,该系统为 0 型系统,其静态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K} = \frac{1}{1+\frac{K^*}{10}} = 0.18$$

系统单位阶跃响应曲线的大致形状如图 4-11 所示。

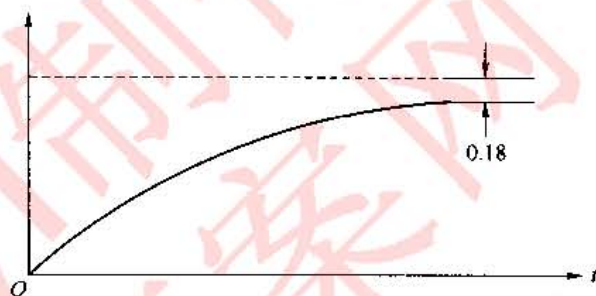


图 4-11 系统单位阶跃响应曲线

4.9 已知正反馈系统结构图如图 4-12 所示。

- (1) 绘出  $K^* = 0 \rightarrow \infty$  变化时的闭环根轨迹(求出与虚轴交点、分离点);
- (2) 确定使系统稳定且为过阻尼状态的开环增益  $K$  的范围;
- (3) 确定使系统阻尼  $\zeta = 0.707$  开环增益  $K$  值和闭环极点坐标,并计算系统的动态性能(超调量  $\sigma\%$ , 调节时间  $t_s$ )。

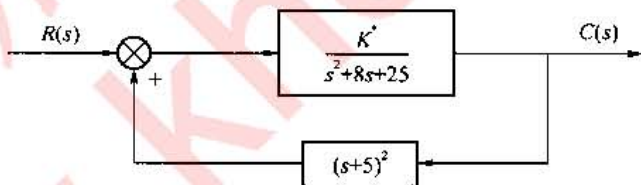


图 4-12 系统结构图

解

(1) 由图 4-12 可知,系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^* (s+5)^2}{s^2 + 8s + 25} = \frac{K^* (s+5)^2}{(s+4+3j)(s+4-3j)}$$

系统的开环增益  $K = K^*$ 。又由于此系统为正反馈系统,所以按零度根轨迹绘制法则来绘制系统的根轨迹图。

- ① 系统有 2 条开环极点  $p_{1,2} = -4 \pm 3j$ , 2 个开环零点  $z_1 = z_2 = -5$ ;
- ② 根轨迹有 2 个分支,这 2 条根轨迹分支分别起始于开环极点  $p_{1,2} = -4 \pm 3j$ ,终止于开环零点  $z_1 = z_2 = -5$ ;
- ③ 实轴上的根轨迹为整个实轴;
- ④ 此系统的根轨迹无渐近线;
- ⑤ 分离点如下:

$$\frac{1}{d+4+j3} + \frac{1}{d+4-j3} = \frac{2}{d+4}$$

解之得  $d=5$ 。

根据幅值方程可得

$$K^* = \frac{|d^2 + 8d + 25|}{|d+5|^2} = 0.9$$

⑥ 与虚轴的交点:系统的闭环特征方程为

$$D(s) = (1-K^*)s^2 + (8-10K^*)s + 25(1-K^*) = 0$$

将  $s=j\omega$  代入上述方程可得:当  $K^*=0.8$  时,  $s=\pm j5$ ;当  $K^*=1$  时,  $s=0$ 。

根据以上分析,绘制系统根轨迹图,如图 4-13 所示。

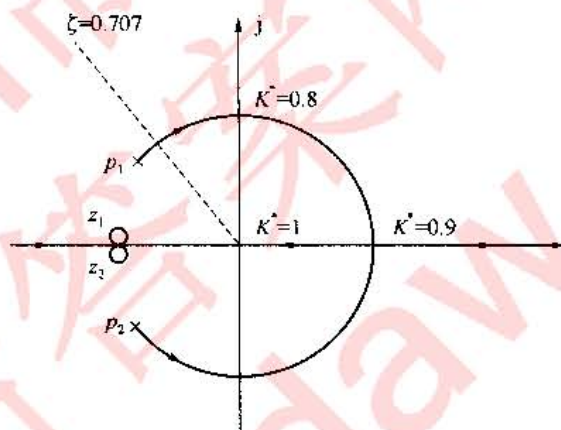


图 4-13 根轨迹图

(2) 由(1)中的分析可知,当  $K^* < 0.8$  或  $K^* > 1$  时,闭环系统稳定。又因为仅当  $K^* > 1$  时,系统的闭环特征根为两个负实根,所以,使系统稳定且为过阻尼状态的开环增益  $K$  的范围为  $K > 1$ 。

(3) 当系统阻尼  $\zeta=0.707$  时,可以令  $s_{1,2} = -\omega \pm j\omega$ 。此时系统的闭环特征方程为

$$(s+\omega-j\omega)(s+\omega+j\omega) = s^2 + 2\omega s + 2\omega^2$$

显然,  $2\omega^2 = \omega_n^2 = 25$ ,  $\omega_n = 5$ ,  $\omega = 3.535$ , 即  $s_1 = -3.535 + j3.535$ 。由幅值条件可得

$$K = K^* = \frac{|s_1^2 + 8s_1 + 25|}{|s_1 + 5|^2} = 0.317$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\omega_n/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% = 4.33\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = \frac{3.5}{0.707 \times 5} = 0.99 \text{ s}$$

4.10 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+5)}{s(s-4.8)}$$

画出  $K > 0$  时,闭环系统的根轨迹,并确定使闭环系统稳定时  $K$  的取值范围。

解

由题目可知,系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s+5)}{s(s-4.8)}$$

① 系统有 2 个开环极点  $p_1=0, p_2=4.8$ , 1 个开环零点  $z_1=-5$ ;

② 根轨迹有 2 条分支, 这 2 条根轨迹分支分别起始于开环极点  $p_1=0, p_2=4.8$ , 其中一条终止于无穷远处, 另一条终止于开环零点  $z_1=-5$  处;

③ 实轴上的根轨迹为  $(-\infty, -5], [0, 4.8]$ ;

④ 渐近线如下:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{4.8+5}{1} = 9.8$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{1} = 180^\circ$$

⑤ 分离点如下:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d-4.8} = \frac{1}{d+5}$$

解之得

$$d_1=2, d_2=-12$$

⑥ 与虚轴的交点如下: 系统的闭环特征方程为

$$D(s) = s^2 + (K-4.8)s + 5K = 0$$

由上式可得, 在根轨迹与虚轴的交点处:

$$s = \pm \sqrt{5K}j = \pm 4.9j$$

$$K=4.8$$

根据以上分析, 绘制系统的根轨迹, 如图 4-14 所示。

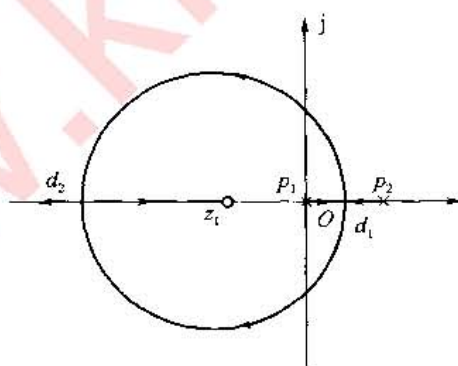


图 4-14 根轨迹图

由以上分析, 结合系统的根轨迹图 4-14 易知: 当  $K > 4.8$  时系统稳定。

## 第 5 章 线性系统的频域分析法

控制系统中的信号可以表示为不同频率正弦信号的组成。控制系统的频率特性反映了正弦信号作用下系统响应的性能。研究系统在正弦输入信号作用下系统响应的性能称为频域分析法。

### 5.1 频率特性

#### 1. 频率特性的基本概念

当正弦信号作用于稳定的线性系统时,系统输出的稳态分量依然为同频率的正弦信号,这种过程称为系统的频率响应。

设有稳定的线性定常系统,在正弦信号的作用下,系统输出的稳态分量为同频率的正弦函数,其振幅与输入正弦信号的振幅之比  $A(\omega)$  称为幅频特性;其相位与输入正弦信号的相位之差  $\varphi(\omega)$  称为相频特性。系统频率响应与输入正弦信号的复数比称为系统的频率特性,用式(5-1)来表示:

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (5-1)$$

上述的频率特性定义还可以推广到不稳定的线性定常系统中:在正弦信号的作用下,线性定常系统的输出中和输入正弦信号同频率的正弦分量与输入正弦信号的复数比,称为系统的频率特性。

设系统的传递函数为  $G(s) = C(s)/R(s)$ ,系统频率特性和传递函数有如下关系:

$$G(j\omega) = G(s) \big|_{s=j\omega} \quad (5-2)$$

#### 2. 频率特性的几何表示法

常用的频率特性曲线有以下 3 种:

① 幅相频率特性曲线,也称极坐标图或奈奎斯特曲线。它以横轴为实轴,纵轴为虚轴构成复数平面。它以  $\omega$  为参变量,用复平面上的向量来表示频率特性值  $G(j\omega)$ 。由于幅频特性为  $\omega$  的偶函数,相频特性为  $\omega$  的奇函数,故  $\omega$  从零变化到  $+\infty$  和  $\omega$  从零变化到

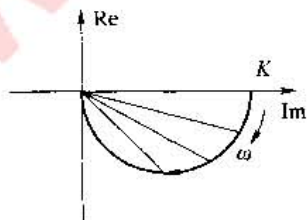


图 5-1 惯性环节的开环幅相曲线

$-\infty$  的幅相曲线关于实轴对称,因此一般只绘制  $\omega$  从零变化到  $+\infty$  的幅相曲线。在系统幅相曲线中,频率  $\omega$  为参变量,一般用小箭头表示  $\omega$  增大时幅相曲线的变化方向。

图 5-1 所示是一个惯性环节的频率特性,在复平面,把频率特性的模和角同时表示出来的图就是极坐标图。

② 对数频率特性曲线,也称波特图。它由对数幅频曲线和对数相频曲线组成。对数频率特性曲线横坐标为

$\omega$  轴,以对数刻度表示,十倍频程,纵坐标表示为  $L(\omega) = 20\lg |G(j\omega)| = 20\lg A(\omega)$ ,单位为分贝(dB)。对数相频曲线的纵坐标表示为  $\varphi(\omega)$ ,单位为度( $^\circ$ )。

对数频率特性优点:

- 展宽频率范围;
  - 增益变,幅频特性曲线只是上下移动
  - 时间常数变,相频特性曲线只是左右移动
- } 形状不变;
- 几个频率特性相乘,对数幅、相曲线相加;
  - 两个频率特性互为倒数,幅、相特性反号,关于  $\omega$  轴对称。

图 5-2 所示是一个惯性环节的对数频率特性

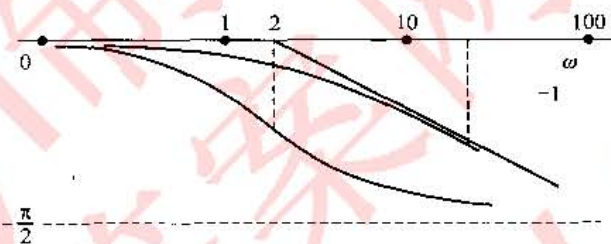


图 5-2 惯性环节的对数频率特性

③ 对数幅相曲线,也称尼柯尔斯图。它的纵坐标是  $L(\omega)$ ,单位为分贝(dB);横坐标为  $\varphi(\omega)$ ,单位为度( $^\circ$ ),均为线性分度,频率  $\omega$  为参变量。

## 5.2 典型环节的频率特性

典型环节可分为两大类:一类为最小相位环节;另一类为非最小相位环节。

(1) 比例环节

$$G(s) = K, \quad G(j\omega) = K \quad (K > 0)$$

其极坐标图如图 5-3 所示。

(2) 惯性环节

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \quad G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1},$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\arctan \omega T$$

其极坐标图与 Bode 图如图 5-4 所示。

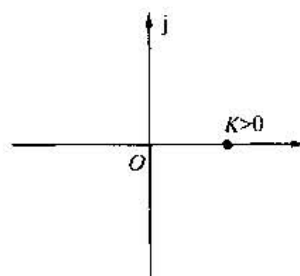


图 5-3 比例环节频率特性

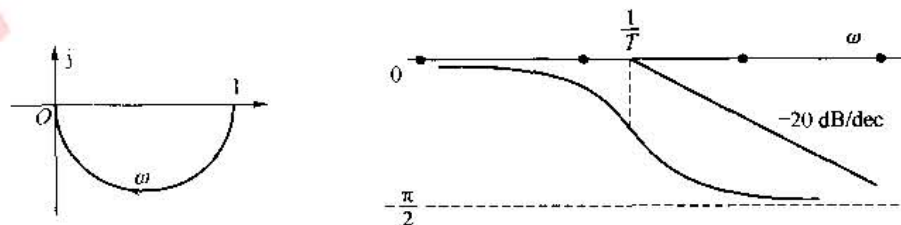


图 5-4 惯性环节的极坐标图与 Bode 图

### (3) 积分环节

$$G(s) = \frac{1}{s}, G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}, |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}, \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

其 Bode 图如图 5-5 所示。

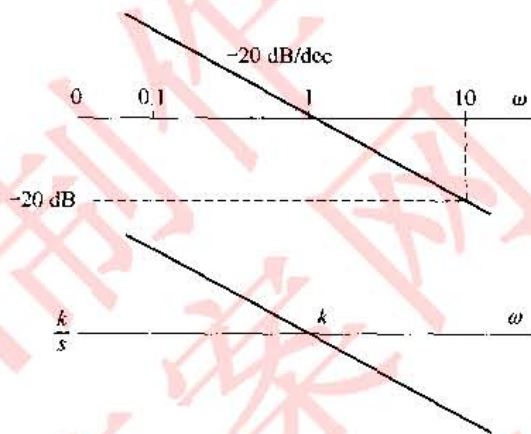


图 5-5 积分环节的 Bode 图

### (4) 二阶振荡环节

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$

显然,幅相特性都与  $\zeta$  有关,从  $0 \sim -\frac{\pi}{2} \sim -\pi$ 。图 5-6 所示是其极坐标图。图 5-7 所示是其 Bode 图。

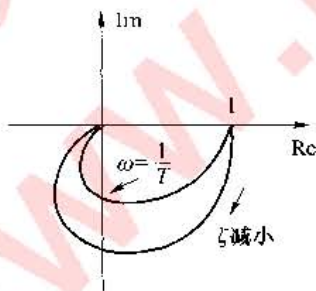


图 5-6 二阶振荡环节的极坐标图

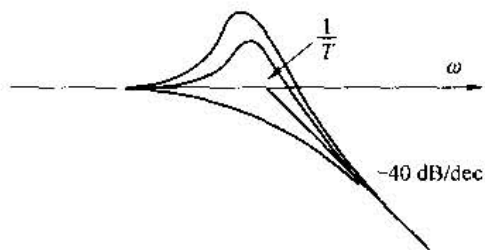


图 5-7 二阶振荡环节的 Bode 图

可以证明:峰值频率  $\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

$$\text{峰值 } M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

### (5) 微分环节(与惯性环节的幅相反号)

### (6) 延时环节

$$G(s) = e^{-s\tau}, G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j\sin \omega\tau$$

$$|G(j\omega)|=1, \angle G(j\omega)=-57.3\omega\tau$$

图 5-8 是其极坐标图与 Bode 图。

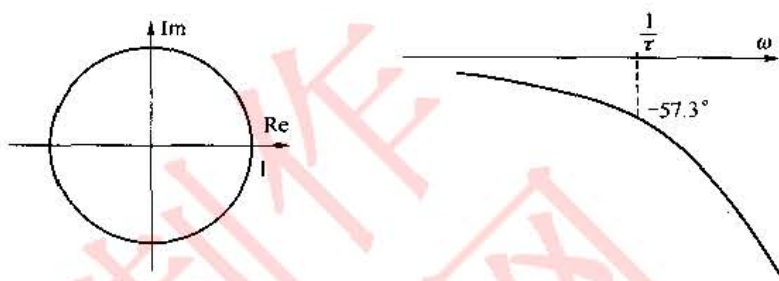


图 5-8 延时环节的极坐标图与 Bode 图

### 5.3 开环频率特性曲线的绘制

#### 1. 开环幅相曲线的绘制

概略开环幅相曲线应反映开环频率特性的 3 个重要因素：

① 开环幅相曲线的起点( $\omega=0^+$ )和终点( $\omega=\infty$ )；

② 开环幅相曲线与实轴的交点

设  $\omega=\omega_x$  时, 如果  $G(j\omega_x)H(j\omega_x)$  满足

$$\text{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=0$$

或  $\varphi(\omega_x)=\angle[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

则称  $\omega_x$  为穿越频率, 而此时开环幅相曲线与实轴的交点的坐标值为

$$\text{Re}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=G(j\omega_x)H(j\omega_x)$$

③ 开环幅相曲线的变化范围(象限、单调性)

绘制概略开环幅相曲线的规律总结如下：

1) 开环幅相曲线的起点, 取决于比例环节  $K$  和系统积分或微分环节的个数  $\nu$ 。

$\nu < 0$ , 起点为原点;  $\nu = 0$ , 起点为实轴上的点  $K$  处 ( $K$  为系统开环增益, 有正负之分);  $\nu > 0$ , 设  $\nu = 4k + i$  ( $k=0, 1, 2, \dots, i=1, 2, 3, 4$ ), 则  $K > 0$  时起点为  $i \times (-90^\circ)$  的无穷远处,  $K < 0$  时起点为  $i \times (-90^\circ) - 180^\circ$  的无穷远处。

2) 开环幅相曲线的终点, 取决于开环传递函数分子、分母多项式中最小相位环节和非最小相位环节的阶次和。

设系统开环传递函数的分子、分母多项式的阶次分别为  $m$  和  $n$  次, 记  $n_1$  和  $m_1$  分别为开环传递函数具有正实部的极点和零点的个数,  $K^*$  为系统开环根轨迹增益。

此时开环幅相曲线的终点为

$$|G(j\infty)H(j\infty)| = \begin{cases} 0, & n > m \\ |K^*|, & n = m \end{cases}$$

$$\angle[G(j\infty)H(j\infty)] = \begin{cases} -90^\circ \times (n - n_1 + m_1 - m), & K > 0 \\ -90^\circ \times (n - n_1 + m_1 - m) - 180^\circ, & K < 0 \end{cases}$$

3) 若开环系统存在等幅振荡环节, 重数  $l$  为正整数, 即开环传递函数具有以下形式:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 1\right)^l} G_1(s)H_1(s)$$

$G_1(s)H_1(s)$  不含  $\pm j\omega_n$  的极点, 则当  $\omega$  趋于  $\omega_n$  时,  $A(\omega)$  趋于无穷, 而

$$\varphi(\omega_{n-}) \approx \varphi_1(\omega_n) = \angle[G_1(j\omega_n)H_1(j\omega_n)], \varphi(\omega_{n+}) \approx \varphi_1(\omega_n) - l \times 180^\circ$$

即  $\varphi(\omega)$  在  $\omega = \omega_n$  附近, 相角突变  $-l \times 180^\circ$ 。

## 2. 开环对数频率特性曲线的绘制

绘制开环对数频率特性曲线的一般步骤如下:

① 开环传递函数典型环节分解;

② 确定一阶环节、二阶环节的交接频率, 将各交接频率按从小到大的顺序 ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ ) 标注在半对数坐标图的  $\omega$  轴上;

③ 绘制  $\omega_1$  左边的低频段渐近线。在  $\omega < \omega_1$  频段内, 开环系统幅频渐近特性的斜率取决于  $K/\omega^v$ , 因而直线斜率为  $-20 \text{ dB/dec}$  为了获得低频渐近线, 还需要确定该直线上的一点, 可以采用以下 3 种方法:

1) 任选一点  $\omega_0$ , 如果  $\omega_0 < \omega_1$ , 则渐近线过点  $\left(\omega_0, 20 \lg \frac{|K|}{\omega_0^v}\right)$ ; 如果  $\omega_0 > \omega_1$ , 则渐近线的延长线过点  $\left(\omega_0, 20 \lg \frac{|K|}{\omega_0^v}\right)$ ;

2) 取特定频率  $\omega_0 = 1$ , 则  $L_a(1) = 20 \lg K$ ;

3) 渐近线或其延长线与零分贝线的交点为  $\omega_0 = |K|^{1/v}$ 。

4) 从  $\omega = \omega_1$  点起, 渐近线斜率发生变化, 斜率变化的数值取决于  $\omega_1$  对应的典型环节的种类, 在每个频率交接点处, 斜率都发生变化, 两个相邻交接频率之间为直线。

## 5.4 频率域稳定判据

### 1. 数学基础

#### (1) 映射定理

如图 5-9 所示, 设  $W(s) = \frac{\prod_{j=1}^z (s - z_j)}{\prod_{i=1}^p (s - p_i)}$  在复平面一个封闭曲线内具有  $P$  个极点和  $Z$

个零点, 当  $s$  向量沿封闭曲线顺时针旋转一圈, 所有向量  $s - z_j, s - p_i$  也都顺时针旋转一周, 所以  $W(s)$  顺时针旋转的圈数  $N = Z - P$ 。

设系统的开环传递函数

$$Q(s) = \frac{N(s)}{P(s)} = k \frac{\prod_{j=1}^z (s - z_j)}{\prod_{i=1}^p (s - p_i)}$$

构造一个函数  $W(s) = 1 + Q(s) = \frac{P(s) + N(s)}{P(s)}$  ——→ 闭环分母  
——→ 开环分母

如图 5-10 所示, 做一封闭曲线  $D$  包围整个右半平面, 且已知有  $P$  个极点在其中, 现

在关心的是这其中是否有闭环极点。

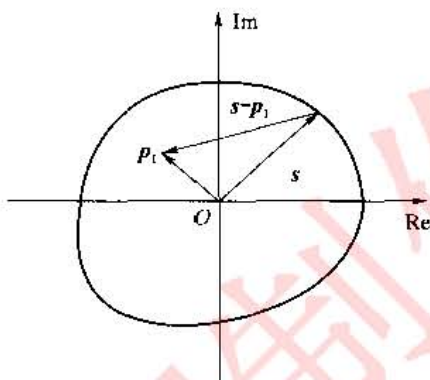


图 5-9 映射定理示意图

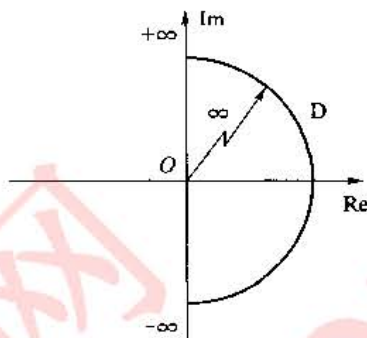


图 5-10 封闭曲线示意图

按映射定理,当  $s$  沿  $D$  形围线顺时针旋转一圈时,有

$[1+Q(s)]$  顺时针方向旋转圈数 = 闭环在右半平面的极点数( $Z$ ) - 开环在右半平面的极点数( $P$ )

(2)  $1+Q(s)$  旋转的圈数

当  $s$  沿  $D$  形围线顺旋一圈时,  $s \rightarrow \infty$ ,  $[Q(s) \rightarrow 0]$ , 因为  $Q(s)$  的分母次数大于分子次数, 即当  $s$  沿无穷大半圆旋转时,  $Q(s)$  在原点处蠕动。所以只看  $\omega$  从  $-\infty \rightarrow +\infty$  ( $s=j\omega$ ),  $1+Q(j\omega)$  旋转的周数。

按映射定理,若闭环系统稳定,则

$$[P(s)+N(s)]$$

在右半平面有 0 个极点

$$[P(s)]$$

在右半平面有  $P$  个极点

所以稳定的充要条件是:  $1+Q(j\omega)$  应顺时针向转  $-P$  圈, 即逆时针向转  $P$  圈。

什么是  $1+Q(j\omega)$ ? 如图 5-11 所示, 从  $-1$  点指向  $Q(j\omega)$  的向量,  $G_o(j\omega)$  稳定与否看其极坐标图包不包  $-1$  点。

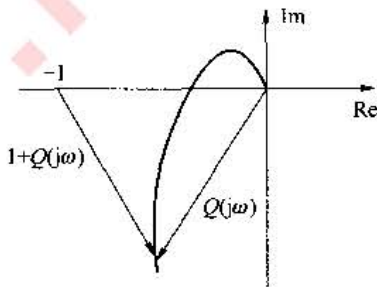


图 5-11 奈氏判据示意图

## 2. 奈奎斯特稳定判据

反馈控制系统在  $s$  右半平面上的闭环极点的个数为  $Z=P-2N$ , 其中,  $P$  为  $s$  右半平面上系统的开环极点数,  $N$  为开环幅相曲线逆时针包围  $(-1, j0)$  点的圈数。

## 3. 对数频率稳定判据

设  $P$  为开环控制系统正实部的极点数, 反馈控制系统稳定的充分必要条件是:

$\varphi(\omega_c) \neq (2k+1)\pi, k=0, 1, 2, \dots$  和  $L(\omega) > 0$  时,  $\Gamma_c$  曲线穿越  $(2k+1)\pi$  线的次数

$N = N_+ - N_-$  满足  $Z = P - 2N = 0$ 。

## 5.5 稳定裕度

### 1. 相角裕度

若  $\omega_c$  为系统的截止频率, 即  $\omega_c$  满足

$$A(\omega_c) = |G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$$

则定义相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ + \angle [G(j\omega_c)H(j\omega_c)]$$

相角裕度  $\gamma$  的含义是, 对于闭环稳定系统, 如果系统开环相频特性再滞后  $\gamma$  度, 则系统将处于临界稳定状态。相角裕度的定义如图 5-12 所示。

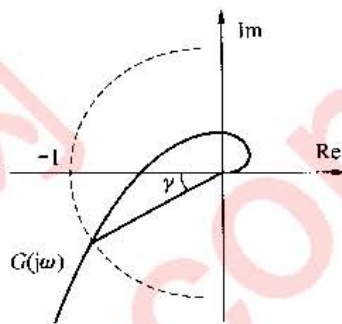


图 5-12 相角裕度示意图

### 2. 幅值裕度

当  $\omega_0$  为系统的穿越频率, 即  $\omega_0$  满足

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_0) &= \angle [G(j\omega_0)H(j\omega_0)] \\ &= (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

则定义幅值裕度为

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_0)H(j\omega_0)|}$$

幅值裕度  $K_g$  的含义是, 对于闭环稳定系统, 如果系统开环幅频特性再增大  $K_g$  倍, 则系统将处于临界稳定状态。幅值裕度定义如图 5-13 所示。

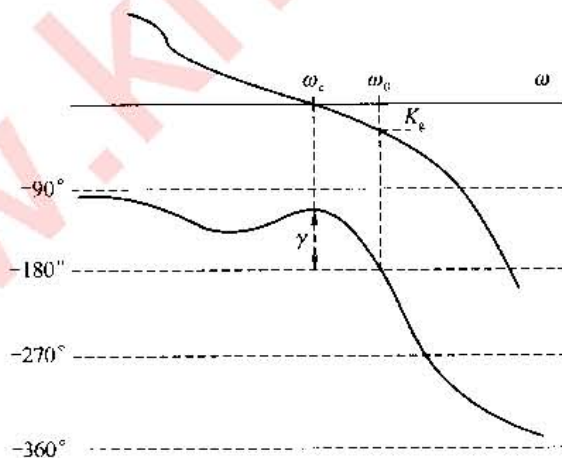


图 5-13 幅值裕度示意图

如图 5-13 所示, 当相角为  $-180^\circ$  时, 开环模小于 1, 取其倒数, 再用分贝表示就是增益裕量  $K_g$ 。

注意, 上述定义是针对最小相位系统 ( $\gamma, K_g$  都是正的), 相角裕度为正, 幅值裕度为负, 正是非最小相位系统的特征。工程上根据经验一般要求  $\gamma \geq 30^\circ$ , 在  $30^\circ \sim 60^\circ$  之间, 主要使用  $\gamma$  这一指标。

## 习题解答

5.1 设反馈系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ , 当系统的输入  $x(t) = \sin(2t+45^\circ)$  时, 求系统的稳态输出。

解

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{s+2}$$

频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \angle -\arctan \frac{\omega}{2}$$

系统输入信号为

$$x(t) = \sin(2t+45^\circ), \omega=2, A_0=1$$

$$|\Phi(j2)| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

系统的稳态输出为

$$c(t) = A_0 |\Phi(j\omega)| \sin(\omega t + 45^\circ + \angle \Phi(j\omega)) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(2t + 45^\circ - 45^\circ) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin 2t$$

5.2 若系统的单位阶跃响应  $h(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t} (t \geq 0)$ , 试求系统的频率特性。

解

输入信号的拉氏变换为  $R(s) = 1/s$ , 单位阶跃响应的拉氏变换为

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9} = \frac{36}{s(s+4)(s+9)}$$

系统的传递函数

$$G(s) = \frac{H(s)}{R(s)} = \frac{36}{(s+4)(s+9)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}s+1\right)\left(\frac{1}{9}s+1\right)}$$

系统的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1+j\frac{1}{4}\omega\right)\left(1+j\frac{1}{9}\omega\right)}$$

5.3 已知系统开环传递函数  $G(s)H(s) = \frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)}$ , 其中  $K, \tau, T$  均大于零, 试分析并绘制  $\tau > T$ 、 $T > \tau$  情况下的概略开环幅相曲线, 并用奈奎斯特判断系统的闭环稳定性。

解

由题目可知, 系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(\tau j\omega+1)}{(j\omega)^2(Tj\omega+1)} = \frac{-K(\tau j\omega+1)}{\omega^2(Tj\omega+1)}$$

由于系统  $\nu=2$ , 所以开环幅相曲线要用虚线补画  $180^\circ$  的半径为无穷大的圆弧。  
当  $\omega=0_+$  时

$$G(j0_+)H(j0_+) = \frac{-K(\tau j0_+ + 1)}{(0_+)^2(Tj0_+ + 1)} = \infty, \varphi(0_+) = -180^\circ$$

当  $\omega=+\infty$  时

$$G(j\infty)H(j\infty) = \frac{-K(\tau j\infty + 1)}{(\infty)^2(Tj\infty + 1)} = 0, \varphi(\infty) = -180^\circ$$

又由于

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K(\tau j\omega + 1)}{(j\omega)^2(Tj\omega + 1)} = \frac{-K(\tau T\omega^2 + 1) + jK\omega(T - \tau)}{\omega^2(T^2\omega^2 + 1)}$$

所以当  $\tau > T$  时, 开环幅相曲线始终处于第三象限, 如图 5-14(a) 所示。由图可知, 系统的开环幅相曲线不包围  $(-1, j0)$ , 根据奈奎斯特判据可得:  $N=0$ , 又由系统的开环传递函数可知:  $P=0$ , 即  $Z=P-2N=0$ , 闭环系统在  $s$  右半平面无极点,  $\tau > T$  时闭环系统稳定。

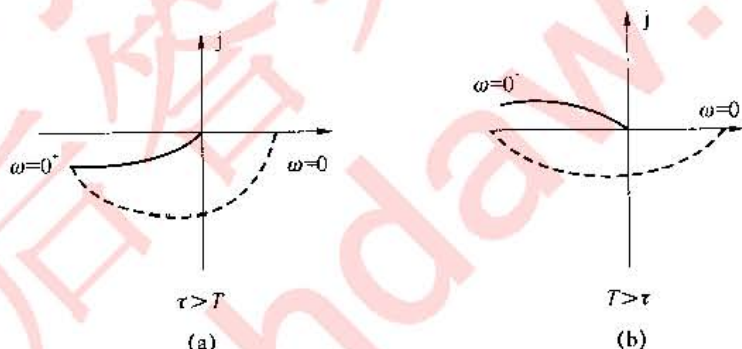


图 5-14  $\tau > T$  及  $T > \tau$  时的开环幅相曲线

当  $T > \tau$  时, 开环幅相曲线始终处于第二象限, 如图 5-14(b) 所示。由图可得  $N=-1$ , 又由系统的开环传递函数可知:  $P=0$ , 即  $Z=P-2N=2$ , 闭环系统在  $s$  右半平面有两个极点,  $T > \tau$  时闭环系统不稳定。

**5.4** 已知系统开环传递函数  $G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)\left(\frac{s^2}{4} + 1\right)}$ , 试绘制系统概略开环幅

相曲线。并用奈奎斯特判断系统的闭环稳定性。

**解**

系统的开环频率

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{s(s+1)\left(\frac{s^2}{4} + 1\right)} \bigg|_{s=j\omega} = \frac{40}{\omega^2(\omega^2 - 4) - j\omega(\omega^2 - 4)}$$

当  $\omega=0^+$  时,  $|G(j\omega)H(j\omega)| = \infty, \varphi(\omega) = -90^\circ$ ;

当  $\omega=2^-$  时,  $|G(j\omega)H(j\omega)| = \infty$ , 曲线处于第三象限;

当  $\omega=2^+$  时,  $|G(j\omega)H(j\omega)| = \infty$ , 曲线处于第一象限;

当  $\omega = +\infty$  时,  $|G(j\omega)H(j\omega)| = 0, \varphi(\omega) = -360^\circ$ , 又由于  $\nu = 1$ , 需要在幅相曲线上用虚线补画半径无穷大,  $90^\circ$  的圆弧。系统概略开环幅相曲线如图 5-15 所示。

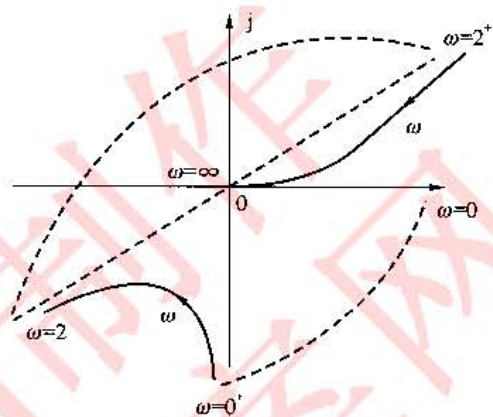


图 5-15 系统开环幅相曲线

由系统的开环传递函数可知  $P=0$ ; 由系统的开环幅相曲线图 5-15 可知  $N=-1$ 。根据以上分析, 由奈奎斯特判据可得  $Z=P-2N=2$ , 即闭环系统在  $s$  右半平面存在 2 个极点, 闭环系统不稳定。

**5.5** 已知开环系统传递函数  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)(s+1)}$ , 其中  $K, T$  均大于零, 试根据奈奎斯特判据, 确定其闭环稳定性:

- (1)  $T=2$  时,  $K$  值的范围;
- (2)  $K=10$  时,  $T$  值的范围;
- (3)  $K, T$  值的范围。

**解**

由系统的开环传递函数可知, 系统的开环幅相曲线如图 5-16 所示。

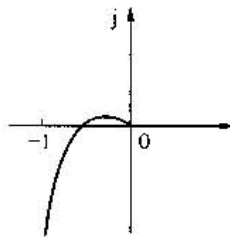


图 5-16 系统开环幅相曲线

由于  $P=0$ , 故要想闭环系统稳定, 必有  $N=0$ , 即幅相曲线不包围点  $(-1, j0)$ 。

系统的频率特性表达式如下

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)(j\omega+1)} = \frac{-K\omega^2(T+1) + jK\omega(T\omega^2-1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2-1)^2}$$

- (1)  $T=2$  时, 对于开环幅相曲线与实轴的交点有

$$\frac{K\omega(T\omega^2-1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(2\omega^2-1)^2} = 0$$

由上式可得  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则交点有实轴坐标为

$$\frac{-K\omega^2(T+1)}{(T+1)^2\omega^4 + \omega^2(T\omega^2-1)^2} = \frac{-3K\omega^2}{9\omega^4 + \omega^2(2\omega^2-1)^2} > -1$$

由上式可得  $0 < K < 1.5$ 。

(2)  $K=10$  时,对于开环幅相曲线与实轴的交点有

$$\frac{K\omega(T\omega^2-1)}{(T+1)^2\omega^4+\omega^2(T\omega^2-1)^2}=\frac{10\omega(T\omega^2-1)}{(T+1)^2\omega^4+\omega^2(T\omega^2-1)^2}=0$$

由上式可得  $\omega=\frac{1}{\sqrt{T}}$ , 则交点的实轴坐标为

$$\frac{-K\omega^2(T+1)}{(T+1)^2\omega^4+\omega^2(T\omega^2-1)^2}=\frac{-10\frac{1}{T}(T+1)}{(T+1)^2\frac{1}{T^2}+\frac{1}{T}\left(T\frac{1}{T}-1\right)^2}>-1$$

由上式可得  $0<T<\frac{1}{9}$ 。

(3) 对于开环幅相曲线与实轴的交点有

$$\frac{K\omega(T\omega^2-1)}{(T+1)^2\omega^4+\omega^2(T\omega^2-1)^2}=\frac{K\omega(T\omega^2-1)}{(T+1)^2\omega^4+\omega^2(T\omega^2-1)^2}=0$$

由上式可得  $\omega=\frac{1}{\sqrt{T}}$ , 则交点的实轴坐标为

$$\frac{-K\omega^2(T+1)}{(T+1)^2\omega^4+\omega^2(T\omega^2-1)^2}=\frac{-K\frac{1}{T}(T+1)}{(T+1)^2\frac{1}{T^2}+\frac{1}{T}\left(T\frac{1}{T}-1\right)^2}>-1$$

由上式可得  $0<K<\frac{T+1}{T}$ ,  $0<T<\frac{1}{T-1}$ 。

5.6 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{(1+s)(1+0.5s)(1+2s)}$$

试用奈奎斯特图判断当  $K$  取何值时,闭环系统稳定。

解

(1) 绘制

曲线的起点:系统为 0 型,  $\omega=0^+$  时,  $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} G(j\omega)=K\angle 0^\circ$ 。

曲线的终点:  $\omega=\infty$  时,  $G(j\infty)=0\angle -270^\circ$ 。

因系统中无开环零点,所以相频特性  $\varphi(\omega)$  单调递减,易知幅相曲线与实轴有交点。

下面求幅相曲线与实轴交点的坐标:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{K}{(1+j\omega)(1+j0.5\omega)(1+j2\omega)} \\ &= \frac{K}{(1-3.5\omega^2)+j(3.5-\omega^2)\omega} \\ &= \frac{K(1-3.5\omega^2)}{(1-3.5\omega^2)^2+(3.5-\omega^2)^2\omega^2} - j\frac{K(3.5-\omega^2)\omega}{(1-3.5\omega^2)^2+(3.5-\omega^2)^2\omega^2} \\ &= U(j\omega)+V(j\omega) \end{aligned}$$

令  $V(j\omega)=0$ , 得  $\omega=1.87$ , 将其代入  $U(j\omega)$ , 得  $U(j\omega)|_{\omega=1.87}=-0.09K$ 。

根据以上分析,可概略地做出幅相曲线,如图5-17所示。

(2) 利用奈氏判据进行稳定性分析

由系统的开环传递函数知,系统无右半平面开环极点,即  $P=0$ 。根据奈氏判据,系

系统稳定的充要条件应为幅相曲线不包围 $(-1, j0)$ 点。要满足上述条件, 必须:  $0 < 0.09K < 1$ , 即  $0 < K < 11.25$ 。

**5.7** 已知系统  $G(s) = \frac{10}{s(s-1)}$ ,  $H(s) = 1 + K_b s$ , 试确定闭环系统临界稳定时  $K_b$  的值。

解

$$G(s)H(s) = \frac{10(1+K_b s)}{s(s-1)}$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(1+jK_b\omega)}{j\omega(j\omega-1)}$$

令

$$\text{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0, \text{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = -1$$

得

$$K_b = \frac{1}{\omega^2}, \frac{-10(K_b+1)\omega}{\omega^2+\omega} = -1$$

解方程  $10K_b^2 + 9K_b - 1 = 0$ , 得  $K_b = 0.1, K_b = -1$ ,

故当闭环系统临界稳定时  $K_b = 0.1$ 。

**5.8** 已知系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K(1+Ts)}{s(s-1)}$ , 试用奈奎斯特稳定判据判断其稳定性。

(1)  $K=10$ , 求出处于临界稳定的  $T$  值;

(2)  $T=1$  时, 讨论  $K$  的稳定范围。

解

开环系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{K(1+Tj\omega)}{j\omega(j\omega-1)} = R(\omega) + jI(\omega) = \frac{-K(T+1)}{\omega^2+1} + j \frac{K(1-T\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$$

系统处于稳定的边界, 是奈奎斯特曲线通过实轴 $(-1, j0)$ 点, 即  $I(\omega) = 0, R(\omega) = -1$ 。

令  $I(\omega) = 0$ , 得到  $T = 1/\omega^2$ 。由  $I(\omega)$  表达式可以看出, 当  $\omega^2 < 1/T$  时,  $I(\omega) > 0$ , 当  $\omega^2 > 1/T$  时,  $I(\omega) < 0$ 。这表明: 随  $\omega$  增大, 奈奎斯特曲线由第二象限穿越横轴进入第三象限。把  $\omega^2 = 1/T$  代入到  $R(\omega) = -1$  的表达式中去, 可以得到  $KT^3 + (K-1)T^2 - 1 = 0$ 。

若  $K=10$ , 得到  $T=0.1$ , 这是临界的稳定  $T$  值。若  $T=1$ , 则由上式得到  $K=1$ , 即  $T=1, K=1$  是稳定的边界。下面讨论  $K$  值的稳定取值范围。

由频率特性可知, 当  $\omega \rightarrow 0$  时,  $|G(j\omega)| \rightarrow \infty, \angle G(j0^+) = -270^\circ$ , 当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $|G(j\omega)| = 0, \angle G(j\infty) = -90^\circ$ 。由于开环传递函数有一积分环节, 判断稳定性要反时针补  $1/4$  圆的圆弧, 即  $\omega=0$  时, 曲线起始于负实轴, 有半次负穿越, 只有当  $\omega$  增加, 奈奎斯特曲线在实轴上 $(-1, -\infty)$ 区间向上穿越横轴, 整个穿越数是正  $1/2$  穿越,  $Z = 1 - 2(1/2) = 0$ , 系统稳定。因此,  $K > 1$  是系统稳定的  $K$  取值范围。

**5.9** 系统开环奈奎斯特曲线如图 5-18 所示, 设开环增益  $K=50$ , 且在  $s$  平面右半部无开环极点, 试确定闭环系统的稳定  $K$  值范围。

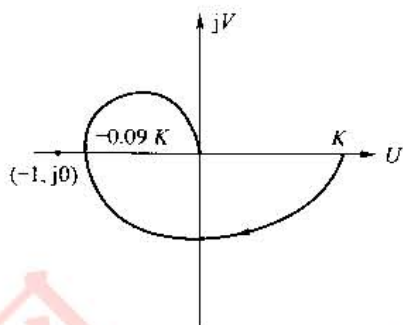


图 5-17 幅相曲线图

解

这是一个条件稳定系统,设奈奎斯特曲线与负实轴的交点为 A、B、C 三点。当增益  $K$  增加时,这 3 个点沿负实轴向左移动;当增益  $K$  减小时,这 3 个点沿负实轴向右移动。如图 5-18 所示的状态是闭环系统稳定的状态,因为  $P=0, N=N_+-N_-=1-1=0, Z=P-2N=0$ 。当增益  $K$  增至 2 倍,即  $K=100$  时, A 点位于实轴  $(-1, j0)$  点上,此时处于稳定边界,当  $K>100$  时,奈奎斯特曲线包围  $(-1, j0)$  点 ( $N_+=1, N_-=2, N=-1, Z=0-2(-1)=2$ ),系统不稳定。当  $K$  减小 2 倍,即  $K=25$  时,奈奎斯特曲线 B 点交于  $(-1, j0)$  点,系统处于不稳定边界;当  $K<25$  时,系统不稳定。当  $K$  减小 5 倍,即  $K=10$  时, C 点位于  $(-1, j0)$  点。当  $K<10$  时,系统稳定,因此  $100>K>25, K<10$  时,闭环系统稳定。

5.10 已知负反馈系统开环频率特性曲线如图 5-19 所示。设开环增益  $K=500$ ,在  $s$  平面右半部开环极点数  $p=0$ 。试确定使闭环系统稳定  $K$  取值范围。

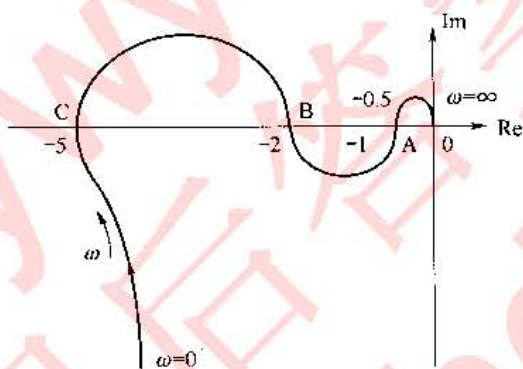


图 5-18 系统开环奈斯特曲线

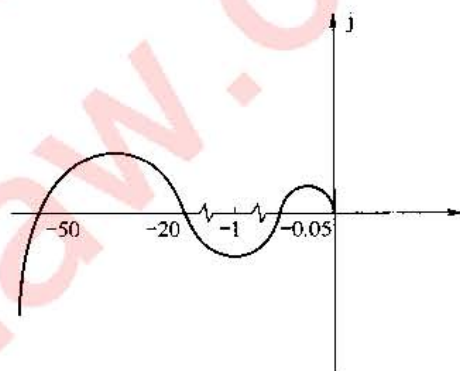


图 5-19 系统的开环频率特性曲线

解

开环传递函数:  $G(s) = KG_1(s)H_1(s)$ , 其中  $G_1(s)H_1(s)$  为开环增益  $K=1$  时的开环传递函数。  $G(j\omega) = KG_1(j\omega)H_1(j\omega)$  在  $\angle G(j\omega_g) = -180^\circ$  时对应的幅值

$$|500G_1(j\omega_g)H_1(j\omega_g)| = 0.05, 20, 50, \text{ 即 } |G_1(j\omega_g) \cdot H_1(j\omega_g)| = \frac{1}{10\,000}, \frac{1}{25}, \frac{1}{10}.$$

若  $\frac{K}{10\,000} < 1 < \frac{K}{25}$  或  $0 < \frac{K}{10} < 1$ , 即  $25 < K < 10\,000$  或  $0 < K < 10$ , 则闭环系统稳定。

若  $K=10$  或  $K=25$  或  $K=10\,000$  时, 闭环系统临界稳定。

5.11 单位反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{K}{(Ts+1)^3}$ , 试求系统闭环临界稳定时对应的  $K$  值。

解

开环频率特性  $G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega T+1)^3}$ , 设闭环临界稳定时的  $K$  值为  $K_0$ , 对应的  $\omega$  值为  $\omega_c$ , 则由幅值条件和相角条件, 应用

$$\frac{K_0}{\sqrt{1+\omega_c^2 T^2}} = 1 \quad (1)$$

$$-3\arctan\omega_c T = -180^\circ \quad (2)$$

由(2)式得  $\arctan\omega_c T = 60^\circ$ ,  $\omega_c T = \sqrt{3}$ , 代入(1)式, 得

$$K_0 - (\sqrt{1+\omega_c^2 T^2})^3 = (\sqrt{1+(\sqrt{3})^2})^3 = 2^3 = 8$$

故临界稳定时的  $K$  值为 8。

**5.12** 3 个最小相角传递函数的渐近对数幅频特性曲线如图 5-20 所示。试分别写出对应的传递函数。

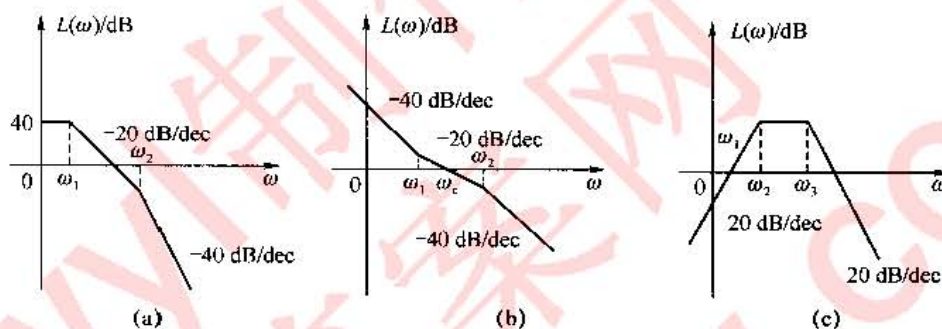


图 5-20 3 个最小相角传递函数的渐近对数幅频特性曲线

**解**

图 5-20(a) 依典型环节的渐近对数特性的概念, 可将图分解, 传递函数  $G(s)$  由比例环节、两个惯性环节串联组成, 即

$$G(s) = K \frac{1}{\frac{1}{\omega_1}s + 1} \frac{1}{\frac{1}{\omega_2}s + 1} = \frac{K}{\left(\frac{1}{\omega_1}s + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)}$$

因为  $20\lg K = 40$ , 所以  $K = 100$ , 故

$$G(s) = \frac{100}{\left(\frac{1}{\omega_1}s + 1\right)\left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)}$$

由图 5-20(b) 可知, 传递函数

$$G(s) = \frac{K\left(\frac{1}{\omega_1}s + 1\right)}{s^2\left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)}$$

由于  $\omega_c$  在一阶微分环节的渐近对数幅频特性的高频段, 在惯性环节的渐近对数幅频特性的低频段, 所以

$$L(\omega_c) = 20\lg K - 20\lg \omega_c^2 + 20\lg \frac{\omega_c}{\omega_1} = 0$$

得

$$K = \omega_1 \omega_c$$

故

$$G(s) = \frac{\omega_1 \omega_c \left(\frac{1}{\omega_1}s + 1\right)}{s^2 \left(\frac{1}{\omega_2}s + 1\right)}$$

由图 5-20(c)可知,传递函数

$$G(s) = \frac{Ks}{\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)}$$

由于  $\omega_1$  在两个惯性环节的渐近对数幅频特性的低频段,所以

$$L(\omega_1) = 20\lg K + 20\lg \omega_1 = 0$$

得  $K = 1/\omega_1$ ,故传递函数

$$G(s) = \frac{\frac{1}{\omega_1}s}{\left(\frac{1}{\omega_2}s+1\right)\left(\frac{1}{\omega_3}s+1\right)}$$

**5.13** 某单位最小相位系统的开环折线幅频特性曲线如图 5-21 所示;试求:

- (1) 该系统的开环传递函数;
- (2) 相角稳定裕量和幅值稳定裕量。

**解**

(1) 如图 5-21 所示,低频段渐进线斜率为  $-20$  dB/dec,说明系统中积分环节个数  $\nu=1$ ,故作低频段延长线与  $0$  dB 线交于  $K$ ,则

$$20(\lg K + \lg 0.01) = 20(\lg 0.4 - \lg 0.1) + 40(\lg 0.1 - \lg 0.01)$$

解得  $K=4$ 。

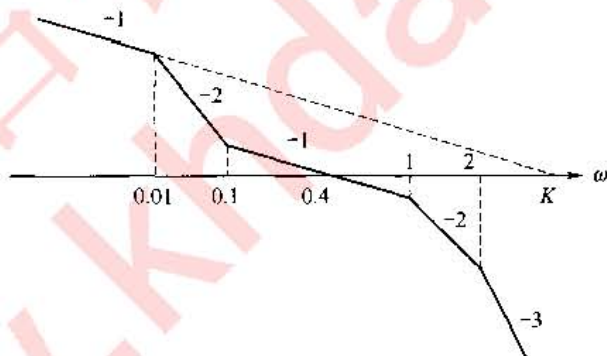


图 5-21 最小相位系统的开环折线幅频特性曲线

在各交接频率处斜率的变化量决定了各交接频率对应的环节类型。

在  $\omega_1=0.01$ ,  $\omega_3=1$ ,  $\omega_4=2$  处,  $L(\omega)$  由  $-20$  dB/dec 变为  $-40$  dB/dec,是惯性环节的交接频率。

在  $\omega_2=0.1$  处,  $L(\omega)$  由  $-40$  dB/dec 变为  $-20$  dB/dec,是一阶微分环节的交接频率。

因为最小相位系统的开环对数幅频特性和系统的开环传递函数是一一对应的关系,故可由开环对数幅频特性反求开环传递函数:

$$G(s)H(s) = \frac{K\left(\frac{s}{\omega_2}+1\right)}{s\left(\frac{s}{\omega_1}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_3}+1\right)\left(\frac{s}{\omega_4}+1\right)} = \frac{4(10s+1)}{s(100s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

(2) 求相角稳定裕量  $\gamma$  和幅值稳定裕量  $L_h$ :由图 5-21 可知,  $\omega_c=0.4$ ,而

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 100\omega_c + \arctan 10\omega_c -$$

$$\begin{aligned} & \arctan \omega_c - \arctan 0.5\omega_c \\ &= 90^\circ - 88.6^\circ + 76^\circ - 21.8^\circ - 11.3^\circ = 44.3^\circ \end{aligned}$$

由(1)所求开环传递函数,有

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega_g)H(j\omega_g) &= -90^\circ - \arctan 100\omega_g + \arctan 10\omega_g - \arctan \omega_g - \arctan 0.5\omega_g \\ &= -180^\circ \end{aligned}$$

解得  $\omega_g = 1.32$ 。

$$|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = \frac{4 \sqrt{(10\omega_g)^2 + 1}}{\omega_g \sqrt{(100\omega_g)^2 + 1} \times \sqrt{\omega_g^2 + 1} \times \sqrt{(0.5\omega_g)^2 + 1}} = 0.15$$

$$L_h = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|} = 6.67$$

5.14 设单位反馈控制系统开环传递函数  $G(s) = \frac{as+1}{s^2}$ , 试确定使相位裕量  $\gamma = 45^\circ$  的  $a$  值。

解

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{\sqrt{(a\omega_c)^2 + 1}}{\omega_c^2} = 0, \omega_c^4 = a^2 \omega_c^2 + 1$$

$$\gamma = 180^\circ + \arctan(a\omega_c) - 180^\circ = 45^\circ$$

$a\omega_c = 1$ , 联合求解得  $\omega_c = \sqrt[4]{2}$ ,  $a = 1/\sqrt[4]{2} = 0.84$ 。

5.15 单位反馈系统的闭环对数幅频特性分段直线如图 5-22 所示。若要求系统具有  $30^\circ$  的相角稳定裕量, 试计算开环放大倍数应增大的倍数。

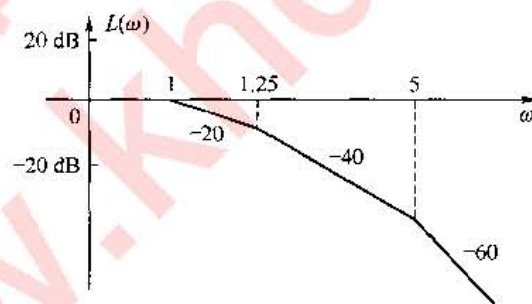


图 5-22 单位反馈系统的闭环对数幅频特性分段直线

解

由闭环对数幅频特性曲线可得系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s+1)\left(\frac{1}{1.25}s+1\right)\left(\frac{1}{5}s+1\right)} \approx \frac{6.25}{(s+1)(s+1.25)(s+5)}$$

因此系统等效开环传递函数

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)} = \frac{6.25}{s(s+2.825)(s+4.425)} \\ &= \frac{0.5}{s\left(\frac{1}{2.825}s+1\right)\left(\frac{1}{4.425}s+1\right)} \end{aligned}$$

其对数相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan\left(\frac{1}{2.825\omega}\right) - \arctan\left(\frac{1}{4.425\omega}\right)$$

若要求  $\varphi(\omega_1) = -150^\circ$ , 可得  $\omega_1 = 2.015$ 。

系统对数幅频特性曲线为

$$L_1(\omega) = \begin{cases} 20\lg\left(\frac{0.5}{\omega}K_s\right), & \omega < 2.825 \\ 20\lg\left(\frac{1.4125}{\omega^2}K_s\right), & 2.825 \leq \omega < 4.425 \\ 20\lg\left(\frac{6.25}{\omega^3}K_s\right), & \omega \geq 4.425 \end{cases}$$

要使系统具有  $30^\circ$  的相角稳定裕量,  $\omega_1$  应为截止频率, 有  $\frac{0.5K_s}{\omega_1} = 1$ , 则  $K_s = 4.03$ 。故系统开环放大倍数应增大 4.03 倍。

**5.16** 已知系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ , 若要在保持相角裕度不变的条件下将截止频率提高  $a$  倍, 则应使  $K$  和  $T$  值如何变化。

解

原传递函数的相角裕度的表达式为

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan T\omega_c$$

新的开环传递函数表示为

$$G_1(s) = \frac{K'}{s(T's+1)}$$

其相角裕度为

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan T'\omega'_c = 180^\circ - 90^\circ - \arctan T'a\omega_c$$

由此可知, 要保持相角裕度不变, 必有  $T'a\omega_c = T\omega_c$ , 于是有  $T' = T/a$ 。

对传递函数  $G(s)$ , 在截止频率处幅值应满足  $\frac{K}{\omega_c T\omega_c} = 1$ 。对新的传递函数  $G_1(s)$ , 在截止频率  $a\omega_c$  处幅值应满足  $\frac{K'}{\omega_c T'\omega_c} = 1$ , 即  $\frac{K'}{\frac{T}{a}\omega_c} = 1$ 。因此有  $K' = a\omega_c T\omega_c = aK$ 。

**5.17** 已知最小相位系统开环渐近对数幅频特性如图 5-23 所示。试计算该系统在  $r(t) = t^2/2$  作用下的稳态误差和相角裕度。

解

由图 5-23 可知, 开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K\left(\frac{1}{4}s+1\right)}{s^2\left(\frac{1}{200}s+1\right)}$$

在低频段有

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg \omega^2$$

由题可知:  $L(1) = 40$ , 即  $20\lg K - 20\lg 1^2 = 40$ ,  $\lg K = 2$ ,  $K = 100$ 。

在  $r(t) = t^2/2$  作用下, 稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K} = \frac{1}{100} = 0.01$$

由图 5-23 可知, 剪切频率  $\omega_c = K/\omega_1 = 100/4 = 25$ , 相角裕度

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 180^\circ + \arctan\left(\frac{1}{4} \times 25\right) - \arctan\left(\frac{1}{200} \times 25\right) = 73.8^\circ$$

5.18 某最小相位单位反馈系统的开环渐近对数幅频特性曲线如图 5-24 所示。已知在  $\omega = 0.1(1/s)$  的幅值为 40 dB,  $\omega_2 = 5(1/s)$ 。

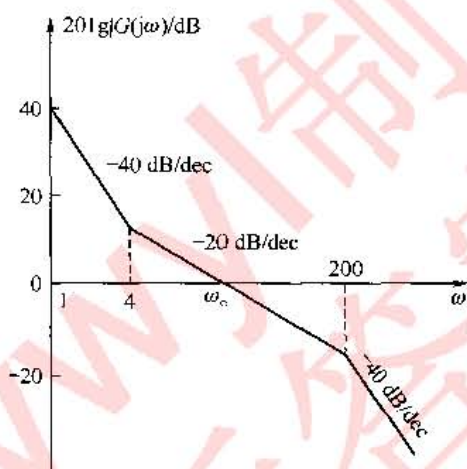


图 5-23 最小相位系统开环渐近对数幅频特性

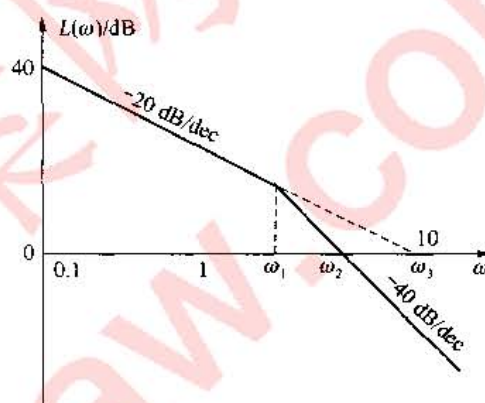


图 5-24 某最小相位单位反馈系统开环渐近对数幅频特性曲线

- (1) 证明  $\omega_3/\omega_2 = \omega_2/\omega_1$ ;
- (2) 求系统的开环增益  $K$ ;
- (3) 求相角裕度  $\gamma$ 。

解

由图 5-24 可知, 开环传递函数

$$G(s) = \frac{K}{s \left( \frac{1}{\omega_1} s + 1 \right)}$$

开环频率特性

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega \left( j\frac{\omega}{\omega_1} + 1 \right)}$$

由于  $\omega_2$  在  $\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_1} + 1}$  的渐近对数幅频特性的高频段, 所以

$$L(\omega_2) = 20\lg K - 20\lg \omega_2 - 20\lg \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0$$

故

$$\frac{K \omega_1}{\omega_2 \omega_2} = 1$$

即

$$\omega_2^2 = K\omega_1$$

又, 低频段

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg \omega$$

在  $\omega_3$  处

$$L(\omega_3) = 20\lg K - 20\lg \omega_3 = 0, K = \omega_3^2 = 10$$

故

$$\omega_2^2 = K\omega_1 = \omega_3\omega_1$$

即

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

系统的剪切频率

$$\omega_2 = 5(1/s), \omega_1 = \omega_2^2 / \omega_3 = 25/10 = 2.5(1/s)$$

相角裕度:

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_2) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{\omega_2}{\omega_1} = 90^\circ - \arctan 2 = 26.6^\circ$$

## 第 6 章 系统的校正与综合

### 6.1 系统的设计与校正问题

控制系统的校正是指在系统中加入一些其参数可以根据需要而改变的机构或装置,使系统整个特性发生变化,从而满足给定的各项性能指标。本章主要研究定常控制系统的校正方法,并介绍工程中常用的串联校正、反馈校正和复合校正等方法。

串联校正装置一般接在系统误差测量点之后和放大器之前,串接于系统前向通道之中;反馈校正装置接在系统局部反馈通道之中。串联校正装置特点是设计和计算直观、简单,常用的串联校正装置有超前校正、滞后校正和滞后-超前校正。反馈校正的分析和设计比串联校正复杂,但有时采用简单的反馈校正就能获得特殊的控制效果。

### 6.2 控制系统的校正设计方法

在控制系统中,校正的设计方法一般依据性能指标的形式而定。若性能指标以单位阶跃响应的峰值时间、调节时间、超调量、阻尼比、稳态误差等时域特征量给出时,一般采用根轨迹法校正;若性能指标以系统的相角裕度、幅值裕度、谐振峰值、闭环带宽、静态误差系数等频域特征量给出时,一般采用频率法校正。

#### 1. 串联超前校正

串联超前校正适用于系统响应慢,相对稳定性差,但增益不太低的系统,可以提供超前角以增加相位裕度,或消去对象最接近原点的实极点以提高响应速度。

超前校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = a \frac{1+aTs}{1+Ts} \quad (a>1)$$

超前网络的相角为

$$\varphi_c(\omega) = \arctan aT\omega - \arctan T\omega = \arctan \frac{(a-1)T\omega}{1+aT^2\omega^2}$$

当  $\omega = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$  时,最大超前角为

$$\varphi_m = \arctan \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arctan \frac{a-1}{a+1}$$

超前补偿网络的幅值为  $20\lg |G_c(j\omega)| = 10\lg a$ 。

图 6-1 所示为串联超前校正装置伯德图,其中,  $\omega_m$  是  $\frac{1}{\alpha T}$  和  $\frac{1}{T}$  的几何中点。

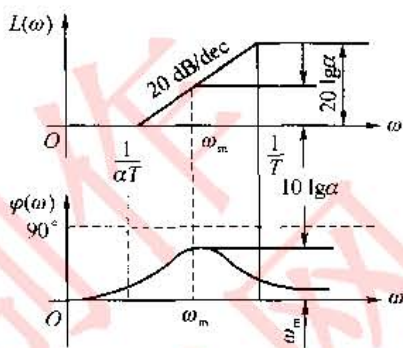


图 6-1 串联超前校正装置伯德图

超前校正设计步骤如下:

- 根据稳态误差要求,确定开环增益  $K$ ;
- 利用已确定的开环增益,计算待校正系统的相角裕度;
- 根据截止频率  $\omega_c''$  的要求,计算超前网络参数  $a$  和  $T$ ,选择最大超前角频率等于要求的系统截止频率,由  $-L'(\omega_c'') = 10 \lg a$  确定  $a$ ,然后由  $T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$  确定  $T$  值;
- 验算已校正系统的相角裕度  $\gamma''$ ,  $\gamma''(\omega_c'') = \varphi_m + \gamma(\omega'')$ ,当验算结果  $\gamma''$  不满足指标要求时,需重选  $\omega_m$  值,一般使  $\omega_m$  (等于  $\omega_c''$ ) 值增大,然后重复以上计算步骤。

## 2. 串联滞后校正

串联滞后校正适用于稳态误差大,但响应不太慢的系统。串联滞后校正使已校正系统截止频率下降,从而使系统获得足够的相角裕度。因此,滞后网络的最大滞后角应力求避免发生在系统截止频率附近。在系统响应速度要求不高而抑制噪声电平性能要求较高的或待校正系统已具备满意的动态性能,仅稳态性能不满足指标要求情况下,可考虑采用串联滞后校正,串联滞后校正的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1+bTs}{1+Ts} \quad (b < 1)$$

滞后网络的相角为

$$\varphi_c(\omega) = \arctan T\omega - \arctan bT\omega = \arctan \frac{(1-b)T\omega}{1+bT^2\omega^2}$$

当  $\omega = \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{b}}$  时,最大滞后角为

$$\varphi_m = \arctan \frac{1-b}{1+b}$$

图 6-2 所示为串联滞后校正伯德图。

设计串联无源滞后网络的步骤如下:

- 根据稳态误差要求,确定开环增益  $K$ ;
- 利用已确定的开环增益,画出待校正系统的对数频率特性,确定待校正系统的截止频率  $\omega_c'$ 、相角裕度  $\gamma$  和幅值裕度  $h$  (dB);

- 选择不同的  $\omega_c''$ , 计算或查出不同的值  $\gamma$ , 在伯德图上绘制  $\gamma(\omega_c'')$  曲线;
- 根据相角裕度  $\gamma''$  的要求, 选择已校正系统的截止频率  $\omega_c'', \omega_c''$  满足

$$\gamma''(\omega_c'') = \varphi_c(\omega_c'') + \gamma(\omega_c'')$$

一般取  $\varphi_c(\omega_c'') = -6^\circ \sim -14^\circ$ ;

- 根据关系式  $20 \lg b + L'(\omega_c'') = 0, \frac{1}{bT} = (0.1 \sim 0.25) \omega_c''$

确定滞后网络参数  $b$  和  $T$ ;

- 检查校正后系统的各项指标是否符合要求。

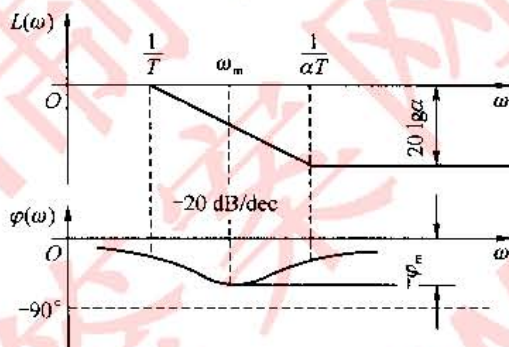


图 6-2 串联滞后校正伯德图

### 3. 串联滞后-超前校正

串联滞后-超前校正兼有滞后校正和超前校正的优点, 即已校正系统响应速度较快, 超调量较小, 抑制高频噪声的性能也较好。当待校正系统不稳定, 且要求校正后系统的响应速度、相角裕度和稳态精度较高时, 以采用串联滞后-超前校正为宜。

串联滞后-超前校正的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+aT_1s)(1+\frac{T_2}{a}s)} \quad (a>1)$$

图 6-3 所示为串联滞后-超前校正伯德图。

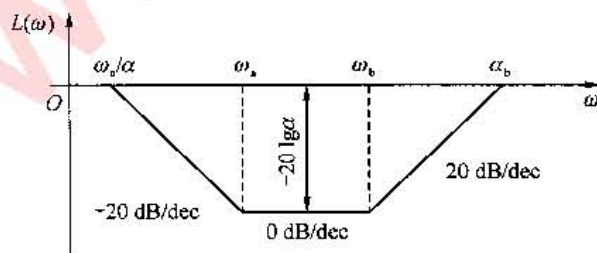


图 6-3 串联滞后-超前校正伯德图

串联滞后-超前校正的设计步骤如下:

- 根据稳态误差要求, 确定开环增益  $K$ ;
- 绘制待校正系统的对数幅频特性, 求出待校正系统的截止频率  $\omega_c'$ 、相角裕度  $\gamma$  和幅值裕度  $h$  (dB);
- 在待校正系统对数幅频特性上, 选择斜率从  $-20$  dB/dec 变为  $-40$  dB/dec 的交接

频率作为校正网络超前部分的交接频率  $\omega_b$ ;

- 根据响应速度要求,选择系统的截止频率  $\omega_c''$ ,并由式

$$-20\lg a + L'(\omega_c'') + 20T_b\omega_c'' = 0$$

确定  $a$ ;

- 根据相角裕度要求,估算校正网络滞后部分的交接频率  $\omega_n$ ;
- 校验已校正系统的各项性能指标。

#### 4. 反馈校正

反馈校正的基本原理是:用反馈校正装置包围待校正系统中对动态性能改善有重大妨碍作用的某些环节,形成一个局部反馈回路(内回路),在局部反馈回路的开环幅值远大于1的条件下,局部反馈回路的特性主要取决于反馈校正装置,而与包围部分无关,适当选择反馈校正装置的形式和参数,可以使已校正系统的性能满足给定指标的要求。

反馈校正系统如图 6-4 所示。

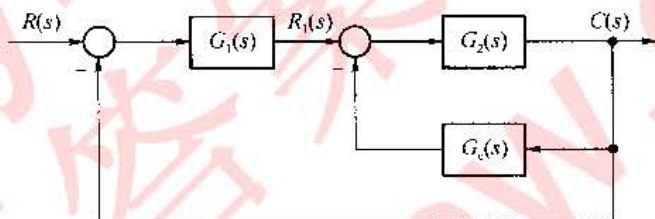


图 6-4 反馈校正系统

反馈校正具有如下明显特点:

- 削弱非线性特性的影响;
- 减小系统的时间常数;
- 降低系统对参数变化的敏感度。

## 习题解答

6.1 某 I 型二阶系统结构如图 6-5 所示。

(1) 计算系统的速度稳态误差  $e_{ss}$  和相角裕度  $\gamma$ ;

(2) 采用串联校正方法,使校正后系统仍为 I 型二阶系统,速度稳态误差减小为校正前的 0.1,相角裕度  $\gamma$  保持不变,确定校正装置传递函数。

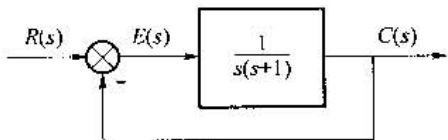


图 6-5 某 I 型二阶系统结构图

解

(1) 系统为 I 型,系统的速度误差为:  $e_{ss} = 1/K_v = 1/K = 1$ 。绘制系统的开环对数幅频特性曲线如图 6-6 中  $L_0(\omega)$  所示。由图 6-6 中有

$$\omega_c = 1, \gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c = 45^\circ$$

(2) 依题意, 校正后系统仍为 I 型二阶系统, 可设校正后系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}, \text{校正后 } e_{ss} = 0.1, \text{故有 } e_{ss} = 1/K = 0.1, K = 10。$$

由相角裕度

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c T = 45^\circ$$

得  $\omega_c T = 1$ , 即  $\omega_c = 1/T = 10, T = 0.1$ 。绘制校正后系统的对数幅频特性曲线如图 6-6 中  $L(\omega)$  所示。

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_c(s)G_0(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)}$$

校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{10(s+1)}{0.1s+1}$$

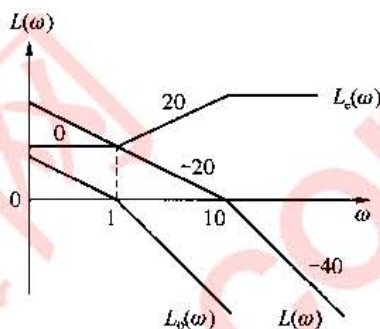


图 6-6 系统的开环对数幅频特性曲线

验算: 校正后  $e_{ss} = 1/K = 0.1, \gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \omega_c T = 45^\circ$ , 满足要求。

6.2 已知系统结构如图 6-7 所示, 其中校正环节  $G_c(s)$  的幅相曲线如图 6-8 所示, 试设计串联校正网络  $G_c(s)$ , 使校正后的系统截止频率为  $\omega_c'' \approx 4.0 \text{ rad/s}$ 。

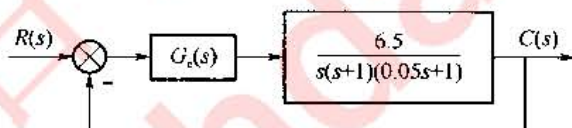


图 6-7 系统结构图

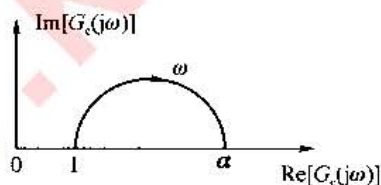


图 6-8 校正环节  $G_c(s)$  的幅相曲线

解

由图 6-8 校正装置幅相曲线可知其为超前校正, 传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} \quad (a > 1)$$

绘制未校正系统的对数幅频渐近线如图 6-9 所示。

由图 6-9 可知

$$20 \lg \frac{6.5}{1} = 40 \lg \frac{\omega_{c0}}{1}$$

得

$$\omega_{c0} = \sqrt{6.5} = 2.55$$

取未校正系统的对数幅频渐近线上幅值为  $-10\lg a$  的频率为校正后截止频率, 即  $\omega_c'' \approx 4.0 \text{ rad/s}$ , 则

$$-10\lg a = -40\lg \frac{\omega_c''}{\omega_{c0}} = -40\lg \frac{4}{2.55}$$

得  $a \approx 6$ , 所以

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = \frac{1}{\omega_c'' \sqrt{a}} = \frac{1}{4\sqrt{6}} = 0.1$$

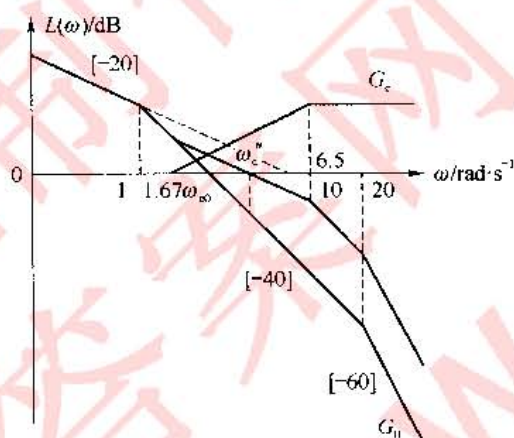


图 6-9 未校正系统的对数幅频渐近线

故校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + 0.6s}{1 + 0.1s}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{6.5(0.6s + 1)}{s(s + 1)(0.05s + 1)(0.1s + 1)}$$

**6.3** 图 6-10 所示系统中, 当  $K=10$ ,  $T=0.1$  时, 截止频率  $\omega_c=0.5$ 。若要求  $\omega_c$  不变, 问如何选择  $K$ ,  $T$  值才能使系统相位裕量提高  $45^\circ$ 。

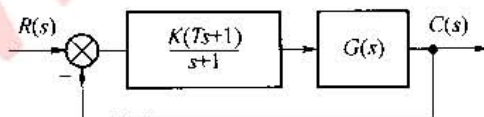


图 6-10 系统结构图

**解**

当  $K=10$ ,  $T=0.1$  时, 系统截止频率  $\omega_c=0.5$ , 可知

$$G_c(s) = \frac{10(0.1s + 1)}{s + 1}$$

$$\varphi_{G_c}(j\omega_c) = \arctan(0.1\omega_c) - \arctan \omega_c$$

因而

$$L_{G_c}(j\omega_c) = 20\lg \left| \frac{10(0.5j + 1)}{1 + 5j} \right|$$

若要重新选择  $K$ ,  $T$  值, 则使  $\gamma$  提高  $45^\circ$ 。

设

$$G_{cl}(s) = \frac{K_1(T_1s+1)}{s+1}$$

当  $\omega_c = 5$  时

$$\varphi_{G_{cl}}(j\omega_c) = \arctan(T_1\omega_c) - \arctan\omega_c$$

$$L_{G_{cl}}(j\omega_c) = 20\lg \left| \frac{K_1(jT_1\omega_c+1)}{j\omega_c+1} \right|$$

由  $\varphi_{G_{cl}}(j\omega_c) = \varphi_{G_c}(j\omega_c) + 45^\circ$  可得

$$\arctan(T_1\omega_c) = \arctan(0.1\omega_c) + 45^\circ$$

即  $T_1 = 0.6$ 。

另外,在增大  $\gamma$  的同时,要保持  $G_c(s)|_{s=j\omega_c}$  的幅值不变,才能不改变系统截止频率,因此

$$L_{G_c}(j\omega_c) = L_{G_{cl}}(j\omega_c), 20\lg \left| \frac{10(0.5j+1)}{1+5j} \right| = 20\lg \left| \frac{K_1(3j+1)}{1+5j} \right|$$

从而解出  $K_1 = 3.54$ 。

**6.4** 一单位负反馈最小相位系统的开环对数幅频特性如图 6-11 所示,其中虚线是未加校正的,实线是加串联校正的(图中小圆圈为折线的起点)。

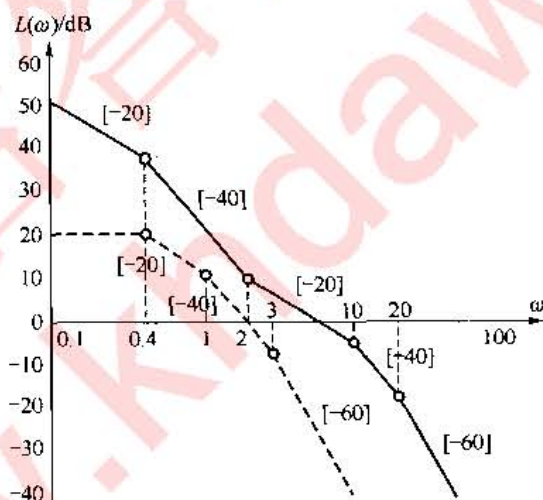


图 6-11 单位负反馈最小相位系统的开环对数幅频特性

- (1) 求串联校正装置的传递函数  $G_c(s)$ ;
- (2) 求串联校正后,使闭环系统稳定的开环放大倍数  $K$  的取值范围。

**解**

未校正开环系统的传递函数

$$G_0(s) = \frac{K_0}{\left(\frac{s}{0.4}+1\right)(s+1)\left(\frac{s}{3}+1\right)}$$

低频段是一条值为 20 dB 的直线,故  $K_0 = 10$ 。已校正系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s\left(\frac{s}{0.4}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

由图 6-11 可知,当  $\omega=0.1$  时,幅值为 50 dB(其值为 316),故  $K=31.6$ 。

$$G_c(s) = \frac{G(s)}{G_0(s)} = \frac{3.16(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{3}+1\right)}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

已校正开环系统的相频特性为

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ + \arctan \frac{\omega}{2} - \arctan \frac{\omega}{0.4} - \arctan \frac{\omega}{10} - \arctan \frac{\omega}{20}$$

采用试凑法计算出,当  $\omega=\omega_g=13.5$  时,  $\angle G(j13.5) = -180^\circ$ 。

$$|G(j13.5)| = \frac{31.6 \times \left(\frac{13.5}{2}\right)}{13.5 \times \left(\frac{13.5}{0.4}\right) \times \left(\frac{13.5}{10}\right)} = 0.346$$

闭环系统稳定的  $K$  值范围是  $0 < K < 91.126$ 。

**6.5** 图 6-12 所示是一采用 PD 串联校正的控制系统。

(1) 当  $K_p=10, K_D=1$  时,求相角裕度;

(2) 若要求该系统剪切频率  $\omega_c=5$ , 相位裕度  $\gamma=50^\circ$ , 求  $K_p$  和  $K_D$  的值。

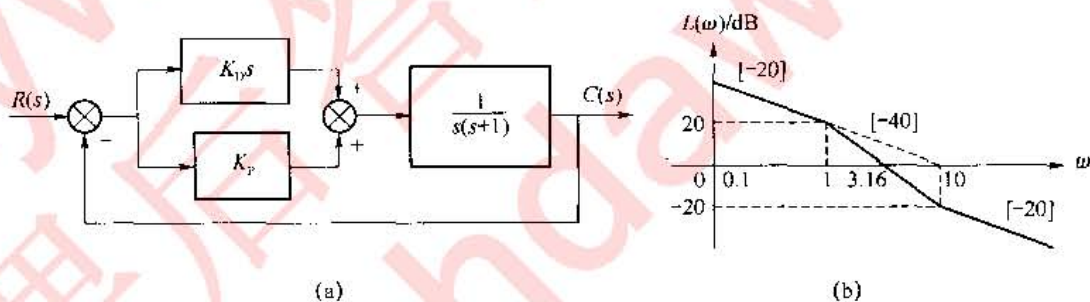


图 6-12 采用 PD 串联校正的控制系统

**解**

采用 PD 控制器的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_p + K_D s}{s(s+1)}$$

(1)  $K_p=10, K_D=1$ , 则  $G(s) = \frac{10(1+0.1s)}{s(s+1)}$  转折频率依次是 1 和 10。过  $\omega=1$ , 幅值为 20 dB 的点做一斜率为  $-20$  dB/dec 的斜线, 交横轴于一点  $\omega=10$ 。过  $\omega=1$ , 幅值为 20 dB 的点做一斜率为  $-40$  dB/dec 的斜线; 在  $\omega=10$  的幅值  $|G(j10)| = \frac{10}{10 \times 10} = 0.1$ , 其值为  $-20$  dB, 过点  $\omega=10$ , 幅值为  $-20$  dB 的点做斜率为  $-20$  dB/dec 的斜线。这就是  $G(s)$  的对数幅频特性曲线, 其对数幅频特性如图 6-12 中 (b) 所示。显然截止频率小于 10。有  $\frac{10}{\omega_c \omega_c} = 1$ , 得  $\omega_c = 3.16$ 。相位裕度为

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 3.16 + \arctan 0.1 \times 3.16 = 35.15^\circ$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{K_p + K_D s}{s(s+1)} = \frac{K_p(1 + \frac{K_D}{K_p}s)}{s(s+1)} = \frac{K_p(1 + T_d s)}{s(s+1)}$$

要求  $\omega_c = 5, \gamma = 50^\circ$ , 则

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 5 + \arctan T_d \times 5 = 50^\circ$$

解出  $T_d = 0.16$ 。要保证  $\omega_c = 5$ , 则选取  $K_P$  的值要满足下式, 即  $\frac{K_P}{5 \times 5} = 1$ , 得  $K_P = 25$ 。又

$$\frac{K_D}{K_P} = 0.16, \text{ 得 } K_D = 4。$$

**6.6** 设有单位反馈的火炮指挥仪伺服系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

若要求系统最大输出速度为  $2(\text{r/min})$ , 输出位置的允许误差小于  $2^\circ$ , 试求:

(1) 确定满足上述指标的最小  $K$  值, 计算该  $K$  值下系统的相角裕度和幅值裕度;

(2) 在前向通路中串接超前校正网络  $G_c(s) = \frac{0.4s+1}{0.08s+1}$ , 试计算校正后系统的相角裕度和幅值裕度, 并说明超前校正对系统动态性能的影响。

**解**

(1) 由  $G(s)$  可知是 I 型系统。因为:  $e_{ss} = R/K_v$ , 所以满足指标的最小  $K$  值为  $K_v = \frac{2 \times 360^\circ / 60}{2^\circ} = 6$ , 故未校正系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

未校正系统的开环频率特性

$$G(j\omega) = \frac{6}{j\omega(0.2j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$$

开环幅频特性

$$|G(j\omega)| = \frac{6}{\omega \sqrt{1+(0.2\omega)^2} \sqrt{1+(0.5\omega)^2}}$$

开环相频特性

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan 0.2\omega - \arctan 0.5\omega$$

绘制未校正系统的渐近对数幅频特性曲线  $L'(\omega)$  如图 6-13 所示。

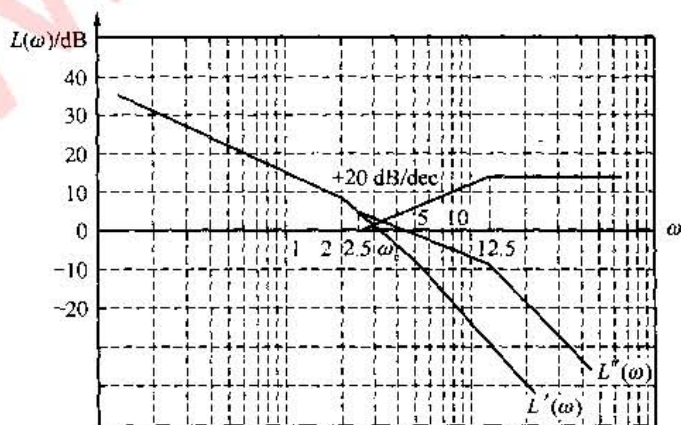


图 6-13 未校正系统的渐近对数幅频特性曲线

由图 6-13 可知,未校正系统的剪切频率  $\omega'_c = 3.5(1/s)$ ,对应的相角裕度为

$$\begin{aligned}\gamma' &= 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.2\omega'_c - \arctan 0.5\omega'_c = 90^\circ - \arctan 0.7 - \arctan 1.75 \\ &= 90^\circ - 34.99^\circ - 60.25^\circ = -5.24^\circ\end{aligned}$$

又,令  $\angle G(j\omega_g) = -180^\circ$ ,求得:  $\omega_g = \sqrt{10}$ 。

依渐近对数幅频特性,计算幅值裕度

$$|G(j\omega_g)| = \frac{6}{\sqrt{10} \times 0.5 \times \sqrt{10}} = \frac{6}{5}$$

所以  $K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = \frac{5}{6} = 0.83$ ,因而系统是不稳定的。

(2) 串联超前校正网络后的开环传递函数

$$G_1(s) = \frac{6}{s(0.2s+1)(0.5s+1)} \frac{1+0.4s}{1+0.08s}$$

校正后的开环频率特性

$$G_1(j\omega) = \frac{6}{j\omega(j0.2\omega+1)(j0.5\omega+1)} \frac{1+j0.4\omega}{1+j0.08\omega}$$

绘制其渐近对数幅频特性曲线  $L''(\omega)$ ,如图 6-13 所示,校正后系统的剪切频率  $\omega''_c = 4.8s$ ,于是,相角裕度

$$\gamma'' = 180^\circ - 90^\circ + \arctan 0.4\omega''_c - \arctan 0.2\omega''_c - \arctan 0.5\omega''_c - \arctan 0.08\omega''_c = 20^\circ > 0$$

再由

$$-90^\circ + \arctan 0.4\omega_g - \arctan 0.2\omega_g - \arctan 0.5\omega_g - \arctan 0.08\omega_g = -180^\circ$$

求得

$$\omega_g = 8\left(\frac{1}{s}\right)$$

则

$$|G(j\omega_g)| = \frac{6 \times 0.4\omega_g}{\omega_g \times 0.2\omega_g \times 0.5\omega_g} = \frac{2.4}{6.4}$$

故幅值裕度

$$K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)|} = \frac{6.4}{2.4} = 2.7$$

由上面的计算可知,串联超前校正网络后,相角裕度和幅值裕度均增加了,系统的稳定程度得以提高。

**6.7** 已知一单位反馈控制系统,其固定不变部分传递函数  $G_0(s)$  和串联校正装置  $G_c(s)$  分别如图 6-14(a)、(b) 所示。要求:

- (1) 写出校正后各系统的开环传递函数;
- (2) 分析各  $G_c(s)$  对系统的作用。

解

(1) 求校正后各系统的开环传递函数。

① 未校正系统的开环传递函数

$$G_0(s) = \frac{20}{s(0.1s+1)}$$

串联校正装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{s+1}{10s+1}$$

故串联校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_0(s) \cdot G_c(s) = \frac{20(s+1)}{s(0.1s+1)(10s+1)}$$

② 未校正系统的开环传递函数

$$G_0(s) = \frac{20}{s(0.1s+1)}$$

串联校正装置的传递函数

$$G_c(s) = \frac{0.1s+1}{0.01s+1}$$

故串联校正后系统的开环传递函数为

$$G(s) = G_0(s) \cdot G_c(s) = \frac{20}{s(0.01s+1)}$$

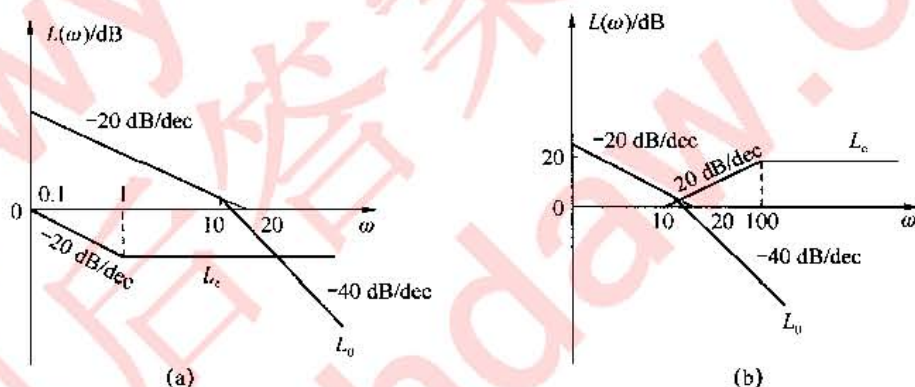


图 6-14 单位反馈控制系统的固定不变部分传递函数和串联校正装置

(2) 分析各  $G_c(s)$  对系统的作用, 并比较其优缺点。对于图 6-15(a); 在未校正系统的渐近开环对数幅频特性曲线  $L'(\omega)$  上, 可查得: 未校正系统的剪切频率为

$$\omega'_c \approx 14 \frac{1}{s}$$

未校正系统的相角裕度

$$\gamma' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.1\omega'_c = 90^\circ - \arctan 1.4 = 34.5^\circ$$

在图 6-15(a) 上绘制校正后的渐近对数幅频特性曲线  $L''(\omega)$ 。

由图 6-15(a) 可查得校正后的剪切频率为:  $\omega''_c = 2/s$ 。由此, 可求得校正后系统的相角裕度

$$\begin{aligned} \gamma'' &= 180^\circ - 90^\circ + \arctan \omega''_c - \arctan 0.1\omega''_c - \arctan 10\omega''_c \\ &= 90^\circ + \arctan 2 - \arctan 0.2 - \arctan 20 \\ &= 90^\circ + 63.4^\circ - 11.3^\circ - 87.1^\circ = 55^\circ \end{aligned}$$

在图 6-15(b) 上分别绘制未校正系统和校正后系统的渐近对数幅频特性曲线  $L'(\omega)$ 、 $L''(\omega)$ 。

由图 6-15(a) 可知: 未校正系统的剪切频率为  $14/s$ , 相角裕度为  $34.5^\circ$ 。

由图 6-15(b) 可查得: 校正后系统的剪切频率为  $\omega''_c = 20/s$ , 故校正后系统的相角裕度

$$\gamma'' = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 0.01\omega''_c = 90^\circ - \arctan 0.2 = 90^\circ - 11.3^\circ = 78.7^\circ$$

比较:

方案(a)是采用滞后串联校正;

方案(b)是采用超前串联校正;

方案(a)降低了剪切频率:原系统为  $14/s$ ,校正后为  $2/s$ ;提高了相角裕度:原系统为  $34.5^\circ$ ,校正后为  $55^\circ$ ,由于校正后频带窄,适用于抑制噪声要求高的场合;

方案(b)提高了剪切频率:原系统为  $14/s$ ,校正后为  $20/s$ ;提高了相角裕度:原系统为  $34.5^\circ$ ,校正后为  $78.7^\circ$ ;校正后加宽了中频段。

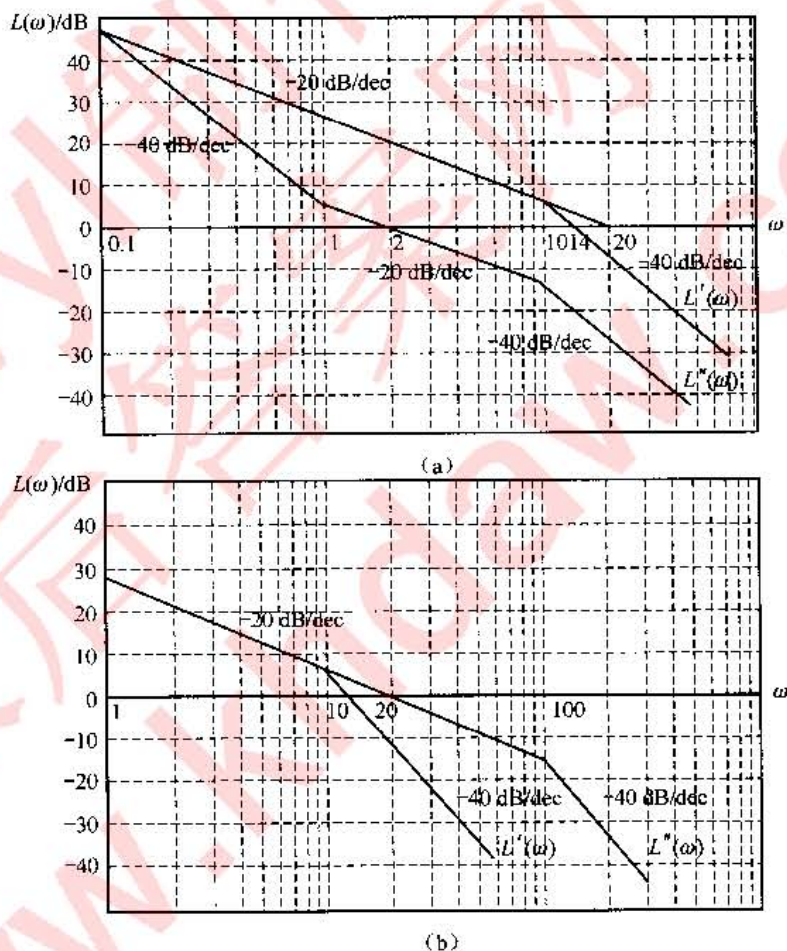


图 6-15 未校正系统及校正后系统的渐近幅频特性曲线

6.8 图 6-16 为 3 种推荐稳定系统的串联校正网络特性,它们均由最小相角环节组成。若控制系统为单位反馈系统,其开环传递函数  $G(s) = \frac{400}{s^2(0.01s+1)}$ 。试问:

(1) 这些校正网络特性中,哪一种可使已校正系统的稳定程度最好?

(2) 为了将 12 Hz 的正弦噪声削弱 10 倍左右,你认为应采用哪种校正网络特性?

解

(1) 由图 6-16 可得校正网络的传递函数为

$$(a) G_c(s) = \frac{s+1}{10s+1}$$

$$(b) G_c(s) = \frac{0.1s+1}{0.01s+1}$$

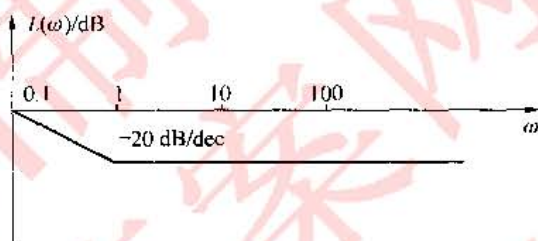
$$(c) G_c(s) = \frac{(0.5s+1)^2}{(10s+1)(0.025s+1)}$$

若以图 6-16(a)作为校正网络,则校正后系统的开环传递为

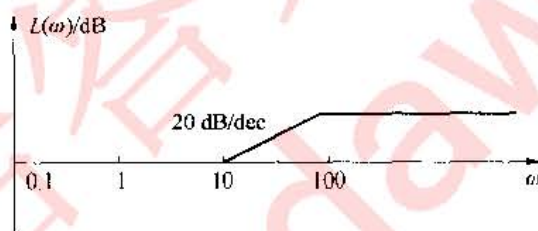
$$G_a(s) = \frac{400}{s^2} \frac{s+1}{(0.01s+1)(10s+1)}$$

则频率特性为  $G_a(j\omega) = \frac{400}{(j\omega)^2 (j0.01\omega+1) j10\omega+1}$

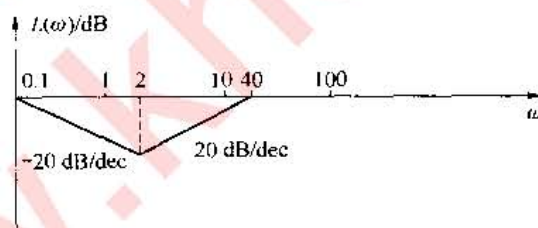
其幅频特性为  $|G_a(j\omega)| = \frac{400}{\omega^2 \sqrt{1+(0.01\omega)^2} \sqrt{1+(10\omega)^2}}$



(a)



(b)



(c)

图 6-16 3 种稳定系统的串联校正网络特性

绘制其渐近对数幅频特性曲线,如图 6-17 所示。

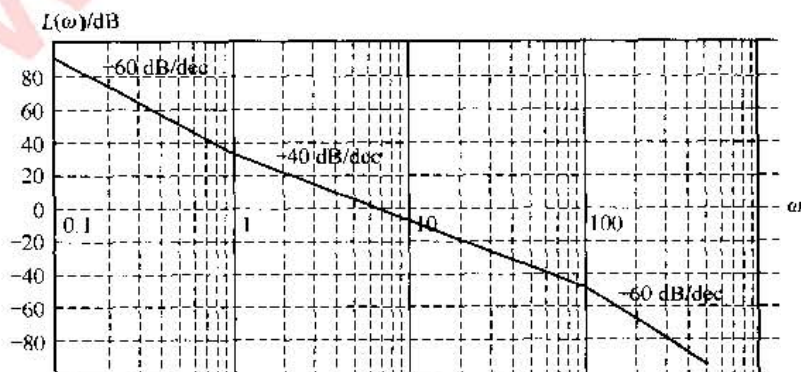


图 6-17 渐近对数幅频特性曲线

由图 6-17 可得  $\omega_c = 6.3 \frac{1}{s}$

相角裕度  $\gamma = 180^\circ + \arctan \omega_c - 180^\circ - \arctan 0.01\omega_c + \arctan 10\omega_c = -11.7^\circ$

若以图 6-16(b)作校正网络,则校正后系统的开环传递函数为

$$G_b(s) = \frac{400(0.1s+1)}{s^2(0.01s+1)^2}$$

仿照图 6-16(a)作校正网络,并绘制校正后系统的渐近对数幅频特性曲线,可求得

$$\omega_c = 40 \frac{1}{s}$$

相角裕度

$$\gamma = 180^\circ - 180^\circ + \arctan 0.1\omega_c - 2\arctan 0.01\omega_c = 32^\circ$$

若以图 6-16(c)作校正网络,则校正后系统的开环传递函数为

$$G_c(s) = \frac{400(0.05s+1)^2}{s^2(0.01s+1)(10s+1)(0.025s+1)}$$

同理,可求得

$$\omega_c = 10 \frac{1}{s}$$

相角裕度

$$\gamma = 180^\circ - 180^\circ + 2\arctan 0.5\omega_c - \arctan 0.01\omega_c - \arctan 10\omega_c - \arctan 0.025\omega_c = 48^\circ$$

可见:以图 6-16(c)作为校正网络,系统的相角裕度最大,系统的稳定程度也最高。

(3) 据题意,  $f = 12 \text{ Hz}$ , 即  $\omega = 2\pi f = 75/s$ 。以图 6-16(a)作为校正网络的系统,则

$$20\lg \frac{400\omega}{\omega^2 \times 10\omega} = 20\lg \frac{400 \times 75}{75^2 \times 10} = -43 \text{ dB}$$

以图 6-16(b)作为校正网络的系统,则

$$20\lg \frac{400 \times 0.1\omega}{\omega^2} = 20\lg \frac{40}{75} = -5.4 \text{ dB}$$

以图 6-16(c)作为校正网络的系统,则

$$20\lg \frac{400 \times (0.5\omega)^2}{\omega^2 \times 10\omega} = 20\lg \frac{10}{\omega} \approx -20 \text{ dB}$$

以上结果也可直接在图上查得。可见:只有采用图 6-16(c)作为校正网络,才能满足将 12 Hz 的正弦噪声削弱 10 倍左右的要求。

## 第 7 章 线性离散系统的分析与校正

### 7.1 基本概念

连续系统指控制系统中所有信号都是时间变量的连续函数。离散系统指控制系统中有一处或几处的信号不是时间变量的连续函数(是脉冲或数码)。离散系统分类:脉冲系统和数字系统。

采样控制系统(脉冲控制系统)指控制系统中的信号是脉冲序列形式的离散系统。数字控制系统(计算机控制系统)指控制系统中的信号是数字序列形式的离散系统。

#### 1. 采样控制系统

##### (1) 采样系统

采样系统采用一种断续控制方式,对来自传感器的连续信号在某些规定的时间瞬时取值。采样系统的应用:对于具有传输延迟、大惯性的控制系统可以引入采样控制。

##### (2) 采样

连续信号经实现采样的专门开关装置称为采样器。采样器后变换成离散信号的过程称为采样过程。采样形式有周期采样和非周期采样(随机采样)。最简单又最普遍的是采样间隔相等的周期采样。采样间隔随机变化的采样形式称随机采样。

##### (3) 保持器

在采样控制系统中,把脉冲序列转变为连续信号的过程称为保持过程。实现保持的装置称为保持器。保持器的输出为脉冲信号,含高频噪声,故在保持器后面串联一个信号复现滤波器(低通滤波器)加到系统的连续部分。最简单的复现滤波器可把脉冲信号复现为阶梯信号。当取样频率足够大时,近似为连续信号。

#### 2. 数字控制系统

数字控制系统是以计算机为控制器来控制具有连续工作状态的被控对象的闭环控制系统。图 7-1 是计算机控制系统典型原理图。



图 7-1 计算机控制系统典型原理图

### (1) A/D 转换器

A/D 转换器是把连续信号转换为离散的数字信号的装置。A/D 转换包括两个部分:采样和量化。

### (2) D/A 转换器

D/A 转换器是把离散的数字信号转换为连续的模拟信号的装置。D/A 转换包括两个部分:解码和复现。

### (3) 数字控制系统的典型结构如图 7-2 所示

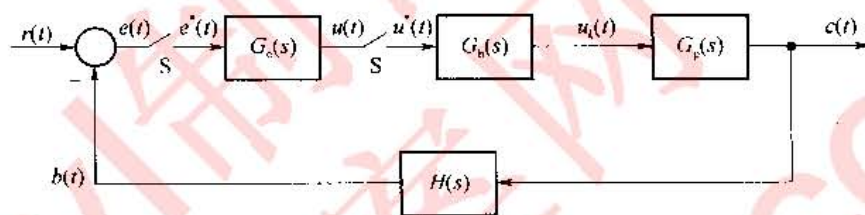


图 7-2 数字控制系统的典型结构图

## 3. 离散系统的特点

数字控制系统的特点:具有控制精度高,控制速度快及性能价格比高等特点,并且数字控制器还具有很好的通用性,可以很方便地改变控制规律,在现代工业控制中应用非常广泛。

## 7.2 信号的采样与保持

### 1. 采样过程

采样过程可以看作是一个幅值调制过程。图 7-3 是理想采样过程,脉冲序列从零开始,  $\tau=0$ , 理想单位脉冲序列  $\delta_T = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-nT)$ , 理想采样器的输出

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e(nT)\delta(t-nT)$$

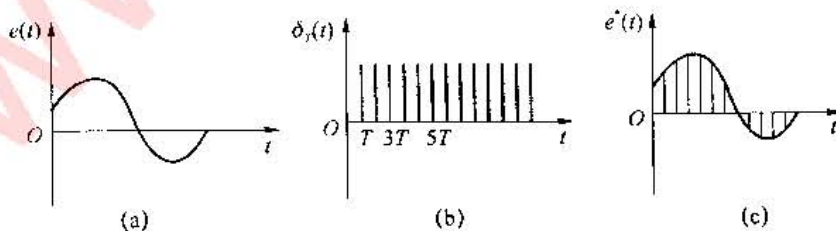


图 7-3 理想采样过程

### 2. 采样过程的数学描述

#### (1) 采样信号的拉氏变换

对采样信号  $e^*(t)$  进行拉氏变换,得

$$E^*(s) = \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT)\right]$$

由位移定理,有

$$\mathcal{L}[\delta(t-nT)] = e^{-nTs} \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-nTs}$$

所以采样信号的拉氏变换为

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nTs} \quad (7-1)$$

式(7-1)表明:采样信号的拉氏变换与采样函数  $e(nT)$  的关系。 $E^*(s)$  只能描述采样瞬间的离散数值,而不能描述  $e(t)$  在采样间隔之间的信息。

若  $e(t)$  为有理函数形式,则无穷级数  $E(s)$  也是  $e^{Ts}$  的有理函数形式。式(7-1)与连续信号  $e(t)$  的拉氏变换类似。 $E^*(s)$  的初始值通常规定采用  $e(0^+)$ 。

## (2) 采样信号的频谱

研究频谱的目的:找出采样信号和连续信号之间的相互联系。图 7-4 所示是采样信号的频谱。

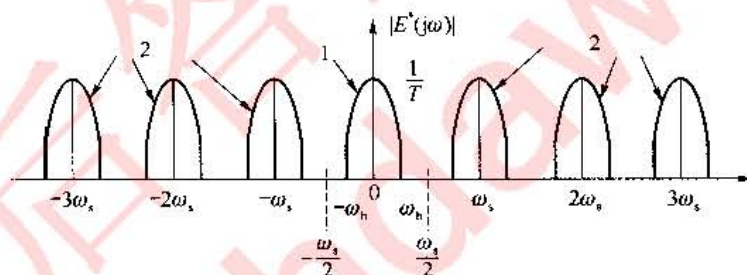


图 7-4 采样信号频谱

图 7-4 表明:采样信号  $e^*(t)$  的频谱  $|E(j\omega)|$  是以  $\omega_s$  为周期的无穷多个频谱之和; $n=0$  的频谱称为采样频率主分量(基带),其余频谱称为采样频谱的补分量,该频谱是由于采样引起的高频频谱。

图 7-4 说明:频谱不发生混叠的条件是  $\omega_s \geq 2\omega_h$ 。

## 3. 香农采样定理

若被采样的连续信号  $x(t)$  的频谱有限宽,且最大宽度为  $\omega_h$ ,如果采样角频率  $\omega_s > 2\omega_h$ ,并且采样后再加理想滤波器,则连续信号  $x(t)$  可以不失真地恢复出来。

## 4. 信号保持

什么是保持器?在采样控制系统中,把脉冲序列转变为连续信号的过程称为保持过程。实现保持的装置称为保持器。保持器的数学作用:解决各离散采样点之间的插值问题。

零阶保持器的传递函数为

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

图 7-5 所示是零阶保持器的输出特性。

零阶保持器是一种按常值外推的保持器,它把前一采样时刻  $nT$  的采样值一直保持

到下一个采样时刻 $(n+1)T$ 到来之前。零阶采样器的采样信号是阶梯信号。取阶梯信号的中点连接起来,则可以得到与连续信号形状相同但时间滞后 $T/2$ 的响应 $e(t-T/2)$ 。

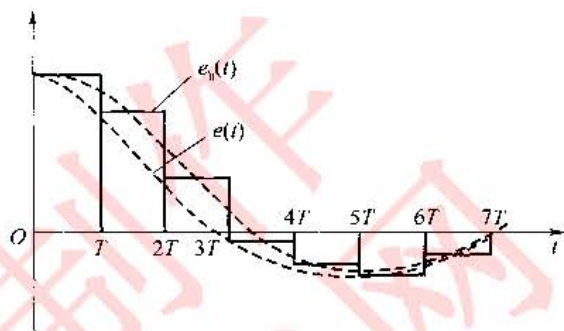


图 7-5 零阶保持器的输出特性

## 7.3 离散系统的数学模型

离散系统的数学定义为

$$c(n) = \mathcal{F}[r(n)]$$

其中, $r(n)$ 为系统在 $t=nT$ 时的输入序列, $c(n)$ 为系统在 $t=nT$ 时的输出序列差分方程。 $T$ 为采样周期。

若上式变换关系为线性,则称为线性离散系统;反之,称为非线性离散系统。

数学模型的 3 种表达形式为:差分方程,脉冲传递函数,离散状态空间法。

线性离散系统满足叠加性和齐次性;线性定常离散系统是输入/输出不随时间而改变的线性离散系统。

### 1. 描写离散系统的数学形式——差分方程

一般的线性定常离散系统,可以用如下的差分方程来描述:

$$c(k) = - \sum_{i=1}^n a_i c(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j r(k-j)$$

其中, $a_i (i=1,2,\dots,n)$  和  $b_j (j=0,1,\dots,m)$  均为常数。

### 2. 线性离散系统差分方程及其解法

(1) 经典法:求齐次方程的通解和非齐次方程的特解。

(2) 迭代法:给定输出序列的初值,再利用差分方程的递推关系,计算输出序列。

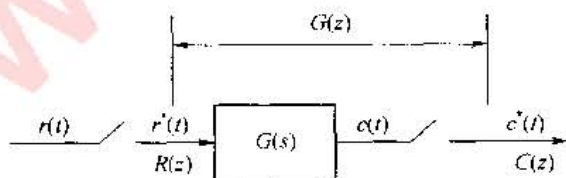


图 7-6 开环离散系统

(3)  $z$  变换法:对差分方程进行  $z$  变换,根据实数位移定理,由  $z$  的代数方程推导  $C(z)$ ,再经反变换得  $c(k)$ 。

### 3. 脉冲传递函数

(1) 定义:设开环离散系统如图 7-6 所示,如果系统的初始条件为零,输入信号为  $r(t)$ ,采样后  $r^*(t)$  的  $z$  变换函

数为  $R(z)$ , 系统连续部分的输出为  $c(t)$ , 采样后  $c^*(t)$  的  $z$  变换函数为  $C(z)$ , 则线性定常离散系统的脉冲传递函数为系统输出采样信号的  $z$  变换与输入采样信号的  $z$  变换之比, 记为:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

(2) 脉冲传递函数的求法。先求  $G(s)$  的拉氏反变换, 得到脉冲过渡函数  $K(t)$ , 然后再对  $K(t)$  作  $z$  变换, 即可得脉冲传递函数  $G(z)$ 。也可直接由  $G(s)$  查表得到  $G(z)$ , 记作  $G(z) = \mathcal{Z}[G(s)]$ 。

#### 4. 开环系统脉冲传递函数

开环离散系统的脉冲传递函数求解与串联环节之间的采样开关有关。

串联环节之间有采样开关的情况: 有理想采样器隔开的  $n$  个线性连续环节串联的脉冲传递函数等于  $n$  个环节  $z$  变换的乘积。

串联环节之间没有采样开关的情况: 没有理想采样器隔开的  $n$  个线性连续环节串联的脉冲传递函数等于  $n$  个环节乘积后的  $z$  变换。

有零阶保持器的开环系统脉冲传递函数: 此时, 开环系统脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{G_p(s)}{s} \right]$$

#### 5. 闭环系统脉冲传递函数

求闭环系统脉冲传递函数, 一般先设第一个采样开关两侧的信号为  $E(z)$ , 然后根据信号在前向通路及回路中的流动形式, 列出一系列方程, 根据这些方程即可解得闭环系统的脉冲传递函数。

## 7.4 离散系统的稳定性与稳态误差

### 1. 离散系统稳定的条件

#### (1) 时域中离散系统稳定的充要条件

当且仅当描述离散系统的差分方程所有的特征根的模  $|a_i| < 1 (i=1, 2, \dots, n)$ , 则相应的线性定常离散系统是稳定的。

#### (2) $z$ 域中离散系统稳定的充要条件

当且仅当描述离散特征方程的全部特征根均分布在  $z$  平面上的单位圆内, 或者所有特征根的模均小于 1, 即  $|z_i| < 1 (i=1, 2, \dots, n)$ , 则相应的线性定常离散系统是稳定的。

### 2. 离散系统的稳定性判据

$\omega$  变换与劳斯判据。如果令  $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$  代入离散系统的闭环系统方程, 并整理得到关于  $\omega$  的方程。于是可以利用劳斯判据离散系统的稳定性。

### 3. 离散系统的稳态误差

#### (1) 终值定理法

首先判断系统是否稳定, 只有稳定才能计算稳态误差。然后求误差脉冲传递函数

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G(z)}$$

用终值定理计算稳态误差

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)R(z)}{[1+G(z)]}$$

## (2) 静态误差系数法

可直接利用开环系统的脉冲传递函数来计算稳态误差。

首先判断系统是否稳定,只有稳定才能计算稳态误差。然后确定系统的型别,求系统的静态误差系数

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1+G(z)], K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z), K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$$

表 7-1 为系统的稳态误差。

表 7-1 单位反馈离散系统的稳态误差

系统型别	位置误差 $r(t)=1(t)$	速度误差 $r(t)=t$	加速度误差 $r(t)=\frac{1}{2}t^2$
0 型	$\frac{1}{K_p}$	$\infty$	$\infty$
I 型	0	$\frac{T}{K_v}$	$\infty$
II 型	0	0	$\frac{T^2}{K_a}$
III 型	0	0	0

## 7.5 离散系统的动态性能分析

### 1. 离散系统的时间响应

通常假设外作用为单位阶跃函数  $1(t)$ ,通过系统闭环脉冲传递函数,得系统输出量的  $z$  变换函数,再经反变换求出输出信号的脉冲序列  $c^*(t)$ 。根据  $c^*(t)$  曲线分析离散系统的动态和稳态性能。

### 2. 采样器和保持器对系统性能的影响

采样器和保持器不影响开环脉冲传递函数的极点,仅仅影响开环脉冲传递函数的零点。从而影响变换脉冲传递函数的极点,故改变闭环离散系统的动态性能。

(1) 采样器可使系统的峰值时间和调节时间略有减小,但是超调量增大,故采样造成的信息损失会降低系统的稳定程度。

(2) 零阶保持器使系统的峰值时间和调节时间都加长,超调量和振荡次数也增加。

### 3. 闭环极点与动态响应的关系

离散系统的闭环脉冲传递函数的极点在  $z$  平面上单位圆的分布,对系统的动态性能具有重要的影响。

设系统闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{M(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \quad m \leq n$$

$$= \frac{b_0 \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{a_0 \prod_{k=1}^n (z - p_k)}$$

若系统稳定, 有  $|p_k| < 1$ , 则

$$r(t) = 1(t) \Rightarrow R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$C(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{z}{z-1} \frac{M(z)}{D(z)} \Rightarrow \frac{C(z)}{z} = \frac{M(1)}{D(1)} \frac{1}{z-1} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z-p_k}$$

$$\text{其中, } c_k = \frac{M(p_k)}{(p_k-1)\dot{D}(p_k)}, \dot{D}(p_k) = \left. \frac{dD(z)}{dz} \right|_{z=p_k} \Rightarrow C(z) = \frac{M(1)}{D(1)} \frac{z}{z-1} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k z}{z-p_k}$$

(1)  $z$  平面正实轴上的闭环单极点

正实数  $p_k$  对应瞬态分量

$$c_k^*(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{c_k z}{z-p_k} \right] \Rightarrow c_k(nT) = c_k p_k^n$$

令  $a = \frac{1}{T} \ln p_k \Rightarrow c_k(nT) = c_k e^{anT}$ , 则有

- $p_k > 1$ , 闭环单极点位于单位圆周外  $\rightarrow a > 0$ , 则  $c_k(nT) = c_k e^{anT}$  发散;
- $p_k = 1$ , 闭环单极点位于单位圆上  $\rightarrow a = 0$ , 则  $c_k(nT) = c_k$  等幅序列;
- $p_k < 1$ , 闭环单极点位于单位圆内  $\rightarrow a < 0$ , 则  $c_k(nT) = c_k e^{anT}$  收敛, 且  $p_k \downarrow, |a| \uparrow$ ,

$c_k(nT)$  衰减  $\uparrow$ 。

(2)  $z$  平面负实轴上的闭环单极点

负实数  $p_k$  对应瞬态分量

$$c_k^*(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{c_k z}{z-p_k} \right] \Rightarrow c_k(nT) = c_k p_k^n$$

因为对于负实数  $p_k$ , 有

$n$  为奇数时,  $p_k^n$  为负数;

$n$  为偶数时,  $p_k^n$  为正数。

所以瞬态分量  $c_k(nT)$  是交替变号的双向脉冲序列, 即

•  $p_k > -1$ , 闭环单极点位于单位圆周外  $\rightarrow a > 0$ , 则  $c_k(nT) = c_k e^{anT}$  为交替变号的发散脉冲序列;

•  $p_k = -1$ , 闭环单极点位于单位圆上  $\rightarrow a = 0$ , 则  $c_k(nT) = c_k$  交替变号等幅脉冲序列;

•  $p_k < -1$ , 闭环单极点位于单位圆内  $\rightarrow a < 0$ , 则  $c_k(nT) = c_k e^{anT}$  交替变号的衰减脉冲序列, 且  $p_k \downarrow, |a| \uparrow, c_k(nT)$  衰减  $\uparrow$ 。

图 7-7 所示是闭环实极点分布与相应的动态响应形式, 说明:

- 若闭环实数极点位于右  $z$  半平面, 输出动态响应为单向正脉冲序列;
- 若闭环实数极点位于左  $z$  半平面, 输出动态响应为双向脉冲序列;
- 若闭环实数极点位于单位圆内, 输出动态响应收敛, 且实数极点越靠近原点, 收敛越快;

- 若闭环实数极点位于单位圆上,输出动态响应为等幅脉冲序列;
- 若闭环实数极点位于单位圆外,输出动态响应发散。

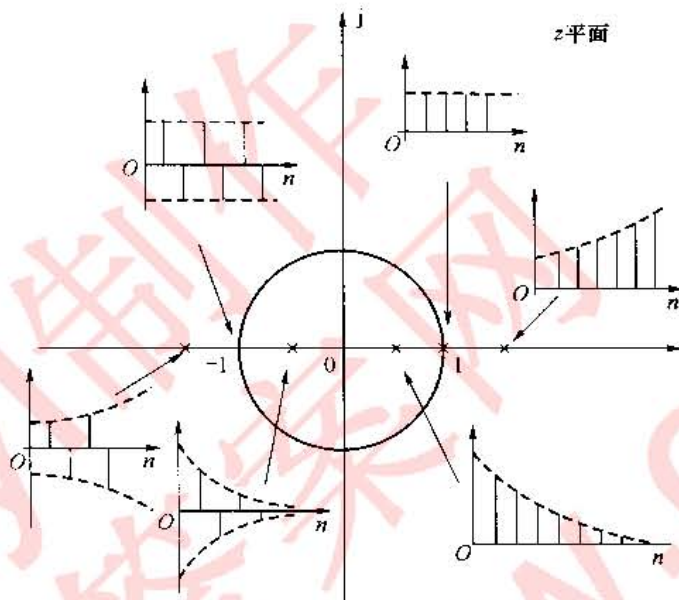


图 7-7 闭环实极点分布与相应的动态响应形式

### (3) $z$ 平面的闭环共轭极点

共轭复数极点  $p_k, \bar{p}_k = |p_k| e^{\pm j\theta_k}$ , 对应瞬态分量

$$c_{k,k}^*(t) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{c_k z}{z - p_k} + \frac{\bar{c}_k z}{z - \bar{p}_k} \right] \Rightarrow c_{k,k}(nT) = c_k p_k^n + \bar{c}_k \bar{p}_k^n$$

$$\text{令 } c_k, \bar{c}_k = |c_k| e^{\pm j\varphi_k}, a_k, \bar{a}_k = \frac{1}{T} \ln(|p_k| e^{\pm j\theta_k}) = a \pm j\omega$$

$$\Rightarrow c_{k,k}(nT) = c_k p_k^n + \bar{c}_k \bar{p}_k^n = c_k e^{a_k nT} + \bar{c}_k e^{\bar{a}_k nT}$$

$$\Rightarrow c_{k,k}(nT) = c_k p_k^n + \bar{c}_k \bar{p}_k^n = c_k e^{a_k nT} + \bar{c}_k e^{\bar{a}_k nT}$$

$$= 2 |c_k| e^{a nT} \cos(n\omega T + \varphi_k)$$

$$\text{其中, } a = \frac{1}{T} \ln |p_k|, \omega = \frac{\theta_k}{T}, k < \theta_k < \pi.$$

图 7-8 所示是闭环复极点分布与相应的动态响应形式,说明:

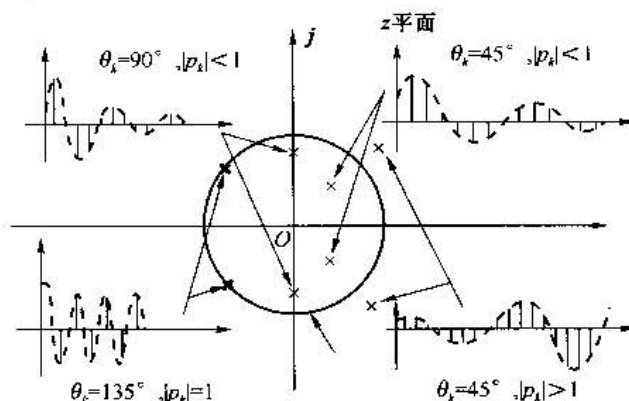


图 7-8 闭环复极点分布与相应的动态响应形式

- $|p_k| > 1$ , 闭环共轭极点位于单位圆外  $\rightarrow a > 0$ , 则  $c_k(nT)$  振荡发散;
- $|p_k| = 1$ , 闭环共轭极点位于单位圆上  $\rightarrow a = 0$ , 则  $c_k(nT)$  等幅振荡;
- $|p_k| < 1$ , 闭环共轭极点位于单位圆内  $\rightarrow a < 0$ , 则  $c_k(nT)$  振荡收敛, 且  $|p_k| \downarrow$ ,  $|a| \uparrow$ ,  $c_k(nT)$  衰减  $\uparrow$ 。

结论: 设计离散系统时, 闭环极点应位于右  $z$  平面单位圆内, 且尽量靠近原点。

(4)  $z$  平面极点位于原点的情况

$z$  平面原点对应  $s$  平面  $\sigma \rightarrow -\infty$ , 具有无穷大稳定度。

可以将  $\Phi(z)$  写成

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 z^n} \\ &= d_0 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_n z^{-n}\end{aligned}$$

当  $m = n, \Rightarrow d_0 = 0$ ;

$m = n - 2, \Rightarrow d_0 = d_1 = 0 \cdots$

## 7.6 离散系统的数字校正

线性离散系统的设计方法分为模拟化设计和离散化设计两种。

模拟化设计是先把系统的数字部分等效为连续环节, 然后按连续系统理论设计校正装置, 最后将校正装置数字化。

离散化设计法又称直接数字设计法, 即把系统按离散化进行分析, 求出系统的脉冲传递函数, 然后按离散系统理论设计数字校正装置(又称数字控制器)

### 1. 最少拍系统设计

离散系统的数字校正问题即确定数字控制器  $D(z)$ 。具体方法: 由离散系统性能指标确定闭环脉冲传递函数或误差传递函数, 然后确定数字控制器的脉冲传递函数, 并加以实现。

最少拍系统: 一个采样周期为一拍, 最少拍系统是指在典型输入作用下, 能以有限拍结束响应过程, 且在采样时刻上无稳态误差的离散系统。最少拍系统的设计是针对典型输入作用进行的。

最少拍系统的设计原则: 若系统广义被控对象  $G(z)$  无延迟, 且在  $z$  平面单位圆上以及单位圆外无零极点, 要求选择闭环脉冲传递函数, 使系统在典型输入作用下, 经过最少采样周期后能使输出序列在各采样时刻的稳态误差为零, 达到完全跟踪的目的, 从而确定所需要的数字控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ 。

在各种典型输入作用下, 由最少拍系统的输出响应序列可得如下结论。

(1) 快速性: 按单位斜坡输入设计的最少拍系统, 在各种典型输入作用下, 动态过程均为两拍。

(2) 准确性: 单位阶跃和单位斜坡输入的最少拍系统的稳态误差均为零, 但对单位加速度存在的稳态误差为  $T^2$ 。

(3) 动态性: 系统对单位斜坡输入的动态响应性能较好, 对单位阶跃响应性能较差。

(4) 平稳性:均存在纹波,不实用。

## 2. 无波纹最少拍系统设计

无波纹最少拍系统的设计要求:在某种典型输入作用下设计的系统,其输出响应经过尽可能少的采样周期后,不仅在采样时刻上输出可以完全跟踪输入,而且在非采样时刻不存在纹波。

无波纹输出要求在有限个采样周期后,零阶保持器的输出达到相对稳定。要满足这一要求,除了采用前面介绍的最小拍系统设计方法外,还需要对被控对象的传递函数和闭环脉冲传递函数提出相应的要求。

无波纹最少拍系统的必要条件:被控对象传递函数  $G_p(s)$  中,至少应包含  $(q-1)$  个积分环节。无波纹最少拍系统的附加条件: $\Phi(z)$  的零点应抵消  $G(z)$  的全部零点,即应有:  $\Phi(z) = P(z)M(z)$ , 式中,  $M(z)$  为待定  $z^{-1}$  多项式。

## 习题解答

7.1 试用长除法求函数  $E(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)^2}$  的脉冲序列  $e^*(t)$ 。

解

$$E(z) = \frac{z}{(z-1)(z+0.5)^2} = \frac{z^{-2}}{1-0.75z^{-2}-0.25z^{-3}}$$

做长除法,得

$$E(z) = z^{-2} + 0.75z^{-4} + 0.25z^{-5} + 0.05625z^{-6} + \dots$$

$E(z)$  的脉冲序列

$$e^*(t) = \delta(t-2T) + 0.75\delta(t-4T) + 0.25\delta(t-5T) + 0.05625\delta(t-6T) + \dots$$

7.2 求解下列差分的解:  $x(k+2) - 3x(k+1) + 2x(k) = u(k)$ 。其中  $x(0) = x(1) = 0$ ,  $u(0) = 1, u(k) = 0, k \geq 1$ 。

解

差分方程两端求  $z$  变换,得

$$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1) - 3[zX(z) - zx(0)] + 2X(z) = U(z)$$

$$x(0) = x(1) = 0, u(z) = 1$$

代入上式有

$$(z^2 - 3z + 2)X(z) = 1, X(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

$$x(k) = \begin{cases} 2^{k-1} - 1^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

7.3 试求  $F(z) = \frac{2+z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})}$  的初值和终值。

解

$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 2$ ,  $F(z)$  的极点  $p_1 = 0.5, p_2 = 1$ , 满足终值定理的应用条件, 即

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{2z^2+1}{(z-0.5)(z-1)} = 6$$

7.4 求  $G(s) = \frac{a(1-e^{-Ts})}{s^2(s+a)}$  的脉冲传递函数, 式中  $T$  为采样周期。

解

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{a(1-e^{-Ts})}{s^2(s+a)} = (1-e^{-Ts}) \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{a} \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} \right] \\ \mathcal{Z}[G(s)] &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{a} \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} \right] \\ &= \frac{z-1}{z} \left[ \frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{a(z-1)} + \frac{z}{a(z-e^{-aT})} \right] \\ &= \frac{(e^{-aT} + aT - 1)z + (1 - e^{-aT} - aTe^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})} \end{aligned}$$

7.5 试求如图 7-9 所示系统的输出  $z$  变换  $C(z)$ 。

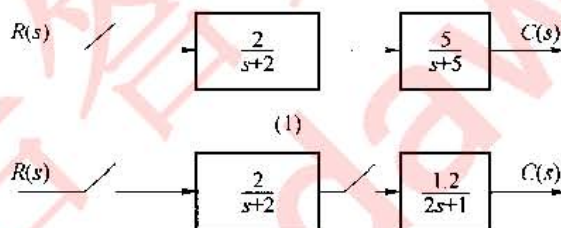


图 7-9 系统结构图

解

$$\begin{aligned} (1) \quad C(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{2}{s+2} \frac{5}{s+5} \right] R(z) = \mathcal{Z} \left[ \frac{10}{3} \frac{1}{s+2} - \frac{10}{3} \frac{1}{s+5} \right] R(z) \\ &= \frac{10}{3} \left( \frac{z}{z-e^{-2T}} - \frac{z}{z-e^{-5T}} \right) R(z) = \frac{10}{3} \frac{e^{-2T} - e^{-5T}}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})} R(z) \\ (2) \quad C(z) &= \mathcal{Z} \left[ \frac{2}{10s+1} \right] \mathcal{Z} \left[ \frac{1.2}{2s+1} \right] R(z) \\ &= \frac{0.2z}{z-e^{-0.1T}} \frac{0.6z}{z-e^{-0.5T}} R(z) \\ &= \frac{0.12z^2}{(z-e^{-0.1T})(z-e^{-0.5T})} R(z) \end{aligned}$$

7.6 求图 7-10 所示采样系统输出  $C(z)$  表达式。

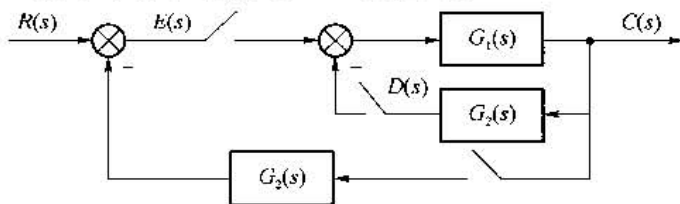


图 7-10 系统结构图

解

$$E(z) = R(z) - C(z)G_3(z), D(z) = E(z)G_1G_2(z) - D(z)G_1G_2(z)$$

$$D(z) = \frac{G_1G_2(z)}{1+G_1G_2(z)}E(z)$$

因此

$$C(z) = E(z)G_1(z) - D(z)G_1(z) = \frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}E(z)$$

所以

$$C(z) = \frac{G_1(z)R(z)}{1+G_1G_2(z)} - \frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}C(z)G_3(z)$$

即

$$C(z) = \frac{G_1(z)R(z)}{1+G_1G_2(z)+G_1(z)G_3(z)}$$

7.7 已知脉冲传递函数  $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.53+0.1z^{-1}}{1-0.37z^{-1}}$ , 其中  $R(z) = \frac{z}{z-1}$ , 试求  $c(nT)$ 。

解

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.53+0.1z^{-1}}{1-0.37z^{-1}} = \frac{0.53z+0.1}{z-0.37}$$

$$C(z) = \frac{0.53z+0.1}{z-0.37}R(z) = \frac{0.53z+0.1}{z-0.37} \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{C(z)}{z} = \frac{0.53z+0.1}{z-0.37} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{0.47}{z-0.37}$$

$$C(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{0.47z}{z-0.37}$$

进行  $z$  反变换, 得

$$c(nT) = 1 - 0.47(0.37)^n$$

7.8 一采样系统如图 7-11 所示。为使该闭环系统稳定, 求采样周期  $T$  的取值范围。

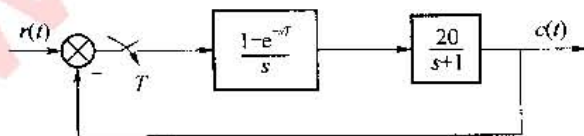


图 7-11 系统结构图

解

系统开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{20}{s+1}\right] = 20(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{20(1-e^{-T})}{z-e^{-T}}$$

闭环系统特征方程为

$$D(z) = z - 21e^{-T} + 20 = 0$$

闭环特征根为

$$z = 21e^{-T} - 20$$

只要闭环极点位于单位圆内,系统则稳定。故有:  $-1 < 21e^{-T} - 20 < 1$ , 所以,  $0 < T < 0.1$ 。

7.9 单位负反馈采样系统,对误差进行采样,保持器为零阶,对象传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

(1) 若采样周期为 1 s,求系统临界放大系数  $K$ ;

(2) 若采样周期为 1 s,并且输入为单位斜坡函数,求系统的稳态误差。

解

(1) 系统的开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+1)}\right] = K(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\ &= K(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] \\ &= \frac{K[(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})]}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$

当  $T=1$  s 时

$$G(z) = \frac{K(0.368z+0.264)}{z^2-1.368z+0.368}$$

闭环特征方程为

$$D(z) = z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.264K + 0.368) = 0$$

令  $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$  进行变换,得到特征方程

$$D(\omega) = 0.632K\omega^2 + (1.264 - 0.528K)\omega + (2.736 - 0.104K) = 0$$

因为特征方程为二阶,只要各项系数均大于 0,系统则稳定。由此解得  $0 < K < 2.39$  时系统稳定,所以系统临界放大系数  $K=2.39$ 。

(2)  $r(t)=t$ ,  $R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$ , 用静态误差系数法求稳态误差

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K(0.368z+0.264)}{z^2-1.368z+0.368} = K$$

当  $r(t)=t$  时,系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{T}{K_v} = \frac{1}{K}$$

7.10 已知系统结构如图 7-12 所示,  $K=10$ ,  $T=0.2$  s,  $r(t)=1(t)+t+0.5t^2$ , 求系统的稳态误差。

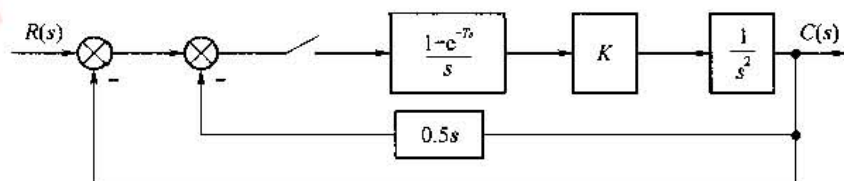


图 7-12 系统结构图

解

系统的开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{10(1+0.5s)}{s^2}\right] = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{10(1+0.5s)}{s^3}\right] \\ &= (1-z^{-1})\left[\frac{5T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{5Tz}{(z-1)^2}\right] \end{aligned}$$

把  $T=0.2$  代入得

$$G(z) = \frac{1.2z-0.8}{(z-1)^2}$$

可以求出:位置误差系数

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1+G(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 + \frac{1.2z-0.8}{(z-1)^2}\right] = \infty$$

速度误差系数

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1.2z-0.8}{(z-1)^2} = \infty$$

加速度误差系数

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{1.2z-0.8}{(z-1)^2} = 0.4$$

所以系统的稳态误差为

$$e(\infty) = e_{ss} = \frac{1}{K_p} + \frac{T}{K_v} + \frac{T^2}{K_a} = 0.1$$

7.11 设离散系统如图 7-13 所示,其中:  $T=0.1\text{ s}$ ,  $K=1$ ,  $r(t)=t$ , 试求静态误差系数  $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$ , 并求系统的稳态误差  $e(\infty)$ 。

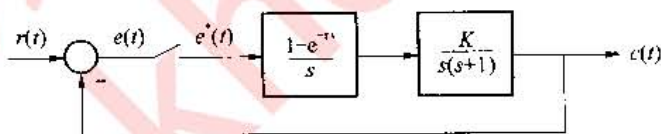


图 7-13 离散系统结构图

解

系统的开环脉冲传递函数为

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = (1-z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

将  $T=0.1$  代入上式,得

$$G(z) = \frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}$$

静态位置误差系数

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1+G(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 + \frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}\right] = \infty$$

静态速度误差系数

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)} = 0.1$$

静态加速度误差系数

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)} = 0$$

由于  $r(t)=t$ , 故系统的稳态误差

$$e(\infty) = \frac{T}{K_v} = \frac{0.1}{0.1} = 1$$

7.12 已知离散系统如图 7-14 所示, 其中 ZOH 为零阶保持器,  $T=0.25$  s。当  $r(t)=2+t$  时, 欲使稳态误差小于 0.1, 试求  $K$  值。

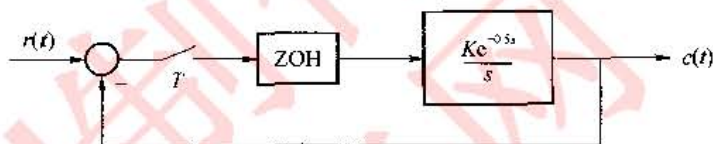


图 7-14 系统结构图

解

开环脉冲传递函数

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \frac{K e^{-0.5T}}{s^2} \right] \\ &= \frac{z-1}{z} \frac{KTz}{(z-1)^2} z^{-1} = \frac{KTz^{-2}}{z-1} \end{aligned}$$

$$R(z) = \mathcal{Z}[r(t)] = \mathcal{Z}[2+t] = \frac{2z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} = R_1(z) + R_2(z)$$

在阶跃输入  $R_1(z)$  作用下的稳态误差  $e_{ss1}=0$ , 而单位斜坡输入  $R_2(z)$  作用下的稳态误差  $e_{ss2}$  为常值, 而且,

$$e_{ss2} = T/K_v, K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = KT$$

故系统在  $r(t)=2+t$  作用下总的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = 0 + \frac{T}{K_v} = \frac{T}{KT} = \frac{1}{K}$$

若要求  $e_{ss} < 0.1$ , 则  $\frac{1}{K} < 0.1$ , 即  $K > 10$ 。

7.13 已知计算机控制系统的结构图如图 7-15 所示, 其中采样周期  $T=1$  s。要求:

- (1) 写出系统的开环和闭环脉冲传递函数;
- (2) 判断该系统是否稳定;
- (3) 计算单位阶跃输入信号  $r(t)=1(t)$  时的输出响应  $c^*(t)$ 。

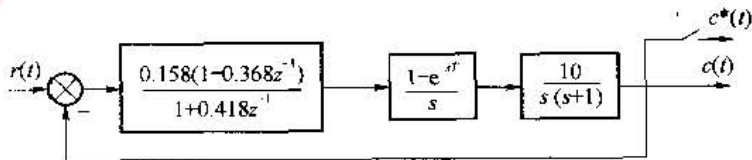


图 7-15 计算机控制系统结构图

解

(1) 系统的开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{0.158(1-0.368z^{-1})}{1+0.418z^{-1}} \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{10}{s(s+1)}\right] \\
 \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{10}{s(s+1)}\right] &= 10(1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\
 &= 10(1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] \\
 &= \frac{10(0.368z+0.264)}{(z-1)(z-0.368)}
 \end{aligned}$$

所以

$$G(z) = \frac{0.158(1-0.368z^{-1})}{1+0.418z^{-1}} \frac{10(0.368z+0.264)}{(z-1)(z-0.368)} = \frac{0.581z+0.417}{z^2-0.582z-0.418}$$

闭环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{\frac{0.581z+0.417}{z^2-0.582z-0.418}}{1+\frac{0.581z+0.417}{z^2-0.582z-0.418}} \approx \frac{0.581z+0.417}{z^2} \\
 &= 0.581z^{-1} + 0.417z^{-2}
 \end{aligned}$$

可见,该系统为两拍系统。

(2) 系统的闭环特征方程为  $D(z)=z^2$ , 两个根均在原点, 故系统稳定。

$$(3) \quad r(t)=1(t), R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
 C(z) &= \Phi(z)R(z) = \frac{0.581z^{-1}+0.417z^{-2}}{1-z^{-1}} \\
 &= 0.581z^{-1} + 0.998z^{-2} + 0.998z^{-3} + 0.998z^{-4} + \dots
 \end{aligned}$$

$$c^*(t) = 0.581\delta(t-1) + 0.998\delta(t-2) + 0.998\delta(t-3) + 0.998\delta(t-4) + \dots$$

7.14 一离散系统如图 7-16 所示, 其中  $T=0.5\text{ s}$ , 求控制器的脉冲传递函数表达式  $D(z)$ , 分析在单位阶跃输入下是否有差。

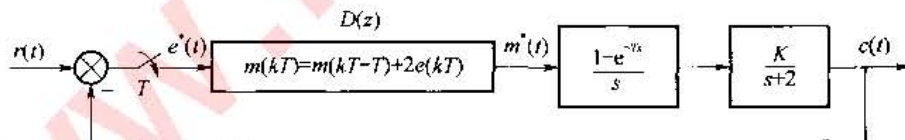


图 7-16 系统结构图

解

数字控制器的差分方程为  $m(kT)=m(kT-T)+2e(kT)$ , 两端求  $z$  变换得

$$\frac{M(z)}{E(z)} = D(z) = \frac{2z}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K}{s+1}\right] &= K(1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s(s+2)}\right] \\
 &= K(1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left[\frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+2}\right] = \frac{K(1-e^{-1})}{2(z-e^{-1})} \\
 &= \frac{0.316K}{z-0.367}
 \end{aligned}$$

开环脉冲传递函数

$$G(z) = \left( \frac{2z}{z-1} \right) \left( \frac{0.316K}{z-0.367} \right) = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.367)}$$

由于开环传递函数分母多项式中含有 $(z-1)$ ，是一阶无静差系统，故在单位阶跃信号作用下是无差的。闭环传递函数为

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \Phi(z) = \frac{0.632Kz}{z^2 + (0.632K - 1.367)z + 0.367}$$

7.15 设离散系统如图 7-17 所示，其中采样周期  $T=1$  s，试求当  $r(t)=R_0 1(t)+R_1 t$  时，系统无稳态误差、过渡过程在最少拍内结束的  $D(z)$ 。

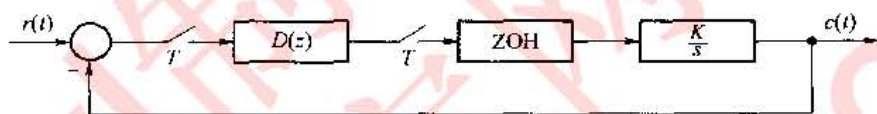


图 7-17 系统结构图

解

如图 7-17 可知

$$G(z) = (1-z^{-1}) \left( \frac{K}{s^2} \right) = (1-z^{-1}) \frac{Kz}{(z-1)^2} = \frac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$R(z) = \frac{R_0 z}{z-1} + \frac{R_1 T z}{(z-1)^2}$$

因为  $T=1$ ，所以

$$R(z) = \frac{R_0 z}{z-1} + \frac{R_1 z}{(z-1)^2}$$

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{R_0 z}{z-1} + \frac{R_1 z}{(z-1)^2} \right] \frac{1}{1+G(z)D(z)} (z-1) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ R_0 + \frac{R_1 z}{(z-1)} \right] \frac{1}{1+G(z)D(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ R_0 + \frac{R_1}{(z-1)} \right] [1-\Phi(z)] = 0 \end{aligned}$$

为使  $\Phi(z)$  最简单， $D(z)$  又能实现，取  $1-\Phi(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right)^2 = (1-z^{-1})^2$ ，可使  $e(\infty)=0$ 。

由上式可得  $\Phi(z) = \frac{2z-1}{z^2} = 2z^{-1} - z^{-2}$ ，由此可知，在  $r(t)=R_0 1(t)+R_1 t$  作用下，无

稳态误差的最少拍系统的瞬态过程，只要两拍就可以结束，则由  $\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)G(z)}$  可得

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{\Phi(z)}{1-\Phi(z)} = \frac{1-z^{-1}}{Kz^{-1}} \frac{\frac{2z-1}{z^2}}{\left( \frac{z-1}{z} \right)^2} = \frac{2-z^{-1}}{K(1-z^{-1})}$$

7.16 试按无纹波最少拍系统设计方法，分别计算出题 7.15 的  $D(z)$ 。

解

利用题 7.15 的结果

$$G_0(z) = \frac{Kz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$R(z) = \frac{R_0 z}{z-1} + \frac{R_1 z}{(z-1)^2} = \frac{R_0 + (R_1 - R_0)z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^2}$$

当  $r(t)=t$  作用时,可以查出  $\Phi_e(z)=(1-z^{-1})^2$ ,同时也补偿了  $G_0(z)$  单位圆上的极点:  
 $\Phi(z)=1-\Phi_e(z)=z^{-1}(2-z^{-1})$ ,同时也补偿了  $G_0(z)$  分子中的  $z^{-1}$  因子,  $G_0(z)$  中没有

其他零点。  $D(z) = \frac{\Phi(z)}{G_0(z)\Phi_e(z)} = \frac{2-z^{-1}}{K(1-z^{-1})}$ , 验算

$$E_2(z) = D(z)\Phi_e(z)R(z) = \frac{(2-z^{-1})[R_0 + (R_1 - R_0)z^{-1}]}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{K}[2R_0 + (2R_1 - R_0)z^{-1} + R_1(z^{-2} + z^{-3} + \dots)]$$

也就是  $e_2(0) = \frac{2R_0}{K}$ ,  $e_2(1) = \frac{2R_1 - R_0}{K}$ ,  $e_2(2) = e_2(3) = \dots = \frac{R_1}{K}$ , 说明系统从第二拍起达到稳定。

7.17 已知离散系统如图 7-18 所示,其中采样周期  $T=1$ ,连续部分传递函数:

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

试求当  $r(t)=1(t)$  时,系统无稳态误差,过渡过程在最少拍内结束的数字控制器  $D(z)$ 。

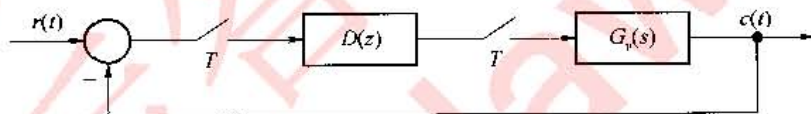


图 7-18 离散系统结构图

解

由图可知

$$G(s) = G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

故

$$G(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}} = \frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$$

为使系统在单位阶跃信号作用下无稳态误差,并能在有限拍内结束过渡过程,由式

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+G(z)D(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} [1-\Phi(z)] = 0$$

和式

$$\Phi(z) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_r z^{-r} = \frac{P(z)}{z^r}$$

可得

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ 1 - \frac{P(z)}{z^r} \right] = 0$$

所以  $P(z)=1$ 。

从  $D(z)$  能实现来看,  $r$  的最小值应该为 1。因为最小拍是指在阶跃信号作用下无稳态误差,因此其闭环传递函数应为  $\Phi(z) = \frac{P(z)}{z^r} = \frac{1}{z}$ , 故其瞬态过程只要一拍就可

以结束。数字控制器  $D(z)$  的脉冲传递函数由式  $D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{P_0}{(z^r - P_0)}$  求出为

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{P_0}{(z^r - P_0)} = \frac{1}{G(z)} \frac{1}{z-1}$$

$$= \frac{1}{0.632z} \frac{1}{z-1} = \frac{z-0.368}{0.632z} = 1.58 - 0.58z^{-1}$$

7.18 试按无纹波最少拍系统设计方法,分别计算出题 7.17 的  $D(z)$ 。

解

(1) 利用题 7.17 的结果  $G(z) = \frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$ , 当  $r(t)=1(t)$  作用时, 可查出最少拍设计中  $\Phi_e(z)=1-z^{-1}$ , 同时也补偿了  $G_0(z)$  单位圆上的极点。同时也补偿了  $G_0(z)$  分子中的  $z^{-1}$  因子,  $G_0(z)$  中没有其他零点。

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G_0(z)\Phi_e(z)} = \frac{1-0.37z^{-1}}{0.63} = 1.587 - 0.587z^{-1}$$

验算  $E_2(z) = D(z)\Phi_e(z)R(z) = 1.587 - 0.587z^{-1}$ , 即  $e_2(0) = 1.587, e_2(1) = -0.587, e_2(2) = e_2(3) = \dots = 0$ , 说明该系统从第二拍起达到稳定。

## 第 8 章 非线性控制系统分析

### 8.1 非线性系统

#### 1. 非线性系统的基本概念

- 非线性是宇宙间的普遍规律,严格地讲,几乎所有的系统都是非线性的;
- 非线性对象的运动规律要用非线性代数方程或非线性微分方程描述;
- 控制系统中若含有非线性部件,该系统即为非线性系统;
- 线性系统是非线性系统的特例,线性系统的分析和设计方法在非线性和控制系统的研究中有重要作用。

#### 2. 非线性系统的特征

##### (1) 稳定性

线性系统的稳定性即为平衡状态  $y=0$  的稳定性,只取决于系统本身的结构和参数,与外作用和初始条件无关。非线性系统的稳定性不仅与系统的结构和参数有关,而且与系统的初始条件密切相关。非线性系统可能存在多个平衡状态,各平衡状态可能是稳定的,也可能是不稳定的。

##### (2) 自激振荡

在非线性系统中,在没有外界周期变化的信号作用的情况下,系统内部产生的具有固定的振幅和频率的稳定周期运动,称为自激振荡,简称自振。线性系统不可能产生自振。这种稳定的自激振荡是某些非线性系统的一个重要特征。在某些非线性系统中还存在更加复杂的稳定的近似周期振荡的运动,这种运动没有固定的周期和振幅,比如分谐波振荡、跳跃谐振、多模态共振等。

##### (3) 频率响应

对于稳定的线性系统,如果输入信号是正弦信号,则系统的输出量必然是同频率的正弦信号,两者只有在幅值和相位上的差别。对于非线性系统,如果输入信号是正弦信号,输出量可以含有它的高次谐波,一般是非正弦信号。因此,原则上不能用频率特性描述非线性系统的动态性能,也不能用阶跃或脉冲等外作用下系统的响应来表征非线性系统的动态性质。

#### 3. 非线性系统分析和设计的常用方法

##### (1) 相平面法

相平面法是推广应用时域分析法的一种图解分析法。

## (2) 描述函数法——一次谐波近似法

描述函数法是基于频域分析法和非线性特性谐波线性化的一种图解分析法。

## (3) 逆系统法

逆系统法运用内环非线性反馈控制,构成伪线性系统,设计外环控制网络。

# 8.2 常见非线性因素对系统运动的影响

(1) 继电特性、死区、饱和、间隙和摩擦是实际系统中常见的非线性因素。其等效增益曲线如图 8-1 所示。

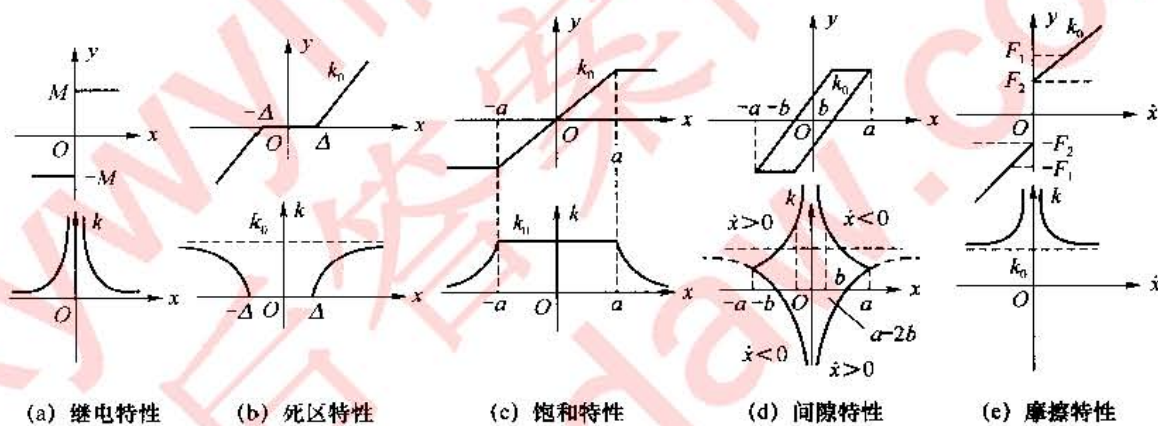


图 8-1 常见非线性特性的等效增益曲线

(2) 继电特性使得系统产生振荡,死区使得系统存在稳态误差,饱和使得系统的开环增益在饱和区下降,间隙降低系统的跟踪精度,摩擦造成系统低速运动的不平滑性。

# 8.3 相平面法定义

## 1. 相平面法定义

相平面法是求解一、二阶线性或非线性系统的一种图解方法。它给出某一平衡状态稳定性的信息和系统运动的直观图像,属于时间域的分析方法,比较直观、准确地反映系统的稳定性、平衡状态和稳态精度及初始条件及参数对系统运动的影响。

设描述二阶非线性系统的微分方程为  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ , 其解为  $x(t)$ 。以  $x(t)$  为横坐标,  $\dot{x}$  为纵坐标, 则所构成的平面称为相平面。系统的某一状态对应于相平面上的一点, 相平面上的点随时间变化的轨迹叫做相轨迹。通过相轨迹来分析系统运动情况的方法称为相平面法。

## 2. 相轨迹的求法

设二阶系统的微分方程为

$$\dot{x} = f(x, \dot{x})$$

### (1) 解析法

用求解微分方程的方法找出  $x$  和  $\dot{x}$  的关系, 从而在相平面上绘制相轨迹。解析法又分为两种。

1) 消去变量  $t$ : 由  $\dot{x} = f(x, \dot{x})$  直接解出  $x(t)$ , 再通过求导解出  $\dot{x}(t)$ 。在这两个解中, 消去作为参变量的时间  $t$ , 就得到  $x-\dot{x}$  关系。

### 2) 直接积分

$$\dot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$$

所以

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = f(\dot{x}, x)$$

若该式可以分解成

$$g(\dot{x})d\dot{x} = h(x)dx$$

则由

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} g(\dot{x})d\dot{x} = \int_{x_0}^x h(x)dx$$

可直接找出  $x-\dot{x}$  关系, 其中  $x_0, \dot{x}_0$  为初始条件。

### (2) 图解法——等倾线法

所谓等倾线, 是指在相平面内对应相轨迹上具有相同等斜率点。因为

$$\dot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x}$$

所以

$$\frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = f(x, \dot{x})$$

整理得相轨迹斜率方程

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

取相轨迹切线的斜率为某一常数  $\alpha$ , 得等倾线方程

$$\alpha = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

给定一组  $\alpha$  值, 就可得到一族等倾线。在每条等倾线上的各点, 画出一些斜率为该等倾线所对应的  $\alpha$  值的短线段, 则这些短线段在相平面上构成了相轨迹切线的方向场。箭头方向表示切线的方向。

从某一初始点出发, 沿着方向场各点的切线方向将这些短线段用光滑的曲线连接起来, 就可以得到系统的一条相轨迹。

## 3. 奇点和奇线

### (1) 奇点

相轨迹的斜率  $\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$ 。如在某一点有  $f(x, \dot{x})$  和  $\dot{x}$  同时为零, 则  $\alpha = \frac{d\dot{x}}{dx} =$

$\frac{0}{0}$  为不定值,有无穷多条相轨迹趋近或离开该点,相轨迹会在该点相交,这样的特殊点称为奇点。相平面上的奇点也称为平衡点。奇点一定位于相平面的横轴上。相轨迹在奇点处切线斜率不定,表明系统在奇点处可以按任意方向趋近或离开奇点,因此相轨迹族曲线在奇点处发生相交。经过奇点的相轨迹有多条;而经过普通点的相轨迹只有一条。在奇点处,系统运动的速度和加速度同时为零,对二阶系统而言,系统不再发生运动,处于平衡状态。

二阶系统的特征根和奇点的对应关系以及相轨迹如图 8-2 所示。

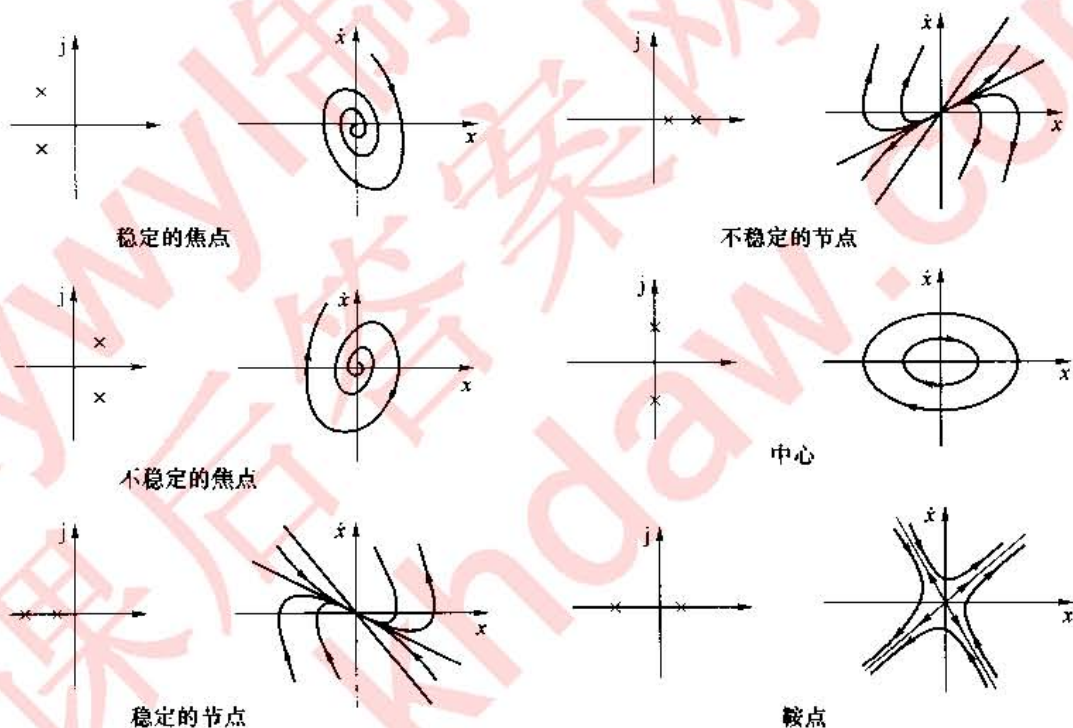


图 8-2 二阶系统的特征根和奇点的对应关系以及相轨迹

## (2) 奇线

奇线是特殊的相轨迹,将相平面划分成具有不同运动特点的各个区域。最常见的奇线是极限环。相平面图上如果存在一条孤立的封闭相轨迹,而且它附近的其他相轨迹都无限地趋向或离开这个封闭的相轨迹,则这条封闭相轨迹称为极限环。极限环是非线性系统特有的现象。极限环本身作为一条相轨迹,既不存在平衡点,也不趋向无穷远,而是一个无首无尾的环圈。极限环把相平面的某个区域划分为内部平面和外部平面两部分,任何一条相轨迹都不能从内部穿过极限环进入外部平面;也不能从外部平面进入内部平面。极限环产生的原因:由于非线性特性的作用,使得系统能从非周期性的能源中获取能量,从而维持周期运动形式。

极限环的种类:稳定的极限环;不稳定的极限环;半稳定的极限环。稳定的极限环对状态的微小扰动具有稳定性;内部和外部均为该极限环的稳定区域;系统沿极限环的运动即为自激振荡。不稳定的极限环对状态的微小扰动不具有稳定性;状态的微小扰动都将使得系统的运动偏离闭合曲线,并将永远不能回到该闭合曲线;内部和外部均为该极

限环的不稳定区域。极限环的类型和时间响应如图 8-3 所示。

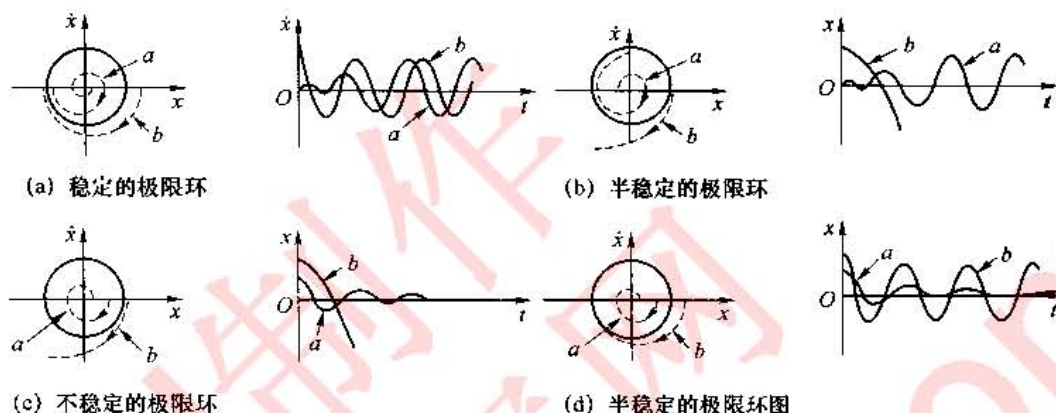


图 8-3 极限环的类型和时间响应

## 8.4 描述函数法

### 1. 描述函数法的基本概念

描述函数  $N(A)$  定义为非线性环节的稳态输出的一次谐波分量和输入正弦量的复数比, 即

$$N(A) = |N(A)| e^{j\angle N(A)} = \frac{Y_1}{X} e^{j\varphi_1} = \frac{B_1}{X} + j \frac{A_1}{X}$$

式中,  $Y_1$  为非线性环节稳态输出信号基波分量的幅值;  $X$  为输入正弦信号的幅值;  $\varphi_1$  为非线性环节输出信号基波分量与输入正弦信号的相位差;  $B_1$ 、 $A_1$  为稳态输出量中基波分量的傅里叶系数稳态信号。

### 2. 描述函数法的应用条件

- ① 非线性系统应简化成一个非线性环节和一个线性部分闭环连接的典型结构形式。
- ② 非线性环节具有奇对称特性, 即  $f(x) = f(-x)$ 。
- ③ 非线性环节稳态输出中一次谐波分量的幅值占优。
- ④ 线性环节的低通滤波特性好。

### 3. 描述函数法的物理意义

非线性环节仅考虑基波分量时, 非线性环节的描述函数表现为复数增益的放大器。该复数增益放大器是关于输入正弦信号的幅值  $A$  的复变增益放大器。因此, 线性环节的频率特性函数与输入信号振幅无关, 非线性环节的描述函数是输入信号幅值的函数。

### 4. 典型非线性特性的描述函数

非线性元件的描述函数计算步骤:

设非线性元件的输入为  $x(t) = A \sin \omega t$ , 根据该元件的特性, 确定其输出  $y(t)$ 。将  $y(t)$  展成傅里叶级数:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$$\text{式中 } A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(t) d\omega t, \begin{cases} A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d\omega t \\ B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d\omega t \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots)$$

取级数中的基波,求描述函数:

$$N(A) = |N(A)| e^{j\angle N(A)} = \frac{Y_1}{X} e^{j\varphi_1} = \frac{B_1}{X} + j \frac{A_1}{X}$$

## 5. 非线性系统的简化

为了用描述函数法分析系统的稳定性,必须将系统简化成一个非线性部分和一个线性部分闭环连接的形式。

### (1) 非线性特性的串联

若两个非线性特性串联,可将两个环节的特性归化为一个特性,即将第一个环节的输入和第二个环节的输入分别作为归化后非线性环节的输入和输出。串联环节的次序一般不能交换,且不能将两个环节的描述函数的乘积作为等效非线性环节的描述函数。对于多个非线性环节,则先归化前两个环节,等效后的环节再与第三个环节进行归化变换。

### (2) 非线性特性的并联

非线性环节并联后总的描述函数等于各个非线性环节的描述函数之和。

### (3) 线性环节的等效变换

线性部分的化简可按照线性系统结构图化简的方法进行。

## 6. 用描述函数法分析非线性系统稳定性

### (1) 用描述函数法判断非线性系统的稳定性

根据系统线性部分的频率特性  $G(j\omega)$  和负倒描述函数  $-1/N(A)$  的相对位置来判断非线性系统的稳定性。

设线性部分传递函数  $G(s)$  中右半平面极点的个数为  $p$ 。

① 若  $G(j\omega)$  曲线逆时针包围整个  $-1/N(A)$  曲线  $p$  圈,则该非线性系统稳定,否则不稳定。

② 若  $G(j\omega)$  曲线与  $-1/N(A)$  曲线有交点,则非线性系统处于临界状态,对应系统存在近似正弦的周期解  $x(t) = X \sin \omega t$ 。交点处的参数  $X, \omega$  分别为周期运动的振幅和频率。若该周期运动是稳定的,则系统出现自激振荡。

### (2) 非线性系统存在周期运动时的稳定性分析

① 为判断系统是否存在自激振荡(即判断有无稳定的周期运动解),在  $G(j\omega)$  曲线与  $-1/N(A)$  曲线交点附近,沿  $X$  增大方向,在曲线  $-1/N(A)$  上取一点,若该点不被  $G(j\omega)$  包围,则交点对应系统的一个自振状态,但不是稳定的周期运动解。

② 如果  $G(s)$  没有右边平面的极点,即  $p=0$ 。若  $G(j\omega)$  曲线不包围  $-1/N(A)$  曲线,则非线性系统稳定;若  $G(j\omega)$  曲线包围  $-1/N(A)$  曲线,则非线性系统不稳定;若  $G(j\omega)$  曲线与  $-1/N(A)$  曲线相交,则系统存在周期运动;若交点处  $-1/N(A)$  轨迹向  $G(j\omega)$  轨迹包围的区域外移动,则该点对应的周期运动就是自激振荡。

### (3) 周期运动解和自激振荡

若非线性环节输入的是正弦波,即  $x(t) = X \sin \omega t$ ,非线性环节稳态输出  $y(t)$  的基波分量

$$y_1(t) = Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

则  $|N(A)| = \frac{Y_1}{X}, \angle N(A) = \varphi_1$

对于系统的线性部分,当输入量是  $y_1(t)$  时,由线性系统频率特性概念知,系统稳态输出

$$c(t) = |G(j\omega)| Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1 + \angle G(j\omega))$$

在满足描述函数的前提下,可以认为当输入非线性环节的信号  $x(t)$  是一个频率为  $\omega$ 、振幅为  $X$ 、初始相位为 0 的正弦振荡时,稳态输出  $c(t)$  也是一个频率为  $\omega$ 、振幅为  $Y_1 G(j\omega)$ 、相位为  $\varphi_1 + \angle G(j\omega)$  的正弦振荡。

如果  $Y_1 G(j\omega) = X, \varphi_1 + \angle G(j\omega) = -\pi$ , 即

$$|N(x)| X |G(j\omega)| = X, |N(x)| |G(j\omega)| = 1, \angle N(x) + \angle G(j\omega) = -\pi$$

则

$$c(t) = -x(t)$$

在没有外信号作用的情况下,输出是一个正弦振荡。 $c(t) = -X(t) = -X \sin \omega t$  便是系统的自由运动解,是一个周期运动。式  $N(x)G(j\omega) = -1$  是系统的自由运动解为正弦周期运动的条件。

## 习题解答

8.1 设一阶非线性系统的微分方程为

$$\dot{x} = -x + x^3$$

试确定系统的平衡状态,分析平衡状态的稳定性,并作出系统的相轨迹。

解

令  $\dot{x} = 0$ , 得

$$\dot{x} = -x + x^3 = x(x-1)(x+1) = 0$$

系统平衡状态为  $x_e = 0, -1, +1$

当  $x_e = 0$  时,将原微分方程线性化为

$$\dot{x} = -x$$

进行拉氏变换,系统在  $x_e = 0$  处得特征方程为  $s+1=0$ ,特征根为  $s=-1$ ,可见,  $x_e=0$  是一个稳定的平衡点。

当  $x_e = -1$  时,令  $x = x_0 - 1$ ,进行平移变换,将原微分方程变换为

$$\dot{x}_0 = -(x_0 - 1) + (x_0 - 1)^3 = 2x_0 + 3x_0^2 + x_0^3$$

在  $x_0 = 0$  处进行线性化:

$$\dot{x}_0 = 2x_0$$

特征方程为  $s-2=0$ ,特征根为  $s=2$ ,可见,  $x_e = -1$  是一个不稳定的平衡点。同理可得,  $x_e = 1$  也是一个不稳定的平衡点。系统的相轨迹如图 8-4 所示。

8.2 试确定下列方程的奇点及其类型,并用等倾线法绘制它们的相平面图。

(1)  $\ddot{x} + \sin x = 0$

(2)  $\ddot{x} + |x| = 0$

$$(3) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

解

(1) 令  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ , 得

$$\sin x = 0$$

得到系统的奇点

$$x_e = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$$

当  $x_e = 2k\pi, k=0, \pm1, \pm2, \dots$  时, 令  $x = 2k\pi + x_0$ , 原微分方程化为

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 = \sin(2k\pi + x_0) = \sin x_0$$

在奇点  $x_0 = 0$  (即  $x_e = 2k\pi$ ) 处的线性化方程为  $\ddot{x} = -x_0$ , 特征方程为  $s^2 + 1 = 0$ , 特征根为  $s_{1,2} = \pm j$ , 奇点为中心点。

当  $x_e = (2k+1)\pi, k=0, \pm1, \pm2, \dots$  时, 令  $x = (2k+1)\pi + x_0$ , 原微分方程化为

$$\ddot{x} = \ddot{x}_0 = \sin[(2k+1)\pi + x_0] = -\sin x_0$$

在奇点  $x_0 = 0$  (即  $x_e = (2k+1)\pi$ ) 处的线性化方程为  $\ddot{x} = x_0$ , 特征方程为  $s^2 - 1 = 0$ , 特征根为  $s_{1,2} = \pm 1$ , 奇点为鞍点。

用等倾线法作相轨迹

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} + \sin x = \dot{x}\alpha + \sin x = 0$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{\alpha} \sin x$$

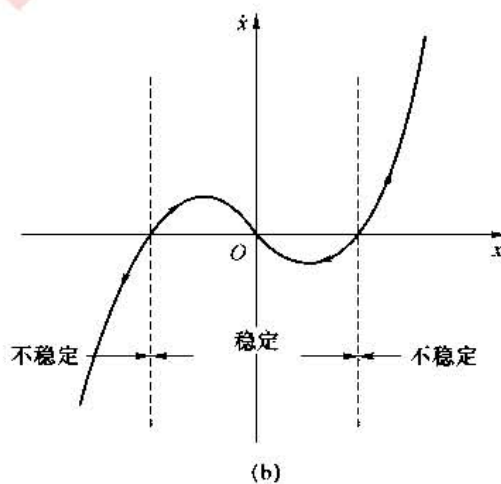
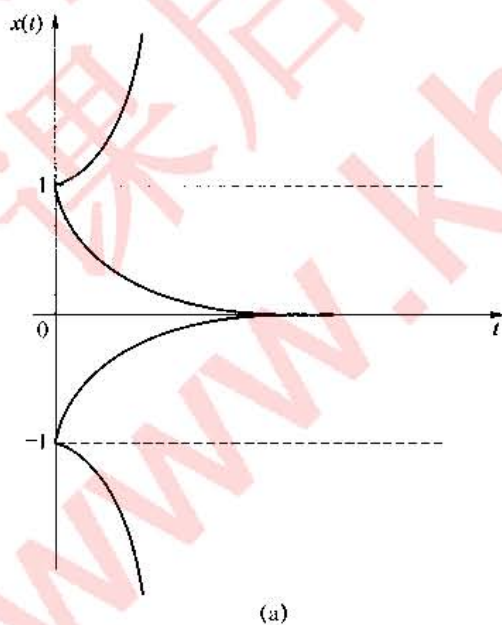


图 8-4 系统的相轨迹

列表计算, 作出相轨迹如图 8-5 所示。

$\alpha$	-2	-1	-1/2	-1/4	0	1/4	1/2	1	2
$-1/\alpha$	1/2	1	2	4	$\infty$	-4	-2	-1	1/2

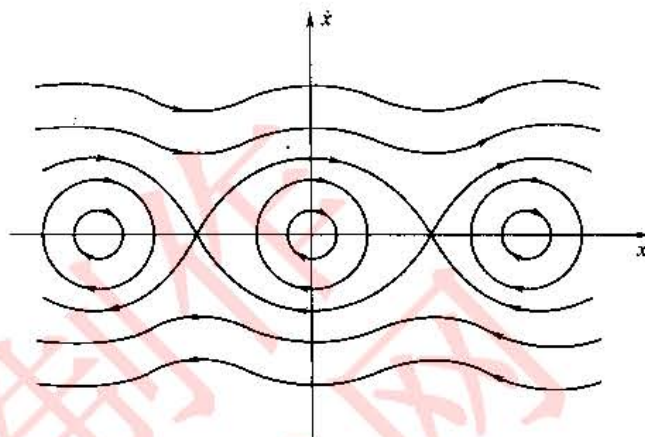


图 8-5 系统的相轨迹

(2) 原方程可写为

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0, x \geq 0 & (1) \\ \ddot{x} - x = 0, x < 0 & (2) \end{cases}$$

特征方程及特征根分别为:

(1)  $s^2 + 1 = 0, s_{1,2} = \pm j$  (中心点)

(2)  $s^2 - 1 = 0, s_{1,2} = \pm 1$  (鞍点)

用等倾线法作相轨迹, 由原方程

$$\ddot{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -|x|, \dot{x} = -\frac{1}{a}|x|$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{a}x, x \geq 0 \\ \dot{x} = \frac{1}{a}x, x < 0 \end{cases}$$

列表计算, 作出相轨迹如图 8-6 所示。

$a$	-3	-1	-1/3	0	1/3	1	3	$\infty$
$-1/a$	1/3	1	3	$-\infty$	-3	-1	-1/3	0
$1/a$	-1/3	-1	-3	$\infty$	3	1	1/3	0

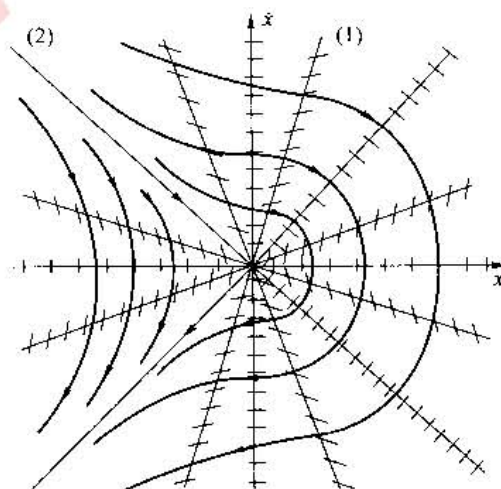


图 8 6 系统的相轨迹

(3) 原方程可写为

$$\ddot{x}_1 - \dot{x}_1 = 2x_1 + \dot{x}_1 - x_1 \quad (1)$$

即

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - x_1 = 0$$

令  $\dot{x}_1 = \dot{x}_1 = 0$ , 得平衡点  $x_e = 0$ , 得式(1)的特征方程为  $s^2 - 2s - 1 = 0$ , 解得特征根为  $\lambda_{1,2} = 2.414, -0.414$  (鞍点)。

用等倾线法作相轨迹

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1, \quad \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} = \dot{x}_1 \alpha = 2\dot{x}_1 + x_1$$

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1}{\alpha - 2}$$

列表计算, 作出相轨迹如图 8-7 所示。

$\alpha$	2	2.5	3	$\infty$	1	1.5	2
$\beta = 1/(\alpha - 2)$	$\infty$	2	1	0	-1	-2	$\infty$

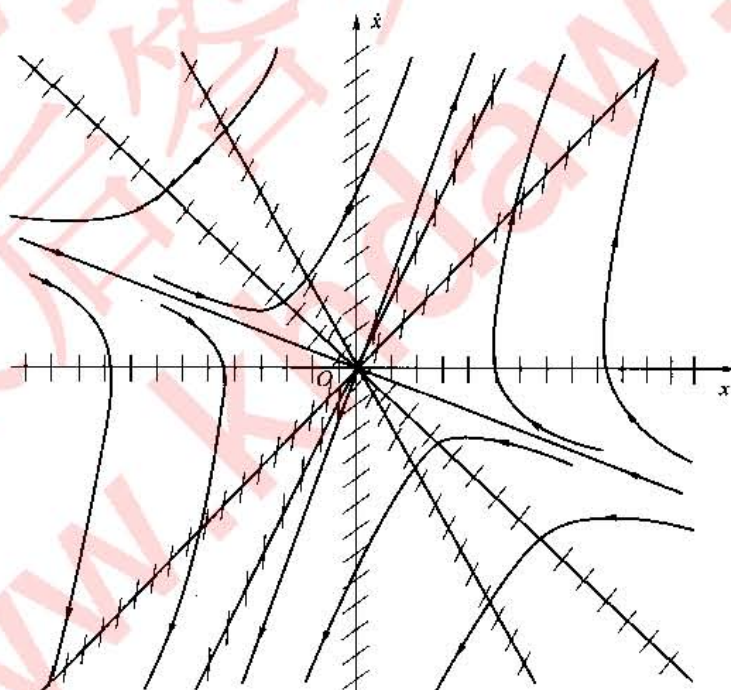


图 8-7 系统的相轨迹

8.3 若非线性系统的微分方程为

$$(1) \quad \ddot{x} + (3\dot{x} - 0.5)\dot{x} + x + x^2 = 0$$

$$(2) \quad \ddot{x} + x\dot{x} + x = 0$$

试求出系统的奇点, 并概略绘制奇点附近的相轨迹。

解

(1) 由原方程得

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}) = -(3\dot{x} - 0.5)\dot{x} - x - x^2 = -3\dot{x}^2 + 0.5\dot{x} - x - x^2$$

令  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ , 得

$$x + x^2 = x(x+1) = 0$$

解出奇点  $x_e = 0, -1$ 。在奇点处线性化处理。

在  $x_e = 0$  处:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \Big|_{x=\dot{x}=0} x + \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \Big|_{x=\dot{x}=0} \dot{x} \\ &= (-1 - 2x) \Big|_{x=\dot{x}=0} x + (-6\dot{x} + 0.5) \Big|_{x=\dot{x}=0} \dot{x} = -x + 0.5\dot{x}\end{aligned}$$

即  $\ddot{x} - 0.5\dot{x} + x = 0$ , 得特征方程及特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4}}{2} = 0.25 \pm j0.984 \quad (\text{不稳定的焦点})$$

在  $x_e = -1$  处:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \Big|_{x=-1, \dot{x}=0} x + \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \Big|_{x=-1, \dot{x}=0} \dot{x} \\ &= (-1 - 2x) \Big|_{x=-1, \dot{x}=0} x + (-6\dot{x} + 0.5) \Big|_{x=-1, \dot{x}=0} \dot{x} = x + 0.5\dot{x}\end{aligned}$$

即  $\ddot{x} - 0.5\dot{x} - x = 0$ , 得特征方程及特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 4}}{2} = \begin{cases} 1.218 \\ 0.718 \end{cases} \quad (\text{鞍点})$$

概略画出奇点附近的相轨迹如图 8-8 所示。

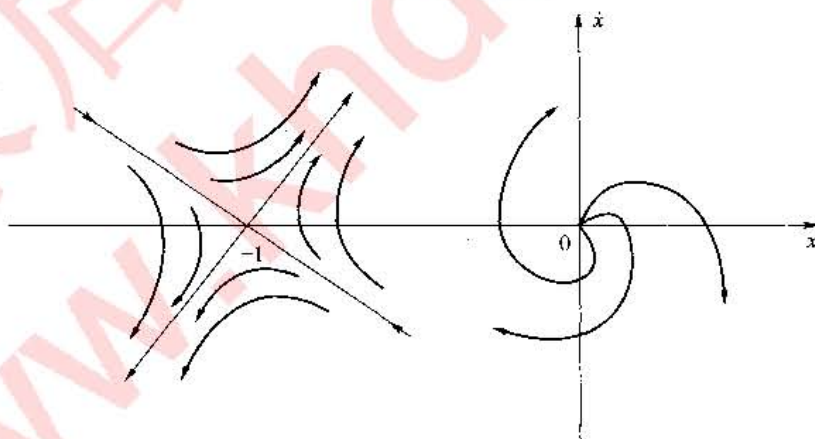


图 8-8 系统的相轨迹

(2) 由原方程得

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) = -x\dot{x} - x$$

令  $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ , 解出奇点  $x_e = 0$ 。在奇点处线性化处理:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial x} \Big|_{x=\dot{x}=0} x + \frac{\partial f(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \Big|_{x=\dot{x}=0} \dot{x} \\ &= (-\dot{x} - 1) \Big|_{x=\dot{x}=0} x + x \Big|_{x=\dot{x}=0} \dot{x} = -x\end{aligned}$$

即  $\ddot{x} + x = 0$ , 得特征方程及特征根为  $\lambda_{1,2} = \pm j$  (中心点)。

概略画出奇点附近的相轨迹如图 8-9 所示。

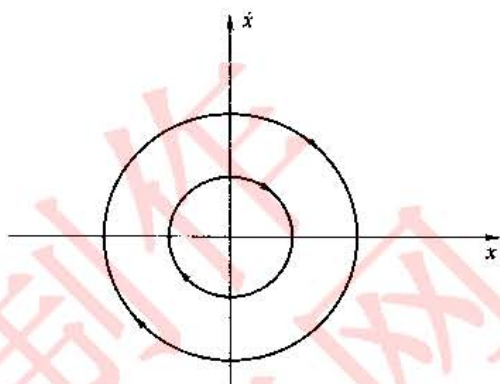


图 8-9 系统的相轨迹

8.4 设非线性系统的结构图如图 8-10 所示,试画出  $e-\dot{e}$  的相轨迹图,当系统的输入为单位阶跃信号时,指出相轨迹路径。

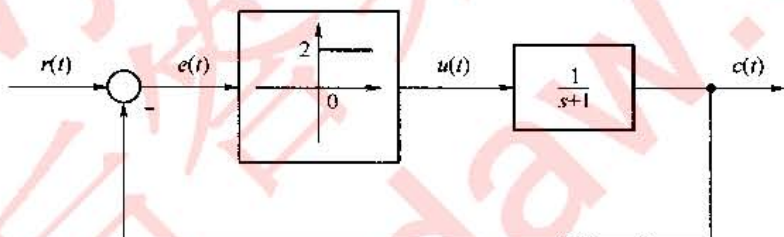


图 8-10 非线性系统

解

(1) 当  $r(t)=0$  时,  $e(t)=-c(t)$ ; 如  $e>0$ ,  $u=2$ , 由线性部分的传递函数知

$$\dot{c}+c=u$$

故得

$$\dot{e}+e=-2$$

如  $e<0$ ,  $u=0$ , 同理得

$$\dot{e}+e=0$$

相轨迹方程为

$$\begin{cases} \dot{e}+e=-2, e>0 \\ \dot{e}+e=0, e<0 \end{cases}$$

相轨迹及其走向如图 8-11(a)所示。

(2) 当  $r(t)=1(t)$  时,  $c(t)=1-e(t)$ ; 如  $e>0$ ,  $u=2$ , 知

$$\dot{c}+c=u$$

故得

$$\dot{e}+e=-1$$

如  $e<0$ ,  $u=0$ ,  $\dot{c}+c=u$ , 故

$$\dot{e}+e=1$$

相轨迹方程为

$$\begin{cases} \dot{e} + e = -1, e > 0 \\ \dot{e} + e = 1, e < 0 \end{cases}$$

相轨迹及其走向如图 8-11(b) 所示。

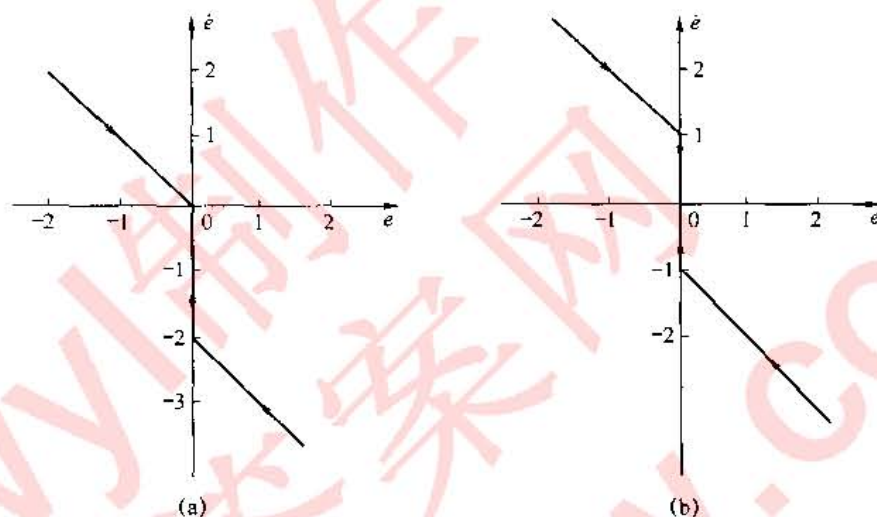


图 8-11 系统相轨迹图

8.5 某控制系统采用非线性反馈时的方框图如图 8-12 所示, 试绘制系统响应  $r(t) = 1(t)$  时的相轨迹图, 其中  $R$  为常值。

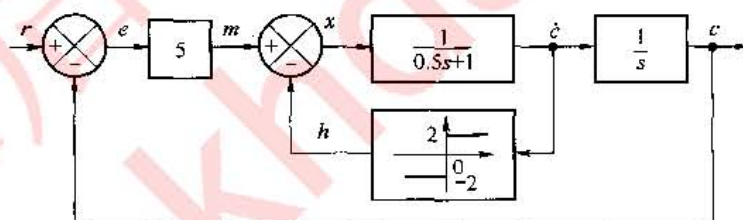


图 8-12 非线性反馈控制系统

解

写出描述给定非线性系统的方程组

$$0.5 \dot{c} + \dot{c} = x$$

$$x = m - h$$

$$m = 5e$$

$$h = \begin{cases} +2 & \dot{c} > 0 \\ -2 & \dot{c} < 0 \end{cases}$$

$$e = r - c$$

化简, 得到运动方程组为

$$0.5 \ddot{e} + \dot{e} + 5(e - 0.4) = 0 \quad \dot{e} < 0 \quad \text{I 区}$$

$$0.5 \ddot{e} + \dot{e} + 5(e + 0.4) = 0 \quad \dot{e} > 0 \quad \text{II 区}$$

当系统工作在 I 区时, 解得第一个奇点的位置为  $\dot{e} = 0, e = 0.4$ 。

当系统工作在Ⅱ区时,解得第二个奇点的位置为 $\dot{e}=0, e=-0.4$ 。如图 8-13 所示。

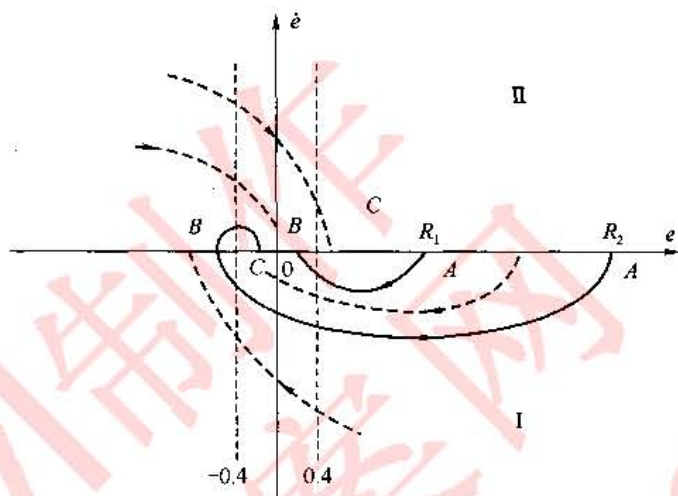


图 8-13 系统相轨迹图

8.6 设某控制系统采用非线性反馈时的方框图如图 8-14 所示,如输出为零初始条件, $r(t)=1(t)$ ,要求:

- (1) 在  $e-\dot{e}$  平面作出相轨迹;
- (2) 判断该系统是否稳定,最大稳态误差是多少;
- (3) 绘出  $e(t)$  及  $c(t)$  与时间的大致响应图形。

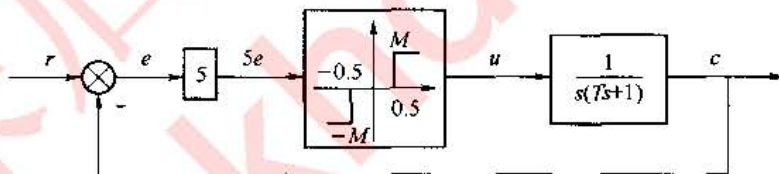


图 8-14 非线性反馈控制系统

解

(1) 由结构图可得

$$u = \begin{cases} M, & 5e > 0.5 \\ 0, & -0.5 < 5e < 0.5 \\ -M, & 5e < -0.5 \end{cases}$$

且  $u = T\ddot{c} + \dot{c}$ ,  $e = r - c = 1 - c$ ,  $\dot{e} = -\dot{c}$ ,  $\ddot{e} = -\ddot{c}$ , 所以

$$T\ddot{e} + \dot{e} = \begin{cases} -M, & e > 0.1 & \text{I 区} \\ 0, & -0.1 < e < 0.1 & \text{II 区} \\ M, & e < -0.1 & \text{III 区} \end{cases}$$

开关线  $e = \pm 0.1$ , 初始状态

$$e(0) = 1 - c(0) = 1, \dot{e}(0) = 0$$

在 I 区:  $T\ddot{e} + \dot{e} = -M$ , 则

$$\frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{M+\dot{e}}{T\dot{e}}$$

在Ⅱ区:  $T\dot{e} + \dot{e} = 0$ , 则

$$\frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{1}{T}$$

在Ⅲ区:  $T\dot{e} + \dot{e} = M$ , 则

$$\frac{d\dot{e}}{de} = -\frac{\dot{e}-M}{T\dot{e}}$$

由等倾线作出相轨迹, 如图 8-15 所示。

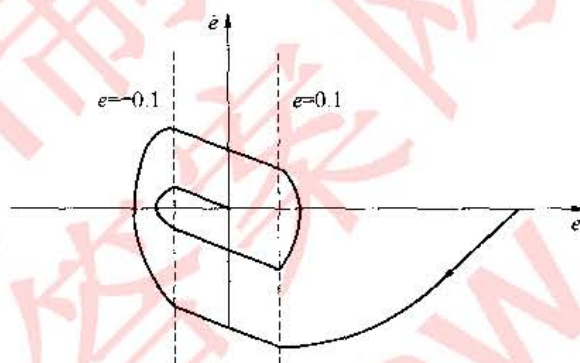


图 8-15 系统相轨迹图

(2) 由图 8-15 可知, 该系统稳定。相轨迹与  $e$  轴相交于  $[-0.1, 0.1]$  区间的某点后, 由  $T\dot{e} + \dot{e} = 0$  知,  $\dot{e} = 0$ ,  $\ddot{e} = 0$ , 系统将停止运动, 且该交点不会落在  $e > 0.1$  和  $e < -0.1$  处。所以, 最大稳态误差  $e_{\max} = 0.1$ 。

(3) 由  $c = 1 - e$  作  $e(t)$  和  $c(t)$  与时间的响应曲线, 如图 8-16 所示。

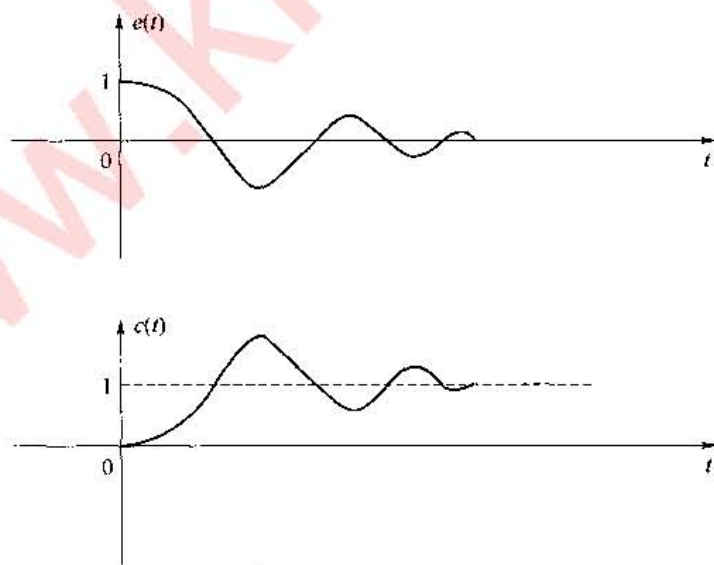


图 8-16  $e(t)$  和  $c(t)$  与时间的响应曲线

**8.7** 某系统相平面如图 8-17 所示, 试求从  $P_1$  到  $P_2$  点所需要的时间, 其中  $x_1$  分别取为 1, 2, 3 和 4。

解 系统的相轨迹方程为

$$\dot{x} = 2 - 0.5x$$

即

$$dx = (2 - 0.5x)dt$$

所以

$$t = \int_0^t dt = -2 \int_0^{x_1} \frac{d(2 - 0.5x)}{2 - 0.5x} = 2 \ln 2 - 2 \ln (2 - 0.5x_1) = 2 \ln \frac{2}{2 - 0.5x_1}$$

由此可以计算出:  $x_1 = 1, t = 0.58$ ;  $x_2 = 2, t = 1.39$ ;  $x_3 = 3, t = 2.73$ ;  $x_4 = 4, t \rightarrow \infty$ 。

8.8 设二阶非线性系统的相平面和一条相轨迹如图 8-18 所示, 图中原点 0 为平衡状态, B0 段的相轨迹方程为  $x^2 = 2x$ , AB 段为平行于  $x$  轴的线段。试求相点从 A 运动到原点所需的时间。

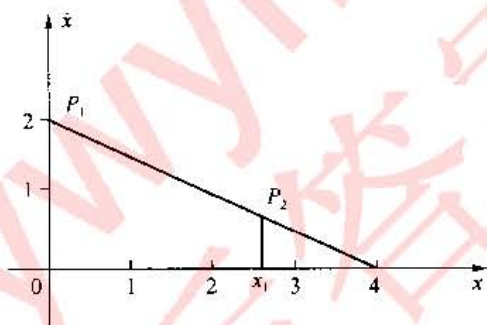


图 8-17 系统相平面

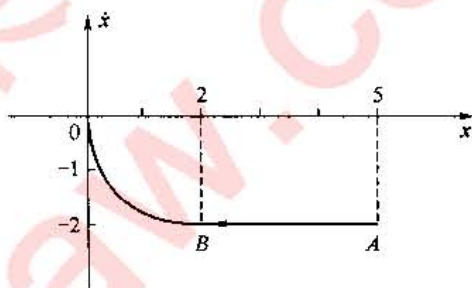


图 8-18 相平面

解 由于

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

则

$$t_{AB} = \int_5^2 \frac{1}{\dot{x}} dt = \int_5^2 \left(-\frac{1}{2}\right) dt = 1.5$$

$$t_{B0} = \int_2^0 \frac{1}{\dot{x}} dt = \int_2^0 \left(-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) dt = 2$$

所以, 相点从 A 运动到原点所需的时间为

$$t_{A0} = t_{AB} + t_{B0} = 3.5$$

8.9 已知具有理想继电器的非线性系统如图 8-19 所示, 试用相平面法分析:

- (1)  $T_d = 0$  时系统的运动;
- (2)  $T_d = 0.5$  时系统的运动, 并说明比例微分控制对改善系统性能的作用;
- (3)  $T_d = 2$  时系统的运动, 并考虑实际继电器有延迟时系统的运动。

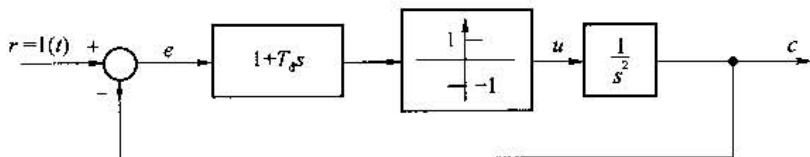


图 8-19 具有理想继电器的非线性反馈控制系统

解 由结构图可得线性部分的微分方程为

$$\ddot{c} = u \quad (1)$$

非线性部分方程为

$$u = \begin{cases} 1, & e + T_d \dot{e} > 0, \quad \text{I} \\ -1, & e + T_d \dot{e} < 0, \quad \text{II} \end{cases} \quad (2)$$

开关线方程为

$$\dot{e} = \frac{-1}{T_d} e$$

由比较点得

$$c = r - e = 1 - e \quad (3)$$

将式(3)、式(2)代入式(1),整理得

$$\ddot{e} = \begin{cases} -1, & e + T_d \dot{e} > 0, \quad \text{I} \\ 1, & e + T_d \dot{e} < 0, \quad \text{II} \end{cases}$$

在 I 区:

$$\ddot{e} = \dot{e} \frac{d\dot{e}}{de} = -1$$

解出  $\dot{e}^2 = -2e$  (抛物线)。

同理在 II 区可解得  $\dot{e}^2 = 2e$  (抛物线)。

概略作出相轨迹如图 8-20 所示。开关线方程为:  $T_d = 0$  时,  $e = 0$ ;  $T_d = 0.5$  时,  $\dot{e} = -2e$ ;  $T_d = 2$  时,  $\dot{e} = -0.5e$ 。

由相轨迹图 8-20 可以看出,加入比例微分可以改善系统的稳定性;当微分作用增强时,系统振荡性减小,响应加快。

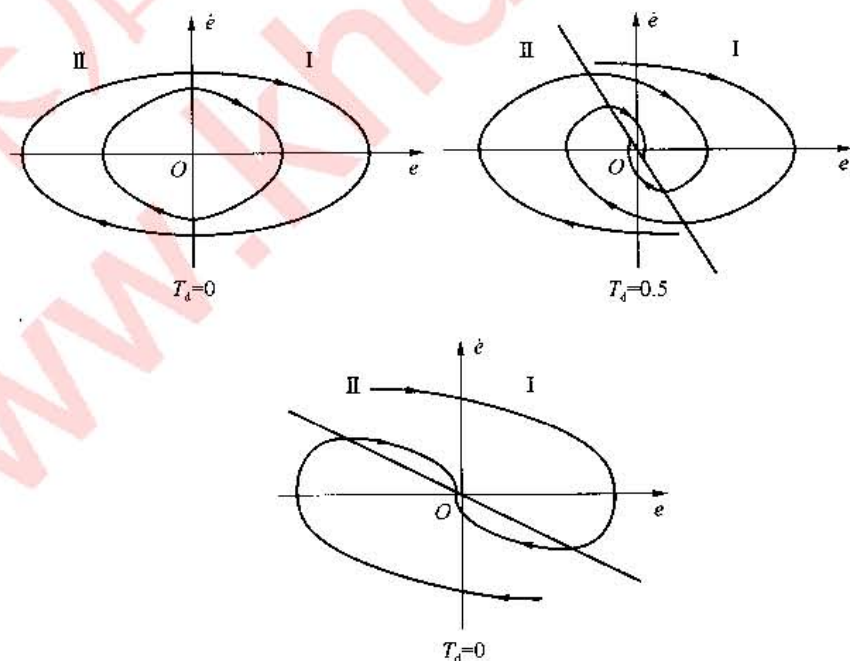


图 8-20 系统的相轨迹图

8.10 设 3 个非线性系统的非线性环节一样,其线性部分分别为:

$$(1) G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$

$$(3) G(s) = \frac{2(1.5s+1)}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

用描述函数法时,哪个系统分析的准确度高?

解

(1) 其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(0.1j\omega+1)}$$

其幅频特性为

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega \sqrt{0.01\omega^2+1}}$$

(2) 其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{2}{j\omega(j\omega+1)}$$

其幅频特性为

$$|G(j\omega)| = \frac{2}{\omega \sqrt{\omega^2+1}}$$

(3) 其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{2(1.5j\omega+1)}{j\omega(j\omega+1)(0.1j\omega+1)}$$

其幅频特性为

$$|G(j\omega)| = \frac{2 \sqrt{(1.5\omega)^2+1}}{\omega \sqrt{\omega^2+1} \sqrt{0.01\omega^2+1}} > \frac{2}{\omega \sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\text{而} \quad |G(j\omega)| = \frac{2}{\omega \sqrt{\omega^2+1}} = \frac{1}{\omega \sqrt{(0.5\omega)^2+0.25}}$$

$$\text{在高频时} \quad \frac{2}{\omega \sqrt{0.01\omega^2+1}} > \frac{1}{\omega \sqrt{(0.5\omega)^2+0.25}}$$

对于低通特性而言,式(2)中  $G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$  效果最好,所以式(2)中系统的准确度最高。

8.11 设单位负反馈非线性系统的结构图如图 8-21 所示,非线性部分的描述函数为

$$N(X) = \frac{1}{X} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

分析系统是否存在自振。如有自振,计算自振频率及振幅。定性分析开环增益变化对自振参数(幅值和频率)的影响。

解

(1) 自振分析

由

$$-N(X) = -\frac{1}{X}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$G(j\omega) = \frac{30}{j\omega(j\omega+2)}$$

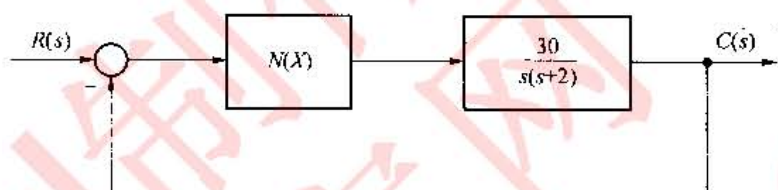


图 8-21 单位负反馈非线性系统

可分别绘出负倒数描述函数曲线  $-1/N(x)$  与  $G(j\omega)$  曲线,如图 8-22 所示。由图可知,系统存在稳定的自振。

(2) 计算自振参数

在  $-1/N(X)$  与  $G(j\omega)$  曲线的交点处

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2} = -135^\circ$$

求得自振频率  $\omega=2$ 。又

$$|G(j2)| = \frac{30}{2 \times \sqrt{2^2 + 2^2}} = 5.3$$

故自振振幅为 5.3。

(3) 定性分析增益影响

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s+1)}$$

其中  $K=15$ 。当开环增益  $K$  增加时,自振频率不变,自振幅度随  $K$  增加而增加,成正比关系。反之亦然。

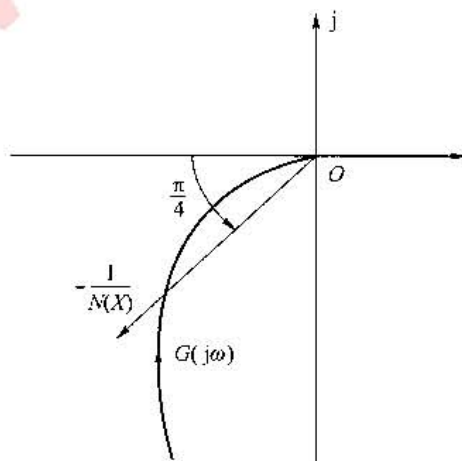


图 8-22 稳定性分析

8.12 已知非线性系统的结构图如图 8-23 所示,其中非线性环节的  $N(A) = \frac{A+6}{A+2}$  ( $A>0$ ),试用描述函数法确定使该非线性系统稳定、不稳定以及产生周期运动时,线性部分的  $K$  值范围;判断周期运动的稳定性,并计算稳定周期运动的幅值和频率。

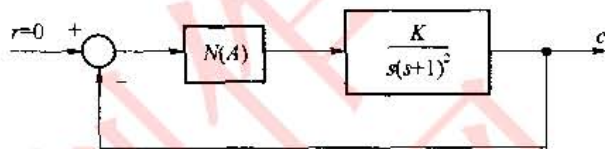


图 8-23 非线性系统

解

绘出负倒描述函数曲线  $-1/N(A)$ , 由

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{A+2}{A+6}, \quad -\frac{1}{N(0)} = -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{N(\infty)} = -1$$

$$-\frac{dN(A)}{dA} = -\frac{4}{(A+2)^2} < 0$$

$N(A)$  单调下降,  $-1/N(A)$  也是单调下降函数。画出  $G(j\omega)$  曲线 (见图 8-24), 当  $K$  从小到大变化时, 系统由稳定变为自振, 最终不稳定。

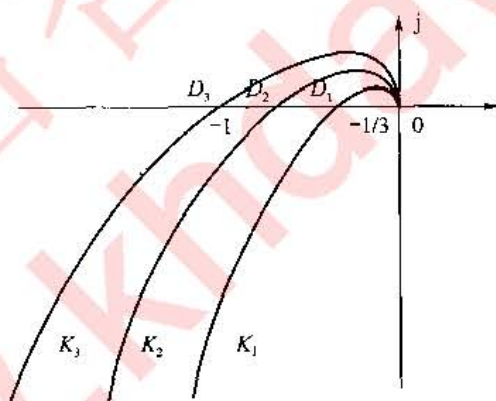


图 8-24  $G(j\omega)$  曲线

求使  $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$  的  $\omega$  值。令

$$\angle G(j\omega) = -90^\circ - 2\arctan\omega = -180^\circ$$

得  $\omega = 1$ 。

令

$$|G(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{K}{\omega(\sqrt{\omega^2+1})^2} \Big|_{\omega=1} = \frac{K}{2} = \begin{cases} \frac{1}{3} \rightarrow K_1 = \frac{2}{3} \\ 1 \rightarrow K_3 = 2 \end{cases}$$

得到  $K$  值与系统特性的关系

$$K: 0 \xrightarrow{\text{稳定}} \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{自振}} 2 \xrightarrow{\text{不稳定}} \infty$$

系统周期运动是稳定的。

由自振条件:

$$N(A)G(j\omega)|_{\omega=1} = \frac{A+6-K}{A+2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-(A+6)K}{2(A+2)} = -1$$

解得

$$\begin{cases} A = \frac{6K-4}{2-K} \\ \omega = 1 \end{cases} \quad \left( \frac{2}{3} < K < 2 \right)$$

8.13 试用描述函数法和相平面法分析图 8-25 所示系统的稳定性和自振。

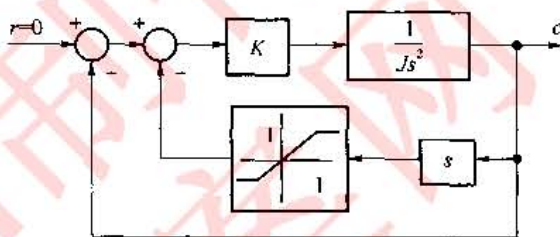


图 8-25 非线性系统

解

(1) 用描述函数法分析

先将结构图等效为典型结构形式,如图 8-26 所示。

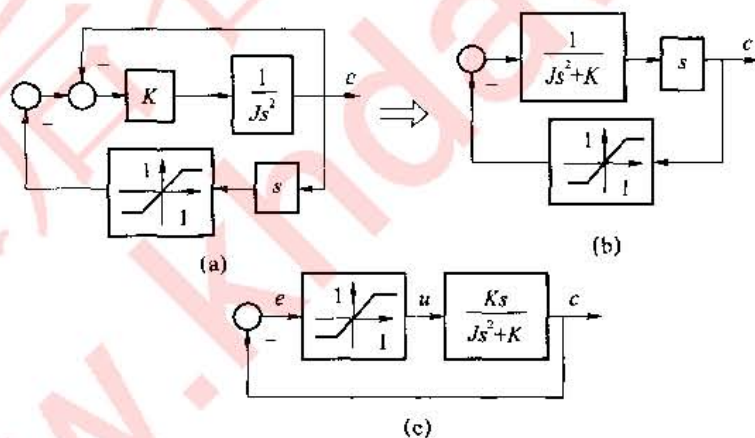


图 8-26 典型结构形式

$$\Phi(s) = - \frac{K \frac{1}{Js^2}}{1 + K \frac{1}{Js^2} + K \frac{1}{Js^2} sN}$$

令  $\Phi(s)$  的分母为零,推导出  $G(s)N(s) = -1$  的形式,可得

$$G(s) = \frac{Ks}{Js^2 + K}$$

可分别绘出负倒数描述函数曲线  $-1/N(A)$  与  $G(j\omega)$  曲线,如图 8-27 所示。两曲线不相交,且  $-1/N(A)$  曲线在  $G(j\omega)$  曲线之外,故系统稳定。

(2) 用相平面法分析

其相平面图如图 8-28 所示。

线性部分的传递函数为

$$J\dot{c} + Kc = Ku$$

由非线性环节有

$$u = \begin{cases} 1 & e > 1 \\ e & |e| \leq 1 \\ -1 & e < -1 \end{cases}$$

由比较点得

$$e = -c$$

则

$$J\dot{e} + Ke = -Ku = \begin{cases} 0 & e > 1 \quad \text{I 区} \\ -Ke & |e| \leq 1 \quad \text{II 区} \\ 0 & e < -1 \quad \text{III 区} \end{cases}$$

I、III区的特性方程及特征根为

$$Js^2 + K = 0, s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{J}}$$

II区的特性方程及特征根为

$$Js^2 + Ks + K = 0, s_{1,2} = -\frac{K}{2J} \pm \frac{K}{2J}\sqrt{K^2 - 4JK}$$

当  $K \geq 4J$  时,  $e_0 = 0$  为稳定的节点; 当  $K < 4J$  时,  $e_0 = 0$  为稳定的焦点。

系统相轨迹如图 8.28 所示, 可看出系统响应最终稳定。

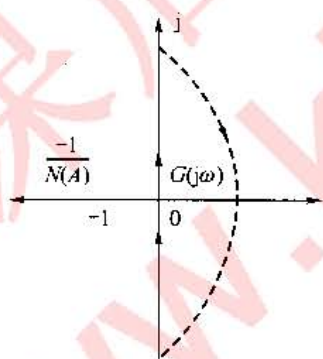


图 8-27  $-1/N(A)$  与  $G(j\omega)$  曲线

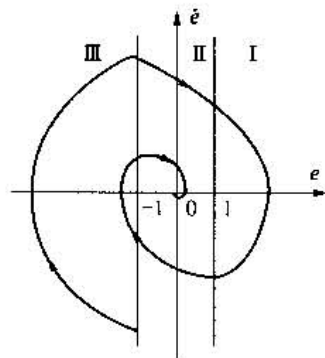


图 8-28 相平面图

**8.14** 已知非线性系统的结构图如图 8-29 所示, 非线性环节的反倒描述函数如图 8-30 所示。试求使系统产生自激振荡的  $h$  和  $M$  的数值。

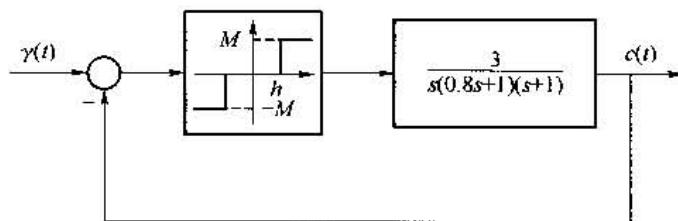


图 8-29 非线性系统结构图

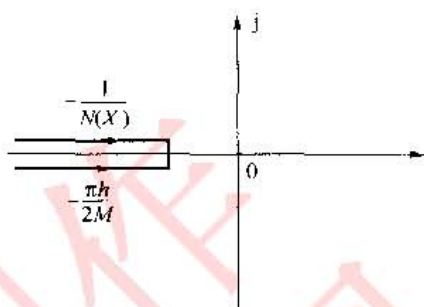


图 8-30 非线性环节的反倒描述函数

解

由题意知

$$G(j\omega) = \frac{3}{j\omega(0.8j\omega+1)(j\omega+1)} = \frac{3}{-1.8\omega^2 + j\omega(1-0.8\omega^2)}$$

当  $\omega = \frac{\sqrt{5}}{2}$  时, 交点处的幅值为

$$\frac{\pi h}{2M} = \frac{4}{3}$$

则整理得到  $h$  和  $M$  的关系为

$$h = \frac{8M}{3\pi}$$

8.15 已知非线性系统的结构图如图 8-31 所示, 非线性特性  $y(t) = x^3(t)$ , 用描述函数法分析系统的稳定性。

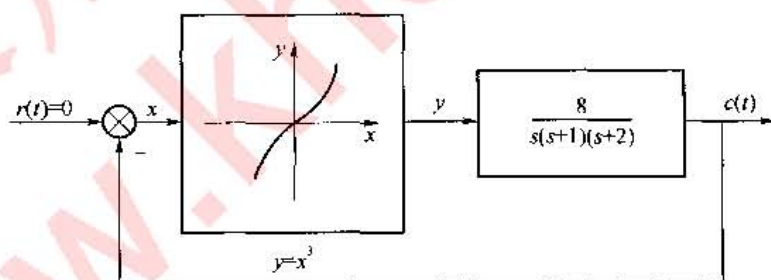


图 8-31 非线性系统结构图

解

由题意知非线性特性  $y(t) = x^3(t)$ , 且该特性为单值奇对称, 所以  $A_0=0, A_1=0, \Phi_1=0$ , 并且

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^3 \sin \omega t d(\omega t)$$

令  $x = X \sin \omega t$ , 并将其代入上式, 得

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} X^3 \sin^3 \omega t \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} X^3 \sin^4 \omega t d(\omega t) = \frac{3}{4} X^3$$

根据定义, 可得

$$N(x) = \frac{B_1}{X} = \frac{3}{4} X^2$$

画出其图线和线性部分的幅频特性,如图 8-32 所示。

线性部分的传递函数为三阶,所以该传递函数的  $G(j\omega)$  曲线肯定与负实轴有交点。

$$-\frac{1}{N(x)} = G(j\omega)$$

解得  $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}, X=1$ 。

不稳定的自振频率为  $1/\sqrt{2}$ , 非线性输入端的幅值为 1, 若系统受到扰动, 初始时刻非线性环节输入端扰动幅值大于 1, 则系统不稳定, 发散; 若非线性环节输入端初始扰动幅值小于 1, 则系统稳定。

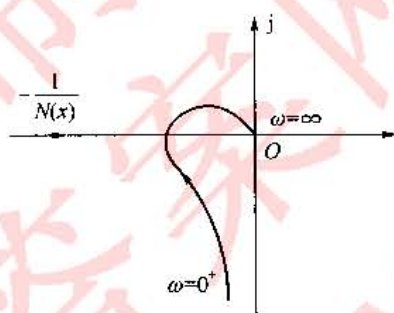


图 8 32 稳定性分析

## 第9章 线性系统的状态空间分析和综合

### 9.1 线性系统的状态空间描述

#### 1. 状态空间的基本概念

**状态:**已知未来输入情况下,对确定未来行为所必要且充分的集合(对平面而言,需要两个独立状态;对空间而言, $n$ 维空间需要 $n$ 个独立状态)。粗略地讲,状态是在空间中的“位置”,是描述系统运动的基本坐标(描述系统时域行为的一个最小变量组)。

**状态变量:**确定系统状态的最小一组变量,事实上,对一个用 $n$ 阶微分方程描述的系统,其运动状态的描述需要 $n$ 个独立的变量。可以取这 $n$ 个独立变量作为状态变量。可见,状态变量个数与微分方程的阶次相同。注意:状态变量具有非唯一性。

**状态向量:**以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 作为分量组成的向量,即 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 称为状态向量。

**状态空间:**以选定的状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 作为坐标轴形成的空间,称为状态空间( $n$ 维)。

**状态轨迹:**系统状态向量在状态空间中随时间变化的轨迹称为状态轨迹。

**状态方程:**描述状态变量、输入变量之间关系的一阶微分(或差分)方程组。

**输出方程:**描述输出变量与状态变量、输入变量之间关系的函数方程。

**状态空间表达式:**状态方程和输出方程组合称为状态空间表达式,又称动态状态空间表达式。

**自治系统:**若在系统的状态空间中,函数 $f$ 和 $g$ 均不显含时间 $t$ ,则称该系统是自治系统。

**线性系统:**若在系统的状态空间表达式中, $f$ 和 $g$ 均为线性函数,则称系统为线性系统;否则称为非线性系统。

**线性系统的状态空间表达式:**线性系统的状态方程是一阶向量线性微分方程或一阶线性差分方程;输出方程是向量代数方程。

**线性定常系统:**线性系统状态空间表达式中,若系统矩阵 $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$ 或 $\mathbf{G}(k), \mathbf{H}(k), \mathbf{C}(k), \mathbf{D}(k)$ 的各元素均为常数,称该系统为线性定常系统;否则称为线性时变系统。

**状态空间分析法:**在状态空间中以状态向量或状态变量描述系统的方法称为状态空间方向法或状态变量法。

## 2. 线性定常连续系统状态空间表达式的建立

建立线性定常连续系统状态空间的方法主要有两种:

(1) 直接根据系统的机理建立相应的微分或差分方程

系统的状态空间表达式不唯一,选取不同的状态变量可得到不同的状态空间表达式,不同状态空间表达式之间存在线性变换关系。

(2) 由系统微分方程建立状态空间表达式

研究 SISO 的线性定常系统:

① 系统的输入量不含有导数项

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_0y = \beta_0 u$$

其向量-矩阵形式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

式中,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$ ,  $C = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$

② 系统输入量含有导数项

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_0y = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u$$

首先研究  $b_n \neq 0$ 。

求得

$$\begin{cases} h_0 = b_n \\ h_1 = b_{n-1} - a_{n-1}h_0 \\ \vdots \\ h_{n-1} = b_1 - a_{n-1}h_{n-2} - \cdots - a_1h_0 \\ h_n = b_0 - a_{n-1}h_{n-1} - \cdots - a_1h_1 - a_0h_0 \end{cases}$$

其向量-矩阵形式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

式中,  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \end{bmatrix}$ ,  $C = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ ,  $D = h_0$

当  $b_n = 0$  时,选取如下一组状态变量

$$\begin{cases} x_n = y \\ x_i = \dot{x}_{i+1} + a_i y - b_i u \quad i=1, 2, 3, \cdots, n-1 \end{cases}$$

其向量-矩阵形式为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

式中,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1)$

(3) 由系统传递函数建立状态空间表达式

因为传递函数只是表达了系统输出与输入的关系,却没有表明系统内部的结构,而状态空间表达式却可以完整地表明系统内部的结构。有了系统的状态空间表达式,就可以唯一地模拟实现该系统。

设系统的传递函数为

$$G(s) = b_n + \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1s + a_0} \triangleq b_n + \frac{N(s)}{D(s)}$$

①  $\frac{N(s)}{D(s)}$  串联分解

$\frac{N(s)}{D(s)}$  的向量-矩阵形式为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

式中,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = (\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1})$

若状态方程中的  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  具有这种形式,则称为可控标准型。

当  $b_n = 0$  时,则

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = (0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1)$$

若状态方程中的  $\mathbf{A}, \mathbf{C}$  具有这种形式,则称为可观测标准型。

②  $\frac{N(s)}{D(s)}$  只含单实极点

除可化为可控标准型或可观测标准型外,还可化为对角动态方程。设

$$D(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)$$

式中,  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$  为系统的单实极点。则

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$

式中,  $c_i = \left[ \frac{N(s)}{D(s)} (s - \lambda_i) \right] \Big|_{s=\lambda_i}$  为  $\frac{N(s)}{D(s)}$  在极点  $\lambda_i$  处的留数, 且  $Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i} U(s)$ 。

选取状态变量

$$X_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} U(s) \quad i=1, 2, \dots, n$$

其向量-矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\text{式中, } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n)$$

选取状态变量

$$X_i(s) = \frac{c_i}{s - \lambda_i} U(s) \quad i=1, 2, \dots, n$$

则

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n X_i(s)$$

其向量-矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\text{式中, } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$$

### ③ $\frac{D(s)}{N(s)}$ 含重实极点

除可化为可控标准型或可观标准型外, 还可化为约当标准型动态方程。设

$$D(s) = (s - \lambda_1)^3 (s - \lambda_4) \cdots (s - \lambda_n)$$

式中,  $\lambda_1$  为三重实极点,  $\lambda_4, \dots, \lambda_n$  为系统的单实极点。则

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{c_{11}}{(s - \lambda_1)^3} + \frac{c_{12}}{(s - \lambda_1)^2} + \frac{c_{13}}{s - \lambda_1} + \sum_{i=4}^n \frac{c_i}{s - \lambda_i}$$

式中  $c_i = \left[ \frac{N(s)}{D(s)} (s - \lambda_i) \right] \Big|_{s=\lambda_i}$  为  $\frac{N(s)}{D(s)}$  在极点  $\lambda_i$  处的留数。其向量-矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\text{式中, } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_4 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = (c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13} \quad c_4 \quad \cdots \quad c_n)$$

或

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & 0 \\ & 1 & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_4 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ c_4 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots)$$

### 3. 线性定常连续系统状态的解

(1) 线性定常连续系统状态的解  
状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

其解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

式中,  $\mathbf{x}(0)$  为系统的初始状态,  $e^{\mathbf{A}t}$  称为状态转移矩阵,  $\Phi(*) = e^{\mathbf{A}t}$ 。

(2) 状态转移矩阵的求取

① 幂级数法

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \cdots$$

② 拉普拉斯变换法

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

③ 凯莱-哈密顿定理

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \mathbf{A}^i$$

(3) 状态转移矩阵的运算性质

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \cdots$$

- $\Phi(0) = \mathbf{I}$
- $\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A}\Phi(t) = \Phi(t)\mathbf{A}$
- $\Phi(t_1 \pm t_2) = \Phi(t_1)\Phi(\pm t_2) = \Phi(\pm t_2)\Phi(t_1)$
- $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t), \Phi^{-1}(-t) = \Phi(t)$

- $x(t_2) = \Phi(t_2 - t_1)x(t_1)$
- $\Phi(t_2 \pm t_0) = \Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0)$
- $[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$
- 若  $AB = BA$ , 则  $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$ ; 若  $AB \neq BA$ , 则  $e^{(A+B)t} \neq e^{At}e^{Bt} \neq e^{Bt}e^{At}$
- 若  $\Phi(t)$  为  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  的状态转移矩阵, 则引入非奇异变换  $x = P\bar{x}$  后的状态转移矩阵为

$$\bar{\Phi}(t) = P^{-1}e^{At}P$$

#### 4. 定常连续动态方程的离散化

已知定常连续动态系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

离散化状态方程为

$$x(k+1) = \Phi(T)x(k) + G(T)u(k)$$

式中,  $\Phi(T) = \Phi(t) \big|_{t=T}$ ,  $G(T) = \int_0^T \Phi(\tau')Bd\tau'$ , 其解为

$$x(k) = \Phi^k(T)x(0) = \Phi(kT)x(0) = \Phi(k)x(0)$$

式中,  $x(k)$  称为离散化状态转移矩阵。

## 9.2 线性系统的可控性和可观测性

### 1. 状态可控性定义

线性时变系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in T_t$$

其中,  $x$  为  $n$  维状态向量,  $u$  为  $p$  维输入向量;  $T_t$  为时间定义区间;  $A(t)$  和  $B(t)$  分别为  $n \times n$  和  $n \times p$  矩阵。

如果对取定初始时刻  $t_0 \in T_t$  的一个非零初始状态  $x(t_0) = x_0$ , 存在一个有限时刻  $t_1 \in T_t$ ,  $t_1 > t_0$  和一个无约束的容许控制  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , 使状态由  $x(t_0) = x_0$  转移到  $t_1$  时的  $x(t_1) = 0$ , 则称此  $x_0$  在  $t_0$  时刻可控。如果状态空间中的所有非零状态都在  $t_0$  ( $t_1 \in T_t$ ) 时刻可控, 则称系统在  $t_0$  时刻完全可控。若系统在所有时刻都可控, 则称系统是一致可控的。

### 2. 线性定常系统的可控性判据

- $\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = n$ ;
- 当  $A$  为对角矩阵且特征根互异时, 输入矩阵  $B$  中无全零行;
- $(sI - A)^{-1}B$  的行向量线性无关;
- 单输入系统  $\{A, B\}$  为可控标准型;
- 单输入单输出系统, 当由状态空间表达式导出的传递函数没有零极点对消时, 系统可控、可观测;
- 对于  $A$  的任意特征值  $\lambda_i$ , 都有  $\text{rank}[A - \lambda_i I \ B] = n$ 。

### 3. 系统的状态可观测性定义

设系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

如果取定初始时刻  $t_0 \in T$ , 存在一个有限时刻  $t_1 \in T$ ,  $t_1 > t_0$ , 对于所有  $t \in [t_0, t_1]$ , 系统的输出  $y(t)$  能唯一确定状态向量的初态  $x(t_0)$ , 则称系统在  $[t_0, t_1]$  内是完全可观测的。如果对于一切  $t_1 > t_0$  系统都可观测, 则称系统在  $[t_0, \infty]$  完全可观测。

#### 4. 可观测性常用判据

- $\text{rank}[C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} C^T] = n$ ;
- 当  $A$  为对角矩阵且特征根互异时, 输出矩阵  $C$  中无全零列;
- $C(sI - A)^{-1}$  的列向量线性无关;
- 单输入系统  $\{A, C\}$  为可观测标准型。

#### 5. 连续系统离散化后的可控或可观测性与原系统的关系

连续系统不可控(不可观测), 离散化后一定不可控(不可观测)。连续系统可控(可观测), 离散化后不一定可控(可观测), 其可控性(可观测)与采样周期有关。

## 9.3 线性变换

### 1. 状态空间表达式的线性变换

设系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = Cx(t)$$

令  $x = P\bar{x}$ , 则

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t)$$

$$\bar{y} = \bar{C}\bar{x}(t)$$

式中,  $\bar{A} = P^{-1}AP$ ,  $\bar{B} = P^{-1}B$ ,  $\bar{C} = CP$  称对系统进行  $P$  变换。

常用的线性变换有

- 将  $A$  化为对角型;
- 将  $A$  化为约当型;
- 将可控系统化为可控标准型。

### 2. 线性定常系统的结构分解

#### (1) 化可控系统为可控标准型

设可控系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

令  $x = P^{-1}z \Leftrightarrow \dot{z} = PAP^{-1}z + PBu$ , 变换后的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

变换矩阵  $P$  的求法:

• 计算可控矩阵  $S = (B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B)$ ;

• 取出  $S^{-1}$  的最后一行构成  $P_1$  行向量;

•  $P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ \vdots \\ P_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$ , 该变换矩阵具有唯一性。

(2) 化可观系统为可观标准型

设可控系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

令  $x = P^T z$ , 变换后的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

变换矩阵  $P$  的求法:

• 计算可观矩阵  $V = [C^T \cdots A^T C^T \cdots (A^T)^{n-1} C^T]$ ;

• 取出  $V^{-1}$  的最后一行的转置构成  $V_n$  列向量;

•  $P^T = [V_n \ AV_n \ \cdots \ (A)^{n-1} V_n]$ , 该变换矩阵具有唯一性。

(3) 系统按可控性的结构分解

设系统可控矩阵的秩为  $r (r < n)$ , 从可控性矩阵中选出  $r$  个线性无关的列向量  $s_1, s_2, \cdots, s_r$ , 另外再选取  $n-r$  个  $n$  维列向量  $s_{r+1}, s_{r+2}, \cdots, s_n$ , 使它们与  $\{s_1, s_2, \cdots, s_r\}$  线性无关, 则

$$P^{-1} = (s_1 \ \cdots \ s_r \ s_{r+1} \ \cdots \ s_n)$$

令  $x = P^{-1} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$ , 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = PAP^{-1} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + PBu, y = CP^{-1} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} r \times r \\ (n-r) \times (n-r) \end{matrix}, PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \times 1 \\ (n-r) \times 1 \end{matrix}, CP^{-1} = (\bar{C}_1 \ \bar{C}_2) \begin{matrix} r \times 1 \\ n \times (n-r) \end{matrix}$$

可控子系统动态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \bar{A}_{11} x_c + \bar{A}_{12} x_{\bar{c}} + \bar{B}_1 u \\ y_c = \bar{C}_1 x_c \end{cases}$$

不可控子系统动态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_{\bar{c}} = \bar{A}_{22} x_{\bar{c}} \\ y_{\bar{c}} = \bar{C}_2 x_{\bar{c}} \end{cases}$$

#### (4) 系统按可观测性的结构分解

设系统可观测矩阵的秩为  $l (l < n)$ , 从可观测性矩阵中选出  $l$  个线性无关的行向量  $t_1, t_2, \dots, t_l$ , 另外再选取  $n-l$  个  $n$  维行向量  $t_{l+1}, t_{l+2}, \dots, t_n$ , 使它们与  $\{t_1, t_2, \dots, t_l\}$  线性无关, 则

$$T = [t_1, \dots, t_l, t_{l+1}, \dots, t_n]^T$$

令  $x = T^{-1} \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$ , 则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = TAT^{-1} \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} + TBu, y = CT^{-1} \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} l \times l \\ (n-l) \times l \\ (n-l) \times (n-l) \end{matrix}, TB = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} l \times r \\ (n-l) \times r \end{matrix}, TP^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} l \text{ 列} \\ n-l \text{ 列} \end{matrix}$$

可观测子系统动态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_o = \hat{A}_{11} x_o + \hat{B}_1 u \\ y = \hat{C}_1 x_o \end{cases}$$

不可观测子系统动态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_{\bar{o}} = \hat{A}_{21} x_o + \hat{A}_{22} x_{\bar{o}} + \hat{B}_2 u \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

#### (5) 线性系统的规范分解

先对系统进行可控性分解, 引入状态变换

$$x = T_c^{-1} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

其中,  $T_c^{-1}$  由可控性矩阵构造。

再对可控子系统进行可观测性分解, 引入状态变换

$$x_c = T_{o1}^{-1} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \end{bmatrix}$$

其中,  $T_{o1}$  基于可控子系统的可观测性矩阵构造。

最后, 对不可控子系统进行可观测性分解, 引入状态变量

$$x_{\bar{c}} = T_{o2}^{-1} \begin{bmatrix} x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

其中,  $T_{o2}$  基于不可控子系统的可观测性矩阵构造。

可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{co} \\ \dot{x}_{c\bar{o}} \\ \dot{x}_{\bar{c}o} \\ \dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & \bar{A}_{13} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{co} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c0} \\ x_{c\bar{o}} \\ x_{\bar{c}o} \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

可控、可观测子系统动态方程为

$$\dot{x}_w = \bar{A}_{11}x_w + \bar{A}_{13}x_{\bar{c}o} + \bar{B}_1u, y_1 = \bar{C}x_w$$

可控、不可观测子系统动态方程为

$$\dot{x}_{c\bar{o}} = \bar{A}_{21}x_w + \bar{A}_{22}x_{c\bar{o}} + \bar{A}_{23}x_{\bar{c}o} + \bar{A}_{24}x_{\bar{c}\bar{o}} + \bar{B}_2u, y_2 = 0$$

不可控、可观测子系统动态方程为

$$\dot{x}_{\bar{c}o} = \bar{A}_{33}x_{\bar{c}o}, y_3 = \bar{C}_3x_{\bar{c}o}$$

不可控、不可观测子系统动态方程为

$$\dot{x}_{\bar{c}\bar{o}} = \bar{A}_{43}x_{\bar{c}o} + \bar{A}_{44}x_{\bar{c}\bar{o}}, y_4 = 0$$

## 9.4 反馈结构和状态观测器

### 1. 状态反馈控制律

设  $n$  维线性定常系统的动态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx$$

取系统的控制量为  $u = v - Kx$  ( $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  为反馈增益阵), 称为线性直接状态反馈, 简称状态反馈。其闭环动态方程为

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv; y = Cx$$

闭环传递函数矩阵为

$$G_k(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$$

### 2. 输出反馈至状态微分

反馈规律为

$$w = -Hy + Bu$$

其闭环动态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu - Hy = (A - HC)x + Bu; y = Cx$$

闭环传递函数矩阵为

$$G_H(s) = C(sI - A + HC)^{-1}B$$

### 3. 输出反馈至输入

反馈规律为

$$u = v - Fy$$

其闭环动态方程为

$$\dot{x} = (A - BFC)x + Bv; y = Cx$$

闭环传递函数矩阵为

$$G_F(s) = C(sI - A + BFC)^{-1}B$$

#### 4. 状态反馈与输出反馈的比较

状态反馈不改变系统的可控性,但可能改变系统的可观测性、稳定性和响应特性。输出反馈不改变系统的可控、可观测性;但可能改变系统的稳定性和响应特性。两者都改变状态矩阵,不改变输出,都改变闭环系统的极点位置。状态反馈能完整表征系统的动态行为,但状态不便或不能全部测量,需要状态观测器重构;输出反馈是状态变量的线性组合,其信息量少,难以得到任意期望的响应特性,但输出量任意测量,实现方便,可广泛应用。

#### 5. 系统的极点配置

##### (1) 定义

所谓极点配置,就是利用状态反馈或输出反馈使得闭环系统的极点位于所期望的极点位置。系统的性能与极点的位置密切相关。

##### (2) 极点可配置条件

利用状态反馈任意配置极点的充要条件是被控系统是可控的。利用输出反馈任意配置极点的充要条件是被控系统是可观测的。

##### (3) 单输入-单输出系统的极点配置算法

求状态反馈  $k$  的步骤:

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

第二步:计算由  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  所决定的希望特征多项式,即

$$a^*(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) = s^n + a_{n-1}^*s^{n-1} + \cdots + a_1^*s + a_0^*$$

第三步:计算  $\bar{k}$

$$\bar{k} = (a_0^* - a_0 \quad a_1^* - a_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}^* - a_{n-1})$$

第四步:计算变换矩阵

$$P^{-1} = (A^{n-1}b \quad \cdots \quad Ab \quad b) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

第五步:求  $P$

第六步:计算状态反馈增益向量  $k = \bar{k}P$

引入状态反馈  $k$  后,系统的状态空间表达式为  $\dot{x} = (A - bk)x + Bv$ ,  $y = Cx$ , 系统的特征多项式为  $\det[sI - (A - bk)]$ 。

令其各项的系数与希望特征多项式中对应项的系数相等,便可确定反馈增益向量  $k$ 。

#### 6. 全维状态观测器及其设计

重构状态向量的维数等于被控对象状态向量的维数  $n$ , 称全维状态观测器, 又称状态估计器。设系统动态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx$$

构造一个模拟系统

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu; y = C\hat{x}$$

其中,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  分别为模拟系统的状态向量和输出向量, 是被控对象状态向量和输出向量的

估值。

观测器存在条件是

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0$$

若被控系统  $(A, B, C)$  可观测, 则其状态可用形如

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - HC(\hat{x} - x) = (A - HC)\hat{x} + Bu + Hy$$

的全维状态观测器给出估值。

## 9.5 李雅普诺夫稳定性分析

### 1. 稳定性基本概念

#### (1) 平衡状态

$\dot{x}_e = f(x_e, t) = 0$ , 则  $x_e$  称为系统的平衡状态。对于线性定常系统  $\dot{x} = Ax$ , 当  $A$  非奇异时, 存在一个位于状态空间原点的平衡状态, 当  $A$  奇异时, 存在无穷多个平衡状态。对于非线性系统, 可能有多个平衡状态。

#### (2) 李雅普诺夫意义下的稳定性

设系统初始状态位于以平衡状态  $x_e$  为球心、 $\delta$  为半径的闭球域  $S(\delta)$  内, 即  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\epsilon, t_0)$ , 其中,  $x_0 = [x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}]^T$ ,  $x_e = [x_{1e}, x_{2e}, \dots, x_{ne}]^T$ ,  $\|x_0 - x_e\| = [(x_{10} - x_{1e})^2 + \dots + (x_{n0} - x_{ne})^2]^{\frac{1}{2}}$ , 且  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| \leq \epsilon, t \geq t_0$ , 则称  $x_e$  是李氏意义下的稳定。

如果  $\delta$  与  $t_0$  无关, 则称平衡状态是一致稳定的。

#### (3) 渐近稳定

1) 是李氏意义下的稳定

2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| \rightarrow 0$

则称为渐近稳定。

如果  $\delta$  与  $t_0$  无关, 则称平衡状态是一致渐近稳定的。

#### (4) 大范围(全局)渐近稳定性

对  $\forall x_0 \in S(\delta), \delta \rightarrow \infty, S(\delta) \rightarrow \infty$  都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| \rightarrow 0$ , 则称  $x_e$  大范围稳定。

#### (5) 不稳定性

不管  $\delta, \epsilon$  有多小, 只要  $S(\delta)$  内由  $x_0$  出发的轨迹超出  $S(\delta)$  以外, 则  $x_e$  不稳定。

### 2. 李雅普诺夫第一法(间接法)

线性定常系统稳定性的特征值判据:

设线性定常系统的状态方程为  $\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \quad t \geq 0$

#### (1) 李氏稳定的充要条件

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

#### (2) 渐近稳定的充要条件

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(3) 不稳定的充要条件

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$$

### 3. 李氏第二法(直接法)

(1) 大范围一致渐近稳定判别定理

设连续非线性时变系统  $\dot{x} = f(x, t), t \geq t_0$ , 其中  $f(0, t) = 0$ , 如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数  $V(x, t), V(0, t) = 0$ , 并且满足:

- $V(x, t)$  正定且有界
- $\dot{V}(x, t)$  负定且有界
- 若  $\|x\| \rightarrow \infty, V(x, t) \rightarrow \infty$

则  $x_e$  大范围渐近稳定。

(2) 定常系统大范围一致渐近稳定判别定理

设  $\dot{x} = f(x)$ , 其中  $f(0) = 0$ , 如果存在一个具有连续一阶导数的标量函数  $V(x)$ ,  $V(0) = 0$ , 并且对于状态空间中的一切非零点  $x$  满足:

- $V(x, t)$  正定
- $\dot{V}(x, t)$  负定
- $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$

或满足

- $V(x, t)$  正定
- $\dot{V}(x, t)$  半负定
- 对任意  $x \in X, \dot{V}(x(t; x_0, 0)) \neq 0$
- $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

### 4. 线性定常系统的李雅普诺夫稳定性分析

(1) 线性定常系统  $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$  渐近稳定的充要条件: 对于一个正定对称矩阵  $Q$ , 存在正定矩阵  $P$ , 使得  $A^T P + PA = -Q$  成立。

(2) 线性定常系统  $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0, t \geq 0$  的原点平衡点为  $x_e = 0$  为渐近稳定的充要条件是: 对于任意给定的一个正定对称矩阵  $Q$ , 有唯一的正定对称阵  $P$ , 使得  $A^T P + PA = -Q$  成立。

## 习题解答

9.1 设描述系统输入输出关系的微分方程为

$$y^{(4)} + 2\ddot{y} + 6\dot{y} + 7y = 3u$$

若选择状态变量为  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, x_4 = \dddot{y}$ , 试列写该系统的状态方程。

解

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -2x_4 - 6x_3 - 7x_2 - 8x_1 + 3u \\
 \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -7 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} u
 \end{aligned}$$

9.2 设描述系统输入输出关系的微分方程为

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y &= b_1 \dot{u} + b_0 u \\
 c_2 \ddot{z} + c_1 \dot{z} + c_0 z &= y
 \end{aligned}$$

试列写该系统的状态方程。

解

将该系统看作是两个系统的串联,其中 $\ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y = b_1 \dot{u} + b_0 u$ 看作是子系统 $S_1$ , $c_2 \ddot{z} + c_1 \dot{z} + c_0 z = y$ 看作是子系统 $S_2$ 。

对子系统 $S_1$ ,为避免在状态方程中出现 $u$ 的导数项,选取如下一组状态变量

$$\begin{cases} x_1 = y - h_0 u \\ x_2 = \dot{x}_1 - h_1 u = \dot{y} - h_0 \dot{u} - h_1 u \\ x_3 = \dot{x}_2 - h_2 u = \ddot{y} - h_0 \ddot{u} - h_1 \dot{u} - h_2 u \\ x_4 = \dot{x}_3 - h_3 u = \ddot{y} - h_0 \ddot{u} - h_1 \dot{u} - h_2 \dot{u} - h_3 u \end{cases}$$

整理,得

$$\begin{cases} y = x_1 + h_0 u \\ \dot{y} = x_2 + h_0 \dot{u} + h_1 u \\ \ddot{y} = x_3 + h_0 \ddot{u} + h_1 \dot{u} + h_2 u \\ \ddot{y} = x_4 + h_0 \ddot{u} + h_1 \dot{u} + h_2 \dot{u} + h_3 u \end{cases}$$

其中, $h_0, \dots, h_{n-1}$ 是 $n$ 个待定常数。

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_1 y &= x_4 + h_0 \ddot{u} + h_1 \dot{u} + h_2 \dot{u} + h_3 u + \\
 &+ a_2 (x_3 + h_0 \ddot{u} + h_1 \dot{u} + h_2 u) + a_1 (x_2 + h_0 \dot{u} + h_1 u)
 \end{aligned}$$

比较系数得

$$\begin{aligned}
 x_4 &= -a_1 x_2 - a_2 x_3 \\
 h_0 &= h_1 = 0 \\
 h_2 &= b_1 \\
 h_3 &= b_0 - a_2 b_1
 \end{aligned}$$

得

$$\begin{cases} y = x_1 + h_0 u = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 + h_1 u = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + h_2 u = x_3 - b_1 u \\ \dot{x}_3 = x_4 + h_3 u = -a_1 x_2 - a_2 x_3 + (b_0 - a_2 b_1) u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_0 - a_2 b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

对于子系统  $S_2$ , 设

$$\begin{aligned} x_4 &= z \\ \dot{x}_4 &= x_5 = \dot{z} \\ \dot{x}_5 &= \dot{z} = -\frac{c_0}{c_2} x_4 - \frac{c_1}{c_2} x_5 + \frac{1}{c_2} y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c_0}{c_2} & -\frac{c_1}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{c_2} \end{bmatrix} y$$

所以

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{c_2} & 0 & 0 & -\frac{c_0}{c_2} & -\frac{c_1}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_0 - a_2 b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

9.3 设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

求其不同形式的实现。

解

解法一 引入中间变量  $V(s)$ , 使得

$$G(s) = \frac{Y(s)V(s)}{V(s)U(s)} = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

令

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8}$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = s^2 + 8s + 15$$

可以得到两个微分方程

$$\ddot{v} + 7\dot{v} + 14v + 8v = u$$

$$\ddot{v} + 8\dot{v} + 15v = y$$

选择  $x_1 = v, x_2 = \dot{v}, x_3 = \ddot{v}$ , 则有

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -8x_1 - 14x_2 - 7x_3 + u$$

$$y = 15x_1 + 8x_2 + x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$y = (15 \quad 8 \quad 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

这是系统的可控标准型实现。

**解法二** 选择状态变量为

$$x_1 = \ddot{y} + 7\dot{y} + 14y - \dot{u} - 8u$$

$$x_2 = \dot{y} + 7y - u$$

$$x_3 = y$$

则

$$\dot{x}_1 = \ddot{y} + 7\dot{y} + 14\dot{y} - \ddot{u} - 8\dot{u} = -8x_3 + 15u$$

$$\dot{x}_2 = \dot{y} + 7\dot{y} - \dot{u} = x_1 - 14x_3 + 8u$$

$$\dot{x}_3 = \dot{y} = x_2 - 7x_3 + u$$

可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

这是系统的可观标准型实现。

**解法三** 将系统传递函数分解部分分式

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{8/3}{s+1} - \frac{3/2}{s+2} - \frac{1/6}{s+4}$$

得并联分解表示形式

$$Y(s) = \left( \frac{8/3}{s+1} - \frac{3/2}{s+2} - \frac{1/6}{s+4} \right) U(s)$$

设

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+2} U(s)$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+4} U(s)$$

可得

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = -4x_3 + u$$

因此有

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

这是系统的对角形实现。

解法四 将系统传递函数写成

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 8s + 15}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{1}{s+1} \frac{s+3}{s+2} \frac{s+5}{s+4}$$

设

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{s+3}{s+2} U(s)$$

$$X_3(s) = \frac{s+5}{s+4} U(s) = Y(s)$$

可得

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + 3x_1 - 2x_2 = 2x_1 - 2x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 + 5x_2 - 4x_3 = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + u$$

$$y = x_3$$

因此有

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

这是系统的对角形实现。

9.4 已知  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ , 求状态转移矩阵  $\Phi(t)$ 。

解

解法一 级数展开法

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1+0 \times t - 2 \times \frac{t^2}{2!} + \cdots & 0+t-3 \times \frac{t^2}{2!} + \cdots \\ 0-2 \times t + 6 \times \frac{t^2}{2!} + \cdots & 1-3 \times t + 7 \times \frac{t^2}{2!} + \cdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\cdots\right) - \left(1-2t+4\frac{t^2}{2!}-\cdots\right) & \left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\cdots\right) - \left(1-2t+4\frac{t^2}{2!}-\cdots\right) \\ -2\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\cdots\right) + 2\left(1-2t+4\frac{t^2}{2!}-\cdots\right) & -\left(1-t+\frac{t^2}{2!}-\cdots\right) + 2\left(1-2t+4\frac{t^2}{2!}-\cdots\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

解法二 拉氏变换法

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{ (s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix})^{-1} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{2}{s+2} - \frac{2}{s+1} & \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

状态方程的解为:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

解法三 凯莱-哈密顿定理

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = a_0(t)\mathbf{I} + a_1(t)\mathbf{A}$$

式中

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

因为

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{vmatrix}^{-1} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

所以

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \\ \Phi(t) = e^{At} &= (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

解法四 对角变换

$$\Phi(t) = e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

式中

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

因为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix}^{-1} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1 & \lambda_2 &= -2 \\ |P| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \\ P^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

9.5 已知一线性系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

试求该系统的状态矩阵  $A$ 。

解

解法一 由状态转移矩阵的性质可知

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \\ (sI - A)^{-1} &= \mathcal{L}[\Phi(t)] = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{1}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ A &= sI - (s+1)(s+2) \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

解法二 由状态转移矩阵的性质可知

$$\Phi(t) = A\Phi(t), \Phi(0) = I$$

$$A = \Phi(t) \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ -4e^{-2t} + 2e^{-t} & -4e^{-2t} + e^{-t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

9.6 已知某二阶系统的奇次状态方程为  $\dot{x} = Ax$ , 其解如下:

当  $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  时,  $x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ , 当  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  时,  $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2te^{-t} \\ e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix}$ , 求该系统的

状态转移矩阵。

解

从  $x(t) = \Phi(t)x(0)$ , 可以得到以下方程

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Phi(t) &= \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} - 2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

9.7 已知系统的状态方程为  $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u$ , 求在初始状态为

$x(0) = (1 \ 2 \ 1)^T$  时, 系统在单位阶跃输入作用下的时间响应。

解

系统非奇次状态方程解为

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A\tau}bu(t-\tau)d\tau \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & \tau e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \times 1 \times d\tau = \begin{bmatrix} 1 + te^{-t} \\ 1 + e^{-t} \\ 2 - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

9.8 已知连续系统动态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = (1 \ 0)x \end{cases}$$

设采样周期  $T=1$ , 试求其对应的离散化动态方程。

解

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \left[ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{(s-1)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(T) = \Phi(t) \Big|_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}e^{2T} - \frac{1}{2} \\ 0 & e^{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}$$

$$G(T) = \int_0^T \Phi(\tau) B d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}e^{2\tau} - \frac{1}{2} \\ 0 & e^{2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2\tau} - \frac{1}{2} \\ e^{2\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{2\tau} - \frac{1}{2}\tau \\ \frac{1}{2}e^{2\tau} \end{bmatrix} \Big|_0^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{2T} - \frac{1}{2}T - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}e^{2T} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$G(T) \Big|_{T=1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = \Phi(T)x(k) + G(T)u(k)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(k)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3.1945 \\ 0 & 7.3891 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1.0973 \\ 3.1945 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (1 \ 0)x(k)$$

9.9 试判断下列系统的状态可控性。

$$(1) \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, (2) \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解

(1) 根据系统的状态方程, 可得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由系统可控判别矩阵

$$S = (B \ AB \ A^2B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank} S = 2 < 3$ , 故系统状态不可控。

(2) 由约当型系统状态可控性判别规则可知, 每个特征根对应约当块  $B$  阵最后一行构成的矩阵分别为

$$B_{\lambda_1} = (1), B_{\lambda_{12}} = (1)$$

因  $B_{\lambda_1}$  和  $B_{\lambda_{12}}$  均不是零, 故系统状态完全可控。

9.10 试判断下列系统的可观性。

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = (1 \ 1 \ 0)x \end{cases}, (2) \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x \\ y = (0 \ 1 \ 1)x \end{cases}$$

解

(1) 根据系统的状态方程, 可得

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C = (1 \ 1 \ 0)$$

则系统可观测判别矩阵为

$$V_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank} V_0 = 3 = n$ , 故系统状态完全可观测。

(2) 解法一 由约当型系统状态可观测判别规则可知, 每个特征根所对应约当块的对应  $C$  矩阵的第一列所组成的矩阵分别为

$$C_{\lambda_1} = (0), C_{\lambda_{12}} = (1)$$

因  $C_{\lambda_1}$  为零, 故系统状态不可观测。

解法二 系统状态可观测判别矩阵

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank} V = 2 < 3$ , 故系统状态不可观测。

9.11 将下列状态方程化为可控标准型。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解

解法一 根据系统的状态方程, 可得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由系统可控判别矩阵  $S = (B \ AB) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$  计算

$$S^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

取  $S^{-1}$  的最后一行构成  $p_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$ , 构造  $P$  矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

解得

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}, \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解法二 设  $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , 可控标准型满足

$$PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ d=1 \end{cases}$$

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{a-c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -c & a \end{bmatrix}$$

求解方程式, 可得  $a = -6, c = 2, x_1 = -10, x_2 = 5$ , 即

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9.12 已知系统传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

试求系统的可观测标准型实现。

解

系统的传递函数可以写成

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)^2} [(s+1) \quad 1]$$

满足叠加原理, 系统微分方程可以写成

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \dot{u}_1 + u_1 + u_2$$

令  $x_1 = \dot{y} + 2y - u_1, x_2 = y$ , 则有

$$\dot{x}_1 = \ddot{y} + 2\dot{y} - \dot{u}_1 = u_1 + u_2 - y = u_1 + u_2 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = \dot{y} = x_1 - 2x_2 + u_1$$

此乃系统的可观测标准型实现, 其向量 矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = (0 \quad 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

### 9.13 设系统的动态方程满足

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

- (1) 试判断系统的可控性和可观测性；  
 (2) 若不可观或不可控，试给出其可控性分解或可观测性分解的描述形式。

解

根据系统的状态方程，可得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

系统的可控矩阵为

$$\mathbf{S} = (\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank} \mathbf{S} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ ，所以系统不完全可控。

系统的可观矩阵为

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank} \mathbf{V} = 3$ ，所以系统完全可观。

给定系统不完全可控，可作可控性分解。取  $\mathbf{S}$  中两个线性无关的列，再任取与其线性无关的列，构成变换阵

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可得可控性分解的系数阵

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{AT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 9.14 设被控对象的状态方程描述为

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = (1 \quad 0) \mathbf{x}(k)$$

试设计状态反馈控制律  $u(k) = -Lx(k)$ , 使得系统闭环极点为  $\{0.1, 0.25\}$ 。

解

根据系统的状态方程, 可得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = (1 \quad 0)$$

先验证系统的可控性:

因为  $\text{rank}W_c = \text{rank}(B \quad AB) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = 2$ , 所以系统完全可控。

设状态反馈阵  $L = (l_1 \quad l_2)$ , 对于闭环极点

$$\begin{aligned} \det(zI - A + BL) &= \det \begin{pmatrix} z-1+l_1 & -0.1+l_2 \\ -0.5 & z-0.1 \end{pmatrix} \\ &= z^2 + (-1.1+l_1)z + (0.1-0.1l_1-0.05+0.5l_2) \end{aligned}$$

期望的闭环特征多项式为

$$(z-0.1)(z-0.25) = z^2 - 0.35z + 0.025$$

解得  $l_1 = 0.75, l_2 = 0.1$ 。

9.15 设被控对象的状态方程描述为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= (1 \quad 0)x(k) \end{aligned}$$

试设计其具有状态观测器的状态反馈极点控制器, 使得系统闭环极点为  $\{0.6, 0.8\}$ , 观测器的极点为  $\{0.9 \pm j0.1\}$ 。

解

根据系统的状态方程, 可得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C = (1 \quad 0)$$

先验证系统的能控性:

因为  $\text{rank}W_c = \text{rank}(B \quad AB) = \text{rank} \begin{bmatrix} 0.005 & 0.015 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} = 2$ , 故系统完全可控。

再验证系统的可观性:

因为  $\text{rank}W_o = \text{rank}(C \quad CA) = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$  故系统完全可观测。

设状态反馈阵  $L = (l_1 \quad l_2)$ , 对于闭环极点

$$\begin{aligned} \det(zI - A + BL) &= \det \begin{bmatrix} z-1+0.005l_1 & -0.1+0.005l_2 \\ 0.1l_1 & z-1+0.1l_2 \end{bmatrix} \\ &= z^2 + (0.1l_2 + 0.005l_1 - 2)z + (0.005l_1 - 0.1l_2 + 1) \end{aligned}$$

期望的闭环特征多项式为

$$(z-0.6)(z-0.8) = z^2 - 1.4z + 0.48$$

解得  $l_1 = 8, l_2 = 5.6$ 。

对于状态观测器

$$\det(zI - A + KC) = \det \begin{bmatrix} z-1+k_1 & -0.1 \\ k_2 & z-1 \end{bmatrix} = z^2 - (2-k_1)z + (1-k_1+0.1k_2)$$

期望的闭环特征多项式

$$(z-0.9+j0.1)(z-0.9-j0.1)=z^2-1.8z+0.82$$

解得  $k_1=0.2, k_2=0.2$ 。

控制器为

$$x(k+1)=(A-KC)x(k)+Bu(k)+Ky(k)=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}y(k)$$

$$u(k)=-(8 \quad 5.6)x(k)$$

9.16 设有不稳定的线性定常系统  $(A, b, c)$ , 其中,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $c = (-1 \quad 1 \quad 1)$ 。

(1) 能否通过状态反馈把系统的闭环极点配置在  $-10$  及  $-1 \pm j\sqrt{3}$  处? 若可能, 试求出实现上述极点配置的反馈增益向量  $k$ ;

(2) 当系统的状态不可直接测量时, 能否通过状态观测器来获取状态变量? 若可能, 设计一个极点位于  $4$  及  $-3 \pm j$  处的等维状态观测器;

(3) 系统的最小维状态观测器是几维系统? 试设计所有极点均在  $-4$  处的龙伯格观测器。

解

(1) 求反馈增益向量  $k$

系统可控判别矩阵

$$P = (b \quad Ab \quad A^2b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank} P = 3$ , 故系统状态可控, 可以通过状态反馈将其极点任意配置。

设将系统的闭环极点配置在期望位置上的状态反馈为负反馈, 其反馈增益向量为

$$k = (k_1 \quad k_2 \quad k_3)$$

系统的闭环特征多项式为

$$f_k(\lambda) = \det(\lambda I - (A - bk)) = \lambda^3 + k_3\lambda^2 + (k_2 - 9)\lambda - (7k_3 + k_2 - 2k_1 - 2)$$

而闭环系统的期望特征多项式是

$$f_k(\lambda) = (\lambda + 10)(\lambda + 1 + j\sqrt{3})(\lambda + 1 - j\sqrt{3}) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 24\lambda + 40$$

比较上述两式得

$$k_1 = 77.5, k_2 = 33, k_3 = 12$$

其反馈增益向量为

$$k = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] = [77.5 \quad 33 \quad 12]$$

(2) 设计等维状态观测器

系统可观测判别矩阵

$$V = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

因为  $\text{rank} V = 3$ , 故系统状态可控, 可以通过状态反馈获取状态变量。

现利用输出至状态微分的负反馈来配置极点。为了求取满足要求的反馈增益向量  $h$ , 先将  $(A, c)$  化成可观标准型  $(\bar{A}, \bar{c})$ 。由于

$$\det(sI - A) = s^3 - 9s + 2$$

即

$$a_1 = 0, a_2 = -9, a_3 = 2$$

所以变换矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -10 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = cT^{-1} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

设

$$h = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_3 \end{bmatrix}, \bar{A} - \bar{h}\bar{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 - \bar{h}_1 \\ 1 & 0 & 9 - \bar{h}_2 \\ 0 & 1 & -\bar{h}_3 \end{bmatrix}$$

状态观测器的特征多项式为

$$f_h(\lambda) = \det[\lambda I - (\bar{A} - \bar{h}\bar{c})] = \det[\lambda I - (\bar{A} - \bar{h}\bar{c})]$$

$$= \lambda^3 + \bar{h}_3\lambda^2 + (\bar{h}_2 - 9)\lambda + (\bar{h}_1 + 2)$$

期望的状态观测器的特征多项式为

$$f_h(\lambda) = (\lambda + 4)(\lambda + 3 - j)(\lambda + 3 + j) = \lambda^3 + 10\lambda^2 + 34\lambda + 40$$

比较上述两式, 可得

$$h = (\bar{h}_1 \quad \bar{h}_2 \quad \bar{h}_3)^T = (38 \quad 43 \quad 10)^T$$

所以

$$h = T^{-1}\bar{h} = (27 \quad 24 \quad 13)^T$$

要设计的等维状态观测器为

$$\dot{\hat{x}} = (A - hc)\hat{x} + hy + bu$$

即

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 28 & -25 & -27 \\ 27 & -25 & -23 \\ 13 & -11 & -13 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 27 \\ 24 \\ 13 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

### (3) 设计龙伯格观测器

因为  $\text{rank} c = q = 1$ , 所以该系统的最小状态观测器是  $n - q = 2$  维系统。选取变换矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} D \\ \dots \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

式中,  $D$  是使  $Q$  非奇异的任意  $(2 \times 3)$  维矩阵。因此经  $\bar{x} = Qx$  变换后的系统动态方程为

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u, \bar{y} = y = \bar{c}\bar{x}$$

其中

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \bar{A} = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{b} = Qb = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{c} = cQ^{-1} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

龙伯格观测器的动态方程为

$$\dot{w} = (\bar{A}_{11} - h\bar{A}_{21})w + (b_1 - h\bar{b}_2)u + [(\bar{A}_{11} - h\bar{A}_{21})h + \bar{A}_{12} - h\bar{A}_{22}]\bar{y}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = w + h\bar{y}$$

设使龙伯格观测器的两个极点均位于  $-4$  处的反馈增益向量  $h = (h_0 \quad h_1)^T$ , 则有

$$\det[sI - (\bar{A}_{11} - h\bar{A}_{21})] = (s+4)^2$$

即

$$s^2 + (3h_0 - 2h_1 + 1)s + (-2h_0 + 8h_1 - 10) = s^2 + 8s + 16$$

解得

$$h = (h_0 \quad h_1)^T = (5.4 \quad 4.6)^T$$

即龙伯格观测器的动态方程为

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} -15.2 & 12.8 \\ -9.8 & 7.2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -5.4 \\ -4.6 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -28.6 \\ -23.4 \end{bmatrix} \bar{y}$$

$$\bar{y} = y = \bar{c}\bar{x} = (0 \quad 0 \quad 1) \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \bar{x}_3$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = w + h\bar{y} = w + \begin{bmatrix} 5.4 \\ 4.6 \end{bmatrix} y$$

又由于

$$R = Q^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$s = Q^{-1} \begin{bmatrix} h \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.4 \\ 4.6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.4 \\ 4.6 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

将  $\hat{x}$  变回原系统状态空间, 则有

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{w} + \mathbf{s}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} 5.4 \\ 4.6 \\ 1.8 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

也可写成

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} 5.4 \\ 4.6 \\ 1.8 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

**9.17** 用李雅普诺夫第二法(直接法)判断下列系统的原点稳定性。

(1)  $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2$

(2)  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2$

(3)  $\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2^4, \dot{x}_2 = -x_2$

(4)  $x_1(k+1) = 0.8x_1(k) - 0.4x_2(k), x_2(k+1) = 1.2x_1(k) + 0.2x_2(k)$

**解**

(1) **解法一** 原点  $(x_1=0, x_2=0)$  是该系统唯一的平衡点。选取正定标量函数

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2(2x_1 - 3x_2) \\ &= -x_1^2 + 5x_1x_2 - 6x_2^2 = -\left(x_1 - \frac{5}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 \end{aligned}$$

对于状态空间中的一切非零  $x$ , 满足条件  $V(x)$  正定和  $\dot{V}(x)$  负定, 故系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

**解法二** 系统的状态方程写成向量-矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统的状态矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \det \mathbf{A} = 1$$

即  $\mathbf{A}$  是非奇异的, 故原点  $x_e=0$  是该系统的唯一平衡状态。

设系统的李雅普诺夫函数及其导函数分别为

$$V(x) = x^T P x, \dot{V}(x) = -x^T Q x, P > 0, Q > 0$$

则

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

取  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , 上式即为

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $p_{12} = p_{21}$ 。求解该矩阵方程可得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

该对称矩阵  $\mathbf{P}$  正定, 系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。原点  $(x_1=0, x_2=0)$  是该系统唯一的平衡点。

(2) 系统的状态方程写成向量-矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

设系统的李雅普诺夫函数及其导函数分别为

$$V(x) = x^T P x, \dot{V}(x) = -x^T Q x, P > 0, Q > 0$$

则

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$$

取  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , 上式即为

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中,  $p_{12} = p_{21}$ 。求解该矩阵方程可得

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

该对称矩阵  $\mathbf{P}$  非正定也非负定, 很难判断系统的稳定性。选取其他正定标量函数也无法判断系统的稳定性。

由于系统状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$\mathbf{A}$  的特征方程为

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$\mathbf{A}$  的特征值为  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 1$ 。可见该系统的原点平衡状态是不稳定的。

(3) 原点  $(x_1=0, x_2=0)$  是该系统唯一的平衡点。

选取正定标量函数

$$V(x) = 2x_1^2 + 2x_2^8$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 4x_1 \dot{x}_1 + 16x_2^7 \dot{x}_2 = 4x_1(-2x_1 + 2x_2^4) + 16x_2^7(-x_2) \\ &= -8x_1^2 + 8x_1x_2^4 - 16x_2^8 = -7x_1^2 - (x_1 - 4x_2^4)^2 \end{aligned}$$

对于状态空间中的一切非零  $x$  满足条件  $V(x)$  正定和  $\dot{V}(x)$  负定, 故系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

对于该系统, 正定标量函数还可以选为  $V(x) = x_1^2 + x_2^8$ ,  $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{16}x_2^8$ ,

$V(x) = (2x_1^2 + x_2^4)^2 + \frac{1}{2}x_2^8$  等。

(4) 系统的状态方程写成向量-矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1.2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

即

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k)$$

其中

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}, \Phi(k) = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

选取

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) P \mathbf{x}(k), \Delta V(\mathbf{x}(k)) = -\mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k)$$

其中  $Q = I, p_{12} = p_{21}$ , 代入离散李雅普诺夫方程

$$\Phi^T P \Phi - P = -Q$$

则有

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 1.2 \\ -0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1.2 & 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求解该矩阵方程可得

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.665 & -1.226 \\ -1.226 & 1.856 \end{bmatrix}$$

对称矩阵  $P$  正定, 该离散系统大范围渐近稳定。

# 第 10 章 动态系统的最优控制方法

## 10.1 最优控制的一般概念

### 1. 最优控制的基本概念

控制系统的分析(System Analysis)和综合设计(System Synthesis)是系统研究的两大课题。系统的分析是在建立控制系统的数学模型的基础上,分析系统的各种性能,如系统稳定性、可观性、可控性等。系统综合或系统设计的任务是设计系统控制器,以改善原系统的性能,达到系统要求的各种性能指标。

系统综合可分为常规综合(Conventional Synthesis)和最优综合(Optimal Synthesis)。常规综合只满足系统的某些笼统的指标要求,如稳定性、快速性及稳态误差。最优综合(控制)是确保系统某种指标最优的综合,如最短时间、最低能耗等。

### 2. 最优控制研究的基本问题

建立被控对象的数学模型,选择容许的控制律,目标是使得被控对象按照预定的要求运行,并使得给定的某一性能指标达到极值。

#### (1) 系统数学模型

在集总参数情况下,被控系统的数学模型通常用定义在 $[t_0, t_f]$ 上的状态方程来表示,即

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], x(t_0) = x_0$$

其中,  $x(t) \in R^n$  为  $n$  维状态变量。  $u(t) \in R^m$  为  $m$  维控制变量,且在  $[t_0, t_f]$  上分段连续。  $f(\cdot) \in R^n$  为连续向量函数,且对  $x(t)$  和  $t$  连续可微。

#### (2) 边界条件与目标集

为了确定要求的轨线  $x(t)$ ,需要确定轨线的两点边界值,即要求确定初态  $x(t_0)$  和末态  $x(t_f)$ ,该条件为系统必须的边界条件。

对于  $t_f$  和  $x(t_f)$  的要求,通常用目标集来说明:

$$\phi[x(t_f), t_f] = 0$$

其中,  $\phi(\cdot) \in R^r$  为连续可微向量函数,  $r \leq n$ 。

#### (3) 容许控制

在属于闭集的控制中,控制向量  $u(t)$  的取值范围称为控制域。

由于  $u(t)$  可以在控制域的边界上取值,故凡属于控制域且分段连续的控制向量均称为容许控制,用  $u(t) \in \Omega$  表示。

#### (4) 性能指标

在状态空间中,使系统从已知的初态转移到要求的末态(或目标集),可以采用不同

的控制向量函数实现。性能指标是衡量系统在不同的控制向量作用下的工作优良度的标准。

性能指标的一般形式是

$$J = \varphi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$$

其中,  $\varphi[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  称为末值项,  $\int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$  称为过程项。

最优控制问题可以用泛函形式表示, 即

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in \Omega} J = \varphi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$$

s. t. (1)  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t], \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

(2)  $\varphi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$

### 3. 最优控制的应用类型

(1) 积分型性能指标

(2) 末值型性能指标

(3) 复合型性能指标

### 4. 最优控制的研究方法

(1) 解析法: 适用于性能指标及约束有明显解析表达式的情况, 包括变分法、极小值原理和动态规划等。

(2) 数值计算法: 当性能指标比较复杂或不能用变量显函数表示时, 可以采用直接搜索的方法, 经过若干次迭代搜索到最优点, 包括区间消去法、爬山法等。

(3) 梯度型法: 一种解析和数值计算结合的方法, 包括无约束梯度法、有约束梯度法等。

## 10.2 最优控制中的变分法

### 1. 泛函与变分

#### (1) 泛函

对于自变量  $t$  存在一类函数  $\{\mathbf{x}(t)\}$ , 若对于每个函数  $\mathbf{x}(t)$  都有一个  $J$  值与之对应, 则称变量  $J$  为依赖于函数  $\mathbf{x}(t)$  的泛函数, 简称泛函。记为  $J[\mathbf{x}(t)]$ 。泛函为标量, 可以理解为“函数的函数”。

为了对泛函进行计算, 要求  $J[\mathbf{x}(t)]$  具有连续性和线性。

#### (2) 泛函变分

设泛函  $J[\mathbf{x}]$  是线性赋范空间  $R^n$  上的线性连续泛函, 其增量可以表示为

$$\Delta J[\mathbf{x}] = J[\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}] - J[\mathbf{x}] = L[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}] + r[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}]$$

其中,  $L[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}]$  是关于  $\delta \mathbf{x}$  的连续泛函,  $r[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}]$  是关于  $\delta \mathbf{x}$  的高阶无穷小, 则  $\delta J = L[\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}]$  称为泛函  $J[\mathbf{x}]$  的变分。

泛函变分的求解: 设泛函  $J[\mathbf{x}]$  是线性赋范空间  $R^n$  上的线性连续泛函, 如在  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  处  $J[\mathbf{x}]$  可微,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in R^n$ , 则  $J[\mathbf{x}]$  的变分为

$$\delta J[\mathbf{x}_0, \delta \mathbf{x}] = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} J[\mathbf{x}_0 + \epsilon \delta \mathbf{x}] \right|_{\epsilon=0}, 0 \leq \epsilon \leq 1$$

### (3) 泛函极值

设  $J[x]$  是线性赋范空间  $R^n$  上的某个子集  $D(J)$  中定义的线性连续泛函, 点  $x_0 \in D(J)$ , 若存在某一正数  $\sigma$  以及集合  $U$ , 且

$$U(x_0, \sigma) = \{x \mid \|x - x_0\| < \sigma, x \in R^n\}$$

在  $x \in U(x_0, \sigma) \subset D$  时, 有

$$\Delta J[x] = J[x] - J[x_0] \geq 0$$

或者

$$\Delta J[x] = J[x] - J[x_0] < 0$$

则称泛函  $J[x]$  在  $x = x_0$  处达到极小值(或极大值)。

泛函极值的必要条件: 设泛函  $J[x]$  是线性赋范空间  $R^n$  上的某个子集  $D(J)$  中定义的可微泛函, 且在  $x = x_0$  处达到极值, 则泛函  $J[x]$  在  $x = x_0$  处必有  $\delta J[x_0, \delta x] = 0$ , 表明泛函一次变分为零, 是泛函达到极值的必要条件。

### 2. 欧拉方程

欧拉方程是无约束泛函极值及有约束泛函极值的必要条件。

设有如下泛函极值问题

$$\min_{x(t)} J[x] = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt$$

其中,  $L(x, \dot{x}, t)$  在时间区间  $[t_0, t_f]$  是连续可微的。  $t_0, t_f$  给定, 且已知  $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f, x(t) \in R^n$ , 则极值轨线  $x^*(t)$  满足欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

及横截条件 
$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^T \bigg|_{t_f} \delta x(t_f) - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^T \bigg|_{t_0} \delta x(t_0) = 0$$

当两端固定时, 有  $\delta x(t_0) = 0, \delta x(t_f) = 0$ , 则横截条件为  $x(t_0) = x_0; x(t_f) = x_f$ 。

### 3. 横截条件

求解欧拉方程时, 需要由横截条件提供两点边界值。

实际过程中, 通常初始时刻和初始状态是固定的, 而末端时刻和末端状态不定, 可以是固定的, 也可以是自由的。

表 10-1 所示为不同边界情况下的横截条件。

表 10-1 不同边界情况下的横截条件

$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt$		横截条件与边界条件
$t_f$ 固定 ( $x(t_0)$ 固定)	$x(t_f)$ 固定	$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$
	$x(t_f)$ 自由	$x(t_0) = x_0, \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right _{t_f} = 0$
$t_f$ 自由	$x(t_f)$ 自由	$x(t_0) = x_0, \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right _{t_f} = 0$
		$\left[ L - \dot{x}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \bigg _{t_f} = 0$
( $x(t_0)$ 固定)	$x(t_f)$ 约束	$x(t_0) = x_0, x(t_f) = c(t_f)$ $\left[ L + (c - \dot{x})^T \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \bigg _{t_f} = 0$

#### 4. 变分法解最优控制问题

最优控制适用条件:控制向量不受约束,且是时间的连续函数。可用变分法导出最优控制的必要条件。

设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

求最优控制  $\mathbf{u}^*(t)$  和最优轨线  $\mathbf{x}^*(t)$ , 使得性能指标泛函

$$J(\mathbf{u}) = \varphi[t_f, \mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$$

为极小值。末端主体状态  $\mathbf{x}(t_f)$  所要求的目标集

$$\psi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$$

最优控制是一类泛函极值问题,求解时需要确定哈密顿函数

$$H = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

其中,  $\lambda$  称为拉格朗日乘子向量。

表 10-2 为用变分法求最优解的必要条件。

表 10-2 用变分法求最优解的必要条件

$\min_{\mathbf{u}(t)} \quad \varphi(\cdot) + \int_{t_0}^t L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$ $\text{s. t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\psi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$ $H = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$		正则方程	极值条件	边界条件与横截条件	H 变化律
$t_f$ 固定	末端约束			$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \psi[\mathbf{x}(t_f)] = 0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \gamma$	
	末端自由			$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$	
	末端固定 (系统可控)			$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$	
$t_f$ 自由	末端约束	$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}$	$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0$	$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\psi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}(t_f)} + \frac{\partial \psi^T}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \gamma$	$H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f} - \gamma^T \frac{\partial \psi}{\partial t_f}$
	末端自由			$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$	$H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f}$
	末端固定 (系统可控)			$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$	$H(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f}$

## 10.3 极小值原理及其应用

极小值原理与经典变分法相似,用于控制变量受边界限制的情况,不要求哈密顿函数对控制向量连续可微。

### 1. 连续系统的极小值原理

表 10-3 对应于如下定常系统:末值型性能指标、末端自由、控制量受约束、末端自由的最优控制问题。

表 10-3 连续系统极小值原理的必要条件

末端时刻	性能指标	末端状态	正则方程	极小值条件	边界条件与横截条件	H 变化律
$t_f$ 自由	$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$	末端约束	$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ 其中 $H = L + \lambda^T f$	$H^* = \min_{u \in \Omega} H$	$x(t_0) = x_0, \psi[x(t_f), t_f] = 0$	$H^*(t_f^*) = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^T \frac{\partial \psi}{\partial t}\right]_{t_f}$
		末端自由			$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$	$H^*(t_f^*) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f}$
	$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$	末端约束			$x(t_0) = x_0, \psi[x(t_f), t_f] = 0$	$H^*(t_f^*) = -\gamma^T \frac{\partial \psi}{\partial t_f}$
		末端自由			$x(t_0) = x_0, \lambda(t_f) = 0$	$H^*(t_f^*) = 0$
		末端固定			$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$	$H^*(t_f^*) = 0$
	$J = \varphi[x(t_f), t_f]$	末端约束	$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ 其中 $H = \lambda^T f$		$x(t_0) = x_0, \psi[x(t_f), t_f] = 0$	$H^*(t_f^*) = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma^T \frac{\partial \psi}{\partial t}\right]_{t_f}$
		末端自由			$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$	$H^*(t_f^*) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_f}$
$t_f$ 固定	$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$	末端约束	$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ 其中 $H = L + \lambda^T f$	$H^* = \min_{u \in \Omega} H$	$x(t_0) = x_0, \psi[x(t_f), t_f] = 0$	
		末端自由			$\lambda(t_f) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \gamma\right]_{t_f}$	
	$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$	末端约束			$x(t_0) = x_0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$	
		末端自由			$x(t_0) = x_0, \psi[x(t_f), t_f] = 0$	
		末端固定			$\lambda(t_f) = 0$ $x(t_0) = x_0$ $x(t_f) = x_f$	
	$J = \varphi[x(t_f), t_f]$	末端约束	$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ 其中 $H = \lambda^T f$		$x(t_0) = x_0, \psi[x(t_f), t_f] = 0$	
		末端自由			$\lambda(t_f) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^T}{\partial x} \gamma\right]_{t_f}$	
					$x(t_0) = x_0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$	

注:对于定常系统,当  $t_f$  固定时,最优解的必要条件同本表中  $t_f$  的固定情况;当  $t_f$  自由时,除  $H$  变化律均为  $H^*(t_f^*) = 0$  外,其余同本表中  $t_f$  的自由情况。

## 2. 最小时间控制

要求在容许控制范围内寻找最优控制,使得系统以最短的时间从任意初始状态转移到要求的目标集。

设完全可控的线性定常系统为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0$$

其中,  $x(t) \in R^n, u(t) \in \Omega \subset R^m$ ; 要求满足下列不等式约束的容许控制  $u^*(t)$

$$\|u_j(t)\| \leq 1, j=1, 2, \dots, m$$

使系统从已知状态  $x_0$  转移到终端状态  $x(t_f) = 0$ , 其中  $t_f$  自由, 并使得

$$J = \int_0^{t_f} dt = t_f = \min$$

构造哈密顿函数  $H = 1 + \lambda^T(Ax + Bu)$ 。

由极小值原理知, 最优控制的充分必要条件为:

①  $x^*(t)$  和  $\lambda^*(t)$  是下列正则方程组之解

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax^*(t) + Bu^*(t)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -A^T \lambda^*(t)$$

② 边界条件和横截条件

$$x(t_0) = x_0; x^*(t_f^*) = 0$$

③ 极小值条件

$$1 + \lambda^{*T} Ax^* + \lambda^{*T} Bu^* \leq 1 + \lambda^{*T} Ax^* + \lambda^{*T}$$

在约束条件  $\|u_j(t)\| \leq 1, j=1, 2, \dots, m$  下最优控制为

$$u^*(t) = -\operatorname{sgn}\{B^T \lambda^*(t)\}$$

④ 在最优轨线末端哈密顿函数变化律

$$H = H(x^*(t_f^*), u^*(t_f^*), \lambda^*(t_f^*)) = 1 + \lambda^{*T}(t_f^*)Ax^*(t_f^*) + \lambda^{*T}(t_f^*)Bu^*(t_f^*) = 0$$

的解

$$\lambda^* = e^{-A^T t} \lambda^*(0), u^*(t) = -\operatorname{sgn}\{B^T e^{-A^T t} \lambda^*(0)\}$$

## 3. 最小能量控制

要求在容许控制范围内寻找最优控制,使得系统以最短的时间从任意初始状态转移到要求的目标集。

设完全可控的线性定常系统为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0$$

其中,  $x(t) \in R^n, u(t) \in \Omega \subset R^m$ ; 要求满足下列不等式约束的容许控制  $u^*(t)$

$$\|u_j(t)\| \leq M, j=1, 2, \dots, m$$

使系统从已知状态  $x_0$  转移到终端状态  $x(t_f) = x_f$ , 其中  $t_f$  自由, 并使得

$$J = \int_0^{t_f} \left\{ \sum_{j=1}^M u_j^2(t) \right\} dt = \min$$

构造哈密顿函数

$$H = \sum_{j=1}^m u_j^2(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}(t)$$

定义开关向量函数

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad \cdots \quad s_m(t)]^T$$

协态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}(t)$$

的解

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = e^{-\mathbf{A}^T t} \boldsymbol{\lambda}(t_0)$$

最优控制为

$$\mathbf{u}_j^*(t) = -M \operatorname{sgn}\{s_j(t)\} = \begin{cases} -\frac{1}{2} s_j(t) & |s_j(t)| \leq 2M \\ -M \operatorname{sgn}\{s_j(t)\} & |s_j(t)| > 2M \end{cases}$$

## 10.4 线性二次型问题的最优控制

### 1. 线性二次型问题

线性二次型问题:研究的系统是线性系统,其性能指标为状态变量和控制变量的二次型函数,则最优控制问题为线性二次型问题。

(1) 系统的数学模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

式中,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T \geq 0$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$  称为加权矩阵,  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)$  为理想输出和实际输出之差。

物理含义如下。

末值项  $\frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{e}(t_f)$ : 表明控制过程结束后,对系统末态跟踪误差的要求。

积分项  $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}(t) dt$ : 表明控制过程结束后,对系统动态跟踪误差加权平方和的积分要求,是系统在控制过程中动态跟踪误差的总度量。该项和末值项反映系统的控制效果。

积分项  $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt$ : 表明在整个系统控制过程中所消耗的控制能量。

(2) 线性二次型的三种类型

#### ① 状态调节器问题

当系统受到偏离原零平衡状态时,要求产生一控制向量,使得系统状态  $\mathbf{x}(t)$  恢复到原平衡状态附近,并使得性能指标极小。因此,称为状态调节器。

## ② 输出调节器问题

令  $z(t)=0$ , 则  $e(t)=-y(t)$ 。

当系统受到偏离原输出状态时, 要求产生一控制向量, 使得系统输出  $y(t)$  保持在原平衡状态附近, 并使得性能指标极小。因此, 称为输出调节器。

## ③ 输出跟踪系统问题

令  $C(t) \neq I, z(t) \neq 0$ , 则  $e(t)=z(t)-y(t)$ 。

当理想输出向量  $z(t)$  作用于系统时, 要求系统产生一控制向量, 使得系统实际输出向量  $y(t)$  始终跟踪  $z(t)$  的变化, 并使得性能指标极小。因此, 称为输出跟踪调节器。

## 2. 有限时间时变状态调节器

设线性时变系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(t_0) = x_0$$

其中,  $u(t)$  无约束, 末端时刻  $t_f$  给定且有限, 要求确定最优控制  $u^*(t)$ , 使得

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

最小。

其最优控制的充要条件:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T(t)P(t)x(t)$$

其中,  $P(t)$  为  $n \times n$  对称非负矩阵。满足

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t) + Q(t)$$

其边界条件为  $P(t_f) = F$ 。

最优性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0)$$

最优轨线是下列向量微分方程的解

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}B^T(t)P(t)]x(t), x(t_0) = x_0$$

说明:

- 最优控制律是一个线性状态反馈控制律, 便于实现闭环最优控制;
- 黎卡提方程为非线性矩阵微分方程, 通常只能采用计算机逆时间方向求数值解;
- 只要时间区间是有限的, 黎卡提方程的解  $P(t)$  就是时变的, 最优反馈系统即为线性时变系统。

## 3. 无限时间定常状态调节器

设线性定常系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0$$

其中  $u(t)$  无约束, 要求确定最优控制  $u^*(t)$ , 使得  $J = \frac{1}{2}\int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$

最小。

其最优控制的充要条件:

若矩阵  $\{A, B\}$  完全可控,  $\{A, D\}$  完全可观, 其中  $DD^T = Q$ , 则存在最优解

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}x(t)$$

最优性能指标

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}(t_0)$$

其中,  $\bar{\mathbf{P}}$  为  $n \times n$  对称非负矩阵, 满足

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 0$$

#### 4. 有限时间时变输出调节器

系统的数学模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

式中,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T \geq 0$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$  称为加权矩阵,  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)$  为理想输出和实际输出之差。

令  $\mathbf{z}(t) = 0$ , 则  $\mathbf{e}(t) = -\mathbf{y}(t)$ 。

则存在使得  $J = \min$  的唯一最优控制

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t)$$

最优性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P}(t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

最优轨线  $\mathbf{x}^*(t)$  满足如下微分方程:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)] \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

其中,  $\mathbf{P}$  是如下黎卡提方程在边界条件下的唯一解

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}(t)$$

其边界条件是

$$\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{C}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{C}(t_f)$$

#### 5. 无限时间定常输出调节器

系统的数学模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\mathbf{y}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{y}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

若矩阵  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  完全可控,  $\{\mathbf{A}, \mathbf{D}\}$  完全可观, 其中  $\mathbf{D}\mathbf{D}^T = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  任意, 则存在使  $J = \min$  的唯一最优解

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}(t)$$

最优性能指标

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(0) \bar{\mathbf{P}} \mathbf{x}(0)$$

其中,  $\bar{\mathbf{P}}$  为  $n \times n$  对称非负矩阵, 满足

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} = 0$$

最优闭环系统  $\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^TP)x(t)$ ,  $x(0) = x_0$  是渐近稳定的, 其解为最优轨线  $x^*(t)$ 。

## 6. 有限时间时变输出跟踪系统

系统的数学模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(t_0) = x_0 \\ y = C(t)x(t) \end{cases}$$

性能指标为

$$J = \frac{1}{2}e^T(t_f)Fe(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

则存在使得  $J = \min$  的最优控制

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)[P(t)x(t) - g(t)]$$

其中,  $P$  为  $n \times n$  对称非负矩阵, 是如下黎卡提方程在边界条件下的唯一解

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + C^T(t)Q(t)C(t)$$

其边界条件是

$$P(t_f) = C^T(t_f)FC(t_f)$$

$g(t)$  为  $n$  维伴随向量, 满足向量微分方程

$$-\dot{g}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]^T g(t) + C^T(t)Q(t)z(t)$$

其边界条件是

$$g(t_f) = C^T(t_f)Fz(t_f)$$

最优性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) - g^T(t_0)x(t_0) + \varphi(t_0)$$

其中, 函数  $\varphi(t_0)$  满足下列微分方程及边界条件:

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{1}{2}z^T(t)Q(t)z(t)\varphi(t) - g(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t)$$

其边界条件是

$$\varphi(t_f) = z^T(t_f)Fz(t_f)$$

最优轨线  $x^*(t)$  满足如下微分方程

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]x(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t), x(t_0) = x_0$$

## 习题解答

10.1 求性能指标  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)dt$  在边界条件  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ,

$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  下的极值曲线。

解

本题目为两端固定的无约束泛函极值问题, 可由欧拉方程及端点条件求解。

令  $x = [x_1 \ x_2]^T$ , 则被积函数可写为

$$L = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2 = \dot{\mathbf{x}}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} - 2 \ddot{\mathbf{x}} = 0$$

可得分量形式方程

$$x_2 - \ddot{x}_1 = 0, x_1 - \ddot{x}_2 = 0$$

其解为

$$x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \sin t + c_4 \cos t$$

$$x_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \sin t - c_4 \cos t$$

代入已知的两点边界值, 求出  $c_1 = \frac{1}{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}} = \frac{1}{2\text{sh}(\pi/2)}$ ,  $c_2 = -\frac{1}{\text{sh}(\pi/2)}$ ,  $c_3 = c_4 = 0$ 。

故所求的极值曲线为

$$x_1^*(t) = x_2^*(t) = \frac{\text{sh}t}{\text{sh}(\pi/2)}$$

**10.2** 求性能指标  $J = \int_0^R \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt$  在约束条件  $t^2 + x_1^2 = R^2$  和边界条件  $x_1(0) = -R, x_2(0) = 0; x_1(R) = 0, x_2(R) = \pi$  下的极值。

解

本题目为两端固定的有约束泛函极值问题, 可由欧拉方程及端点条件求解。

由约束条件和边界条件可直接求出

$$x_1(t) = -\sqrt{R^2 - t^2}, \dot{x}_1(t) = \frac{t}{\sqrt{R^2 - t^2}}$$

$$L = \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - t^2} + \dot{x}_2^2}$$

欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - t^2} + \dot{x}_2^2}} \right]$$

得

$$\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - t^2} + \dot{x}_2^2}} = c_1$$

整理得

$$\dot{x}_2^2(t) = \frac{c_1^2}{1 + c_1^2} \frac{R^2}{R^2 - t^2} - \frac{c_2^2}{\sqrt{R^2 - t^2}}$$

$$x_2(t) = \int \dot{x}_2(t) dt = \int \frac{c_2}{\sqrt{R^2 - t^2}} dt = c_2 \arcsin \frac{t}{R} + c_3$$

代入已知的两点边界值,故所求的极值曲线为

$$x_2^*(t) = 2 \arcsin \frac{t}{R}$$

$$J^* = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{t^2}{R^2 - t^2} + \frac{2^2}{R^2 - t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \sqrt{R^2 + 4}$$

10.3 已知系统的状态方程为  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$ , 其边界条件为

$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 试用向量形式求下列性能指标的极值:

$$J = \int_0^2 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

解

本题目为控制无约束、 $t_f$  给定、终端固定的最优化问题,可用变分法求解。构造

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda^T \left[ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \right]$$

由最优解的必要条件,有

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + (0 \quad 1) \lambda = 0$$

由协态方程和控制方程得

$$\lambda(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} t} \lambda(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix} \lambda(0)$$

$$u(t) = -(0 \quad 1) \lambda(t) = (t \quad -1) \lambda(0)$$

由状态方程的解

$$x(t) = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t} x(0) + \int_0^t e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (t-\tau)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{6} t^3 & -\frac{1}{2} t^2 \\ \frac{1}{2} t^2 & -t \end{bmatrix} \lambda(0)$$

代入  $x(2)=0$ , 求得  $\lambda(0) = (3 \quad 3.5)^T$ 。于是

$$u^*(t) = 3t - 3.5$$

$$J^* = \int_0^2 (3t - 3.5)^2 dt = 3.25$$

10.4 设控制对象的方程为

$$\dot{x}(t) = u(t), x(0) = x_0$$

终端时刻  $t_f$  自由,终端约束  $x(t_f) = c_0$  (常数)。求  $x^*(t)$  和  $u^*(t)$ , 使下列泛函极小:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^2 + \dot{x}^2) dt$$

解

本题目为始端固定、终端约束的可动边界问题。

$$L = x^2 + \dot{x}^2, \frac{\partial L}{\partial x} = 2x, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$$

由欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2(x - \ddot{x}) = 0$$

可得

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$$\dot{x}(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

由横截条件  $\left[ L + (\dot{c} - \dot{x}) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]_{t_f} = 0$  及初始条件  $x(0) = x_0$ , 解出待定常数  $c_1 = x_0$ ,  $c_2 = 0$  或  $c_1 = 0, c_2 = x_0$ 。于是

最优轨线和最优控制为

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^t & x_0 < c_0 \\ x_0 e^{-t} & x_0 > c_0 \end{cases}$$
$$u^*(t) = \begin{cases} x_0 e^t & x_0 < c_0 \\ -x_0 e^{-t} & x_0 > c_0 \end{cases}$$

10.5 已知系统状态方程为  $\dot{x}(t) = u(t), x(0) = 1$ , 试确定最优控制  $u^*(t)$ , 使性能指标  $J = \int_0^1 e^{2t} (x^2 + u^2) dt = \min$ 。

解

本题目为控制无不等式约束、 $t_f$  给定、终端自由的最优解问题。

构造哈密顿函数:

$$H = e^{2t} (x^2 + u^2) + \lambda u$$

则状态方程为

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u$$

协态方程为

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2xe^{2t}$$

极值条件为

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda + 2ue^{2t} = 0$$

因此

$$\lambda = -2ue^{2t}, \dot{\lambda} = -2(2u + \dot{x})e^{2t}$$

因而得

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - x = 0$$

解得

$$x(t) = c_1 e^{-(1+\sqrt{2})t} + c_2 e^{-(1-\sqrt{2})t}$$

$$u(t) = -(1+\sqrt{2})c_1 e^{-(1+\sqrt{2})t} - (1-\sqrt{2})c_2 e^{-(1-\sqrt{2})t}$$

由横截条件  $x(0) = 1$  和  $\lambda(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(1)} = 0$ , 求出

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}$$

$$c_2 = \frac{(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}}$$

得最优控制

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \frac{-1}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)e^{-2\sqrt{2}}} [e^{-(1+\sqrt{2})t} - e^{2\sqrt{2}} e^{-(1-\sqrt{2})t}] \\ &= -1.7957(e^{-2.4142t} - 0.0591e^{0.4142t}) \end{aligned}$$

10.6 设系统状态方程为

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \quad x(0) = 10$$

性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2)$$

对下列两种情况求最优控制  $u^*(t)$ , 使  $J = \min$ 。

(1)  $u(t)$  无约束;

(2)  $u(t)$  有约束,  $|u(t)| \leq 0.3$ 。

解

本题目为  $t_f$  给定、积分型性能指标、终端自由的最优解问题。

令哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(-x + u)$$

(1)  $u(t)$  无约束

由极值条件  $\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0$ ,  $u^*(t) = -\lambda(t)$  和协态方程  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x + \lambda$ , 得

$$\dot{x} = -x + u = -x - \lambda, \quad \ddot{x} = -\dot{x} - \dot{\lambda} = 2x$$

因此

$$\ddot{x} - 2x = 0, x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\lambda(t) = -(\dot{x} + x) = -(\sqrt{2}+1)c_1 e^{\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}-1)c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

代入边界条件  $x(0) = 10, \lambda(1) = 0$ , 得  $c_1 = 0.1, c_2 = 9.9$ , 故有

$$x^*(t) = 0.1e^{\sqrt{2}t} + 9.9e^{-\sqrt{2}t}$$

$$u^*(t) = \dot{x}^*(t) + x^*(t) = 0.24e^{\sqrt{2}t} - 4.1e^{-\sqrt{2}t}$$

(2)  $u(t)$  有约束

$$u^*(t) = -0.3 \operatorname{sgn} \{\lambda_1(t)\} = \begin{cases} -0.3 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

得

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t) = \begin{cases} -x(t) - 0.3 & 0 \leq t < 1 \\ -x(t) & t = 1 \end{cases}$$

得

$$x(t) = \begin{cases} A_1 e^{-t} - 0.3 & 0 \leq t < 1 \\ A_2 e^{-t} & t = 1 \end{cases}$$

由初始条件  $x(0) = 10$ , 得  $A_1 = 10.3, A_2 = 9.5$ 。于是

$$x(t) = \begin{cases} 10.3e^{-t} - 0.3 & 0 \leq t < 1 \\ 9.5e^{-t} & t = 1 \end{cases}$$

10.7 给定二阶系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t) & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

其中标量控制  $u(t)$  的约束条件为  $\|u(t)\| \leq 1$ 。若系统的终端状态  $x(t_f)$  是自由的, 试确定最优控制  $u^*(t)$ , 使性能指标  $J = x_2(1) = \min$ 。

解

本题目为控制受约束、 $t_f$  给定、末值型性能指标、终端自由的最优解问题。

构造哈密顿函数

$$H = \lambda_1(-x_1 + u) + \lambda_2 x_1, \varphi = x_2(1)$$

由协态方程

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \end{aligned}$$

因此

$$\lambda_1 = c_1 e^t + c_2, \lambda_2 = c_2$$

由横截条件  $\lambda_1(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1(1)} = 0, \lambda_2(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2(1)} = 1$  解得  $c_1 = -e^{-1}, c_2 = 1$ , 故有

$$\lambda_1(t) = 1 - e^{t-1}$$

由极小值条件  $H^* = \min_{u \in \Omega} H$  得

$$u^*(t) = -\operatorname{sgn} \{\lambda_1(t)\}$$

不难发现

$\lambda_1(0) = 1 - e^{-1} > 0, \lambda_1(1) = 0$ , 即  $\lambda_1(t) = 1 - e^{t-1} > 0, \forall t \in [0, 1)$ , 故所求得最优控制为  $u^*(t) = -1, \forall t \in [0, 1)$ 。

10.8 设系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t) & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

性能指标

$$J = \frac{1}{2} [x_1(2) - 5]^2 + \frac{1}{2} [x_2(2) - 2]^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt$$

终端约束条件

$$x_1(2) + 5x_2(2) = 15$$

求使的  $J = \min$  的最优控制  $u^*(t)$ 。

解

本题目为  $t_f$  给定、复合型性能指标、终端受约束的最优解问题。

$$\text{令 } H = \frac{1}{2}u^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)x_2 + \lambda_2 u, \varphi = \frac{1}{2}[x_1(2) - 5]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2$$

$$\psi = x_1(2) + 5x_2(2) - 15 = 0$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_2 + u$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dot{\lambda}_1 = 0, \lambda_1(t) = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \dot{\lambda}_2 = \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_2(t) = c_2 e^t + c_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0, u(t) = -\lambda_2(t) = -c_2 e^t - c_1$$

以及

$$x_2(t) = c_3 e^{-t} - \frac{1}{2}c_2 e^t - c_1$$

$$x_1(t) = -c_3 e^{-t} - \frac{1}{2}c_2 e^t - c_1 t + c_4$$

因此,由初始条件  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  得

$$-0.5c_2 - c_3 + c_4 = 0$$

$$-c_1 - 0.5c_2 + c_3 = 0$$

因为

$$x_1(2) = -e^{-2}c_3 - \frac{1}{2}e^2c_2 - 2c_1 + c_4$$

$$x_2(2) = e^{-2}c_3 - \frac{1}{2}e^2c_2 - c_1$$

所以终端约束方程可写成

$$x_1(2) + 5x_2(2) = -7c_1 - 3e^2c_2 + 4e^{-2}c_3 + c_4 = 15$$

由横截条件

$$\lambda_1(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1(t_f)} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1(t_f)} \nu(t_f), \lambda_1(2) = x_1(2) - 5 + \nu = c_1$$

$$\lambda_2(t_f) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2(t_f)} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2(t_f)} \nu(t_f), \lambda_2(2) = x_2(2) - 5 + 5\nu = c_1 + e^2c_2$$

代入  $x_1(2)$  和  $x_2(2)$  表达式,得

$$-3c_1 - \frac{1}{2}e^2c_2 - e^{-2}c_3 + c_4 + \nu = 5$$

$$-2c_1 - 1.5e^2c_2 + e^{-2}c_3 + 5\nu = 2$$

利用格莱姆法则求解下列代数方程组:

$$\begin{cases} -0.5c_1 - c_3 + c_4 = 0 \\ -c_1 - 0.5c_2 + c_3 = 0 \\ -7c_1 - 3e^2c_2 + 4e^{-2}c_3 + c_4 = 15 \\ -3c_1 - 0.5e^2c_2 - e^{-2}c_3 + c_4 + \nu = 5 \\ -2c_1 - 1.5e^2c_2 + e^{-2}c_3 + 5\nu = 2 \end{cases}$$

求得  $c_1 = -0.73, c_2 = -0.13$ 。因此,求得最佳控制为

$$u^*(t) = 0.73 + 0.13e^t$$

**10.9** 已知一阶系统为

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = 3$$

(1) 确定最优控制  $u^*(t)$ , 使得系统在  $t_f = 2$  时转移到  $x(2) = 0$ , 并使得性能泛函

$$J = \int_0^2 (1 + u^2) dt = \min$$

(2) 如果使得系统转移到  $x(t_f) = 0$  的终端时间  $t_f$  自由, 问  $u^*(t)$  如何确定?

解

(1) 由题意知

$$\varphi[x(t_f)] = 0, \psi[x(t_f)] = x(2), L[x, \dot{x}, t] = 1 + u^2$$

构造哈密顿函数

$$H = 1 + u^2 + \lambda(-x + u)$$

由协态方程

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \lambda$$

则

$$\lambda(t) = c_1 e^t$$

由极值条件  $\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda = 0$ , 则  $u(t) = -\frac{1}{2}c_1 e^t$ 。

根据状态方程, 解得  $x = c_2 e^{-t} - \frac{1}{4}c_1 e^t$ 。把  $x(0) = 3, x(2) = 0$  代入, 得  $c_1 = \frac{12}{e^4 - 1}$ ,

$c_2 = \frac{3e^4}{e^4 - 1}$ , 故有

$$u^*(t) = -\frac{6e^t}{e^4 - 1}$$

(2) 终端时间自由, 则

$$\lambda(t) = c_1 e^t, u(t) = -\frac{1}{2}c_1 e^t, x = c_2 e^{-t} - \frac{1}{4}c_1 e^t$$

把  $x(0) = 3, x(t_f) = 0$  和  $H(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} = 0$  代入, 得

$$\begin{aligned} 1 + u^2(t_f) + \lambda(t_f)(-x(t_f) + u(t_f)) &= 0 \\ \left(\frac{1}{2}c_1 e^{t_f}\right)^2 + 1 + c_1 e^{t_f} \left[-\frac{1}{2}c_1 e^{t_f} - c_2 e^{-t_f} + \frac{1}{4}c_1 e^{t_f}\right] &= 0 \end{aligned}$$

解得  $c_1 = \sqrt{40} - 6, t_f = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{12}{c_1} + 1 \right) = 1.818$ , 故有

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}c_1 e^t = -0.1623e^t$$

**10.10** 设一阶系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), x(t_0) = x_0$$

性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (2x^2 + u^2) dt$$

试确定最优控制  $u^*(t)$ 。

解

本题为控制无约束、有限时间状态调节器问题。

因  $A=B=1, R=2, Q=4, P=0$ , 得黎卡提方程组

$$-\dot{\bar{P}} = -\frac{1}{2}\bar{P}^2 + 2\bar{P} + 4, \bar{P}(t_f) = 0$$

$$\frac{d\bar{P}}{0.5\bar{P}^2 - 2\bar{P} - 4} = dt$$

因此,求得最佳控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}x(t)$$

10.11 设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

试确定最优控制  $u^*(t)$ , 使下列性能指标极小

$$J = \frac{1}{2}[x_1^2(3) + x_2^2(3)] + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2 +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^3 [2x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)] dt$$

解

本题目为控制无约束、有限时间状态调节器问题。由题意知

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, R = \frac{1}{2}$$

令

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

代入

$$-\dot{\bar{P}}(t) = \bar{P}(t)A(t) + A^T(t)\bar{P}(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\bar{P}(t) + Q(t)\bar{P}(t_f) = P$$

得到如下的黎卡提微分方程组

$$\dot{p}_{11} = 2p_{12}^2 - 2 \quad p_{11}(3) = 1$$

$$\dot{p}_{12} = -p_{11} + 2p_{12}p_{22} - 1 \quad p_{12}(3) = 0$$

$$\dot{p}_{22} = -2p_{12} + 2p_{22}^2 - 4 \quad p_{22}(3) = 2$$

因此,求得最佳控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}x(t) = -2(p_{12}x_1 + p_{22}x_2)$$

其中,  $p_{12}$  和  $p_{22}$  满足上述黎卡提微分方程组。

10.12 设系统的状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$

性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_2^2 + 0.1u^2) dt$$

试确定最优控制  $u^*(t)$  及最优性能指标  $J^*$ , 并要求对  $J^*$  加以验证。

解

本题目为无限时间定常状态调节器问题。

由题意知

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 0.1, D^T = [0 \quad 1]$$

检验可控性和可观性

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D^T \\ D^T A \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

所以系统存在最优解, 且闭环系统可渐近稳定。

解黎卡提方程, 令

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

由  $\bar{P}A + A^T\bar{P} - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} + Q = 0$ , 解出

$$\bar{P} \approx \begin{bmatrix} 0.17 & 0.32 \\ 0.32 & 0.86 \end{bmatrix}$$

因此, 求得最佳控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}x(t) = -1.7x_1(t) - 3.2x_2(t)$$

检验闭环系统稳定性

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T\bar{P})x(t) = \begin{bmatrix} -2.7 & -3.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

闭环系统的特征值为

$$\lambda_1 = -1.35 + 1.73j, \lambda_2 = -1.35 - 1.73j$$

故闭环系统渐近稳定。

$$J^* = x^T(0)\bar{P}x(0) = 0.86$$

10.13 设线性定常系统动态方程为

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 0)x(t)$$

试确定最优控制  $u^*(t)$ , 使下列性能指标极小:

$$J = \int_0^{\infty} [y^2(t) + 4u^2(t)] dt$$

解

本题目为无限时间定常输出调节器问题。

由题意知

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = (1 \ 0), Q = 2$$

$$DD^T = C^T Q C, D^T = (\sqrt{2} \ 0), R = 8$$

检验系统的可观性和可观测性

$$\text{rank}[B \ AB] = 2$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D^T \\ D^T A \end{bmatrix} = 2$$

所以系统存在最优解,且闭环系统可渐近稳定。

由  $\bar{P}A + A^T \bar{P} - \bar{P}B R^{-1} B^T \bar{P} + C^T Q C = 0$ , 解得

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

因此,求得最佳控制为

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1} B^T \bar{P} x(t) = -\frac{1}{8} (0 \ 1) \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} x(t) \\ &= -\frac{1}{2} x_1(t) - x_2(t) = -\frac{1}{2} y(t) - \dot{y}(t) \end{aligned}$$

检验闭环系统稳定性:

$$\dot{x}(t) = (A - B R^{-1} B^T \bar{P}) x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

闭环系统的特征值为

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j$$

故闭环系统渐近稳定。

$$J^* = \frac{1}{2} x^T(0) \bar{P} x(0) = \frac{1}{2} (0 \ 1) \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$$

10.14 设离散系统状态差分方程为

$$x(k+1) = x(k) + u(k), x(0) = x_0$$

性能指标

$$J = \sum_{k=0}^2 [x^2(k) + u^2(k)]$$

试确定最优控制序列  $u^*(k)$ , 最优轨线  $x^*(k)$  和最优性能指标  $J^*$ 。

解

本题目为离散状态调节器问题。由题意知  $a=1, b=1, q=r=1, p=0, N=3$ 。由式知

$$k(k) = q + a^T [k^{-1}(k+1) + br^{-1}b^T]^{-1}a = 1 + \frac{k(k+1)}{1+k(k+1)}$$

用迭代法求解,可得

$$k(3) = p(3) = 0$$

$$k(2) = 1 + \frac{k(3)}{1+k(3)} = 1$$

$$k(1) = 1 + \frac{k(2)}{1+k(2)} = \frac{3}{2}$$

$$k(0) = 1 + \frac{k(1)}{1+k(1)} = \frac{8}{5}$$

最优控制序列为

$$u^*(k) = -r^{-1}b^T a^{-T} [k(k) - q]x(k) = -[k(k) - 1]x(k)$$

故

$$u^*(0) = -[k(0) - 1]x_0 = -\frac{3}{5}x_0$$

$$u^*(1) = -[k(1) - 1]x(1) = -\frac{1}{2}x(1)$$

$$u^*(2) = -[k(2) - 1]x(1) = 0$$

根据状态方程,最优轨线为

$$x^*(1) = x_0 + u^*(0) = \frac{2}{5}x_0$$

$$x^*(2) = x^*(1) + u^*(1) = \frac{1}{5}x_0$$

$$x^*(3) = x^*(2) + u^*(2) = \frac{1}{5}x_0$$

因此,最优控制

$$u^*(k) = \left\{ -\frac{3}{5}x_0 \quad -\frac{1}{5}x_0 \quad 0 \right\}$$

最优轨线

$$x^*(k) = \left\{ x_0, \frac{2}{5}x_0, \frac{1}{5}x_0, \frac{1}{5}x_0 \right\}$$

最优性能指标

$$J^* = k(0)x_0^2 = 1.6x_0^2$$

## 参考文献

- [1] 孔慧芳主编. 研究生入学考试要点、真题解析与模拟试卷(自动控制原理). 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [2] 史忠科. 自动控制原理常见题型解析及模拟题. 西安: 西北工业大学出版社, 2001.
- [3] 刘明俊等. 自动控制原理典型题解析与实战模拟. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002.
- [4] 张正方, 李玉清, 康远林. 新编自动控制原理题解. 武汉: 华中科技大学出版社, 2003.
- [5] 孟浩, 王芳. 自动控制原理(第四版)全程辅导. 大连: 辽宁师范大学出版社, 2004.
- [6] 胡寿松. 自动控制原理习题集(第二版). 北京: 科学出版社, 2003.
- [7] 刘慧英. 自动控制原理导教、导学、导考(第四版). 西安: 西北工业大学出版社, 2003.
- [8] 李友善, 梅晓榕, 王彤. 自动控制原理 360 题. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2002.
- [9] 刘坤. MATLAB 自动控制原理习题精解. 北京: 国防工业出版社, 2004.
- [10] 王敏. 自动控制原理试题精选题解. 武汉: 华中科技大学出版社, 2004.