2016年考研数学（三）真题

一、填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上）

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$______，$b=$______.

(2) 设函数 $f(u,v)$由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$确定，其中函数 $g(y)$可微，且 $g(y)\neq 0$，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$____ .

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2} \\ -1, & x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)dx=$____ .

(4) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩为____.

(5) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$______.

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$，总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\_\_\_\_\_\_.$$

二、选择题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1,0)$.　　(B) $(0,1)$.　　(C) $(1,2)$.　　(D) $(2,3)$.　　[　　]

(8) 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，　$g(x)=\begin{cases} f(\dfrac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$，则

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点.　　(B) $x=0$ 必是 $g(x)$的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$的连续点.

(D) $g(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.　　[　　]

(9) 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点.　　[　　]

(10) 设有下列命题:

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$收敛.

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

(4) 若$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛.

则以上命题中正确的是

(A) (1) (2). (B) (2) (3). (C) (3) (4). (D) (1) (4). [ ]

(11) 设$f'(x)$在[a , b]上连续，且$f'(a)>0, f'(b)<0$，则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)=0$. [D]

(12) 设n阶矩阵A与B等价, 则必有

(A) 当$|A|=a(a\neq 0)$时, $|B|=a$. (B) 当$|A|=a(a\neq 0)$时, $|B|=-a$.

(C) 当$|A|\neq 0$时, $|B|=0$. (D) 当$|A|=0$时, $|B|=0$. [ ]

(13) 设n阶矩阵A的伴随矩阵$A^*\neq 0$, 若ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4是非齐次线性方程组 $Ax=b$的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量. [ ]

(14) 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$, 对给定的$\alpha\in(0,1)$, 数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,

若$P\{|X|<x\}=\alpha$, 则x等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$. [ ]

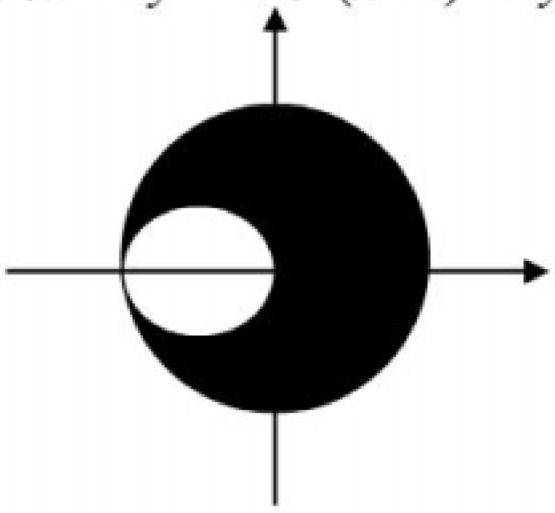
三、解答题(本题共**9**小题，满分**94**分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 8 分)

求$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2})$.

(16) (本题满分 8 分)

求$\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$，其中$D$是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域(如图).



(17) (本题满分 8 分)

设$f(x)$, $g(x)$在$[a , b]$上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)dt \ge \int_a^x g(t)dt\text{，}x\in[a , b)\text{，}\int_a^b f(t)dt=\int_a^b g(t)dt.$$

证明：$\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$.

(18) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 Q = 100 – 5P，其中价格 P ∈ (0 , 20)，Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性E_d ($E_d>0$)；

(II) 推导$\frac{dR}{dP}=Q(1-E_d)$(其中R为收益)，并用弹性E_d说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

(19) (本题满分 9 分)

设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

的和函数为$S(x)$. 求：

(I) $S(x)$所满足的一阶微分方程；

(II) $S(x)$的表达式.

(20)(本题满分 13 分)

设$\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,\alpha+2,-3\alpha)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,\alpha+2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$，

试讨论当a,b为何值时,

(Ⅰ) β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示;

(Ⅱ) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地线性表示, 并求出表示式;

(Ⅲ) β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式.

(21) (本题满分 13 分)

设n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 A 的特征值和特征向量;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22) (本题满分 13 分)

设 A，B 为两个随机事件,且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求

(Ⅰ) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

(23) (本题满分 13 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha,\end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

(Ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时, 求未知参数 β 的矩估计量;

(Ⅱ) 当 $\alpha=1$ 时, 求未知参数 β 的最大似然估计量;

(Ⅲ) 当 $\beta=2$ 时, 求未知参数 α 的最大似然估计量.

2016年考研数学（三）真题解析

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ <u>1</u>，$b=$ <u>-4</u>.

【分析】本题属于已知极限求参数的反问题.

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$，得 $a=1$. 极限化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b=5，得 b=-4.$$

因此，$a=1$，$b=-4$.

【评注】一般地，已知 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，

(1) 若 $g(x)\to 0$，则 $f(x)\to 0$；

(2) 若 $f(x)\to 0$，且 $A\neq 0$，则 $g(x)\to 0$.

(2) 设函数 $f(u,v)$由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$确定，其中函数 $g(y)$可微，且 $g(y)\neq 0$，

则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$ <u>$-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$</u>.

【分析】令 $u=xg(y)$，$v=y$，可得到 $f(u,v)$的表达式，再求偏导数即可.

【详解】令 $u=xg(y)$，$v=y$，则 $f(u,v)=\dfrac{u}{g(v)}+g(v)$，

所以，$\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{g(v)}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2} \\ -1, & x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=$ <u>$-\dfrac{1}{2}$</u>.

【分析】本题属于求分段函数的定积分，先换元：$x-1=t$，再利用对称区间上奇偶函数的积分性质即可.

【详解】令 $x-1=t$，$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}f(t)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}f(x)dt$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}xe^{x^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)dx=0+(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}.$$

【评注】一般地，对于分段函数的定积分，按分界点划分积分区间进行求解.

(4) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为 $\underline{\ 2\ }$.

【分析】二次型的秩即对应的矩阵的秩, 亦即标准型中平方项的项数, 于是利用初等变换或配方法均可得到答案.

【详解一】因为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

$$=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

于是二次型的矩阵为 $$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix},$$

由初等变换得 $$A\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

从而 $r(A)=2$, 即二次型的秩为 2.

【详解二】因为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

$$=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$
$$=2(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2$$
$$=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2,$$

其中 $y_1=x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3,\qquad y_2=x_2-x_3.$

所以二次型的秩为 2.

(5) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=\underline{\frac{1}{e}}$.

【分析】 根据指数分布的分布函数和方差立即得正确答案.

【详解】 由于 $DX=\frac{1}{\lambda^2}$, X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

故

$$P\{X>\sqrt{DX}\}=1-P\{X\le\sqrt{DX}\}=1-P\{X\le\frac{1}{\lambda}\}=1-F(\frac{1}{\lambda})=\frac{1}{e}.$$

【评注】本题是对重要分布, 即指数分布的考查, 属基本题型.

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$,

$X_1, X_2, \cdots X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\right] = \underline{\quad \sigma^2 \quad}.$$

【分析】利用正态总体下常用统计量的数字特征即可得答案.

【详解】因为 $E[\frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2] = \sigma^2$， $E[\frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \overline{Y})^2] = \sigma^2$，

故应填 σ^2.

【评注】本题是对常用统计量的数字特征的考查.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 函数 $f(x) = \frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1, 0)$.　　(B) $(0, 1)$.　　(C) $(1, 2)$.　　(D) $(2, 3)$.　　[A]

【分析】如 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

【详解】当 $x \neq 0, 1, 2$ 时，$f(x)$ 连续，而 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}$， $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4}$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}$， $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$， $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$，

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界，故选(A).

【评注】一般地，如函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界；如函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有界.

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$，

$$g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$，则

(A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.　　(B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关.　　[D]

【分析】考查极限 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 是否存在，如存在，是否等于 $g(0)$ 即可，通过换元 $u = \frac{1}{x}$，

可将极限 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 转化为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

【详解】因为 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{u\to\infty} f(u) = a$(令 $u = \frac{1}{x}$)，又 $g(0) = 0$，所以，

当 $a = 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$，即 $g(x)$在点 $x = 0$ 处连续，当 $a \neq 0$ 时，

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq g(0)$，即 $x = 0$ 是 $g(x)$的第一类间断点，因此，$g(x)$在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关，故选(D).

【评注】本题属于基本题型，主要考查分段函数在分界点处的连续性.

(9) 设 $f(x) = |x(1-x)|$，则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$的极值点，但$(0, 0)$不是曲线 $y = f(x)$的拐点.

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$的极值点，但$(0, 0)$是曲线 $y = f(x)$的拐点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$的极值点，且$(0, 0)$是曲线 $y = f(x)$的拐点.

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$的极值点，$(0, 0)$也不是曲线 $y = f(x)$的拐点. [C]

【分析】由于 $f(x)$在 $x = 0$ 处的一、二阶导数不存在，可利用定义判断极值情况，考查 $f(x)$在 $x = 0$ 的左、右两侧的二阶导数的符号，判断拐点情况.

【详解】设 $0 < \delta < 1$，当 $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$时，$f(x) > 0$，而 $f(0) = 0$，所以 $x = 0$ 是 $f(x)$的极小值点.

显然，$x = 0$ 是 $f(x)$的不可导点. 当 $x \in (-\delta, 0)$时，$f(x) = -x(1-x)$，$f''(x) = 2 > 0$，

当 $x \in (0, \delta)$时，$f(x) = x(1-x)$，$f''(x) = -2 < 0$，所以$(0, 0)$是曲线 $y = f(x)$的拐点.

故选(C).

【评注】对于极值情况，也可考查 $f(x)$在 $x = 0$ 的某空心邻域内的一阶导数的符号来判断.

(10) 设有下列命题：

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是

(A) (1) (2). (B) (2) (3). (C) (3) (4). (D) (1) (4). [B]

【分析】可以通过举反例及级数的性质来说明 4 个命题的正确性.

【详解】(1)是错误的，如令 $u_n = (-1)^n$，显然，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 分散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.

(2)是正确的，因为改变、增加或减少级数的有限项，不改变级数的收敛性.

(3)是正确的，因为由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ 可得到 u_n 不趋向于零($n\to\infty$)，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(4)是错误的，如令 $u_n=\dfrac{1}{n}, v_n=-\dfrac{1}{n}$，显然，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，而

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛. 故选(B).

【评注】本题主要考查级数的性质与收敛性的判别法，属于基本题型.

(11) 设 $f'(x)$ 在[a , b]上连续，且 $f'(a)>0, f'(b)<0$，则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$. [D]

【分析】利用介值定理与极限的保号性可得到三个正确的选项，由排除法可选出错误选项.

【详解】首先，由已知 $f'(x)$ 在[a , b]上连续，且 $f'(a)>0, f'(b)<0$，则由介值定理，

至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$；

另外，$f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，由极限的保号性，至少存在一点 $x_0\in(a,b)$

使得 $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$，即 $f(x_0)>f(a)$. 同理，至少存在一点 $x_0\in(a,b)$

使得 $f(x_0)>f(b)$. 所以，(A) (B) (C)都正确，故选(D).

【评注】 本题综合考查了介值定理与极限的保号性，有一定的难度.

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有

(A) 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时, $|B|=a$. (B) 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时, $|B|=-a$.

(C) 当 $|A|\neq 0$ 时, $|B|=0$. (D) 当 $|A|=0$ 时, $|B|=0$. [D]

【分析】 利用矩阵 A 与 B 等价的充要条件: $r(A)=r(B)$ 立即可得.

【详解】因为当 $|A|=0$ 时, $r(A)<n$, 又 A 与 B 等价, 故 $r(B)<n$, 即 $|B|=0$, 故选(D).

【评注】本题是对矩阵等价、行列式的考查, 属基本题型.

(13) 设n阶矩阵A的伴随矩阵$A^* \neq 0$, 若$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$是非齐次线性方程组 $Ax = b$的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组$Ax = 0$的基础解系

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量. [B]

【分析】 要确定基础解系含向量的个数, 实际上只要确定未知数的个数和系数矩阵的秩.

【详解】 因为基础解系含向量的个数$=n - r(A)$，而且

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

根据已知条件$A^* \neq 0$, 于是$r(A)$等于n或$n-1$. 又$Ax = b$有互不相等的解,

即解不惟一, 故$r(A) = n-1$. 从而基础解系仅含一个解向量, 即选(B).

【评注】本题是对矩阵A与其伴随矩阵A^*的秩之间的关系、线性方程组解的结构等多个知识点的综合考查.

(14) 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$，对给定的$\alpha \in (0,1)$，数u_α满足$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$，

若$P\{|X| < x\} = \alpha$，则x等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$. [C]

【分析】 利用标准正态分布密度曲线的对称性和几何意义即得.

【详解】 由$P\{|X| < x\} = \alpha$，以及标准正态分布密度曲线的对称性可得

$P\{X > x\} = \dfrac{1-\alpha}{2}$. 故正确答案为(C).

【评注】本题是对标准正态分布的性质, 严格地说它的上分位数概念的考查.

三、解答题(本题共 **9** 小题，满分 **94** 分**.** 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤**.)**

(15) (本题满分 8 分)

求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

【分析】先通分化为“$\dfrac{0}{0}$”型极限，再利用等价无穷小与罗必达法则求解即可.

【详解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 - \sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2x - \frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{6x^2} = \frac{4}{3}.$$

【评注】本题属于求未定式极限的基本题型，对于“$\dfrac{0}{0}$”型极限，应充分利用等价无穷小替换来简化计算.

(16) (本题满分 8 分)

求$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域(如图).

【分析】首先，将积分区域 D 分为大圆 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$ 减去小圆

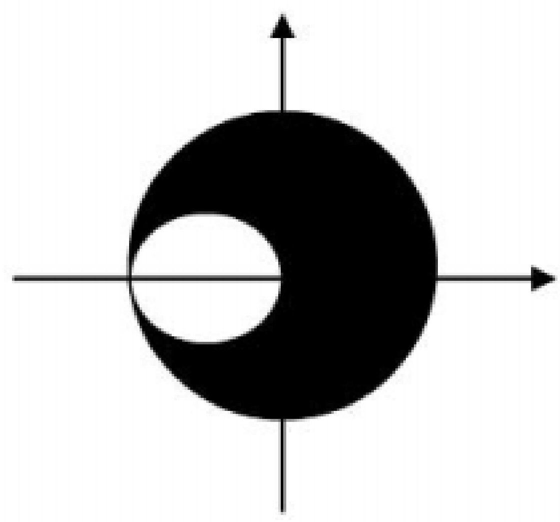
$D_2=\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\le 1\}$，再利用对称性与极坐标计算即可.

【详解】令 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}, D_2=\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\le 1\}$，

由对称性，$\iint\limits_D yd\sigma=0$.

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma-\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2dr.$$



$$=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}=\frac{16}{9}(3\pi-2)$$

所以，$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)d\sigma=\dfrac{16}{9}(3\pi-2)$.

【评注】本题属于在极坐标系下计算二重积分的基本题型，对于二重积分，经常利用对称性及将一个复杂区域划分为两个或三个简单区域来简化计算.

(17) (本题满分 8 分)

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)dt\ge\int_a^x g(t)dt,\ x\in[a,b),\ \int_a^b f(t)dt=\int_a^b g(t)dt.$$

证明：$\int_a^b xf(x)dx\le\int_a^b xg(x)dx$.

【分析】令 $F(x)=f(x)-g(x)$，$G(x)=\int_a^x F(t)dt$，将积分不等式转化为函数不等式即可.

【详解】令 $F(x)=f(x)-g(x)$，$G(x)=\int_a^x F(t)dt$，

由题设 $G(x)\ge 0$，$x\in[a,b]$，

$G(a)=G(b)=0$，$G'(x)=F(x)$.

从而 $\int_a^b xF(x)dx=\int_a^b xdG(x)=xG(x)\Big|_a^b-\int_a^b G(x)dx=-\int_a^b G(x)dx$，

由于 $G(x)\ge 0$，$x\in[a,b]$，故有

$$-\int_a^b G(x)dx \le 0,$$

即 $\int_a^b xF(x)dx \le 0$.

因此 $\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$.

【评注】引入变限积分转化为函数等式或不等式是证明积分等式或不等式的常用的方法.

(18) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 Q = 100 − 5P，其中价格 P ∈ (0 , 20)，Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d > 0$)；

(II) 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1-E_d)$ (其中 R 为收益)，并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

【分析】由于 $E_d > 0$，所以 $E_d = \left|\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}\right|$；由 Q = PQ 及 $E_d = \left|\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}\right|$ 可推导

$$\frac{dR}{dP} = Q(1-E_d).$$

【详解】(I) $E_d = \left|\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}\right| = \frac{P}{20-P}$.

(II) 由 R = PQ，得

$$\frac{dR}{dP} = Q + P\frac{dQ}{dP} = Q(1+\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}) = Q(1-E_d).$$

又由 $E_d = \frac{P}{20-P} = 1$，得 P = 10.

当 10 < P < 20 时，$E_d > 1$，于是 $\frac{dR}{dP} < 0$，

故当 10 < P < 20 时，降低价格反而使收益增加.

【评注】当 $E_d > 0$ 时，需求量对价格的弹性公式为 $E_d = \left|\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}\right| = -\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$.

利用需求弹性分析收益的变化情况有以下四个常用的公式：

$$dR = (1-E_d)Qdp, \quad \frac{dR}{dp} = (1-E_d)Q, \quad \frac{dR}{dQ} = (1-\frac{1}{E_d})p,$$

$$\frac{ER}{Ep} = 1 - E_d \text{ (收益对价格的弹性)}.$$

(19) (本题满分 9 分)

设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求：

(I) $S(x)$所满足的一阶微分方程；

(II) $S(x)$的表达式.

【分析】对 $S(x)$进行求导，可得到 $S(x)$所满足的一阶微分方程，解方程可得 $S(x)$的表达式.

【详解】(I) $S(x)=\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots,$

易见 $S(0)=0$，

$$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$$

$$=x(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots)$$

$$=x[\frac{x^2}{2}+S(x)].$$

因此 $S(x)$是初值问题

$$y'=xy+\frac{x^3}{2},\ y(0)=0 \text{ 的解.}$$

(II) 方程 $y'=xy+\frac{x^3}{2}$ 的通解为

$$y=e^{\int xdx}[\int\frac{x^3}{2}e^{-\int xdx}dx+C]$$

$$=-\frac{x^2}{2}-1+Ce^{\frac{x^2}{2}},$$

由初始条件 $y(0)=0$，得 $C=1$.

故 $y=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$，因此和函数 $S(x)=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$.

【评注】本题综合了级数求和问题与微分方程问题，2002 年考过类似的题.

(20)(本题满分 13 分)

设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,\alpha+2,-3\alpha)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,\alpha+2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$，

试讨论当 a,b 为何值时，

(Ⅰ) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示;

(Ⅱ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式;

(Ⅲ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式.

【分析】将 β 可否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示的问题转化为线性方程组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$ 是否有解的问题即易求解.

【详解】 设有数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta. \qquad (*)$$

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 对矩阵 (A,β) 施以初等行变换, 有

$$(A,\beta)=\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix}.$$

(Ⅰ) 当 $a=0$ 时, 有

$$(A,\beta)\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

可知 $r(A)\neq r(A,\beta)$. 故方程组(*)无解, β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(Ⅱ) 当 $a\neq 0$, 且 $a\neq b$ 时, 有

$$(A,\beta)\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&0&\frac{1}{a}\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$r(A)=r(A,\beta)=3$, 方程组(*)有唯一解:

$$k_1=1-\frac{1}{a},\quad k_2=\frac{1}{a},\quad k_3=0.$$

此时 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示, 其表示式为

$$\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2.$$

(Ⅲ) 当 $a=b\neq 0$ 时, 对矩阵 (A,β) 施以初等行变换, 有

$$(A,\beta)\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$r(A)=r(A,\beta)=2$， 方程组(*)有无穷多解， 其全部解为

$$k_1=1-\frac{1}{a},\quad k_2=\frac{1}{a}+c,\quad k_3=c,\quad \text{其中 } c \text{ 为任意常数}.$$

β 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 但表示式不唯一, 其表示式为

$$\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+(\frac{1}{a}+c)\alpha_2+c\alpha_3 .$$

【评注】本题属于常规题型, 曾考过两次(1991, 2000).

(21) (本题满分 13 分)

设n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 A 的特征值和特征向量;

(Ⅱ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【分析】这是具体矩阵的特征值和特征向量的计算问题, 通常可由求解特征方程

$|\lambda E-A|=0$和齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$来解决.

【详解】 (Ⅰ) 1° 当$b\neq 0$时,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-b&\cdots&-b\\-b&\lambda-1&\cdots&-b\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\-b&-b&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

对 $\lambda_1=1+(n-1)b$，

$$\lambda_1 E-A=\begin{pmatrix}(n-1)b & -b & \cdots & -b\\ -b & (n-1)b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & (n-1)b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}(n-1) & -1 & \cdots & -1\\ -1 & (n-1) & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & (n-1)\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ 0 & n & \cdots & 0 & -n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n & -n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

解得$\xi_1=(1,1,1,\cdots,1)^T$，所以A的属于λ_1的全部特征向量为

$$k\xi_1=k(1,1,1,\cdots,1)^T \qquad (k\text{ 为任意不为零的常数}).$$

对$\lambda_2=1-b$，

$$\lambda_2 E-A=\begin{pmatrix}-b & -b & \cdots & -b\\ -b & -b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & -b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

得基础解系为

$$\xi_2=(1,-1,0,\cdots,0)^T,\ \xi_3=(1,0,-1,\cdots,0)^T,\ \cdots,\xi_n=(1,0,0,\cdots,-1)^T.$$

故A的属于λ_2的全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n \qquad (k_2,k_3,\cdots,k_n\text{ 是不全为零的常数}).$$

2° 当$b=0$时，

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda-1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^n,$$

特征值为$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$，任意非零列向量均为特征向量.

(Ⅱ) 1° 当$b \neq 0$时，A 有 n 个线性无关的特征向量，令 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1+(n-1)b & & & \\ & 1-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-b \end{pmatrix}$$

2° 当$b=0$时，$A=E$，对任意可逆矩阵P，均有

$P^{-1}AP=E$.

【评注】本题通过考查矩阵的特征值和特征向量而间接考查了行列式的计算, 齐次线性方程组的求解和矩阵的对角化等问题, 属于有一点综合性的试题. 另外,本题的解题思路是容易的, 只要注意矩阵中含有一个未知参数, 从而一般要讨论其不同取值情况.

(22) (本题满分 13 分)

设A，B 为两个随机事件,且$P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求

(Ⅰ) 二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ) X 与Y 的相关系数 ρ_{XY};

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

【分析】本题的关键是求出(X,Y)的概率分布，于是只要将二维随机变量(X,Y)的各取值对转化为随机事件 A 和B 表示即可.

【详解】 (Ⅰ) 因为 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{1}{12}$， 于是 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\dfrac{1}{6}$，

则有 $P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\dfrac{1}{12}$，

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\dfrac{1}{6}$，

$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{12}$，

$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\dfrac{2}{3}$，

(或 $P\{X=0,Y=0\}=1-\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{2}{3}$),

即(X,Y)的概率分布为:

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(Ⅱ) 方法一：因为 $EX = P(A) = \frac{1}{4}$，$EY = P(B) = \frac{1}{6}$，$E(XY) = \frac{1}{12}$，

$$EX^2 = P(A) = \frac{1}{4}, \quad EY^2 = P(B) = \frac{1}{6},$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{16}, \quad DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{5}{16},$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - EXEY = \frac{1}{24},$$

所以 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

方法二： X, Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

则 $EX = \frac{1}{4}, EY = \frac{1}{6}$，$DX = \frac{3}{16}$，$DY = \frac{5}{36}$，$E(XY) = \frac{1}{12}$，

故 $Cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{1}{24}$，从而

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

(Ⅲ) Z 的可能取值为：0，1，2 .

$$P\{Z=0\} = P\{X=0, Y=0\} = \frac{2}{3},$$

$$P\{Z=1\} = P\{X=1, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{Z=2\} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{12},$$

即 Z 的概率分布为：

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

【评注】本题考查了二维离散随机变量联合概率分布，数字特征和二维离散随机变量函数的分布等计算问题，属于综合性题型

(23) (本题满分 13 分)

设随机变量X 的分布函数为

$$F(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha,\end{cases}$$

其中参数$\alpha>0,\beta>1$. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X 的简单随机样本,

(Ⅰ) 当$\alpha=1$时, 求未知参数β的矩估计量;

(Ⅱ) 当$\alpha=1$时, 求未知参数β的最大似然估计量;

(Ⅲ) 当$\beta=2$时, 求未知参数α的最大似然估计量.

【分析】本题是一个常规题型, 只要注意求连续型总体未知参数的矩估计和最大似然估计都须已知密度函数, 从而先由分布函数求导得密度函数.

【详解】 当$\alpha=1$时, X 的概率密度为

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

(Ⅰ) 由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1},$$

令 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$, 解得 $\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$,

所以, 参数β的矩估计量为 $\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(Ⅱ) 对于总体X 的样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i>1(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$时, $L(\beta)>0$, 取对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

对β求导数，得

$$\frac{d[\ln L(\beta)]}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\ ,$$

令 $\frac{d[\ln L(\beta)]}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$， 解得 $\beta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

于是 β 的最大似然估计量为

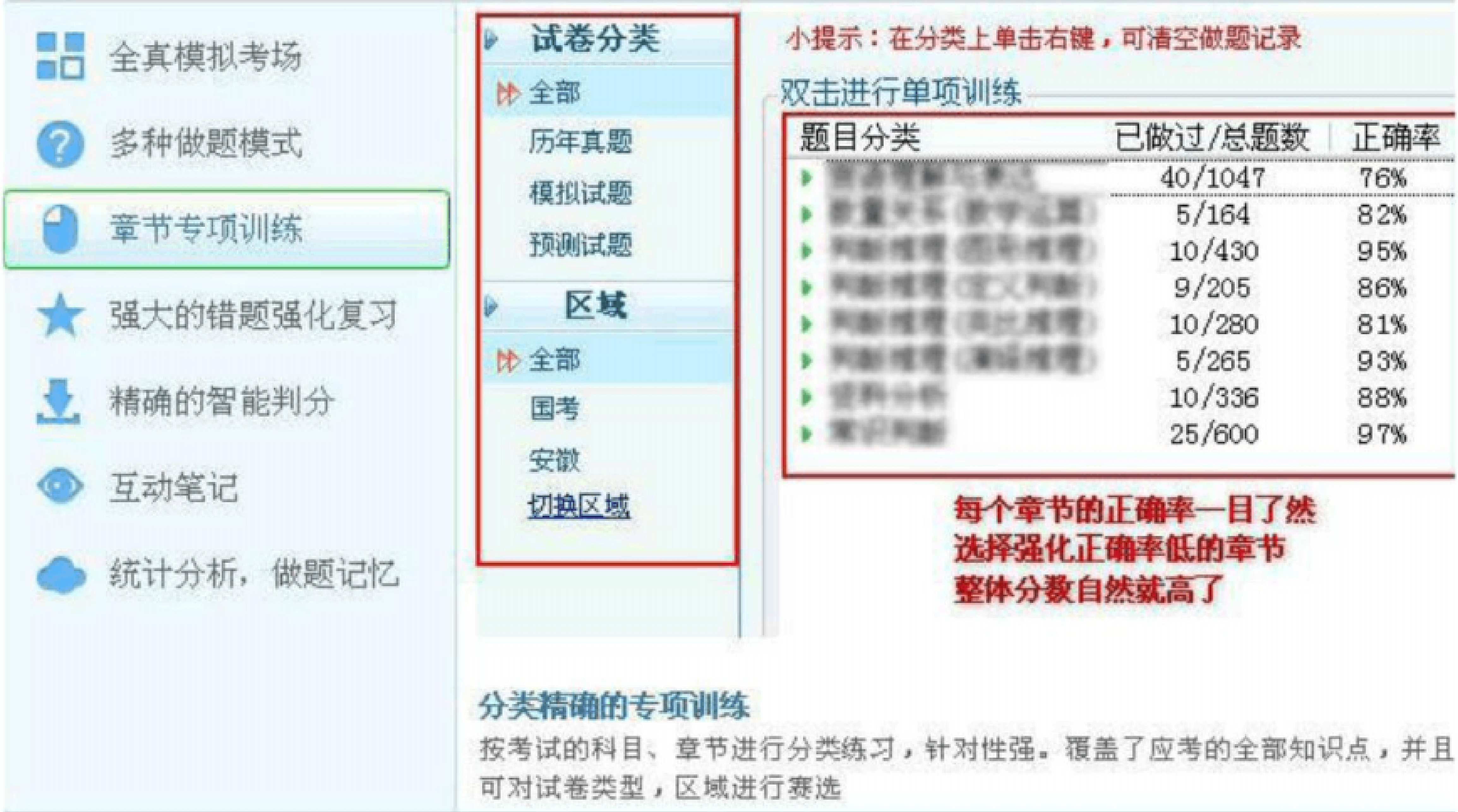
$$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

(Ⅲ) 当 $\beta=2$ 时，X 的概率密度为

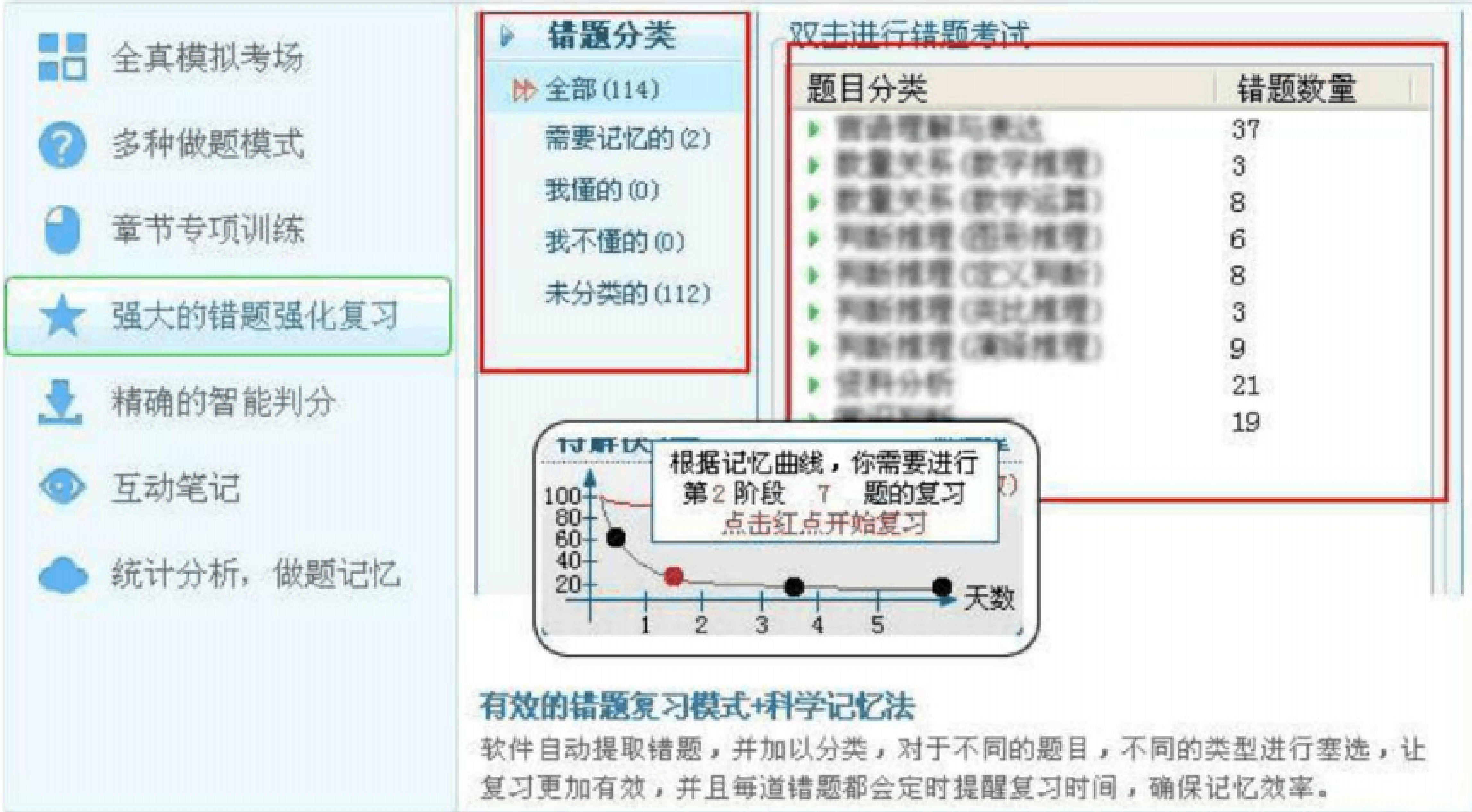
$$f(x,\beta)=\begin{cases}\frac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha,\\ 0, & x\le\alpha,\end{cases}$$

软件截图:


全真模拟考场
多种做题模式
章节专项训练
强大的错题强化复习
精确的智能判分
互动笔记
统计分析，做题记忆
查看考试大纲
练习模式
每题作答后显示答案
模拟考试
所有题目作答完后显示答案
试卷加载完毕，请在上方选择做题模式
自由选择的多种做题模式
不管是章节，错题，还是整卷。都可以选择以练习模式还是以模拟考试进行答题



全真模拟考场
多种做题模式
章节专项训练
强大的错题强化复习
精确的智能判分
互动笔记
统计分析，做题记忆
试卷分类
全部
历年真题
模拟试题
预测试题
区域
全部
国考
安徽
切换区域
小提示：在分类上单击右键，可清空做题记录
双击进行单项训练
题目分类
已做过/总题数
正确率
40/1047
76%
5/164
82%
10/430
95%
9/205
86%
10/280
81%
5/265
93%
10/336
88%
25/600
97%
每个章节的正确率一目了然
选择强化正确率低的章节
整体分数自然就高了
分类精确的专项训练
按考试的科目、章节进行分类练习，针对性强。覆盖了应考的全部知识点，并且可对试卷类型，区域进行赛选


全真模拟考场
多种做题模式
章节专项训练
强大的错题强化复习
精确的智能判分
互动笔记
统计分析，做题记忆
错题分类
全部(114)
需要记忆的(2)
我懂的(0)
我不懂的(0)
未分类的(112)
双击进行错题考试
题目分类
错题数量
37
3
8
6
8
3
9
21
19
根据记忆曲线，你需要进行
第2阶段 7 题的复习
点击红点开始复习
100
80
60
40
20
1
2
3
4
5
天数
有效的错题复习模式+科学记忆法
软件自动提取错题，并加以分类，对于不同的题目，不同的类型进行塞选，让
复习更加有效，并且每道错题都会定时提醒复习时间，确保记忆效率。

对于总体 X 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}, & x_i>\alpha(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_i>\alpha(i=1,2,\cdots,n)$ 时，α 越大，$L(\alpha)$ 越大，即 α 的最大似然估计值为

$$\hat{\alpha}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

于是 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$