"助力乡村学校音体美课堂行动"官方合作图书

V研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜時代™

GLIST 明德·弘毅·品质 11

金榜时代考研数学系列

2022

线性代数辅导讲义

主编◎李永乐（清华大学）

经典畅品｜本书为**作者多年强化班讲稿精华集结而成**，并结合考生反馈不断修订，精益求精

严选习题｜**超值赠送《高分提档严选题》**，提档加速，火力全开，高分领跑直通名校

免费视频｜微信扫右侧二维码观看本书配套精选视频，李永乐团队主讲，犹如名师在身旁

知识成就未来，金榜助您成才！

金榜

微信扫码 查询真伪

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

考研数学满分复习“四段论”

考研之路 从青铜到王者

通关装备一览

一

基础不牢
地动山摇

达标分数
65分

二

全面复习
综合提高

达标分数
130分

三

专项突破
提分拉档

达标分数
150分

四

模拟训练
冲刺满分

达标分数
150分

"助力乡村学校音体美课堂行动"官方合作图书

V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜时代

GLIST 明德·弘毅·品质

金榜时代考研数学系列

线性代数辅导讲义

2022

主编◎李永乐（清华大学）

@考研路上刚刚启程的你

读书不是为了雄辩和驳斥，也不是为了轻信和盲从，
而是为了思考和权衡。

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲义 / 李永乐主编 . —北京：中国农业出版社，2021.2

（金榜时代考研数学系列）

ISBN 978-7-109-27952-0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… Ⅲ.①线性代数－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 025915 号

中国农业出版社出版

地址：北京市朝阳区麦子店街 18 号楼

邮编：100125

责任编辑：吕 睿 毛志强

责任校对：吴丽婷

印刷：河北正德印务有限公司

版次：2021 年 2 月第 1 版

印次：2021 年 2 月河北第 1 次印刷

发行：新华书店北京发行所

开本：787mm×1092mm 1/16

印张：11

字数：260 千字

定价：59.80 元

金榜时代™考研数学系列图书

内容简介及使用说明

考研数学满分150分，数学在考研成绩中的比重很大；同时又因数学学科本身的特点，考生的数学成绩历年来千差万别，数学成绩好在考研中很占优势，因此有“得数学者考研成”之说。既然数学对考研成绩如此重要，那么就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本系列图书作者根据多年的命题经验和阅卷经验，发现考研数学命题的灵活性非常大，不仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同，更表现在对多个知识点的综合考查上，这些题目在表达上多一个字或多一句话，难度都会变得截然不同。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离，而构成这些难点的主要因素，实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时，从阅卷反映的情况来看，考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练。总结为一句话，那就是：要想数学拿高分，就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此，李永乐考研数学辅导团队结合多年来考研辅导和研究的经验，精心编写了本系列图书，目的在于帮助考生有计划、有步骤地完成数学复习，从基本概念、定理和公式的记忆，到对其的熟练运用，循序渐进。以下介绍本系列图书的主要特点和使用说明，供考生复习时参考。

<table>
<tr><th>书名</th><th>本书特点</th><th>本书使用说明</th></tr>
<tr><td rowspan="2">《数学复习全书·基础篇》</td><td colspan="2">内容基础·提炼精准·易学易懂(推荐使用时间:2020年6月—2020年12月)</td></tr>
<tr><td>本书根据大纲的考试范围将考研所需复习内容提炼出来，形成考研数学的基础内容和复习逻辑，实现大学数学同考研数学之间的顺利过渡，开启考研复习第一篇章。</td><td>考生复习过本校大学数学教材后，即可使用本书。如果大学没学过数学或者本校课本是自编教材，与考研大纲差别较大，也可使用本书替代大学数学教材。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">《数学基础过关660题》</td><td colspan="2">题目经典·体系完备·逻辑清晰(推荐使用时间:2020年9月—2021年4月)</td></tr>
<tr><td>本书主编团队出版20年的经典之作，一直被模仿，从未被超越。年销量达百万余册，是当之无愧的考研数学头号畅销书，拥有无数甘当“自来水”的粉丝读者，口碑爆棚，考研数学不可不入！“660”也早已成为考研数学的年度关键词。
本书重基础，重概念，重理论，一旦你拥有了《数学复习全书》《数学基础过关660题》教你的思维方式、知识逻辑、做题方法，你就能基础稳固、思维灵活，对知识、定理、公式的理解提升到新的高度，避免陷入复习中后期“基础不牢，地动山摇”的窘境。</td><td>与《数学复习全书·基础篇》搭配使用，在完成对基础知识的学习后，有针对性地做一些练习。帮助考生熟练掌握定理、公式和解题技巧，加强知识点的前后联系，将之体系化、系统化，分清重难点，让复习周期尽量缩短。
虽说书中都是选择题和填空题，同学们不要轻视，也不要一开始就盲目做题。看到一道题，要能分辨出是考哪个知识点，考什么，然后在做题过程中看看自己是否掌握了这个知识点，应用的定理、公式的条件是否熟悉，这样才算真正做好了一道题。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">《数学历年真题全精解析·基础篇》</td><td colspan="2">分类详解·注重基础·突出重点(推荐使用时间:2020年6月—2020年12月)</td></tr>
<tr><td>本书精选精析1987—2008年考研数学真题，帮助考生提前了解大学水平考试与考研选拔考试的差别，不会盲目自信，也不会妄自菲薄，真正跨入考研的门槛。</td><td>与《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关660题》搭配使用，复习完一章，即可做相应的章节真题。不会做的题目做好笔记，第二轮复习时继续练习。</td></tr>
</table>

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》(综合提高篇)	**系统全面·深入细致·综合提高**(推荐使用时间:2021年1月—2021年7月)	
	本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”,考研界仅两位作者获此称号。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,不提供花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平,提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后,再使用本书。本书及赠送本包含知识点的详细讲解、相应的练习题,以及笔记功能,有利于同学们建立考研知识体系和框架,打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》(强化篇)	**真题真练·总结规律·提升技巧**(推荐使用时间:2021年7月—2021年11月)	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习,考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结,遇到“卡壳”的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透、搞懂,不留死角。 通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,满足实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》	**经典讲义·专项突破·强化提高**(推荐使用时间:2021年7月—2021年10月)	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳,是多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握准确,有针对性。适合认真研读,做到举一反三。	哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关330题》的相关习题,更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	**综合训练·突破重点·强化提高**(推荐使用时间:2021年5月—2021年10月)	
	强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助同学们突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。	与《数学基础过关660题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	**冲刺模拟·有的放矢·高效提分**(推荐使用时间:2021年11月—2021年12月)	
	通过整套题的训练,对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理,准确记忆。	在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	**查漏补缺·问题清零·从容应战**(推荐使用时间:考前20天)	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。	搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前,可以再次回忆、翻看本书。

前　言

本书是为准备考研的学生复习线性代数而编写的一本辅导讲义，由编者近年来的辅导班笔记改写而成。本书也可作为大一新生学习线性代数时的参考书。

此次修订，补充、更换、编写了一些新题。同时，针对同学们不太好理解或不大注意的地方，也相应增加了一些新的说明。

全书共分六章，每章均由**知识结构网络图、基本内容与重要结论、典型例题分析选讲组成**，这样编排为的是方便同学们总结归纳以及更好地掌握知识间的相互渗透与转换。

本书力求在较短的时间内，用不多的篇幅，帮助同学们搞清基本概念，掌握基本理论和公式，了解重点和难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。一方面，通过对**典型例题**的分析讲评，帮助同学们梳理解题的思路，熟悉常用的方法和技巧；另一方面，赠送的**高分提档严选题**，选题严格，题量合适，帮助同学们更好地理解和掌握基本内容、基本解题方法，达到巩固、悟新与提高的目的。另外，例题后的点评与评注，其目的在于帮助同学们弄清重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题。

在考研数学中，线性代数占 4 个考题(3 个选择，1 个填空，1 个解答)，分值为 32 分，其平均用时应当为 40 分钟左右。因而我们在附录中设计了 45 分钟的水平测试，希望同学们在复习完本书之后，用两套自测题及时地进行查漏补缺。线性代数考试大纲对于数学一、二、三来说基本上一样，近年来考题也是趋同，本书中除向量空间仅数一考生要准备外，其余部分大家都应复习。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo. com@清华李永乐考研数学辅导团队。

新浪微博:清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号:金榜时代考研

总之，经过修订再版，希望本书能对同学们的复习备考有更大的帮助。由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

2021 年 2 月

永乐讲线代公众号

李永乐，原清华大学应用数学系（现清华大学数学科学系）教师，最受学生欢迎的“线代”老师，编著多部考研数学抢手复习资料，对出题形式、考试重点了如指掌，解题思路极其灵活，辅导针对性极强，受到广大学员交口称赞。

目 录

第一章 行列式

——每一章都有应用

第二章 矩阵

——基础，防混淆

第三章　n 维向量

——难点，加油

第四章　线性方程组

——重点，别马虎大意

第五章　特征值与特征向量

——重点，综合性强

第六章　二次型

——重点，注意和特征值、特征向量的联系

第一章　行列式——每章都有应用

一、知识结构网络图

- 行列式
  - 概念——不同行不同列元素乘积的代数和(共 $n!$ 项)
  - 性质
    - 经转置行列式的值不变,即 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$
    - 某行有公因数 k,可把 k 提到行列式外.特别地,某行元素全为 0,则行列式的值为 0
    - 两行互换行列式变号.特别地,两行相等,行列式值为 0;两行成比例,行列式值为 0
    - 某行所有元素都是两个数的和,则可写成两个行列式之和
    - 某行的 k 倍加至另一行,行列式的值不变
  - 展开式——代数余子式
    - $|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$　(按 i 行展开)
    - $|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$　(按 j 列展开)
  - 计算
    - 数字型
      - 三角化法
      - 公式法
      - 递推法
      - 常用技巧:
        - 直接按行(列)展开
        - 把第 1 行(列)的 k_i 倍加到第 i 行(列)
        - 把每行(列)都加到第 1 行(列)
        - 逐行(列)相加
    - 抽象型
      - 用行列式性质
      - 用矩阵性质
      - 用特征值　$|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$,相似
  - 证 $|\boldsymbol{A}|=0$
    - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 反证法
    - $r(\boldsymbol{A})<n$
    - 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
    - $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$
  - 应用
    - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 伴随矩阵求逆法
    - 线性相关(无关)判定
    - 可逆的证明
    - 克拉默法则
    - 特征值计算
    - 二次型正定判定

对于二、三阶行列式有对角线法则

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

注意　这样的计算方法对 4 阶及 4 阶以上行列式不适用.

学习札记：

【评注】 (1) 对行列式的性质 4 要理解正确. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$, 有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]$, 由于行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 中每一行都是两个数的和, 所以若用性质 4 把行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 拆开, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应当是 2^n 个 n 阶行列式之和. 因此一般情况下 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

特别地,

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0-a_{12} & 0-a_{13} \\ 0 & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0 & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ -a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

(先将第一列拆分, 其它列不变, 依次拆分第二、三列)

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(2) 要会用行列式的性质及展开定理计算数字型行列式.

(3) 要熟悉抽象型行列式的计算.

今年考题

(2021, 1) 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 为 3 阶矩阵, A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和均为 2, 且 $|\boldsymbol{A}|=3$, 则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$ ________.

(2021, $\frac{2}{3}$) 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为________.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

定义 1.1　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.1)$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1)称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

例如，若已知 $a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$ 是四阶行列式中的一项，那么根据行列式的定义，它应是不同行不同列元素的乘积. 因此必有 $j=3$.

由于 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 对应的逆序数

$$\tau(4312)=3+2+0=5$$

是奇数，所以该项所带符号为负号.

【评注】 (1) 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列. 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

(2) 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个逆序. **一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数.** 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

例如，在排列 25134 中，有逆序 21,51,53,54，因此排列 25134 的逆序数为 4，即 $\tau(25134)=4$. 所以排列 25134 是偶排列.

学习札记：

定义 1.2 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{1.2}$$

例如，若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=2$，即已知

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & a \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2,$$

从而 $a=3$.

重要定理

定理 1.1 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.3}$$

公式(1.3)称为行列式按第 k 行的展开公式.

定理 1.1′ n 阶行列式 D 等于它的任意一列的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.4}$$

公式(1.4)称为行列式按第 k 列的展开公式.

定理 1.2 设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，当 $i\neq k(i,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0; \tag{1.5}$$

当 $j\neq k(j,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0. \tag{1.6}$$

【评注】 根据代数余子式的性质式(1.3)与式(1.5)，对于

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ 和行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，我们有

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}&a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}&a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}\\a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}&a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}&a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}\\a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}&a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}&a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|&0&0\\0&|\boldsymbol{A}|&0\\0&0&|\boldsymbol{A}|\end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

即
$$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

类似地由式(1.4)与式(1.6)有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，从而

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

这是一个重要的公式，要会灵活运用(详见第二章伴随矩阵).

主要公式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.7}$$

学习札记：

学习札记：

(2) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \quad (1.8)$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|, \quad (1.9)$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|, \quad (1.10)$$

m,n 分别是矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的阶数.

(4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). \quad (1.11)$$

(5) 特征多项式

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + s_2\lambda - |\boldsymbol{A}|, \quad (1.12)$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

【评注】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量，若

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0},$$

则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

由 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \lambda\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{0} \Rightarrow (\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$

知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的非零解，故系数行列式 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$.

关于式(1.12)的推导请参看第 2 页之评注(1).

特别地，若秩 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，由(1.12)知特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (\sum a_{ii})\lambda^2 = (\lambda - \sum a_{ii})\lambda^2.$$

那么，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

方阵的行列式

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$； (1.13)

学习札记：

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}| = k^n |\boldsymbol{A}|$； (1.14)

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$； (1.15)

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$； (1.16)

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$； (1.17)

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$； (1.18)

(7) 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. (1.19)

克拉默法则

若 n 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{1.20}$$

其中 $D_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (j=1,2,\cdots,n).$

推论 1　若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式不为 0，则方程组只有零解.

推论 2　若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解，则系数行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

数字型行列式

【例 1.1】 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

分析 用展开公式，先用"倍加"消 0，方法不唯一，例如

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & -12 & -4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -6 & 12 \\ -12 & -4 \end{vmatrix}$$

$= 840.$

【例 1.2】 (2012,局部) 计算 $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

分析 0 很多，可直接用展开公式按第 1 列展开

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} + a_{41}A_{41} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \\ &= 1 - a^4. \end{aligned}$$

【例 1.3】 $\left(2014,\begin{matrix}1\\2,3\end{matrix}\right)$ 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad - bc)^2$.　　　　(B) $-(ad - bc)^2$.

(C) $a^2d^2 - b^2c^2$.　　　　(D) $b^2c^2 - a^2d^2$.　　　　[　　]

分析 **(方法一)** 本题有较多的 0，可考虑直接用行(列)展开公式，例如按第一行展开

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$=-ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(ad-bc)(-ad+bc)$$

$$=-(ad-bc)^2.$$

(方法二)　本题0的位置很规则，也可联想到用拉普拉斯展开式.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}=-(ad-bc)^2.$$

注：记号$(2014,\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2,3})$是指本题选自2014年数学一，数学二，数学三的真题，下同.

本题是常规基础题吧？但本题三个卷种的难度系数分别是0.623，0.608，0.607，是不是有些考生复习的还不到位？

【例1.4】　(1999,2)记行列式$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$为$f(x)$，则方程$f(x)=0$的根的个数为

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.　　[　　]

分析　问方程$f(x)=0$有几个根，也就是问$f(x)$是x的几次多项式.

将第1列的-1倍依次加至其余各列，有

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第2列加到第4列}}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}.\qquad\text{(拉普拉斯式(1.9))}$$

易见$f(x)$是二次多项式，故应选(B).

【评注】　本题难度值0.55.由于行列式的每一个位置都含有x，因此立即展开处理是不妥的，应当先恒等变形消除一些x再展开.不要错误地认为这样的$f(x)$一定是4次多项式，其实适当选系数可构造出0至4任一次数的多项式.

学习札记：

学习札记：

【例 1.5】 计算

$$D=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

分析 各列均加至第 1 列，并按第 1 列展开有

$$D=\begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{4}a_i & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{4}a_i)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}.$$

由(1.7)知，$D=x^3(x+\sum_{i=1}^{4}a_i)$.

【例 1.6】 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

分析 对本题可用逐行相加的技巧，第一行的 x 倍加至第二行，然后第二行的 x 倍加至第三行，如此继续，有

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &=(a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)(-1)^{4+1}(-1)^3 \\ &=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4. \end{aligned}$$

也可对第 4 行展开，有

$$D=a_4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}+x\cdot\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ a_2 & x & -1 \\ a_3 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= a_4 + x(a_1x^2 + a_3 + a_2x)$$
$$= a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4.$$

【例 1.7】 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\qquad}.$$

分析 对于爪型行列式,将其转化为上(或下)三角行列式.

$$D = 2\times 3\times 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 24\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 24-12-8-6 = -2.$$

【评注】 对于 |◸| 与 |◿| 型行列式,可用主对角线元素化其为上(下)三角型来计算.

对于 |◺| 与 |◹| 型行列式,可用副对角线元素化其为 |◸| 或 |◿| 型来计算.

【例 1.8】 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

分析 把第 1 列的 1, −1, 1 倍分别加到第 2,3,4 列,再把 1,2,3 行的 −1, 1, −1 倍分别加到第 4 行,有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x+1 & x & -x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^4.$$

或,每列都加到第 1 列,提取公因式 x,再把第 1 行的 −1 倍分别加到 2,3,4 行,有

$$D = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

学习札记:

学习札记：

$$= x\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ x & 0 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = x^4\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x^4.$$

或

$$D = \begin{vmatrix} 0+1 & 0-1 & 0+1 & x-1 \\ 0+1 & 0-1 & x+1 & 0-1 \\ 0+1 & x-1 & 0+1 & 0-1 \\ x+1 & 0-1 & 0+1 & 0-1 \end{vmatrix},$$

由于 D 中每列都是两个数之和，可以拆成 2^4 个 4 阶行列式之和，但这些行列式中凡包含 2 个或 2 个以上第 2 子列的行列式的值均为 0，故不为 0 的行列式只有 5 个，即

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^4 - x^3 + x^3 - x^3 + x^3 = x^4.$$

【小结】 在计算行列式时，先把某行(列)的 k 倍分别加到其它的每一行(列)；或者先把各行(列)均加到第一行(列)；或者用逐行(列)相加等手法化简，然后再用展开公式，这些构思是常见的，也是基本的.

关于特殊的三对角线行列式如何计算？

通常可用三角化法、递推法、归纳法.

【例 1.9】 计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$ ________.

分析 三角化法 用逐行相加的技巧，例如把第 1 行的 $-\frac{1}{4}$ 倍加到第 2 行，再把新第 2 行的 $-\frac{4}{13}$ 倍加到第 3 行，…

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{40}{13} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

学习札记：

$$=\begin{vmatrix}4 & 3 & 0 & 0\\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0\\ 0 & 0 & \frac{40}{13} & 3\\ 0 & 0 & 0 & \frac{121}{40}\end{vmatrix}=4\times\frac{13}{4}\times\frac{40}{13}\times\frac{121}{40}=121.$$

或用每行都加至第一行的技巧，例如把第 2 行的 -4 倍加到第 1 行，再把第 3 行的 13 倍加到第 1 行，…

$$\begin{vmatrix}4 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -13 & -12 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 40 & 39\\ 1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & -121\\ 1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

$$=-121\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=121.$$

【例 1.10】（2008，局部）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2a & 1 & & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & a^2 & 2a & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & & a^2 & 2a\end{bmatrix}$ 是 n 阶矩阵。证明 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

证明　**（方法一）　用归纳法**设 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 D_n.

当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确，

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a & 1\\ a^2 & 2a\end{vmatrix}=3a^2$，命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确，

设 $n<k$ 时，命题正确.

当 $n=k$ 时，按第一列展开，得

$$D_k=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}$$

$$=2a\begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{k-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 0 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1\\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}$$

学习札记：

$$= 2aka^{k-1} - a^2(k-1)a^{k-2} = (k+1)a^k$$

故命题正确.

(方法二) 化为上三角

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix}$$

$$= 2a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}a \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n}a = (n+1)a^n.$$

【评注】 数学归纳法

(一) ① 验证 $n = 1$ 时，命题 f_n 正确，

② 假设 $n = k$ 时，命题 f_n 正确，

③ 证明 $n = k + 1$ 时，命题 f_n 正确.

(二) ① 验证 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时命题 f_n 都正确，

② 假设 $n < k$ 时，命题 f_n 正确，

③ 证明 $n = k$ 时，命题 f_n 正确.

若 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，当 a 为何值时，方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解？并求 x_1.

解题笔记

学习札记：

抽象行列式

(1) $|A+B|$ 型的计算

【例 1.11】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为 4 维列向量，又 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma})$，若 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|=$ ________.

分析 由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=(3\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma})$，知

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|&=|3\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}|=27|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}|\\&=27(|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\gamma}|)=27(|\boldsymbol{A}|+2|\boldsymbol{B}|)\\&=189.\end{aligned}$$

【例 1.12】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}-(2\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=$ ________.

分析 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 有 $\boldsymbol{A}^*\cdot\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，

即 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$. 于是

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-(2\boldsymbol{A}^*)^{-1}|&=\left|\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\right|=\left|\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}\right|\\&=\left|\frac{5}{6}\boldsymbol{A}\right|=\left(\frac{5}{6}\right)^3|\boldsymbol{A}|\\&=\frac{125}{72}.\end{aligned}$$

【例 1.13】$\left(2010,\dfrac{2}{3}\right)$ 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ ________.

分析 由于 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 没有运算法则，利用 $\boldsymbol{E}$ 作恒等变形是常用技巧.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|&=|\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}|\\&=|(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}|\\&=|\boldsymbol{B}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=3.\end{aligned}$$

本题难度分别是 0.515 和 0.539，有近一半的同学做错了！

【例 1.14】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶正交矩阵且 $|\boldsymbol{A}|<0$，$\boldsymbol{B}$ 是 4 阶矩阵，如 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=5$，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=$ ________.

分析 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，有 $|\boldsymbol{A}|^2=1$，又 $|\boldsymbol{A}|<0$，于是 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|&=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})|\\&=|\boldsymbol{A}|\cdot|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\\&=-(-1)^4|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-5.\end{aligned}$$

【例 1.15】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=$ ________.

学习札记：

分析 由于 $A^*A = |A|E$，又由题设知 $|A| = 3$，因此对已知矩阵方程右乘 A，得

$$3AB - 6B = A,$$

即有 $3(A-2E)B = A$. 两边取行列式，有

$$27|A-2E|\cdot|B| = 3.$$

又
$$|A-2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

于是 $|B| = \frac{1}{9}$，故 $|2B^T| = 2^3|B^T| = 8|B| = \frac{8}{9}$.

(2) 相似，$|A| = \prod \lambda_i$ 的运用

【例 1.16】 已知矩阵 A 和 B 相似，其中 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $|A+E| =$ ________.

分析 由 $A \sim B$，按定义知存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B$，从而

$$P^{-1}(A+kE)P = P^{-1}AP + P^{-1}(kE)P = B + kE,$$

所以
$$A + kE \sim B + kE.$$

进而
$$|A+kE| = |B+kE|,$$

于是
$$|A+E| = |B+E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

【例 1.17】 已知 A 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关的列向量，若 $A\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，$A\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3$，$A\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $|A^*| =$ ________.

分析 **(方法一)** 用行列式性质

由 $A(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有

$$\begin{aligned} |A|\cdot|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| &= |\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3| \\ &= |\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, -2\boldsymbol{\alpha}_3| \\ &= -2|\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3| \\ &= -2|\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3| \\ &= 2|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|. \end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关的列向量，知 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| \neq 0$，所以 $|A| = 2$，从而 $|A^*| = |A|^{n-1} = 4$.

(方法二) 用相似

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) &= (\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

学习札记：

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，知 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，从而

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

那么，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&3\\1&1&2\end{vmatrix}=2$，亦有 $|\boldsymbol{A}^*|=4$.

练习　(1)(2018,3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的向量组，若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________.

解题笔记

(2) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 均不可逆，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ ________.

解题笔记

(3) 分块矩阵

【例 1.18】　已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵. 证明 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

特别地，如 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2|$.

证明　(拉普拉斯) 由于

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\end{bmatrix},$$

即 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}&-\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\end{vmatrix}$，

故 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$.

【小结】　对于抽象型行列式的计算，可能会涉及矩阵的运算法则、单位矩阵恒等变形等技巧，可能考查行列式的性质，也可能用特征值、相似等处理，这一类题目计算量一般不会很大，但涉及知识点多，公式法则多.

学习札记：

特征多项式

【例 1.19】 若 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$,则 $\lambda=$ ____.

分析 这是 λ 的三次方程,对于三次方程尽量用因式分解法求其根.

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6),$$

所以 λ 为 2,3 和 6.

本题的解法很多,例如

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-6 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-2).$$

【评注】 对于特征多项式应两行(或列)加加减减,至多是三行(或列)的加加减减找出 $\lambda-a$ 的公因式,然后再解一个二次方程,就可求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值,这一类行列式的计算要掌握好.

【例 1.20】 若 $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -a \\ -1 & \lambda+a & 1 \\ -a & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=0$,则 $\lambda=$ ________.

分析 把第三行加至第一行,第一行有公因式 $\lambda-a-1$,即

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -a \\ -1 & \lambda+a & 1 \\ -a & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a-1 & 0 & \lambda-a-1 \\ -1 & \lambda+a & 1 \\ -a & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-a-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+a & 2 \\ -a & 1 & \lambda+a-1 \end{vmatrix}$$

学习札记：

$$= (\lambda - a - 1)\begin{vmatrix} \lambda + a & 2 \\ 1 & \lambda + a - 1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - a - 1)(\lambda + a - 2)(\lambda + a + 1),$$

所以 λ 为 $a+1, 2-a, -a-1$.

【评注】　应当会计算这些含参数的行列式.

矩阵秩的概念

在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,任取 k 行与 k 列($k \leqslant m, k \leqslant n$),位于这些行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的次序可构成一个 k 阶行列式,称其为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶子式.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记为 $r(\boldsymbol{A})$. 零矩阵的秩规定为 0.

例如,矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

中有 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

而 $\boldsymbol{A}$ 中又没有 4 阶子式,故 $\boldsymbol{A}$ 中不为零的子式最高是 3 阶,所以秩 $r(\boldsymbol{A}) = 3$.

关于矩阵的秩要理解清楚:

$r(\boldsymbol{A}) = r \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不为 0,任何 $r+1$ 阶子式(若还有)必全为 0.

$r(\boldsymbol{A}) < r \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 中每一个 r 阶子式全为 0.

$r(\boldsymbol{A}) \geqslant r \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 中有 r 阶子式不为 0.

特别地,$r(\boldsymbol{A}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

$\quad\quad \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O} \Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) \geqslant 1$.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$r(\boldsymbol{A}) = n \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可逆.

$\quad\quad r(\boldsymbol{A}) < n \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 不可逆.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵,则 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m, n)$.

关于 $|\boldsymbol{A}| = 0$

【例 1.21】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 n 必是偶数.

证明　因为 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$,所以

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |-\boldsymbol{A}| = (-1)^n |\boldsymbol{A}|.$$

学习札记：

如果 n 是奇数，必有 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$，从而 $|\boldsymbol{A}|=0$，与 $\boldsymbol{A}$ 可逆相矛盾. 所以 n 必是偶数.

【注】 n 是偶数是 n 阶反对称矩阵可逆的必要非充分条件. 请举一个简单例子：4 阶不可逆的反对称矩阵，即行列式值为 0.

【例 1.22】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶非零矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

证明 (方法一) (反证法)若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，那么 $\boldsymbol{A}$ 可逆，用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 左乘 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的两端，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$

与 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$ 矛盾，故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(方法二) (用秩) 据已知有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，那么

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n.$$

因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$，那么秩 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant 1$，从而秩 $r(\boldsymbol{A})<n$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(方法三) (用 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解) 据已知有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，又因 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，从而 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【评注】 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 是考研题中一个常见的已知条件，对于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 应当有两种思路(参看例 3.27)：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则

(1)$\boldsymbol{B}$ 的列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；

(2)$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

克拉默法则

【例 1.23】 三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=4, \\ 4x_1+x_2+9x_3=16 \end{cases}$$

的解中，未知数 x_2 的值必为

(A)1. (B) $\frac{5}{2}$.

(C) $\frac{7}{3}$. (D) $\frac{1}{6}$. [ ]

分析 因为方程组的系数矩阵行列式是范德蒙行列式，由(1.11)有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix}=(-1-2)(3-2)(3-(-1))=-12.$$

根据克拉默法则，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$，其中

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 16 & 9 \end{vmatrix} = (4-2)(3-2)(3-4) = -2.$$

于是 $x_2 = \dfrac{1}{6}$，所以应选(D).

【例 1.24】 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则 $a =$ ________.

分析 由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，对 $\boldsymbol{B}$ 按列分块有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{A\beta}_1, \boldsymbol{A\beta}_2, \boldsymbol{A\beta}_3) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}),$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

因 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$，即齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，那么由克拉默法则，有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = 0,$$

故 $a = 1$ 或 -2.

练习

(1996.3) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$，其中 $a_i \neq a_j (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$ 的解是________.

解题笔记

学习札记：

学习札记：

代数余子式求和

【例 1.25】 设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-2&3&4&1\\3&4&1&2\\-4&2&0&6\end{vmatrix}$，则

(1) $A_{12}-2A_{22}+3A_{32}-4A_{42}=$ ________；

(2) $A_{31}+2A_{32}+A_{34}=$ ________.

分析 (1) 由于 $a_{11}=1, a_{21}=-2, a_{31}=3, a_{41}=-4$，据(1.6)立即有

$A_{12}-2A_{22}+3A_{32}-4A_{42}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}+a_{41}A_{42}=0.$

(2) 因为 A_{ij} 与元素 a_{ij} 的大小无关，可构造一个行列式(用 A_{3j} 的系数置换 $|\boldsymbol{A}|$ 第 3 行的元素)，即

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-2&3&4&1\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\-4&2&0&6\end{vmatrix},$$

则行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{B}|$ 第三行元素的代数余子式是一样的. 一方面，对 $|\boldsymbol{B}|$ 按第三行展开(用(1.3))有

$$|\boldsymbol{B}|=\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{A}_{31}+\mathbf{2}\boldsymbol{A}_{32}+\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{A}_{33}+\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{A}_{34}.$$

另一方面，对行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 恒等变形，有

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-2&3&4&1\\1&2&0&1\\-4&2&0&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-4&1&0&3\\1&2&0&1\\-4&2&0&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-4&1&3\\1&2&1\\-4&2&6\end{vmatrix}$$

$$=-40,$$

所以，$A_{31}+2A_{32}+A_{34}=-40.$

【例 1.26】 (2001,4) 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则第 4 行各元素余子式之和的值为________.

分析 本题主要考查余子式的概念及三阶行列式的计算，所谓 a_{ij} 的余子式 M_{ij}，就是把行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中划去 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列后所得到的 $n-1$ 阶行列式，根据余子式的定义，即求

$$\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}$$

$$=-7\cdot 8+0+3\cdot 14+(-7)(-1)^{3+2}(-2)=-28.$$

或者,转换为代数余子式来求解,即

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}=(-7)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28.$$

【评注】 本题难度值仅为0.2,是一个值得考生思考的问题,复习要全面,概念要清晰,计算要准确,如若求第4行元素代数余子式的和,则有

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\frac{1}{2}(2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+2A_{44})$$
$$=\frac{1}{2}(a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44})=0.$$

【例 1.27】 已知

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

那么行列式$|\boldsymbol{A}|$所有元素的代数余子式之和为________.

分析 由于$\boldsymbol{A}^*=[A_{ji}]$,只要能求出$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵,就可求出$\sum A_{ij}$.因为$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,而$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{4}\cdot(-1)^{4+1}\cdot\frac{1}{3!}=-\frac{1}{4!}$.

又由分块求逆,有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*=-\frac{1}{4!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

故$\sum A_{ij}=-\frac{1}{4!}(1+2+3+4)=-\frac{5}{12}$.

学习札记:

第二章　矩阵——基础,防混淆

一、知识结构网络图

- **矩阵**
  - 概念——$m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表格
  - 运算——$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}, k\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{AB}$；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
    - 方阵的幂
    - 分块矩阵
  - 初等变换
    - 初等矩阵
      - 初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 所得 $\boldsymbol{PA}$ 就是对 $\boldsymbol{A}$ 作了一次与 $\boldsymbol{P}$ 同样的行变换
      - $\boldsymbol{E}_i^{-1}(k) = \boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right), \boldsymbol{E}_{i,j}^{-1} = \boldsymbol{E}_{i,j}, \boldsymbol{E}_{i,j}^{-1}(k) = \boldsymbol{E}_{i,j}(-k)$
    - 等价　$\boldsymbol{A} \to \cdots \to \boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆
  - 逆矩阵
    - 求法
      - 用定义
      - $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}) \xrightarrow{\text{行}} \cdots \to (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1})$
      - 用伴随 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$
      - 用分块 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$
    - 证法
      - $|\boldsymbol{A}| \neq 0$
      - $r(\boldsymbol{A}) = n$
      - 特征值
      - 反证法
  - 秩
    - 计算　初等变换法　定义法
    - 公式　参看本章主要公式
  - 特殊矩阵
    - 伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$
    - 对称矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = a_{ji}$
    - 反对称矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ii} = 0, a_{ij} = -a_{ji}$
    - 正交矩阵 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
    - 对角矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & & \\ & a_2b_2 & \\ & & a_3b_3 \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2 = \boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1, \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix},$$

其中 $a_1a_2a_3 \neq 0$.

【评注】　矩阵是线性代数的核心内容,它贯彻线性代数的始终.复习时要引起考生足够的重视,概念要清晰,符号要习惯,运算要正确、迅速、简捷.

(1)理解矩阵的概念,了解几种特殊矩阵(单位矩阵、对角矩阵、数量矩阵、三角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵、正交矩阵)的定义及性质.

(2)掌握矩阵运算(加、减、数乘、乘法)及其运算规律,掌握矩阵转置的性质,掌握行列式乘法公式,了解方阵的幂.

(3)理解逆矩阵的概念,掌握矩阵可逆的充要条件,掌握可逆矩阵的性质,理解伴随矩阵的概念,会用伴随矩阵求矩阵的逆.

(4)掌握矩阵的初等变换,了解初等矩阵的性质及矩阵等价的概念,理解矩阵秩的要领,掌握用初等变换求矩阵的逆和秩.

(5)了解分块矩阵的概念,掌握分块矩阵的运算.

学习札记:

今年考题

(2021,1)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵,下列不成立的是

(A) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.　　(B) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{BA}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.　　(D) $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2r(\boldsymbol{A})$.

(2021,2)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -5\end{bmatrix}$,若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵,则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可分别为

(A) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

(一) 矩阵及相关的概念

定义 2.1 $m \times n$ 个数排成如下 m 行 n 列的一个表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为是一个 $m \times n$ **矩阵**. 当 $m = n$ 时, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**.

如果一个矩阵的所有元素都是 0, 即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

则称这个矩阵是**零矩阵**, 可简记为 $\boldsymbol{O}$.

两个 $m \times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$, 如果对应的元素都相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}\ (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**, 记作 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 的元素所构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 记成 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

(二) 矩阵的运算与法则

定义 2.2 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C} = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**, 记为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

定义 2.3 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵, k 是一个常数, 则 $m \times n$ 矩阵 $[ka_{ij}]$ 称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数乘**, 记为 $k\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 都是 $m \times n$ 矩阵, k, l 是常数, 则矩阵的加法和数乘运算满足:

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$;　(2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$;　(4) $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$;

(5) $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$;　(6) $k(l\boldsymbol{A}) = (kl)\boldsymbol{A}$;

(7) $k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$;　(8) $(k + l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$.

学习札记：

定义 2.4　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

矩阵的乘法可图示如下：

$$i\begin{bmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots & \boxed{\begin{matrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{matrix}} & \vdots\\ \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots\\ & \vdots & \end{bmatrix}i$$

$$\begin{array}{ccc} & j & j\\ m\times n & n\times s & m\times s\end{array}$$

矩阵乘法有下列法则：

(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

(3) $(k\boldsymbol{A})(l\boldsymbol{B})=kl\boldsymbol{AB}$；

(4) $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$；

(5) $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$.

【评注】　矩阵的乘法运算是重要的、基本的，也是一些考生不重视常出错的地方.

关于矩阵乘法要注意三个方面：

(1) 矩阵乘法没有交换律，一般情况 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}.$$

特别地

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$，但 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

(2) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，虽然 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

在这里，矩阵运算与数的运算不要混淆.

学习札记：

(3) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}, \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&4\\-1&2\end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$，有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\3&24\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\3&24\end{bmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

定义 2.5 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}$.

（三）伴随矩阵

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 n 阶矩阵，行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下的矩阵

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

【评注】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，由行列式 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$ 得到代数余子式

$A_{11}=d, A_{12}=-c, A_{21}=-b, A_{22}=a$，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}.$$

对于 2 阶矩阵，用**主对角线元素对换，副对角线元素变号**即可求出伴随矩阵.

例如，$\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}3&1\\-2&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$.

（四）逆矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$（单位矩阵）成立，则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

例如，$\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&3\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,

所以矩阵 $\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}$ 可逆，且 $\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&3\\1&-1\end{bmatrix}$.

当然亦有$\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

学习札记：

（五）矩阵的初等变换和初等矩阵

定义 2.6　对 $m\times n$ 矩阵，下列三种变换

(1) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行(列)；

(2) 互换矩阵某两行(列) 的位置；

(3) 把某行(列) 的 k 倍加至另一行(列)

称为矩阵的**初等行(列) 变换**，统称为矩阵的**初等变换**.

定义 2.7　如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵.

例如，3 阶单位矩阵作如下初等变换

$$\boldsymbol{E}_{1,2}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ $\boldsymbol{E}$ 一、二两行互换(或一、二两列互换)，

$$\boldsymbol{E}_{12}(3)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ $\boldsymbol{E}$ 第一行的 3 倍加至第二行(或第二列的 3 倍加至第一列)，

$$\boldsymbol{E}_{3}(-2)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$ $\boldsymbol{E}$ 第三行乘以 -2(或第三列乘以 -2)

均是初等矩阵.

行阶梯矩阵

(1) 如果矩阵中有零行(即这一行元素全是 0)，则零行在矩阵的底部.

(2) 每个非零行的主元(即该行最左边的第 1 个非零元)，它们的列指标随着行指标的递增而严格增大.

例 $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$ 都不是行阶梯矩阵.

例 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 是行阶梯矩阵.

行最简矩阵

一个行阶梯矩阵，如果还满足：

非零行的主元都是 1，且主元所在的列的其它元素都是 0，则称其为**行最简矩阵**.

例 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 都不是行最简矩阵.

学习札记：

例$\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$是行最简矩阵.

(六) 正交矩阵

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

【评注】 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Rightarrow |\boldsymbol{A}|^2=1$.

重要定理

定理 2.1 （行列式乘法公式）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.$$

定理 2.2 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 2.3 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的列（行）向量组线性无关

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，$\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是初等矩阵

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价

$\Leftrightarrow 0$ 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

定理 2.4 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则必有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

【评注】 按可逆矩阵定义，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 由定理 2.4，如 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 则可保证 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，因而用定义法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 时我们的工作量可减少一半，只需检验 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 就可以了. 但要注意的是定理 2.4 的条件"$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵"不能忽略. 显然，对于

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

但我们并不能说 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

定理 2.5 用初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左（右）乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果 $\boldsymbol{PA}(\boldsymbol{AP})$ 就是对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次相应的初等行（列）变换.

定理 2.6 初等矩阵均可逆，且其逆是同类型的初等矩阵，即

$$\boldsymbol{E}_i^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right),\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k),\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}.$$

定理 2.7 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

定理 2.8 秩 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩.

定理 2.9　矩阵经初等变换后秩不变.

学习札记:

主要公式

(1) 转置

$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(2) 可逆

$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\quad(k\neq 0)$;

$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;$(\boldsymbol{A}^{n})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{n}$;

$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$;$|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$;

$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$.

(3) 伴随

$\boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$;

$\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$;$|\boldsymbol{A}^{*}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

$(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$;

$(\boldsymbol{A}^{*})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{*}$;$(k\boldsymbol{A})^{*}=k^{n-1}\boldsymbol{A}^{*}$;$(\boldsymbol{A}^{*})^{*}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$;

$$r(\boldsymbol{A}^{*})=\begin{cases}n, & \text{如果 } r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & \text{如果 } r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & \text{如果 } r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

(4) 秩

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$;$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$;

当 $k\neq 0$ 时,$r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$;

$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$;

$r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min(r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B}))$;

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$,$r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$;

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$;

$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$;

若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,$r(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E})$.

(5) 分块矩阵

对矩阵适当地分块处理,有如下运算法则:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4\end{bmatrix};$$

学习札记：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \end{bmatrix};$$

若 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 s 阶矩阵，则 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^n \end{bmatrix}$；

若 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix};$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，对 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{O}$ 矩阵按列分块有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s]=[\boldsymbol{Ab}_1,\boldsymbol{Ab}_2,\cdots,\boldsymbol{Ab}_s]=[\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}],$$

$$\boldsymbol{Ab}_i=\boldsymbol{0}\quad(i=1,2,\cdots,s),$$

即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，则对 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 按行分块有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix},$$

即
$$\begin{cases} a_{11}\boldsymbol{\beta}_1+a_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1, \\ a_{21}\boldsymbol{\beta}_1+a_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_m, \end{cases}$$

可见矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出.

类似地，对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块，有

$$[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_s],$$

由此得
$$\begin{cases} b_{11}\boldsymbol{\gamma}_1+b_{21}\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\gamma}_n=\boldsymbol{\delta}_1, \\ b_{12}\boldsymbol{\gamma}_1+b_{22}\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\gamma}_n=\boldsymbol{\delta}_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{1s}\boldsymbol{\gamma}_1+b_{2s}\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+b_{ns}\boldsymbol{\gamma}_n=\boldsymbol{\delta}_s, \end{cases}$$

即矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

矩阵运算

(1)$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$

设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[2,0,1]=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&0&2\\6&0&3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}[1,2,3]=\begin{bmatrix}2&4&6\\0&0&0\\1&2&3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=[1,2,3]\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=2+0+3=5,\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[2,0,1]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=2+0+3=5.$$

前者 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$ 都是 3 阶矩阵(互为转置)，后者 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 都是一个数(相同)，这里的运算要正确，符号不要混淆.

特别地，设 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[a_1,a_2,a_3]=\begin{bmatrix}a_1^2&a_1a_2&a_1a_3\\a_1a_2&a_2^2&a_2a_3\\a_1a_3&a_2a_3&a_3^2\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2.$$

【例 2.1】　设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维列向量，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，

如果 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&2&-4\\3&-3&6\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=$ ________.

分析　设 $\boldsymbol{\alpha}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}[y_1,y_2,y_3]=\begin{bmatrix}x_1y_1&x_1y_2&x_1y_3\\x_2y_1&x_2y_2&x_2y_3\\x_3y_1&x_3y_2&x_3y_3\end{bmatrix},$$

而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$

学习札记：

注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 正是矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的主对角线元素之和，所以本题

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1+2+6=9.$$

(2) 特殊矩阵的 n 次方

【例 2.2】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&6&4\\-1&-3&-2\\2&6&4\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$ ______.

分析 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}[1,3,2]$，故

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}[1,3,2]\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}[1,3,2].$$

因 $[1,3,2]\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}=2+(-3)+4=3$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=3\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}[1,3,2]=3\boldsymbol{A}.$$

那么 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{A}^2=3^2\boldsymbol{A}$，归纳得 $\boldsymbol{A}^n=3^{n-1}\boldsymbol{A}$.

【评注】 若秩 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积，有 $\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$ 之规律，从而 $\boldsymbol{A}^n=l^{n-1}\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3]=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},$$

那么 $$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=l\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=l\boldsymbol{A},$$

其中 $$l=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum a_{ii}.$$

【例 2.3】 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2=$ ______，$\boldsymbol{A}^3=$ ______.

分析 由矩阵乘法，有

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

【评注】 对这类4阶矩阵,有

$$\begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&0&4&5\\0&0&0&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&24\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\text{而 } \boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}^2=?$$

【例2.4】 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^n=$ ______.

分析 以例2.3为背景,本题可把 $\boldsymbol{A}$ 分解为两个矩阵之和,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$$

那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n\\&=\boldsymbol{E}^n+n\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2}\boldsymbol{E}^{n-2}\boldsymbol{B}^2\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&2n&4n^2-n\\0&1&4n\\0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【例2.5】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^n=$ ______.

分析 由分块矩阵公式 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^n\end{bmatrix}$,我们只需分别算出 $\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$的 n 次幂.

因为 $$\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$$

学习札记:

学习札记：

故 $$\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}^n=(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=(3\boldsymbol{E})^n+n(3\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}$$

$$=\begin{bmatrix}3^n&0\\0&3^n\end{bmatrix}+n\cdot 3^{n-1}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}\\0&3^n\end{bmatrix}.$$

而矩阵$\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$的秩为1，有$\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}^n=6^{n-1}\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$，从而

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot 3^{n-1}&0&0\\0&3^n&0&0\\0&0&3\cdot 6^{n-1}&9\cdot 6^{n-1}\\0&0&6^{n-1}&3\cdot 6^{n-1}\end{bmatrix}.$$

【例 2.6】 已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，若$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{X}$，则$\boldsymbol{X}^4=$______.

分析 由矩阵方程，有

$$\boldsymbol{AX}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}-2\boldsymbol{B},$$

即 $$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}).$$

因为$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$可逆，故

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}),$$

从而

$$\boldsymbol{X}^4=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}^4(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【评注】 若$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{B}^2$，即$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^2$. 依此类推，得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^n$，从而$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{PB}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.

【例 2.7】 (2004,4)设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，其中$\boldsymbol{P}$为3阶可逆矩阵，则$\boldsymbol{B}^{2004}-2\boldsymbol{A}^2=$______.

分析 由于$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^n\end{bmatrix}$，且

学习札记：

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix},$$

易见
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

所以
$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

从而
$$\boldsymbol{A}^{2004} = (\boldsymbol{A}^2)^{1002} = \boldsymbol{E}.$$

又因　$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 有 $\boldsymbol{B}^{2004} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2004}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{EP} = \boldsymbol{E}$,

故
$$\boldsymbol{B}^{2004} - 2\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

伴随矩阵

【例 2.8】 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$,　　(2) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

分析 (1) 若 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

故 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

【注】 2 阶矩阵的伴随矩阵:主对角线元素互换,副对角线元素变号.

(2) 由于 $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$,　$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $A_{21} = 5$,　$A_{22} = 3$,

$A_{23} = -1$,　$A_{31} = 3$,　$A_{32} = 3$,　$A_{33} = -1$,

故 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

【例 2.9】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,由于 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,又 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,故有

学习札记：

$$A\cdot\frac{A^*}{|A|}=\frac{A^*}{|A|}A=E\quad\Rightarrow A^{-1}=\frac{A^*}{|A|},$$

$$\frac{A}{|A|}\cdot A^*=A^*\cdot\frac{A}{|A|}=E\quad\Rightarrow(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}.\tag{1}$$

因为对于任何 n 阶矩阵 A，公式 $AA^*=A^*A=|A|E$ 恒成立，那么对于 A^{-1} 亦应有 $A^{-1}(A^{-1})^*=|A^{-1}|E$，从而

$$(A^{-1})^*=|A^{-1}|A=\frac{1}{|A|}A.\tag{2}$$

比较(1)，(2)得

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A.$$

【例 2.10】 (1996,3) 设 n 阶矩阵 A 非奇异($n\geqslant 2$)，A^* 是 A 的伴随矩阵，则

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$. (B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$.

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$. (D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$. [ ]

分析 因为 A 可逆，由 $A^*=|A|A^{-1}$ 有

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\cdot\frac{A}{|A|}=|A|^{n-2}A,$$

故应选(C).

【例 2.11】 ($2009,\frac{1}{2,3}$) 设 A,B 均为 2 阶矩阵，A^*，B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵. 若 $|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{bmatrix}O&3B^*\\2A^*&O\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}O&3A^*\\2B^*&O\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}O&2A^*\\3B^*&O\end{bmatrix}$. [ ]

分析 由拉普拉斯展开式(1.10)有

$$\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|A||B|=6.$$

那么，矩阵 $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}$ 可逆，从而

$$\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=6\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{bmatrix}.$$

所以应选(B).

【评注】 本题考查的知识点有3个:一是用公式 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 求伴随矩阵,二是行列式的拉普拉斯展开式,三是分块矩阵的求逆公式.这些都是线性代数中很基础的知识.

学习札记:

【例 2.12】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,证明:

$$r(\boldsymbol{A}^{*})=\begin{cases}n, & 若\ r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & 若\ r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & 若\ r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

证明 若秩 $r(\boldsymbol{A})=n$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,故 $|\boldsymbol{A}^{*}|\neq 0$,所以秩 $r(\boldsymbol{A}^{*})=n$.

若秩 $r(\boldsymbol{A})<n-1$,则 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $n-1$ 阶子式均为0,即行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的所有代数余子式均为0,即 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{O}$,故 $r(\boldsymbol{A}^{*})=0$.

若秩 $r(\boldsymbol{A})=n-1$,则 $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $\boldsymbol{A}$ 中存在 $n-1$ 阶子式不为0.那么,由 $|\boldsymbol{A}|=0$ 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

从而 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^{*})\leqslant n$,得 $r(\boldsymbol{A}^{*})\leqslant 1$.

又因 $\boldsymbol{A}$ 中有 $n-1$ 阶子式非0,知有 $A_{ij}\neq 0$,即 $\boldsymbol{A}^{*}\neq\boldsymbol{O}$,得 $r(\boldsymbol{A}^{*})\geqslant 1$,故 $r(\boldsymbol{A}^{*})=1$.

练习 (1)(2005,3)设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{3\times 3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数,则 a_{11} 为

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　(B) 3.　　(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) $\sqrt{3}$.

解题笔记

(2)(2019,$\frac{2}{3}$)设 $\boldsymbol{A}$ 是4阶矩阵,$\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,若线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只有2个向量,则 $r(\boldsymbol{A}^{*})=$

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

解题笔记

学习札记：

可逆矩阵

【例 2.13】 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ______.

分析 求逆是基础知识不要忘记,不要麻痹大意.两个基本求法:

(用伴随矩阵)按例 2.8 求出

$$\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}-1&5&3\\-1&3&3\\1&-1&-1\end{bmatrix},$$

又

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&-1&0\\1&2&1\end{vmatrix}=2,$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^{*}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&5&3\\-1&3&3\\1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

(用初等行变换求 $\boldsymbol{A}^{-1}$)

$$[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&1&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\0&0&-2&-1&1&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

学习札记：

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right],$$

故

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}.$$

【评注】 (1) 求代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 时，不要忘记正负号.

组装伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}$ 时，不要排错位置.

求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 时不要忘记除以 $|\boldsymbol{A}|$.

(2) 用初等行变换求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的常规步骤：

$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{由上往下}}(\qquad\qquad)\xrightarrow{\text{由下往上}}(\qquad\qquad)\xrightarrow{\text{某行乘}k}$

$(\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{A}^{-1})$.

【例 2.14】 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$ ______.

分析 因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

于是
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=4\boldsymbol{E},$$

即
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\cdot\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

故
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}).$$

【例 2.15】 (2002,4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 \\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$ ______.

分析 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}.$$

又
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 2 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1 \\ -2 & 0\end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1 \\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 \\ -2 & -1\end{bmatrix},$$

学习札记：

故 $$B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{bmatrix}.$$

或直接求出

$$A^2=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-4\\8&7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-1&-4\\8&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-3\\6&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\2&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}.$$

【例 2.16】 (2000,2) 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$ ______.

分析 对于 $(A+B)^{-1}$ 没有运算法则，通常用单位矩阵恒等变形的技巧化为乘积的形式.

$$\begin{aligned}(E+B)^{-1}&=[E+(E+A)^{-1}(E-A)]^{-1}\\&=[(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)]^{-1}\\&=[(E+A)^{-1}(E+A+E-A)]^{-1}\\&=[2(E+A)^{-1}]^{-1}\\&=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【例 2.17】 已知 A 是 n 阶对称矩阵，且 A 可逆，若 $(A-B)^2=E$，化简 $(E+A^{-1}B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(E-BA^{-1})^{-1}$.

解 原式 $=[E^{\mathrm{T}}+(A^{-1}B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}][AA^{-1}-BA^{-1}]^{-1}$

$$\begin{aligned}&=[E+(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}][(A-B)A^{-1}]^{-1}\\&=[E+B(A^{\mathrm{T}})^{-1}][(A^{-1})^{-1}(A-B)^{-1}]\\&=[E+BA^{-1}][A(A-B)^{-1}]\\&=(A+B)(A-B)^{-1}.\end{aligned}$$

又 $(A-B)^2=E$，故 $(A-B)^{-1}=A-B$，从而原式 $=(A+B)(A-B)$.

【例 2.18】 已知 A,B 均为 n 阶矩阵，且 A 与 $E-AB$ 都是可逆矩阵，证明 $E-BA$ 可逆.

学习札记：

证明 $|E-BA| = |A^{-1}A - BA| = |(A^{-1}-B)A|$

$$= |A^{-1}-B|\,|A| = |A|\,|A^{-1}-B|$$

$$= |A(A^{-1}-B)| = |E-AB| \neq 0,$$

故 $E-BA$ 可逆.

【例 2.19】 设 $H=\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$，其中 A,B 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵，证明矩阵 H 可逆，并求其逆.

证明 因为 A,B 可逆，由拉普拉斯展开式(1.9)有

$$|H| = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A|\,|B| \neq 0,$$

所以矩阵 H 可逆.

设 $H^{-1}=\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{bmatrix}$，即

$$\begin{cases} AX+CZ=E, \\ AY+CW=O, \\ BZ=O, \\ BW=E, \end{cases} \text{解出} \begin{cases} X=A^{-1}, \\ Y=-A^{-1}CB^{-1}, \\ Z=O, \\ W=B^{-1}, \end{cases}$$

故

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

练习 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 $B=E+AB$，$C=A+CA$，则 $B-C=$

(A) E.　　(B) $-E$.　　(C) A.　　(D) $-A$.

解题笔记

学习札记：

初等矩阵

【例 2.20】 已知

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{21}+2a_{31}&a_{23}+2a_{33}&a_{22}+2a_{32}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{bmatrix},$$

若 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}=$ ________.

分析 A 经过行变换（第 3 行的 2 倍加至第 2 行）和列变换（2、3 两列互换）得到矩阵 B，即

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

所以

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}A^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&6\\0&4&-3\end{bmatrix}.$$

【例 2.21】 已知 A 是 3 阶矩阵，P 是 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}$，

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$

(A) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

分析 由下标知矩阵 P 经两次列变换（第 1 列加至第 2 列；第 3 列乘以 -2）得到矩阵 Q. 即

$$Q = P\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix} = PP_1P_2$$

那么

$$\begin{aligned}Q^{-1}AQ &= (PP_1P_2)^{-1}A(PP_1P_2) = P_2^{-1}P_1^{-1}P^{-1}APP_1P_2\\ &= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1&-2&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【例 2.22】 已知 3 阶矩阵 A 可逆,将 A 的第 2 列与第 3 列交换得矩阵 B,把 B 的第 1 列乘以 -2 得矩阵 C,则满足 $PA^* = C^*$ 的矩阵 P 为________.

分析 按已知,右乘初等矩阵为列变换,有

$$A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = B, B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix} = C,$$

于是

$$A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix} = C,$$

有

$$2|A| = |C|,$$

且

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\frac{A^*}{|A|} = \frac{C^*}{|C|},$$

故

$$\begin{aligned}P &= 2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\\ &= 2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&-1\\0&2&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【例 2.23】 $(2005,\frac{1}{2})$ 设 A 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶可逆矩阵,交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B,A^* 与 B^* 分别为 A 和 B 的伴随矩阵,则

(A) 交换 A^* 的第一列与第二列,得 B^*.

(B) 交换 A^* 的第一行与第二行,得 B^*.

学习札记:

学习札记：

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第一列与第二列，得 $-\boldsymbol{B}^*$.

(D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第一行与第二行，得 $-\boldsymbol{B}^*$. [ ]

分析 按题意，有 $\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，于是 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_{12}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}$.

因为 $\boldsymbol{E}_{12}^{-1}=\boldsymbol{E}_{12}$，有 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}_{12}=\boldsymbol{B}^{-1}$. 又因矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两行互换得到 $\boldsymbol{B}$，故 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，于是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{E}_{12}=-\boldsymbol{B}^*$，即 $\boldsymbol{A}^*$ 的一、二两列互换得到 $-\boldsymbol{B}^*$. 所以应选(C).

【评注】 本题考查初等矩阵的两个定理，一是左乘右乘，二是初等矩阵的逆矩阵公式. 如果对 n 阶初等矩阵的符号不习惯，不妨把 $\boldsymbol{A}$ 想成是 3 阶矩阵，那么

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}$$

$$\Rightarrow\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\frac{\boldsymbol{B}^*}{|\boldsymbol{B}|}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{B}^*$$，所以应选(C).

【例 2.24】 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{2010}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2011}=$ ______.

分析 因为 $$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2011}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix}.$$

又因 $$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix},$$

故

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{2010}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3+2010(2\boldsymbol{\alpha}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\16085&12064&8043\end{bmatrix}.$$

【评注】 初等矩阵 n 次方:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\nk&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k^n&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2n-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【例 2.25】 (2016,2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ 等价,则 $a=$ ________.

分析 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

由 $|\boldsymbol{B}|=0$,且 $\boldsymbol{B}$ 中有 2 阶子式不为 0,知 $r(\boldsymbol{B})=2$.

又 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{vmatrix}=(a-2)(a+1)^2=0$

若 $a=-1$,易见 $r(\boldsymbol{A})=1$

所以 $a=2$ 时 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

练习 已知 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&-2&0\\-2&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$,则 $\boldsymbol{A}^{2021}=$ ________.

解题笔记

学习札记:

学习札记：

正交矩阵

【例 2.26】 设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,-2,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $k\neq 0$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $k=$ ________.

分析 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$. 因为

$$(\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$$
$$=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+k^2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

且
$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[1,-2,1]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=6,$$

故
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+(2k+6k^2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow 2k+6k^2=0.$$

又 $k\neq 0$，故 $k=-\dfrac{1}{3}$.

【例 2.27】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$ 是正交矩阵，那么

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

即有 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1, a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0, a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0,$
$b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=0, b_1^2+b_2^2+b_3^2=1, b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0,$
$c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0, c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3=0, c_1^2+c_2^2+c_3^2=1.$

若令 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=[c_1,c_2,c_3]^{\mathrm{T}},$

则上述关系式表明：

$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=1, \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0, \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,$

$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=1, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,$

$\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=1,$

说明正交矩阵的列向量长度均为 1，列向量两两正交.

类似地，利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 可知正交矩阵的行向量长度均为 1，行向量两两正交.

【例 2.28】 在实对称矩阵求特征向量构造正交矩阵的问题上，常见的错误是：

(1) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$；

学习札记：

(3) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$；　　(4) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

分析 这 4 个矩阵都不是正交矩阵！要想清原因，引以为戒.

【例 2.29】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均 n 阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

证明
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{EA}+\boldsymbol{BE}| = |(\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})|\\ &= |\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\\ &= |\boldsymbol{B}|\cdot|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}|\cdot|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|^2\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\\ &= -|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|,\text{（注意对正交矩阵 }\boldsymbol{B}\text{，有 }|\boldsymbol{B}|^2=1\text{）}\end{aligned}$$
所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

【评注】 处理行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 时，要注意单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 恒等变形的技巧. 本题若由 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{B}|$ 用 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 置换 $\boldsymbol{E}$ 也是一样的.

【例 2.30】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^*$ 是正交矩阵.

证明 因 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，有 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是
$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$
从而　$$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}.$$
同理 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{E}$.

所以 $\boldsymbol{A}^*$ 是正交矩阵.

矩阵方程

对于矩阵方程，经恒等变形之后有三种可能的形式：
$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B};\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B};\boldsymbol{AXC}=\boldsymbol{B}.$$
如果矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 是可逆的，则依次有
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B};\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1};\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BC}^{-1}.$$
然后经计算就可求出 $\boldsymbol{X}$.

注意：$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 可以由 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})\to(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 来求.

因为矩阵乘法没有交换律，所以在恒等变形时，运算法则一定要正确.

【例 2.31】 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 3 阶矩阵，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足
$$\boldsymbol{AXA}-\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{BXA}-\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{E},$$
其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{X}=$

(A) $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2)^{-1}$.　　(B) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

学习札记：

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$. (D) 条件不足，不能确定. [ ]

分析 据已知，有

$$\boldsymbol{AXA}-\boldsymbol{BXA}+\boldsymbol{AXB}-\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{E},$$

即

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{XA}+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{E},$$

亦即

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}.$$

上式右端是单位矩阵，说明矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均可逆，那么左乘 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$，右乘 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$，即知 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$，故应选(B).

【例 2.32】 (2000,1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，有 $|\boldsymbol{A}|^3=8$，得 $|\boldsymbol{A}|=2$. 用 $\boldsymbol{A}$ 右乘矩阵方程的两端，得

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{A}.$$

因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，用 $\boldsymbol{A}^*$ 左乘上式的两端，并将 $|\boldsymbol{A}|=2$ 代入，得

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}.$$

于是 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*$ 是可逆矩阵，从而

$$\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}$$

$$=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}=6\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}.$$

练习 (2015,2,3) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{XA}^2-\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{AXA}^2=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

解题笔记

第三章　n 维向量——难点，加油

一、知识结构网络图

- n 维向量
  - 运算
    - 加法、数乘、内积 —— Schmidt 正交化
  - 线性表示
    - 概念：如果 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出
    - 判定
      - $\Longleftrightarrow$
        - 方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$ 有解
        - $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$
      - $\Longleftarrow$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 相关
    - 等价：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可互相线性表出
  - 线性相关
    - 概念：若存在不全为 0 的 $k_1,\cdots,k_s$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$
    - 判定
      - 充要条件
        - $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解
        - $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$
        - 某 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出
      - 充分条件
        - $n+1$ 个 n 维向量
        - 多数向量能用少数向量表示
  - 线性无关
    - 概念：如果 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 则必有 $k_1=0,\cdots,k_s=0$
    - 判定
      - $\Longleftrightarrow$
        - $[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解
        - $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s$
        - $\forall i$，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 不能由其余的向量表示
      - $\Longleftarrow$ 阶梯形向量组
  - 极大线性无关组
    - 概念
    - 求法
  - 向量组的秩 —— 矩阵的秩
  - 向量空间*
    - 概念 —— 解空间
    - 基
      - 坐标
      - 过渡矩阵
      - 规范正交基

* 仅数学一要求

学习札记：

【评注】 n 维向量概念抽象，逻辑推理要求高，是线性代数的难点之一，复习时要注意.

(1) 理解向量的线性组合、线性表示、线性相关与线性无关等概念，掌握向量线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

(2) 理解向量组的极大线性无关组的概念，掌握求向量组的极大线性无关组的方法.

(3) 了解向量组等价的概念，理解向量组的秩的概念，了解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系，会求向量组的秩.

(4) 了解向量内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.

今年考题

(2021,1) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$，记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两相交，则 l_1,l_2 依次为

(A) $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.　　(B) $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.　　(D) $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

数学家的小故事

雅可比在接到年轻的埃尔米特的研究作品时，曾经回信道："如果你的一些发现与我过去的工作恰好重合，先生，请不要因此止步不前。因为你必须在我停止的地方开始，那就必然会有小范围的接触。今后如果你给我与你通信的荣誉，我将只是在学习了。"

学习札记:

二、基本内容与重要结论

基础知识

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的有序数组

$$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}} \text{ 或 } \boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$

称为 n **维向量**,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**分量**(或**坐标**),前一个表示式称为**列向量**,后者称为**行向量**.

设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$,则

向量加法 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]^{\mathrm{T}}$;

数乘向量 $k\boldsymbol{\alpha}=[ka_1,ka_2,\cdots,ka_n]^{\mathrm{T}}$;

向量内积 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

【评注】 (1) 向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$ 的长度

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

例如,$\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1^2+2^2+3^2=14$,那么向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{14}$,而 $\frac{1}{\sqrt{14}}[1,2,3]^{\mathrm{T}}$ 是单位向量.

(2) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0 \Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

(3) 若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,即 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0$,称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交,记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

定义 3.1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量,$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是一组实数,称

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的**线性组合**.

定义 3.2 对 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}$,若存在实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta},$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的**线性组合**,或者说 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出(示)**.

例如,$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=[3,2]^{\mathrm{T}}$,则

$$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=\cdots,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,且表示法不唯一.

又如 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=[0,3]^{\mathrm{T}}$,那么无论 k_1,k_2 取何值,恒有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{\beta}$,即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

定义 3.3 对 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,如果存在不全为零的数使得

学习札记：

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**. 否则，称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性无关**(也就是说，当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 才能成立. 或者说，只要 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零，那么 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 必不为零).

例如，对于下列向量组的线性相关性是容易判断的：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,3,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,0,0]^{\mathrm{T}}$；

因为
$$0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$
组合系数 0,0,1，不全为 0. 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,4,6]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,0,5]^{\mathrm{T}}$；

因为
$$2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$
组合系数 2，−1，0 不全为 0，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,3,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,5,7]^{\mathrm{T}}$；

因为
$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$
组合系数 1，1，−1 不全为 0，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,4,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,0,6]^{\mathrm{T}}$.

如果 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，按分量写出，有

$$\begin{cases}k_1=0,\\2k_1+4k_2=0,\\3k_1+5k_2+6k_3=0.\end{cases}$$

可见 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}\Leftrightarrow k_1=0,k_2=0,k_3=0$，
故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

定义 3.4 设有两个 n 维向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$；

如果(Ⅰ)中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都可由(Ⅱ)中的向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则称向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)**线性表出**.

如果(Ⅰ)、(Ⅱ)这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个**向量组等价**.

例如，已知向量组

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$；

由
$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,$$
知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可互相线性表出，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是等价向量组.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,0]^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=[2,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[3,1,0]^{\mathrm{T}}$.

学习札记：

由

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=-\frac{5}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{5}{2}\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$$

知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出. 这两个向量组不等价.

定义 3.5　在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，若存在 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关，再加进任一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,s)$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_j$ 就线性相关，则称 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**极大线性无关组**.

定义 3.6　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的**秩**.

例如，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_6=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，再添加向量组中的任一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_j$ 必线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6$ 的一个极大线性无关组. 因此，向量组的秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6)=2$.

注意向量组的极大线性无关组一般情况下不唯一. 例如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_5$ 也是极大线性无关组，还有 …….

重要定理

定理 3.1　向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

$$\Leftrightarrow \text{非齐次线性方程组}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}\text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow \text{秩 } r[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]=r[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}].$$

定理 3.2　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

$$\Leftrightarrow \text{齐次线性方程组}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=\mathbf{0}\text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow \text{向量组的秩 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s.$$

学习札记：

推论 1 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充分必要条件是行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0.$$

推论 2 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

定理 3.3 任何部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 相关 $\Rightarrow$ 整体组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 相关，整体组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 无关 $\Rightarrow$ 任何部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 无关，反之都不成立.

[$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$（其中 $s>r$），称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是整体组.]

定理 3.4 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Rightarrow$ 延伸组 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性无关；$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性相关 $\Rightarrow$ 缩短组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，反之均不成立.

[向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2}]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{rm}]^{\mathrm{T}}$ 及 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1},\cdots,a_{s1}]^{\mathrm{T}},\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2},\cdots,a_{s2}]^{\mathrm{T}},\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{rm},\cdots,a_{sm}]^{\mathrm{T}}$，其中 $s\geqslant r$，则称 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的延伸组（或称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 的缩短组）.]

定理 3.5 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关，则其中必有一个向量可用其余的向量线性表出；反之，若有一个向量可用其余的 $s-1$ 个向量线性表出，则这 s 个向量必线性相关.

定理 3.6 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表示法唯一.

定理 3.7 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，而且 $s>t$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. 即如果多数向量能用少数向量线性表出，那么多数向量一定线性相关.

推论 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，且它可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则 $s\leqslant t$.

定理 3.8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$.

推论 如果（Ⅰ），（Ⅱ）是两个等价的向量组，则 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$.

定理 3.9 如果 $r(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 中有 r 个线性无关的列向量，而其他列向量都是这 r 个线性无关列向量的线性组合，也就是 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩.

一般地，$r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=\boldsymbol{A}$ 的列秩.

学习札记：

【评注】(1) 向量组的线性相关(无关)是一抽象概念，在理解时要仔细体会“有一组”与“任一组”，许多错误往往发生在此.

对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，恒有 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是否线性相关，其实就是问除上述情况外，还能否再找到一组数，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 仍能成立？如若可以(即有一组不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$)，则向量组线性相关，如若不行(即对任一组不全为 0 的数恒有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$)，则向量组线性无关.

(2) 要知道 3 维向量组线性相关(无关)的几何意义，这有助于对概念的理解.

1°　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 坐标成比例

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，则存在不全为 0 的 k_1,k_2，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$.

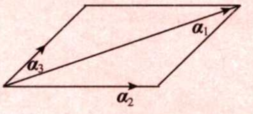
不妨设 $k_1\neq0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线，其坐标成比例.

反过来亦对，略.

2°　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则存在不全为 0 的 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$



不妨设 $k_1\neq0$，于是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

说明向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为边的平行四边形上，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面.

反过来亦对，略.

(3) 要搞清向量组的线性相关、齐次方程组有非零解、向量组的秩等知识点的联系与转换；要搞清线性相关、线性表出之间的联系与转换；要掌握性质与判断方法.

例如，若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$.

分析 (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，故存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

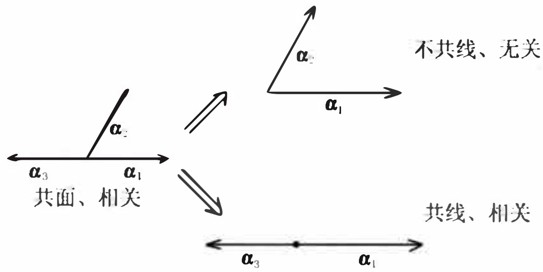
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

那么有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+0\boldsymbol{\alpha}_{s+1}=\mathbf{0}$，而 $k_1,k_2,\cdots,k_s,0$ 不全为零，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 必线性相关.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 的线性相关性不确定.

从几何上看

学习札记：



从坐标上看 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ 线性相关

$\nearrow$ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 线性无关

$\searrow$ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ 线性相关

【评注】 本题(1)实际上是给出定理3.3的一个证明，而(2)表明向量个数的增减对线性相关性的影响是单向的.

数学家的小故事

在关于牛顿和莱布尼兹微积分优先权的争论中，英国和欧洲大陆的数学家停止了思想交换，英国数学家继承牛顿的几何方法，而欧洲大陆的数学家继续使用莱布尼兹的分析法并深入发展。这件事的影响是如此巨大，它不仅使英国的数学家落在后面，而且使数学损失了一些最有才能的人应可做出的贡献。

学习札记：

三、典型例题分析选讲

线性相关

【例 3.1】　下列向量组中，线性无关的是

(A) $[1,2,3,4]^{\mathrm{T}},[2,3,4,5]^{\mathrm{T}},[0,0,0,0]^{\mathrm{T}}$.

(B) $[1,2,-1]^{\mathrm{T}},[3,5,6]^{\mathrm{T}},[0,7,9]^{\mathrm{T}},[1,0,2]^{\mathrm{T}}$.

(C) $[a,1,2,3]^{\mathrm{T}},[b,1,2,3]^{\mathrm{T}},[c,3,4,5]^{\mathrm{T}},[d,0,0,0]^{\mathrm{T}}$.

(D) $[a,1,b,0,0]^{\mathrm{T}},[c,0,d,6,0]^{\mathrm{T}},[a,0,c,5,6]^{\mathrm{T}}$.　　[　　]

分析　(A) 中有零向量必线性相关. 因为

$$0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

系数 0,0,1 不全为 0.

(B) 是 4 个三维向量必线性相关. 定理 3.2 推论 2：$n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

(C) 是 4 个四维向量可用行列式(定理 3.2 推论 1). 由于

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-d\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

从而线性相关.

(D) 中，因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}\neq 0$，知 $[1,0,0]^{\mathrm{T}},[0,6,0]^{\mathrm{T}},[0,5,6]^{\mathrm{T}}$ 线性无关，那么其延伸组 $[a,1,b,0,0]^{\mathrm{T}},[c,0,d,6,0]^{\mathrm{T}},[a,0,c,5,6]^{\mathrm{T}}$ 必线性无关.

【例 3.2】　若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,3,4,-2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,3,t]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,-1,2,0]^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $t=$ ______.

分析　设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，按分量写出，即有

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=0, \\ -2x_1+tx_2=0. \end{cases}$$

学习札记：

对系数矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&-1\\4&3&2\\-2&t&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&6-2(t+4)\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\text{ 线性相关}\Leftrightarrow[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}\text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow\text{ 秩 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3,$$

故 $6-2(t+4)=0$，即 $t=-1$.

【例 3.3】 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,2,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,6,a,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[3,4,7,-1]^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $a=$ ______.

分析 4 个 4 维向量计算行列式，有

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\2&1&6&4\\3&2&a&7\\1&-1&5&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&-1&2&-2\\0&-1&a-6&-2\\0&-2&3&-4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&2&-2\\-1&a-6&-2\\-2&3&-4\end{vmatrix}=0.$$

说明 $\forall a,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 恒线性相关.

注意 例 3.2 和例 3.3 处理手法的差异，前者 s 个 n 维向量转换为齐次方程组来分析，后者 n 个 n 维向量利用行列式简便.

【例 3.4】 (2002,3)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$，3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$，已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $a=$ ________.

分析 因

$$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 相关 $\Leftrightarrow\dfrac{a}{a}=\dfrac{2a+3}{1}=\dfrac{3a+4}{1}$,

学习札记：

所以 $a=-1$.

【例 3.5】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 都是 n 维向量，下列命题中错误的是

(A) 如果 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\beta}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\\\boldsymbol{\beta}_{s-1}\end{bmatrix}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 如果秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(C) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关.

(D) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

[　　]

分析 当 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出时，并不能保证每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s-1)$ 都不能用其余的向量线性表出. 例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,3)^{\mathrm{T}}$，虽然 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的. 所以(D) 不正确.

关于(A)，由 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\beta}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\\\boldsymbol{\beta}_{s-1}\end{bmatrix}$ 线性相关 $\xrightarrow{\text{定理 3.4}}$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关 $\xrightarrow{\text{定理 3.3}}$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

关于(B)，
$$\begin{aligned}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)&\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})\\&=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})\leqslant s-1<s.\end{aligned}$$

或者，由 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 线性表出，据定理 3.7 亦知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

对于(C)，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，故存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$. 此时必有 $k_s=0$，否则 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出. 于是 $k_1,k_2,\cdots,k_{s-1}$ 不全为 0，而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 必线性相关.

【评注】 线性无关的判定

若向量的坐标没有给出，通常用定义法或用秩的理论来分析判断论证，也要有反证法的构思.

(1) 用定义法证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的框图是：

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$

学习札记：

$$\Downarrow \text{恒等变形}\begin{cases}\text{乘}\\ \text{重组}\end{cases}$$

$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_s=0.$

(2) 用秩 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

$$\Leftrightarrow[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=\mathbf{0}\text{ 只有零解}$$

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s.$

要注意公式：$r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩，$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B}))$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B}),r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

(3) 反证法.

【例 3.6】 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

证明 (方法一) (用定义，重组)

设 $k_1(3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$, (1)

即 $(3k_1-5k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(-k_2+4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$. (2)

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases}3k_1-5k_3=0,\\2k_1+k_2=0,\\-k_2+4k_3=0.\end{cases}\tag{3}$$

因为 $\begin{vmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{vmatrix}=22\neq0$，齐次方程组(3)只有零解

$$k_1=0,k_2=0,k_3=0.$$

故向量组 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(方法二) (用秩) 令 $\boldsymbol{\beta}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1$，则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{bmatrix}.$$

因为矩阵 $\begin{bmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{bmatrix}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，即 $\boldsymbol{\beta}_1$,

$\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，亦即 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

学习札记：

【例 3.7】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量，若 $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证明 (方法一) (用定义、同乘) 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A\alpha}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

由 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{A}^{m+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^{m+2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\cdots$，用 $\boldsymbol{A}^{m-1}$ 左乘(1)式两端，并把 $\boldsymbol{A}^{m+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^{m+2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\cdots$ 代入，有

$$k_1\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.\tag{2}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故 $k_1=0$.

把 $k_1=0$ 代入(1) 式，有

$$k_2\boldsymbol{A\alpha}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

同理用 $\boldsymbol{A}^{m-2}$ 左乘上式，可知

$$k_2\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

从而 $k_2=0$.

类似可得 $k_3=0,\cdots,k_m=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

(方法二) (反证法) 如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则有不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A\alpha}+\cdots+k_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.\tag{1}$$

设 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 中第一个不为 0 的是 k_p(即 $k_1=k_2=\cdots=k_{p-1}=0$，$k_p\neq0,p\geqslant1$)，于是(1) 式化为

$$k_p\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.\tag{2}$$

用 $\boldsymbol{A}^{m-p}$ 乘(2) 并把 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^{m+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\cdots$ 代入，就有 $k_p\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 又因 $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，那么 $k_p=0$，与假设矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

【例 3.8】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 维列向量，若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证明 (用定义，同乘) 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

由于 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$，用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘(1) 式两端，得

$$k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}.\tag{2}$$

再用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘(2) 式两端，有

$$k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，故 $k_3=0$. 把 $k_3=0$ 代入(2) 得 $k_2=0$，再把 $k_2=0,k_3=0$ 代入(1) 得 $k_1=0$.

学习札记：

因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【例 3.9】 $(2008,\begin{smallmatrix}2\\3,4\end{smallmatrix})$ 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证明 **（方法一）** （用定义，同乘）由特征值、特征向量的定义，有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2.$$

设
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 乘(1) 得

$$-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},\tag{2}$$

(1)－(2) 得

$$2k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是不同特征值的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $k_1=0,k_3=0$. 代入(1) 得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$，从而 $k_2=0$. 因此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

（方法二） （反证法）因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量，所以它们线性无关. 那么如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则

$$\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2.\tag{1}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘(1) 式两端，并把 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入得

$$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2.\tag{2}$$

(2)－(1) 得 $\boldsymbol{\alpha}_2=-2k_1\boldsymbol{\alpha}_1$，与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关相矛盾.

【例 3.10】 设 4 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且与 4 维非零列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均正交，证明(Ⅰ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关.

证明 (Ⅰ)(用秩) 构造矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 3 的 3×4 矩阵. 由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},i=1,2,$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，于是

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\leqslant n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1,$$

从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(Ⅱ)(用定义) 设 $$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

用 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$ 左乘(1)，又 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = 0(i = 1,2,3)$，有 $k\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 = 0$. 而 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1 \neq 0$，故必有 $k = 0$. 把 $k = 0$ 代入(1)得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故必有

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 必线性无关.

练习　已知 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是特征值 λ_1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\beta}$ 是特征值 λ_2 的特征向量. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

解题笔记

学习札记：

【例 3.11】　已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，设

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C},$$

证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{C}| \neq 0$.

证明　记 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$.

必要性　若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，则秩 $r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = 3$. 又

$$r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{AC}) \leqslant r(\boldsymbol{C}) \leqslant 3,$$

因此秩 $r(\boldsymbol{C}) = 3$，即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，$|\boldsymbol{C}| \neq 0$.

充分性　若 $|\boldsymbol{C}| \neq 0$，即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，那么

$$r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{AC}) = r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = 3,$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

【例 3.12】　已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + a\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, a\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $a =$ ______.

分析　利用例 3.11.

令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + a\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3 = a\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3$，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

学习札记：

从而 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & a \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = 0,$

故 $a = 1$ 或 $a = -2$.

【例 3.13】 $(1997, \frac{3}{4})$ 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3, 3\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 22\boldsymbol{\alpha}_3, 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 5\boldsymbol{\alpha}_2 - 5\boldsymbol{\alpha}_3$. [ ]

分析 利用观察法，易见

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) - (\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + (\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0}$,

(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + (\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) - (\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = \mathbf{0}$,

故(A)，(B) 均线性相关.

对于(C) 和(D)，简单地加加减减是得不到 $\mathbf{0}$，就不应继续观察下去，而应立即转化为计算行列式(其背景是例 3.11).

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$，故(C) 线性无关. 易见(D) 之行列式为 0，(D) 线性相关.

注意，(C) 与(D) 的行列式不必全都计算，只要算其中之一就可下结论. 本题难度 0.73.

线性表出

【例 3.14】 $(2004, 3)$ 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, a+2, -3a)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (-1, -b-2, a+2b)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (1,3,-3)^{\mathrm{T}}$. 试讨论当 a, b 为何值时，

(Ⅰ) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

(Ⅲ) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$，对 $[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}]$ 作初等行变换，有

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right]$$

学习札记:

(Ⅰ) 当 $a=0$,对任意 b

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&0&-1\end{array}\right]$$

$r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$,方程组无解,$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(Ⅱ) 当 $a\neq0$ 且 $a\neq b$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$,方程组有唯一解.

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1 & x_1=1-\dfrac{1}{a}\\ ax_2-bx_3=1 & x_2=\dfrac{1}{a}\\ (a-b)x_3=0\Rightarrow x_3=0\end{cases}$$

解得 $x_1=1-\dfrac{1}{a},x_2=\dfrac{1}{a},x_3=0$,

即 $\boldsymbol{\beta}=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅲ) 当 $a=b\neq0$ 时

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&a&-a&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1-\dfrac{1}{a}\\0&1&-1&\dfrac{1}{a}\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

令 $x_3=t$ 解出 $x_1=1-\dfrac{1}{a},x_2=\dfrac{1}{a}+t$.

即 $\boldsymbol{\beta}=\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\dfrac{1}{a}+t\right)\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$,$t$ 为任意常数.

【评注】 若已知向量的坐标而要判断能否线性表出的问题,通常是转换为非齐次线性方程组是否有解的讨论.如果向量的坐标没有给出而问能否线性表出,通常用线性相关及秩的理论分析、推理.

【例 3.15】 (2005,2) 确定常数 a,使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 (方法一)　因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出,有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3).$$

又因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,故必有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3).$$

由于 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\leqslant3$,故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$,于是

学习札记：

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)^2=0,$$

所以 $a=1$ 或 $a=-2$.

若 $a=1$,有 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出,但 $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,1,4)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

若 $a=-2$,易见

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}=2,$$

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r\begin{bmatrix}1&-2&-2\\1&-2&-2\\-2&4&-2\end{bmatrix}=2,$$

与 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 相矛盾.

所以 $a=1$ 为所求.

(方法二) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出,即三个方程组

$$x_{1j}\boldsymbol{\beta}_1+x_{2j}\boldsymbol{\beta}_2+x_{3j}\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_j,(j=1,2,3)$$

同时有解.

解题笔记

【例 3.16】 (2003,4) 设有向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,2]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,3]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,a+2]^{\mathrm{T}}$;(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,a+3]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=[2,1,a+6]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=[2,1,a+4]^{\mathrm{T}}$.试问:当 a 为何值时,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价?当 a 为何值时,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价?

分析 所谓向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价,即向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)可以互相线性表出.如果方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$$

有解,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

如果对同一个 a,三个方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1,$$
$$y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_2,$$
$$z_1\boldsymbol{\alpha}_1+z_2\boldsymbol{\alpha}_2+z_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$$

均有解，则说明向量组（Ⅱ）可以由向量组（Ⅰ）线性表出. 从而向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价 $\Leftrightarrow r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ})=r(\text{Ⅱ})$.

解　对 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$ 作初等行变换，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&1&a&a+1&a+2&a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{array}\right].$$

由方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$ 知，只要 $a\neq-1$ 方程组总有唯一解，即 $a\neq-1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 而 $a=-1$ 时，方程组无解，$\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

由方程组 $y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_2$ 知，$\forall a$，方程组总有解，即 $\boldsymbol{\beta}_2$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

由方程组 $z_1\boldsymbol{\alpha}_1+z_2\boldsymbol{\alpha}_2+z_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 知，只要 $a\neq-1$，方程组就有解，$\boldsymbol{\beta}_3$ 就可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

因此，当 $a\neq-1$ 时，向量组（Ⅱ）可由向量组（Ⅰ）线性表出.

反之，由于行列式

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&0\\a+3&a+6&-2\end{vmatrix}=6\neq0,$$

故 $\forall a$，三个方程组 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_j\ (j=1,2,3)$ 恒有解，即 $\forall a$，向量组（Ⅰ）总可由向量组（Ⅱ）线性表出.

因此，$a\neq-1$ 时，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价.

而 $a=-1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

【例 3.17】　(1992,1) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，问

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？证明你的结论.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？证明你的结论.

解　(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

（方法一）　因为已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，那么它的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_2$，

学习札记：

学习札记：

$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关(定理 3.3). 又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出(定理 3.6).

(方法二) 因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,故存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,其中必有 $k_1\neq 0$. 否则,若 $k_1=0$,则 k_2,k_3 不全为零,使 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,即 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,进而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关(定理 3.3),与已知矛盾. 于是 $k_1\neq 0$,由此有 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2)$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(方法一) (反证法)若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,设

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

由(1)知,$\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$,代入上式整理,得到

$$\boldsymbol{\alpha}_4=(k_1l_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1l_3+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,从而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关(定理 3.5),与已知矛盾. 因此,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(方法二) 考查方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$,因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,故系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,故增广矩阵的秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\geqslant 3$. 于是 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$,方程组无解,因此,$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

【例 3.18】 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出,但 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出. 判断

(1)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出?为什么?

(2)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出?为什么?

解 **(方法一)** (1)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出.

因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出,故可设

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+l_m\boldsymbol{\alpha}_m. \qquad ①$$

此时必有 $l_m\neq 0$,否则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出与已知矛盾. 那么

$$\boldsymbol{\alpha}_m=\frac{1}{l_m}(\boldsymbol{\beta}-l_1\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出.

(2)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出.

如果 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出,可设

$$\boldsymbol{\alpha}_m=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}. \qquad ②$$

将 ② 代入 ①,整理得

$$\boldsymbol{\beta}=(l_1+l_mk_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2+l_mk_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_{m-1}+l_mk_{m-1})\boldsymbol{\alpha}_{m-1}.$$

说明 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出，与已知矛盾．故 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出．

（方法二）　据已知有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\xlongequal{(1)}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}),$$

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+1\xlongequal{(2)}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}),$$

考察
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_m,\qquad (*)$$

$$\begin{aligned}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)&\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+1\\&\xlongequal{(2)}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta})\\&\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})\\&\xlongequal{(1)}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),\end{aligned}$$

于是 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+1=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，即方程组（$*$）无解，故 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出．

由于 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_m)$，故 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出．

【评注】　希望很好地体会和总结由例3.17和例3.18给出的面对抽象的向量组讨论线性表出时，所用到的一些思想方法和技巧．

练习　（1）（2010，$\frac{2}{3}$）设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出．下列命题正确的是

（A）若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\leqslant s$.

（B）若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$.

（C）若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\leqslant s$.

（D）若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$.　　　　［　　］

解题笔记

学习札记：

学习札记：

(2)(2013，$_2{}^1{}_3$) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量等价. [　　]

解题笔记

向量组的秩

【例 3.19】 如果向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_t}$ 都是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组，证明 $r=t$.

证明 因为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组，所以 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_{j_k}(k=1,2,\cdots,t)$ 线性相关. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_{j_k}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出，从而向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表出. 又因向量组(Ⅱ)是极大线性无关组，是线性无关的，所以 $t\leqslant r$(定理 3.7).

同理 $r\leqslant t$，故 $r=t$.

【评注】 本题告诉我们向量组的极大线性无关组往往是不唯一的，其成员可以不一样，但极大线性无关组中向量的个数是一样的，由此引出向量组秩的概念. 向量组的秩为 r 就是指该向量组的极大线性无关组有 r 个向量.

【例 3.20】 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3,-5,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[-2,-6,10,a]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[4,1,6,a+10]^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组是______.

分析

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\1&3&-6&1\\1&-5&10&6\\3&-1&a&a+10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&2&-4&-3\\0&-6&12&2\\0&-4&a+6&a-2\end{bmatrix}$$

学习札记：

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&2&-4&-3\\0&0&0&-7\\0&0&a-2&a-8\end{bmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)<4\Leftrightarrow a=2$. 此时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，极大线性无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

【例 3.21】 $(2006,\dfrac{3}{4})$ 设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1+a,1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,2+a,2,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,3,3+a,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[4,4,4,4+a]^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

解 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3.$$

那么当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

当 $a=-10$ 时. 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4].$$

易知 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组且 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

【评注】 本题也可直接对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{bmatrix},$$

然后由对 $a=0$，$a\neq 0$ 分别讨论，请读者完成.

学习札记：

【例 3.22】 已知向量组（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与（Ⅱ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 有相同的秩，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

证明 由于向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）有相同的秩，因此它们极大线性无关组所含向量个数相同. 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组（Ⅰ）的极大线性无关组，那么 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 也是向量组（Ⅱ）中的 r 个线性无关的向量. 又因 $r(\text{Ⅱ})=r(\text{Ⅰ})=r$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 也是向量组（Ⅱ）的极大线性无关组. 因此，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出，也就有 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

【例 3.23】 设向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表出，且秩 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$，证明向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价.

分析 要证向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，也就是要证（Ⅰ）与（Ⅱ）可以互相线性表出，现已知（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出，故只需证（Ⅱ）可由（Ⅰ）线性表出，出发点就是秩 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$.

证明 设秩 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=r$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 分别是向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）的极大线性无关组. 由于（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出，那么

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=r.$$

又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的极大线性无关组，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，进而向量组（Ⅱ）可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，也就是（Ⅱ）可由（Ⅰ）线性表出. 又已知（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出，所以（Ⅰ）与（Ⅱ）等价.

【评注】 注意，若向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，则秩 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$. 但 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$ 时，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）不一定等价. 请思考下例：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\text{与 }\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

矩阵的秩

【例 3.24】 求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\1&1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&a\end{bmatrix}$ 的秩.

解（方法一）　经初等变换矩阵的秩不变

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{bmatrix}.$$

若 $a \neq 1$ 且 $a \neq 1-n$，则 $r(A)=n$.

若 $a=1$，则 $r(A)=1$.

若 $a=1-n$，则 $r(A)=n-1$.

（方法二）　用行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

若 $a \neq 1$ 且 $a \neq 1-n$，则 $|A| \neq 0$，故 $r(A)=n$.

若 $a=1$，易见 $r(A)=1$.

若 $a=1-n$，知 $n-1$ 阶子式

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}=(a+n-2)(a-1)^{n-2} \neq 0,\ |A|=0,$$

故 $r(A)=n-1$.

（方法三）　用相似见例 5.33.

【例 3.25】　设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & t & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}[2,3,4]$，若秩 $r(A+AB)=2$，则 $t=$ ______.

学习札记：

学习札记：

分析 由于 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})]$，又

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}[2,3,4]=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}2&3&4\\6&9&12\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&4\\6&10&12\\0&0&1\end{bmatrix}$$

是可逆矩阵，故 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})=2$.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&4\\6&t&2\\4&6&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&4\\0&t-9&-10\\0&0&-5\end{bmatrix},$$

那么，$r(\boldsymbol{A})=2\Leftrightarrow t=9$.

【例 3.26】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，证明秩

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})).$$

证明 （方法一） 对于齐次方程组

$$(\text{Ⅰ})\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}\text{ 与}(\text{Ⅱ})\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组（Ⅱ）的任一个解，则由

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha})=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$$

知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组（Ⅰ）的解. 因此方程组（Ⅱ）的解集合是方程组（Ⅰ）的解集合的子集合. 又因（Ⅰ）的解向量的秩为 $s-r(\boldsymbol{AB})$，（Ⅱ）的解向量的秩为 $s-r(\boldsymbol{B})$，故有

$$s-r(\boldsymbol{B})\leqslant s-r(\boldsymbol{AB}),$$

即 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$.

另一方面，$r(\boldsymbol{AB})=r((\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$.

命题得证.

（方法二） 记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，并对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s],$$

说明 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量 $\boldsymbol{\gamma}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，因此据定理 3.8 与 3.9 有

$$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{A}).$$

类似地，对 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 分别按行分块，有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_m \end{bmatrix},$$

说明 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量 $\boldsymbol{\delta}_j (j = 1,2,\cdots,m)$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出，因此

$$r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m) \leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = r(\boldsymbol{B}).$$

【例 3.27】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，证明

$$r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n.$$

证明　对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块，记 $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]$，则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s] = [\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_s] = [\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}],$$

于是 $\boldsymbol{A\beta}_j = \boldsymbol{0} (j = 1,2,\cdots,s)$，即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量均是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 由于方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解向量的秩为 $n - r(\boldsymbol{A})$，所以

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s) \leqslant n - r(\boldsymbol{A}).$$

又秩 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s) = r(\boldsymbol{B})$，从而有 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

【评注】　关于 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，应当有两个重要的思路：

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解；

(2) 秩 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

【例 3.28】　(2008,1) 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置.

(1) 证明秩 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $r(\boldsymbol{A}) < 2$.

证明　(1) 由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均是列向量，故 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 3 阶矩阵，且有 $r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant 1$，$r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\boldsymbol{\beta}) \leqslant 1$，从而

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) + r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 2.$$

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，不妨设 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$，则

$$r(\boldsymbol{A}) = r[\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + (k\boldsymbol{\alpha})(k\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}] = r[(1+k^2)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}] = r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1 < 2.$$

【例 3.29】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，若 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,9,9,9]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = [2,0,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = [2,0,0,1]^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的三个解，证明 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$.

证明　因为 $\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 = [-1,9,9,9]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_3 = [-1,9,9,8]^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解，所以 $n - r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$. 又因 $n = 4$，故 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$，说明 $\boldsymbol{A}$ 中 3 阶子式全为 0，因而伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$.

学习札记：

学习札记：

练习 $\left(2018, \frac{1}{2,3}\right)$ 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩，$(\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵，则

(A) $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$. (B) $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$. (D) $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

解题笔记

向量空间*

定义 3.7 全体 n 维向量连同向量的加法和数乘运算合称为 n 维**向量空间**.

定义 3.8 设 W 是 n 维向量的非空集合，如果满足

(1) $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$，必有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$；

(2) $\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in W$ 及任一实数 k，必有 $k\boldsymbol{\alpha}\in W$，

则称 W 是 n 维向量空间的**子空间**.

定义 3.9 如果向量空间 V 中的 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；

(2) V 中任意向量 $\boldsymbol{\beta}$ 均可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta},$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为向量空间 V 的一个**基底**(或**基**). 基中所含向量的个数 m 称为向量空间 V 的**维数**，记作 $\dim V=m$，并称 V 是 m 维向量空间. 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的表示系数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 称为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 下的**坐标**.

定义 3.10 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是向量空间的一组基，如果它们满足

* 注：本节仅数学一要求

学习札记：

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

则称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为规范正交基.

设齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的集合为 $\boldsymbol{W}$，由解的性质知：

若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},k\boldsymbol{\alpha}$ 仍是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{W}$ 是 n 维向量空间的子空间，通常称为解空间.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=[0,0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[2,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$$

是解空间的基，解空间的维数是 $n-r(\boldsymbol{A})=4-2=2$.

本题中，$\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2$ 已经正交，将其单位化，

$$\boldsymbol{\gamma}_1=[0,0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}[2,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$$

就是解空间的规范正交基.

定义 3.11　在 n 维向量空间给定两组基

(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$；　　(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，

若

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2&=c_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n&=c_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,\end{aligned}\tag{3.1}$$

即

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{C},\tag{3.2}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

定理 3.10　如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维向量空间的两个基底，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵.

定理 3.11　如果向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基底 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的坐标为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，则坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}\quad 或\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{Cy},$$

学习札记：

其中 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是由基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基底 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

定理 3.12 若 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 非零且两两正交，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

定理 3.13 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是规范正交基，设

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n]\boldsymbol{C},$$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是规范正交基的充分必要条件是 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵.

【例 3.30】 (2003,1) 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$的过渡矩阵为________.

分析 据已知，有$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\\ \boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\end{cases}$ 那么，按式(3.1)知，过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}.$$

或由式(3.2)有$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$，所以

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}.$$

【例 3.31】 (2010,1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,-1,0]^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0,2]^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,1,a]^{\mathrm T}$，若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间维数是 2，则 $a=$________.

分析 按定义，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 所生成的向量空间维数是 2 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$. 对$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$作初等变换，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $a=6$.

【例 3.32】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1]^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,3,3]^{\mathrm T},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,7,1]^{\mathrm T}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=[2,1,1]^{\mathrm T},\boldsymbol{\beta}_2=[5,2,2]^{\mathrm T},\boldsymbol{\beta}_3=[1,3,4]^{\mathrm T}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的两组基，那么，在这两组基下有相同坐标的向量是________.

分析 设向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在这两组基下有相同的坐标$[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm T}$，即

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3.$$

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}_3)=\mathbf{0}$$

把坐标代入，并整理得

学习札记：

$$\begin{cases}-x_1-3x_2+2x_3=0,\\ x_1+x_2+4x_3=0,\\ x_2-3x_3=0,\end{cases}$$

解出 $x_1=-7t, x_2=3t, x_3=t$，所以

$\boldsymbol{\gamma}=-7t[1,2,1]^{\mathrm{T}}+3t[2,3,3]^{\mathrm{T}}+t[3,7,1]^{\mathrm{T}}=[2t,2t,3t]^{\mathrm{T}}$，$t$ 为任意常数.

【例 3.33】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的两组基，由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵是 $\boldsymbol{C}$. 其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}$，而 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；

(2) 求向量 $\boldsymbol{\gamma}=(9,6,5)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标；

(3) 若向量 $\boldsymbol{\delta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标是 $(1,-3,5)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\delta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

解 (1) 按定义，$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C}$，于是

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{C}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\gamma}$，

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&9\\0&1&1&6\\-1&1&1&5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&4\end{array}\right]$$

故向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标是 $(1,2,4)^{\mathrm{T}}$.

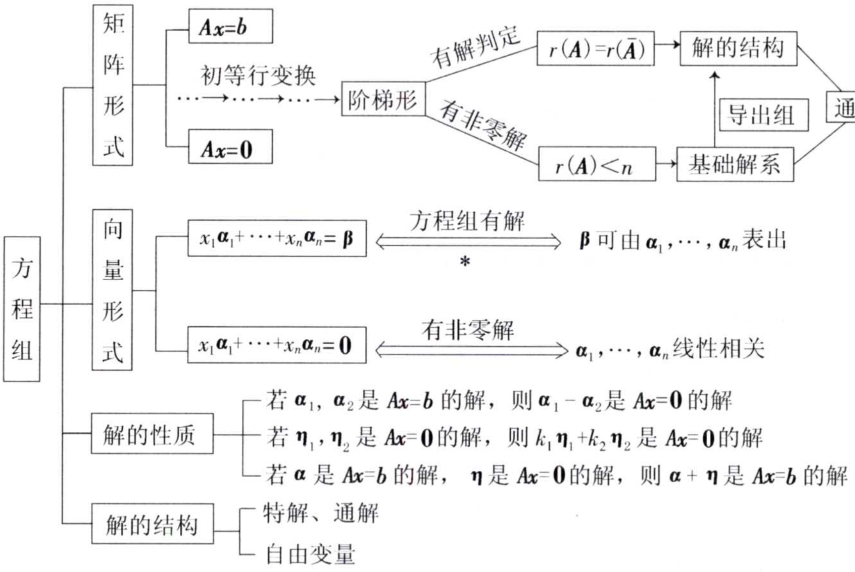
(3) 由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的坐标变换公式为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，有

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\10\end{bmatrix}$$

即向量 $\boldsymbol{\delta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下坐标为 $(2,-2,10)^{\mathrm{T}}$.

第四章　线性方程组——重点，别马虎大意

一、知识结构网络图



如有方程组就加减消元、讨论参数，求解.

如没有方程组大概需求秩，用解的结构分析推理来求解.

$$* \ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}$$

$$\Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示

$$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})$$

学习札记：

【评注】 线性方程组在代数中地位重要，是考研热点之一. 这一部分解题的思路比较清晰，但往届考生中有些同学忽视基本运算，对概念的理解上亦有偏差，因此出错率较高，常犯低级错误.

(1) 理解线性方程组解的概念.

(2) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 可能有解(唯一解或无穷多解)，亦可能无解，要理解方程组有解的充要条件是秩 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

(3) n 元齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 必有零解，问题是除去零解之外是否还有其它的解(即非零解)？判断方法是检查 $r(\boldsymbol{A}) < n$？特殊情况可检查行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$？

要理解基础解系这一概念，其实它就是解向量的极大线性无关组，要掌握基础解系的求法与证明.

(4) 要熟悉线性方程组解的性质，掌握解的结构，熟练运用初等行变换求通解(特解、导出组基础解系).

今年考题

(2021,2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3]$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，则

(A) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(C) $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(D) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(2021,3) 设 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4]$ 为 4 阶正交矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$k$ 表示任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x} =$

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 + k\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 + k\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4 + k\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + k\boldsymbol{\alpha}_4$.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

方程组
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{4.1}$$
称为 n 个未知数 m 个方程的**非齐次线性方程组**，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代表 n 个未知量，m 是方程的个数，m 可以等于 n，也可以大于 n 或者小于 n，a_{ij} 是第 $i(i=1,2,\cdots,m)$ 个方程中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的系数，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是第 i 个方程的常数项.

如果 $b_i=0(\forall i=1,2,\cdots,m)$，则称方程组
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\tag{4.2}$$
为**齐次线性方程组**. 它是方程组(4.1)的**导出组**(也称(4.2)为(4.1)对应的齐次线性方程组).

若将一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 分别代替方程组(4.1)中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使式(4.1)中 m 个等式都成立，则称有序数组 $[c_1,c_2,\cdots,c_n]$ 是方程组(4.1)的**一组解**. 解方程就是要找出方程组的全部解.

线性方程组(4.1)的全体系数及常数项所构成的矩阵
$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix}$$
称为方程组(4.1)的**增广矩阵**，而由全体系数组成的矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$
称为方程组(4.1)的**系数矩阵**.

方程组(4.1)可以用矩阵表示为：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^{\mathrm{T}}$.

如果两个方程组有相同的解集合，则称它们是**同解方程组**.

学习札记：

定义 4.1　下列三种变换称为线性方程组的**初等变换**.

(1) 用一个非零常数乘方程的两边；

(2) 把某方程的 k 倍加到另一方程上；

(3) 互换两个方程的位置.

线性方程组经初等变换化为阶梯形方程组后，每个方程中的第一个未知量通常称为**主变量**，其余的未知量称为**自由变量**.

例如，对增广矩阵作初等行变换，化为

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ & 5 & 6 & 0 & 1 & 9 \\ & & & & 1 & 2 \end{array}\right],$$

则 x_1,x_2,x_5 为主变量，x_3,x_4 为自由变量.

定义 4.2　向量组 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的**基础解系**，如果

(1) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；

(2) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关；

(3) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解都可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性表出.

如果 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，那么，对任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_t$，

$$c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_t\boldsymbol{\eta}_t$$

是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

注意：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是不唯一的.

主要定理

定理 4.1　线性方程组的初等行变换把线性方程组变成与它同解的方程组.

定理 4.2　设 n 元线性方程组为(4.1)，对它的增广矩阵施行高斯消元法，得到阶梯形矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccccc:c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

如果 $d_{r+1}\neq 0$，方程组(4.1) 无解；如果 $d_{r+1}=0$，方程组有解，而且当 $r=n$ 时有唯一解，当 $r<n$ 时有无穷多解.

学习札记:

定理 4.3 齐次方程组(4.2)有非零解

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) < n$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

推论 1 当 $m < n$(即方程的个数 < 未知数的个数)时,齐次线性方程组(4.2)必有非零解.

推论 2 当 $m = n$ 时,齐次线性方程组(4.2)有非零解的充分必要条件是行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

定理 4.4 设齐次线性方程组(4.2)系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) = r < n$,则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n - r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解向量所构成.

定理 4.5 (有解判定定理)非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是其系数矩阵和增广矩阵的秩相等,即 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

若 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = n$,则方程组有唯一解;

若 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) < n$,则方程组有无穷多解.

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) + 1 = r(\overline{\boldsymbol{A}})$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出.

定理 4.6 (解的性质)

(1) 如果 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的两个解,那么其线性组合仍是该齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个解,则 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(3) 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解,$\boldsymbol{\eta}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解,则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解.

定理 4.7 (解的结构) 对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$,若 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r$,且已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{\zeta}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的某个已知解,则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为

$\boldsymbol{\zeta}_0 + c_1\boldsymbol{\eta}_1 + c_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$,其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 为任意常数.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

基础解系

【例 4.1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\2&1&7&4&3\\-1&2&-1&3&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含解向量的个数是________.

分析 由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个解向量所构成，故应计算秩 $r(\boldsymbol{A})$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\2&1&7&4&3\\-1&2&-1&3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&2&-1\\0&2&2&4&2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&2&-1\\0&0&0&0&4\end{bmatrix},$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=3$，故

$$n-r(\boldsymbol{A})=5-3=2,$$

从而基础解系中所含解向量个数为 2.

练习　(2004,3) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

(A) 不存在.　　(B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量.　　(D) 含有三个线性无关的解向量.

解题笔记

学习札记：

【例 4.2】 求齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad\quad + 3x_4 - x_5 = 0, \\ \quad\quad 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

的基础解系.

解 先行变换把系数矩阵化为阶梯形

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

（方法一）化为行最简

$$\boldsymbol{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

主元：x_1, x_2, x_4；自由变量：x_3, x_5

$$n - r(\boldsymbol{A}) = 5 - 3 = 2$$

基础解系：$\boldsymbol{\eta}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}, 0, 2, 1\right)^{\mathrm{T}}.$$

（方法二）化出单位阵

$$\boldsymbol{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

单位阵 1,3,4 列，自由变量：x_2, x_5. $n - r(\boldsymbol{A}) = 5 - 3 = 2$.

基础解系：$\boldsymbol{\xi}_1 = (-1, 1, -2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\xi}_2 = (-5, 0, -9, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

（方法三）由阶梯形直接求解

$$\boldsymbol{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

因 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$，可选 x_3, x_5 为自由变量.

令 $x_3 = 1, x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = 0, x_2 = -\frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{2}$，

$x_3 = 0, x_5 = 1 \Rightarrow x_4 = 2, x_2 = -\frac{9}{2}, x_1 = -\frac{1}{2}$.

即方法一中 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$.

学习札记：

由$\begin{vmatrix}1&0&3\\0&1&4\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0$，选 x_2,x_5 为自由变量.

可得出方法二中 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$.

【注】　求基础解系是一重要的基本功，希望大家认真对待，要正确、熟练，3 种求法要会灵活运用.

【例 4.3】　齐次方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+2x_4-x_5=0,\\2x_1+4x_2+5x_3+5x_4+2x_5=0,\\3x_1+6x_2+7x_3+10x_4+5x_5=0\end{cases}$$

的通解________.

分析　对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行最简有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&2&-1\\2&4&5&5&2\\3&6&7&10&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&2&-1\\0&0&-1&1&4\\0&0&-2&4&8\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&2&-1\\0&0&1&-1&-4\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&0&11\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

(1) 同解方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2\qquad+11x_5=0\\\qquad\quad x_3\quad-4x_5=0\\\qquad\qquad x_4\qquad=0\end{cases}$$

令 $x_2=k_1,x_5=k_2$ 得 $x_4=0,x_3=4k_2,x_1=-2k_1-11k_2$

方程组通解：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2k_1-11k_2\\k_1\\4k_2\\0\\k_2\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-11\\0\\4\\0\\1\end{bmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 任意常数})$$

(2) 用基础解系

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&2&0&0&11\\0&0&1&0&-4\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$n-r(\boldsymbol{A})=5-3=2$，主元：$x_1,x_3,x_4$，自由变量 x_2,x_5

基础解系：$\boldsymbol{\eta}_1=(-2,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{\eta}_2=(-11,0,4,0,1)^{\mathrm{T}}$

通解 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$($k_1,k_2$ 任意常数).

【注】　用 k_1,k_2 与 1,0 和 0,1 两种方式求解都要掌握.

学习札记：

【例 4.4】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&3&2\\2&a&1\\1&7&8\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解是________.

分析 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&3&2\\2&a&1\\1&7&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&a-4&-5\\0&5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&a+1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故必有 $a=-1$ 而 $n-r(\boldsymbol{A})=3-2=1$.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，k 为任意常数.

【注】 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7&4&11\\4&63&67\\11&67&78\end{bmatrix}$ 是不必计算并加减消元求解的.

【评注】 如何确定自由变量并赋值？

(1) 对系数矩阵作初等行变换化其为阶梯形.

(2) 由秩 $r(\boldsymbol{A})$ 确定自由变量的个数 $n-r(\boldsymbol{A})$.

(3) 找出一个秩为 $r(\boldsymbol{A})$ 的矩阵，则其余的 $n-r(\boldsymbol{A})$ 列对应的就是自由变量.

(4) 每次给一个自由变量赋值为1，其余的自由变量赋值为0(注意共需赋值 $n-r(\boldsymbol{A})$ 次).

对阶梯形方程组由下往上依次求解，就可得到方程组的解.

练习 $\left(2020,\dfrac{2}{3}\right)$ 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

(A) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(B) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(C) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

(D) $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数. [ ]

解题笔记

学习札记:

【例 4.5】 (2004,1) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}\qquad (n\geqslant 2),$$

试问 a 为何值时,该方程组有非零解?并求其通解.

解 (方法一) 对系数矩阵作初等行变换,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ -3a & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

(1) 若 $a=0$,秩 $r(\boldsymbol{A})=1$,方程组有非零解,其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0.$$

由此得基础解系为

$\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,0,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$,

所以方程组的通解是

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}\ (k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\text{ 为任意常数}).$$

(2) 若 $a\neq 0$,对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 继续作初等行变换,有

$$\boldsymbol{B}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a+\frac{1}{2}n(n+1) & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

故当 $a=-\frac{1}{2}n(n+1)$ 时,秩 $r(\boldsymbol{A})=n-1<n$,方程组也有非零解.其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ -nx_1+x_n=0,\end{cases}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=[1,2,\cdots,n]^{\mathrm{T}}$,

于是方程组的通解为 $k\boldsymbol{\eta}$,k 为任意常数.

学习札记：

(方法二) 由于系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = a^{n-1}\left[a+\frac{1}{2}(n+1)n\right],$$

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ 或 } a=-\frac{1}{2}(n+1)n.$$

(1) 若 $a=0$，对系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0.$$

由此得基础解系为

$\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,0,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$,

此时方程组的通解为

$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

(2) 若 $a=-\frac{1}{2}(n+1)n$，对系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -3a & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

学习札记:

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\-3x_1+x_3=0,\\\quad\vdots\quad\vdots\\-nx_1+x_n=0.\end{cases}$$

因为系数矩阵的秩为 $n-1$,可求出基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=[1,2,\cdots,n]^{\mathrm{T}},$$

此时方程组的通解为

$$k\boldsymbol{\eta},k\ 为任意常数.$$

【例 4.6】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个线性无关的解.

证明:$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

证明　因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,

由解的性质知 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是相应 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.若

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

即$(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_1-k_1\boldsymbol{\alpha}_2-k_2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,故

$$\begin{cases}k_1+k_2=0,\\-k_1=0,\\-k_2=0,\end{cases}$$

故必有 $k_1=0,k_2=0$,从而 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,有 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$.

而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 已有 2 个线性无关的解,知 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,亦即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$.

从而 $r(\boldsymbol{A})=1$.那么 $n-r(\boldsymbol{A})=3-1=2$.

因此,$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

【评注】 要证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

需要(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

(3)$t=n-r(\boldsymbol{A})$.

练习　$\left(2005,\dfrac{1}{2}\right)$已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行是$[a,b,c]$,a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

学习札记：

解题笔记

解方程组 $Ax=b$

(1) 要会解方程组,会处理参数.

【例 4.7】 解方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=1, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=3, \\ x_1-x_3+x_4=2, \end{cases}$$

并求满足 $x_1=-x_2$ 的所有解.

解 对增广矩阵作初等行变换

$$\overline{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ & 1 & -3 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})=2<4$,方程组有无穷多解.

(1) 同解方程组

$$\begin{cases} x_1=x_3-x_4+2, \\ x_2=3x_3+1, \end{cases}$$

令 $x_3=k_1,x_4=k_2 \Rightarrow x_2=3k_1+1,x_1=k_1-k_2+2$

方程组通解

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} k_1-k_2+2 \\ 3k_1+1 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},k_1,k_2 \text{ 为任意常数.}$$

(2) 解的结构

$$\overline{\mathbf{A}} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ & 1 & -3 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right],n-r(\mathbf{A})=4-2=2,$$

主元:x_1,x_2;自由变量:x_3,x_4.

特解:$\boldsymbol{\alpha}=(2,1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

学习札记：

$Ax = 0$ 基础解系

$$\eta_1 = (1,3,1,0)^T, \eta_2 = (-1,0,0,1)^T$$

方程组通解，$x = \alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$，$k_1, k_2$ 任意常数.

由通解，若 $x_1 = -x_2$，则

$$k_1 - k_2 + 2 = -(3k_1 + 1) \Rightarrow k_2 = 4k_1 + 3$$

于是

$$x = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + k_1\begin{bmatrix}1\\3\\1\\0\end{bmatrix} + (4k+3)\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\3\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}-3\\3\\1\\4\end{bmatrix}, k \text{ 为任意常数.}$$

为方程组满足 $x_1 = -x_2$ 的所有解.

【注】　用 k_1, k_2 与 $(0,0),(1,0),(0,1)$ 两种求通解方法一定要熟练，正确.

【例 4.8】　当 a 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ ax_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + (a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在有解时求其所有解.

解　对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & a & -3 & 3 \\ 1 & 3 & a+1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & a & -3 & 3 \\ 0 & -1 & a+2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2+2a-3 & a+3 \end{array}\right].$$

若 $a = 1$，则 $r(A) = 2, r(\overline{A}) = 3$，方程组无解.

若 $a = -3$，则 $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$，方程组有无穷多解.

若 $a \neq 1$ 且 $a \neq -3$，则 $r(A) = r(\overline{A}) = 3$，方程组有唯一解.

当 $a = -3$ 时，

$$\overline{A} \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

方程组通解是 $[3,-1,0]^T + k[5,-1,1]^T$.

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -3$ 时，

$$\overline{A} \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -(a+2) & -1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right],$$

得　$$x_3 = \frac{1}{a-1},\quad x_2 = \frac{3}{a-1},\quad x_1 = \frac{a+10}{1-a},$$

方程组的唯一解是 $\left[\frac{a+10}{1-a}, \frac{3}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right]^T$.

学习札记:

【例 4.9】 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 7x_4 = b, \end{cases}$$

讨论参数 a,b 取何值时,方程组有解、无解;当有解时,试用其导出组的基础解系表示通解.

解 对增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & a & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 10 & 7 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right].$$

当 $b \neq 4$ 时,$r(\mathbf{A}) \neq r(\overline{\mathbf{A}})$,方程组无解.

当 $b = 4$ 时,$\forall a$,恒有 $r(\mathbf{A}) = r(\overline{\mathbf{A}})$,方程组有解.

若 $a \neq 1$,有 $\overline{\mathbf{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

$r(\mathbf{A}) = r(\overline{\mathbf{A}}) = 3$,方程组有无穷多解,通解为

$$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0]^{\mathrm{T}} + k[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1]^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数.}$$

若 $a = 1$,有 $\overline{\mathbf{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

$r(\mathbf{A}) = r(\overline{\mathbf{A}}) = 2$,方程组有无穷多解,通解为

$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0]^{\mathrm{T}} + k_1[\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0]^{\mathrm{T}} + k_2[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1]^{\mathrm{T}}$,$k_1, k_2$ 为任意常数.

【评注】 这些都是基础题,要掌握非齐次线性方程组的求解方法:

(1) 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵;

(2) 求导出组的一个基础解系;

(3) 求方程组的一个特解(为简捷,可令自由变量全为 0);

(4) 按解的结构写出通解.

注意,当方程组中含有参数时,分析讨论要严谨不要丢情况,此时的特解往往比较繁.

学习札记:

【例 4.10】 (2004,4) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

已知$[1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}$是该方程组的一个解.试求

(Ⅰ)方程组的全部解,并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(Ⅱ)该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

解 (Ⅰ)因为$[1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}$是方程组的一个解,将其代入方程的两端,立即有 $\lambda = \mu$.

对增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array}\right].$$

(1) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$,

$$\overline{\mathbf{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

由 $r(\mathbf{A}) = r(\overline{\mathbf{A}}) = 2, n - r(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$,方程组有无穷多解,其通解为

$$[-\frac{1}{2},1,0,0]^{\mathrm{T}} + k_1[1,-3,1,0]^{\mathrm{T}} + k_2[-\frac{1}{2},-1,0,1]^{\mathrm{T}}, k_1, k_2 \text{ 为任意}$$
常数.

(2) 若 $\lambda \neq \frac{1}{2}$,

$$\overline{\mathbf{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

由 $r(\mathbf{A}) = r(\overline{\mathbf{A}}) = 3, n - r(\mathbf{A}) = 4 - 3 = 1$,方程组有无穷多解,其通解为

$$[0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0]^{\mathrm{T}} + k[-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1]^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数.}$$

(Ⅱ)(1) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$,对于 $x_2 = x_3$,由通解知

$$1 + (-3k_1) + (-k_2) = 0 + k_1 \Rightarrow k_2 = 1 - 4k_1,$$

故所求解为

$$[-1,0,0,1]^{\mathrm{T}} + k_1[3,1,1,-4]^{\mathrm{T}}, k_1 \text{ 为任意常数.}$$

(2) 若 $\lambda \neq \frac{1}{2}$,对于 $x_2 = x_3$,由通解知

学习札记：

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \Rightarrow k=1,$$

故所求解为

$$[0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0]^{\mathrm{T}}+[-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1]^{\mathrm{T}}=[-1,0,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

【注】 根据题目的具体情况求解.
可以是化为阶梯形用代入来求解.
也可以是化为行最简形直接写答案.
要灵活把握.

(2) 要会用解的结构、解的性质处理抽象的方程组.

【例 4.11】 4 元方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中，系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组的三个解，若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}$，则方程组通解为______.

分析 由于 $n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$，故方程组通解形式为 $\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\eta}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 可取为 $\boldsymbol{\alpha}_1$.

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则由 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{b}$ 知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A\alpha}_2+\boldsymbol{A\alpha}_3=2\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1)=2\boldsymbol{b},$$

知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$，即 $[0,1,2,3]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以方程组的通解为 $[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}+k[0,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.

【例 4.12】 已知 $\boldsymbol{\xi}_1=[-9,1,2,11]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=[1,-5,13,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=[-7,-9,24,11]^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\begin{cases} a_1x_1+7x_2+a_3x_3+x_4=d_1, \\ 3x_1+b_2x_2+2x_3+2x_4=d_2, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$ 的解，则方程组的通解是______.

分析 只有知道秩 $r(\boldsymbol{A})$，算出 $n-r(\boldsymbol{A})$ 就知解的结构. 因为矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & 7 & a_3 & 1 \\ 3 & b_2 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

中有 2 阶非零子式，例如 $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}\neq 0$，故秩 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 又因

$$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2=[-10,6,-11,11]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3=[-2,10,-22,0]^{\mathrm{T}}$$

是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解，而有

$$n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2,\text{即 } r(\boldsymbol{A})\leqslant 2.$$

从而得秩 $r(\boldsymbol{A})=2$.

所以方程组的通解为 $\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ -11 \\ 11 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

【评注】 本题亦可利用解的概念先求出参数 a,b,c,d，然后再解方程组求解，但计算繁琐，不好.

学习札记：

【例 4.13】 $(2002,\frac{1}{2})$ 已知 4 阶方程 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

分析 本题没有给出系数矩阵而又需要求出通解，通常加减消元之路堵塞，应当抽象地用解的结构与性质来分析探讨.

解 (方法一) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，从而秩

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3,$$

那么 $n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，即

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}}$.

再由

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

知 $[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}+k[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}}，k\text{ 为任意常数}.$$

(方法二) （构造与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 同解的方程组）

设 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解，则

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

即
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4.$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式，整理得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，故必有

$$\begin{cases}2x_1+x_2=3,\\-x_1+x_3=0,\\x_4=1,\end{cases}$$

学习札记：

解此方程组即得到 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}+k[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}},k\text{ 为任意常数.}$$

练习 (2017) 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有3个不同的特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ) 证明 $r(\boldsymbol{A})=2$；

(Ⅱ) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解题笔记

(3) 有些题要求通过矩阵的运算构造出方程组再求解.

【例 4.14】 (2000,2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$. 求解方程 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

解 由题设知，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},0\right]=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\left[1,\frac{1}{2},0\right]\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2.$$

又 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A}$，于是 $\boldsymbol{A}^4=8\boldsymbol{A}$，代入原方程，整理有

$$8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma},$$

学习札记:

即
$$\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

对增广矩阵作初等行变换,有

$$\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

特解为　$\boldsymbol{\alpha}=[\frac{1}{2},1,0]^{\mathrm{T}}$,

基础解系为　$\boldsymbol{\eta}=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$,

故方程组的通解为

$$\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\eta},k\text{ 为任意常数}.$$

【例 4.15】 (2016,$\frac{2}{3}$)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{bmatrix}$,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 (Ⅰ)对 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换,有

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1-a & 0\\ 1 & 0 & a & 1\\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1-a & 0\\ 0 & 1 & 1-2a & -1\\ 0 & 0 & a(2-a) & a-2\end{array}\right],$$

因方程组无解,故 $a=0$.

(Ⅱ)对于方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{bmatrix}.$$

对 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换,有

$$\left[\begin{array}{ccc:c}3 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 2 & -2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

得方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$(1,-2,0)^{\mathrm{T}}+k(0,-1,1)^{\mathrm{T}},k\text{ 为任意常数}.$$

学习札记：

【评注】 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解的必要条件：$|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a&0&2a\end{vmatrix}=a^2-2a=0$,

然后代入判断可知 $a=0$ 时方程组无解.

有解判定、解的结构、性质

【例 4.16】 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 经初等行变换其增广矩阵化为

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&3&2&-1\\&a-3&2&6&a-1\\&&a-2&a&-2\\&&&-3&a+1\end{array}\right],$$

若方程组无解，则 $a=$

(A) -1.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.　　[　　]

分析 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=4$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，方程组必有唯一解，故(A)不正确. 注意此时第 4 个方程是 $-3x_4=0$，不要与 $0x_4=3$ 相混淆.

当 $a=1$ 时，仍有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，故(B)不正确.

当 $a=2$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&3&2&-1\\&-1&2&6&1\\&&0&2&-2\\&&&-3&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&3&2&-1\\&-1&2&6&1\\&&0&1&-1\\&&&0&0\end{array}\right],$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<4$，方程组有无穷多解，故(C)不正确.

当 $a=3$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&3&2&-1\\&0&2&6&2\\&&1&3&-2\\&&&-3&4\end{array}\right],$$

可观察出二、三两个方程矛盾，方程组无解，故应选(D).

【例 4.17】 下列命题中正确的命题是

(A) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，那么 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，那么 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解.　　[　　]

学习札记：

分析　(A)$\boldsymbol{A}$ 不一定是 n 阶矩阵，那么行列式可以不存在.

(B)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$.

由于 $r(\boldsymbol{A})=n \nRightarrow r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$，故(B) 不正确.

请考察

$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_1-x_2=0, \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1-x_2=2, \\ 2x_1+2x_2=3, \end{cases}$$

有 $r(\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\2&2\end{bmatrix}=2,\quad r(\overline{\boldsymbol{A}})=r\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\2&2&3\end{bmatrix}=3.$

(C) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$.

由于 $r(\boldsymbol{A})<n \nRightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$，故(C) 不正确.

例如$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ 2x_1+2x_2=3, \end{cases}$

虽然 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，但 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可以无解.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解，即(D) 正确.

【例 4.18】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分条件是

(A)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关.　　(B)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关.

(C)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.　　(D)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.　[　　]

分析　非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$. 由于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$ 是 $m\times(n+1)$ 矩阵，按矩阵秩的概念与性质，有

$$r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant m.$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则 $r(\boldsymbol{A})=m$，则必有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=m$，所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，故(A) 是方程组有解的充分条件. 而(B)(C)(D) 均不能保证 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，希望你能想清楚，举出简单反例.

【例 4.19】　线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵是 4×5 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则错误命题是

(A) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(B) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

(C) 任意 $\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解.

(D) 任意 $\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解.　[　　]

分析　因为矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=\boldsymbol{A}$ 的列秩，由于 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，得 $r(\boldsymbol{A})=4$.

学习札记：

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 5×4 矩阵，而 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})=4$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.(A) 正确.

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 5 阶矩阵，由于 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A})=4<5$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解，(B) 正确.

$\boldsymbol{A}$ 是 4×5 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，那么其延伸组必线性无关，所以从行向量来看必有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=4<5$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解，(C) 正确.

由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 列向量只是 4 个线性无关的 5 维向量，它们不能表示任一个 5 维向量，故方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有可能无解，即(D) 不正确.

公共解、同解

对于方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)，如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 既是方程组(Ⅰ)的解，$\boldsymbol{\alpha}$ 也是方程组(Ⅱ)的解，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的**公共解**.

【例 4.20】 设有两个 4 元齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0;\end{cases}\qquad(\mathrm{II})\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$$

试问方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解；若没有，则说明理由.

分析 关于公共解，可以有几种处理方法：

(方法一) 把(Ⅰ)(Ⅱ)联立起来直接求解，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由于 $n-r(\boldsymbol{A})=1$，故基础解系是 $[-1,1,2,1]^{\mathrm{T}}$，从而有(Ⅰ)(Ⅱ)的公共解为 $k[-1,1,2,1]^{\mathrm{T}}$，k 是任意实数.

(方法二) 通过(Ⅰ)与(Ⅱ)各自的通解，寻找公共解. 为此，先分别求(Ⅰ)和(Ⅱ)的基础解系为

$$(\mathrm{I})\boldsymbol{\xi}_1=[0,0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=[-1,1,0,1]^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathrm{II})\boldsymbol{\eta}_1=[0,1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-1,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$$

从而 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2$ 分别是(Ⅰ)，(Ⅱ)的通解. 令其相等，即有

$$k_1[0,0,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,1,0,1]^{\mathrm{T}}=l_1[0,1,1,0]^{\mathrm{T}}+l_2[-1,-1,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

由此得
$$[-k_2,k_2,k_1,k_2]^{\mathrm{T}}=[-l_2,l_1-l_2,l_1,l_2]^{\mathrm{T}},$$

比较两个向量的对应分量得 $k_1=l_1=2k_2=2l_2$. 令 $k_2=t$，所以公共解是

$$2t[0,0,1,0]^{\mathrm{T}}+t[-1,1,0,1]^{\mathrm{T}}=t[-1,1,2,1]^{\mathrm{T}},t\text{ 为任意实数}$$

(方法三) 把(Ⅰ)的通解代入(Ⅱ)中，如果仍是解，寻找 k_1,k_2 所应满足的关系式而求出公共解.

如果（Ⅰ）的解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=[-k_2,k_2,k_1,k_2]^{\mathrm{T}}$ 是（Ⅱ）的解，那么应满足（Ⅱ）的方程，故

$$\begin{cases}-k_2-k_2+k_1=0,\\ k_2-k_1+k_2=0,\end{cases}$$

解出 $k_1=2k_2$，于是（Ⅰ）和（Ⅱ）的公共解：$2k\boldsymbol{\xi}_1+k\boldsymbol{\xi}_2=\cdots$ 下略.

【例 4.21】 （2007，$\begin{matrix}1,2\\3,4\end{matrix}$）设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\tag{1}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\tag{2}$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

解 因为方程组(1)与(2)的公共解即为联立方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}\tag{3}$$

的解，对增广矩阵加减消元有

$$\overline{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-1)(a-2)&0\\0&0&1-a&a-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1-a&a-1\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{array}\right].$$

当 $a\neq1$ 且 $a\neq2$ 时，方程组无解，从而(1)与(2)没有公共解.

当 $a=1$ 时，

$$\overline{\mathbf{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

方程组的通解是 $k[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$，即(1)与(2)的公共解是 $k[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$，k 是任意常数.

当 $a=2$ 时，

$$\overline{\mathbf{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

方程组有唯一解 $[0,1,-1]^{\mathrm{T}}$，即(1)与(2)的公共解是 $[0,1,-1]^{\mathrm{T}}$.

学习札记：

学习札记：

【评注】 本题也可先计算方程组(1)的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{vmatrix}=(a-1)(a-2),$$

然后分情况讨论.

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$ 时，方程组(1)只有零解.

【例 4.22】 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，且秩 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，证明方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解.

证明 构造齐次线性方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}.\end{cases}\tag{1}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行向量组的极大线性无关组，那么矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 的行向量组可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表出，从而

$$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t})\leqslant r+t=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n,$$

所以方程组(1)有非零解，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解.

对于方程组（Ⅰ）和（Ⅱ），如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是（Ⅰ）的解，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 必是（Ⅱ）的解；反过来，如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是（Ⅱ）的解，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 也必是（Ⅰ）的解，则称（Ⅰ）与（Ⅱ）**同解**.

【例 4.23】 $(2005,\frac{3}{4})$ 已知齐次方组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\ 2x_1+3x_2+5x_3=0,\\ x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\text{和}(\text{Ⅱ})\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.

解 因为方程组（Ⅱ）中方程的个数小于未知量的个数，故方程组（Ⅱ）必有无穷多解. 那么由（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，知方程组（Ⅰ）必有无穷多解. 于是

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=2-a=0,$$

从而 $a=2$. 此时方程组（Ⅰ）的系数矩阵可化为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故（Ⅰ）的通解是 $k[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$. 把 $x_1=-k,x_2=-k,x_3=k$ 代入方程组

学习札记：

(Ⅱ)，有

$$\begin{cases}(-1-b+c)k=0,\\(-2-b^2+c+1)k=0,\end{cases}$$

从而 $b^2-b=0$，可得 $b=1,c=2$ 或 $b=0,c=1$.

当 $b=1,c=2$ 时，对方程组(Ⅱ)的系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},$$

故方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

当 $b=0,c=1$ 时，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，

故方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)不同解.

综上所述，当 $a=2,b=1,c=2$ 时，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

【例 4.24】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，证明齐次线性方程组(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与(Ⅱ)$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解.

证明　如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是(Ⅱ)的解，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是(Ⅰ)的解，故(Ⅱ)的解全是(Ⅰ)的解.

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是(Ⅰ)的解，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$，即 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=0$. 从而 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\|^2=0$，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 必是(Ⅱ)的解，即(Ⅰ)的解全是(Ⅱ)的解.

综上所述，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

【评注】　若 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0&\Leftrightarrow a_i=0(i=1,2,\cdots,n)\\&\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

由 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=0$ 要看出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

因为(Ⅰ)与(Ⅱ)同解，它们的基础解系所含解向量个数相同，即有

$$n-r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{A}),$$

故 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

2012 的考题就是希望考生用公式 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$ 来处理二次型的秩的.

方程组的应用

【例 4.25】　与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$ 可交换的所有矩阵是________

分析　矩阵乘法一般没有交换律，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

学习札记：

设$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换，则

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

即有$\begin{bmatrix} x_1+2x_3 & x_2+2x_4 \\ x_1-x_3 & x_2-x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 & 2x_1-x_2 \\ x_3+x_4 & 2x_3-x_4 \end{bmatrix}$，得到方程组

$$\begin{cases} x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-2x_2-2x_4=0, \\ x_1-2x_3-x_4=0, \\ x_2-2x_3=0. \end{cases}$$

加减消元，有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $x_3=t, x_4=u$，解出 $x_2=2t, x_1=2t+u$.

所以$\begin{bmatrix} 2t+u & 2t \\ t & u \end{bmatrix}$($t,u$ 是任意常数)为所求矩阵.

【例 4.26】 已知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \\ 4 & 13 & -7 \end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

分析 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，现在的 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆的，可转换为解非齐次线性方程组.

解 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 9 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \\ 4 & 13 & -7 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3=2, \\ 2x_1+6x_2+9x_3=7, \\ -x_1-3x_2+3x_3=4, \end{cases}\quad\begin{cases} y_1+3y_2+3y_3=-1, \\ 2y_1+6y_2+9y_3=4, \\ -y_1-3y_2+3y_3=13, \end{cases}\quad\begin{cases} z_1+3z_2+3z_3=1, \\ 2z_1+6z_2+9z_3=-1, \\ -z_1-3z_2+3z_3=-7. \end{cases}$$

这三个方程组的系数矩阵完全一样，区别仅在常数项，为了简洁，这三个方程组的高斯消元可同时进行，即

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 3 & 3 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 6 & 9 & 7 & 4 & -1\\ -1 & -3 & 3 & 4 & 13 & -7\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 3 & 0 & -1 & -7 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

从$\begin{cases}x_1+3x_2 = -1,\\ x_3=1\end{cases}$解出

$$\begin{cases}x_1=-3t-1,\\ x_2=t,\\ x_3=1.\end{cases}$$

类似地
$$\begin{cases}y_1=-3u-7,\\ y_2=u,\\ y_3=2,\end{cases}\qquad \begin{cases}z_1=-3v+4,\\ z_2=v,\\ z_3=-1,\end{cases}$$

从而

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-3t-1 & -3u-7 & -3v+4\\ t & u & v\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}, t,u,v \text{ 为任意常数.}$$

【例 4.27】（2013，$_2^{1}_3$）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$？并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

【评注】　这是考的比较差的一道题，难度系数为 0.368，0.389，0.460，计算上的失误也非常严重，希望大家复习时要重视基本计算.

解　设 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 得

$$\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{bmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix},$$

亦即
$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\ -ax_1+x_2+ax_4=1,\\ x_1-x_3-x_4=1,\\ x_2-ax_3=b.\end{cases}$$

对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right].$$

当 $a\neq -1$ 或 $b\neq 0$ 时，方程组无解.

当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时，方程组有解，此时存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$. 由于方程组的通解为

学习札记：

学习札记：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意实数，}$$

故当且仅当 $a=-1, b=0$ 时，存在矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix},$$

满足 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$.

【例 4.28】 (2000,3) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(1,b,c)^{\mathrm{T}}$. 试问当 a,b,c 满足什么条件时

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，但表示法不唯一？并写出一般表达式.

解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$

由系数行列式

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -a-4$$

(1) 当 $a\neq -4$, $|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 方程组有唯一解.

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示法唯一.

(2) 当 $a=-4$, 对增广矩阵作初等行变换

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & -1 & -5b+c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-c-1 \end{array}\right]$$

故当 $3b-c\neq 1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 方程组无解.

即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(3) 当 $a=-4$ 且 $3b-c=1$, 有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$, 方程组有无穷多解.

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

令 $x_1=t \Rightarrow x_2=-2t-b-1, x_3=2b+1$,

故 $\boldsymbol{\beta}=t\boldsymbol{\alpha}_1-(2t+b+1)\boldsymbol{\alpha}_2+(2b+1)\boldsymbol{\alpha}_3$, t 为任意常数.

【注】 本题若用增广矩阵作初等行变换亦可.

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} a & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 2a & -4 & -2 & 2 \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & -4-a & -2-a & 2-ab \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{array}\right]$$

若 $a \neq -4$，$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$，……

若 $a = -4$，

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & 2+4b \\ 0 & 0 & -1 & c-5b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & c-3b+1 \end{array}\right]$$

建议把本题没考的唯一解时的表达式自己也动手计算一下.

【评注】 前面上一章线性表出的计算如例3.14,3.16,…,线性相关的判别如例3.2,例3.6,…,以及后续下一章特征向量的求解…也都是通过方程组来解决的.

练习 (2018, $\frac{1}{2,3}$) 已知 a 是常数,且矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(Ⅰ) 求 a;

(Ⅱ) 求满足 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解题笔记

学习札记:

第五章 特征值与特征向量——重点，综合性强

一、知识结构网络图

- 特征值
  - 定义：$A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$
  - 求法
    - 特征值
      - 定义法
      - $|\lambda E - A| = 0$
      - 相似
    - 特征向量
      - 定义法
      - 基础解系法 $(\lambda E - A)x = 0$
      - 相似
  - 性质
    - 不同特征值的特征向量线性无关
    - k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量
    - $|A| = \prod \lambda_i, \sum a_{ii} = \sum \lambda_i$
  - 相似
    - 定义 $\xrightarrow{P^{-1}AP = B}$ 性质（必要条件）
      - $r(A) = r(B)$
      - $|A| = |B|$
      - $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$
      - $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$
    - 可对角化 $\Longleftrightarrow$
      - A 有 n 个线性无关的特征向量
      - 如果 λ 是 k 重特征值，那么 λ 必有 k 个线性无关的特征向量
      - $r(\lambda_i E - A) = n - n_i$，$\lambda_i$ 为 n_i 重特征值
    - 可对角化 $\Longleftarrow$
      - A 有 n 个不同的特征值
      - A 是实对称矩阵
  - 实对称矩阵隐含的信息
    - 必与对角矩阵相似
    - 可用正交矩阵对角化
    - 不同特征值的特征向量必______（填空）
    - 特征值必是实数
    - k 重特征值必有 k 个线性无关的______（填空）

注： 由 $A \sim B$ $\begin{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} A + kE \sim B + kE，\text{进而 } |A + kE| = |B + kE|，r(A + kE) = r(B + kE). \\ \overset{(2)}{\Rightarrow} A^n \sim B^n，\text{进而 } A^n = PB^nP^{-1}. \end{cases}$

由 $P_1^{-1}AP_1 = B, P_2^{-1}BP_2 = C \Rightarrow P^{-1}AP = C$，其中 $P = P_1P_2$.

A	$kA + E$	$A + kE$	A^{-1}	A^*	A^n	$P^{-1}AP$
λ	$k\lambda + 1$	$\lambda + k$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ^n	λ
α	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$

【评注】 特征值是线性代数的重要内容之一，也是考研的热点，复习应认真仔细.

(1) 要理解特征值、特征向量的概念，掌握矩阵特征值的性质，掌握求矩阵特征值、特征向量的方法.

(2) 要理解矩阵相似的概念，掌握相似矩阵的性质，搞清矩阵能相似对角化的条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

(3) 要熟悉实对称矩阵特征值、特征向量的特殊性质，掌握用正交矩阵化实对称矩阵为对角矩阵的方法.

学习札记：

今年考题

(2021,1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵；

(2) 求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

数学家的小故事

约翰·伯努利和詹姆斯·伯努利是两兄弟，也是两位杰出数学家。约翰非常急于成名而开始和他哥哥竞争，很快两人在许多问题上互相挑战。约翰用不正当手段把别人的、包括他哥哥的成果作为自己的成果发表。詹姆斯非常敏感，并且照样反击，他们各自发表文章，大部分相互取资，但不指明他们思想的来源。

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

定义 5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果存在一个数 λ 及非零的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \tag{5.1}$$

成立，则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**，称非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的一个**特征向量**.

定义 5.2 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 为一个 n 阶矩阵，则行列式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5.2}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**.

【评注】 由 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 有

$$(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的非零解.

(1) 先由 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i（共 n 个）.

(2) 再由 $(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 求基础解系，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量.

定义 5.3 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}, \tag{5.3}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ **相似**，记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

特别地，如果 $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵相似，则称 $\boldsymbol{A}$ **可对角化**.

相似具有：(1) 反身性：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$. (2) 对称性：如 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$. (3) 传递性：若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$.

重要定理

定理 5.1 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，那么当 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 非零时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 仍是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

定理 5.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

学习札记：

(1) $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$; (5.4)

(2) $|\boldsymbol{A}| = \prod \lambda_i$. (5.5)

定理 5.3 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 分别是与之对应的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

定理 5.4 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 重特征值，则属于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数不超过 m 个.

定理 5.5 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

即若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|. \tag{5.6}$$

定理 5.6 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

【评注】 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$（下设 $n=3$），即有

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]\begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix},$$

即 $$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_3]=[a_1\boldsymbol{\gamma}_1,a_2\boldsymbol{\gamma}_2,a_3\boldsymbol{\gamma}_3],$$

即 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_1=a_1\boldsymbol{\gamma}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_2=a_2\boldsymbol{\gamma}_2,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_3=a_3\boldsymbol{\gamma}_3.$$

因为矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]$ 可逆，故 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 线性无关. 又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_i=a_i\boldsymbol{\gamma}_i,\boldsymbol{\gamma}_i\neq\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 a_i 的特征向量. 即

$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}\ \Rightarrow$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

反过来，若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 必与对角矩阵相似（请自证）.

定理 5.7 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，且

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

定理 5.8 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件是对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值，其线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数. 即

$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}\Leftrightarrow\lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n_i 重特征值，则 λ_i 有 n_i 个线性无关的特征向量 (5.8)

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-n_i$，$\lambda_i$ 为 n_i 重特征值. (5.9)

定理 5.9 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值 λ_1,λ_2 所对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 必

学习札记:

正交.

定理 5.10 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数.

定理 5.11 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 必可对角化,且总存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

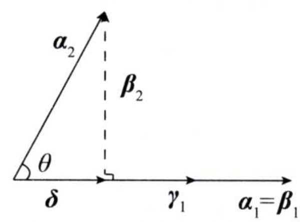
Schmidt 正交化方法

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,$$



$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\delta}$$

$$\boldsymbol{\delta} = |\boldsymbol{\alpha}_2| \cos\theta\boldsymbol{\gamma}_1$$

那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交,称为正交向量组.将其单位化,有

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 这一过程称为 Schmidt 正交化.

例如 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [0,1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,0,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3 = [1,1,0]^{\mathrm{T}}$,则有

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} - \frac{3}{30}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}5\\10\\-5\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},$$

将其单位化,有

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

学习札记：

三、典型例题分析选讲

特征值、特征向量

提示 (1)$A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

(2) $|\lambda E-A|=0;(\lambda_i E-A)x=\mathbf{0}$.

(3) 如 $P^{-1}AP=B$，且 $B\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 则 $A(P\boldsymbol{\alpha})=\lambda(P\boldsymbol{\alpha})$.

(1) 数字型矩阵

【例 5.1】 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-2&2\\-3&1&3\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda+2&-2\\3&-1&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&4-\lambda\\-1&\lambda+2&-2\\3&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&0&0\\-1&\lambda+2&-3\\3&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda+2&-3\\-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda^2+2\lambda-3)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+3),$$

得矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-3$.

当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-A)x=\mathbf{0}$，即

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&3&-2\\3&-1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=4$ 时，由 $(4E-A)x=\mathbf{0}$，即

$$\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&6&-2\\3&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-6&2\\0&17&-5\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-4,5,17)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=-3$ 时，由 $(-3E-A)x=\mathbf{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-4&-1&1\\-1&-1&-2\\3&-1&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-4&-12\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix},$$

学习札记：

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,1)^{\mathrm{T}}$.

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 1,4,-3 的特征向量分别是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\alpha}_2,k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 均为非零常数.

【例 5.2】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&3&5\\0&0&6\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-4\\0&\lambda-3&-5\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-6),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=6$.

对 $\lambda=1$，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}0&-2&-4\\0&-2&-5\\0&0&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$，因此属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1(k_1\neq0)$.

对 $\lambda=3$，由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}2&-2&-4\\0&0&-5\\0&0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，因此属于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量是 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2(k_2\neq0)$.

对 $\lambda=6$，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}5&-2&-4\\0&3&-5\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=[22,25,15]^{\mathrm{T}}$，因此属于特征值 $\lambda=6$ 的特征向量是 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3(k_3\neq0)$.

【评注】 上三角矩阵、下三角矩阵、对角矩阵的特征值就是矩阵主对角线上的元素.

【例 5.3】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&9\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-3\\-4&\lambda-2&-6\\-6&-3&\lambda-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-4&\lambda-2&-3\lambda\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-22&\lambda-11&0\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-13\lambda),$$

得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1 = 13, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

对 $\lambda = 13$，由 $(13\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix} 11 & -1 & -3 \\ -4 & 11 & -6 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -4 & 11 & -6 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,3]^{\mathrm{T}}$.

因此属于特征值 $\lambda = 13$ 的特征向量是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1(k_1 \neq 0)$.

对 $\lambda = 0$，由 $(0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -4 & -2 & -6 \\ -6 & -3 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2 = [-1,2,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [-3,0,2]^{\mathrm{T}}$.

因此属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量是 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3(k_2, k_3$ 不全为 $0)$.

【评注】 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 是 3 阶矩阵，则

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - \sum a_{ii}\lambda^2 + S_2\lambda - |\boldsymbol{A}|,$$

其中 $S_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

若秩 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，则

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - \sum a_{ii}\lambda^2 = (\lambda - \sum a_{ii})\lambda^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

【例 5.4】 求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^4,$$

得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda = 2$(4 重根).

当 $\lambda = 2$ 时，由 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，即

学习札记：

学习札记：

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & -3 & 0\\ -1 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得到基础解系是 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-3,0,1,1]^{\mathrm{T}}$，因此属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$（$k_1,k_2$ 不全为 0）.

【例 5.5】 已知 $a\neq 0$，求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & a & a\\ a & 1 & a & a\\ a & a & 1 & a\\ a & a & a & 1\end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量.

解 **（方法一）**（直接计算）

由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -a & -a\\ -a & \lambda-1 & -a & -a\\ -a & -a & \lambda-1 & -a\\ -a & -a & -a & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-(3a+1)](\lambda+a-1)^3,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $3a+1$，$1-a$（三重根）.

当 $\lambda=3a+1$ 时，由 $[(3a+1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}3a & -a & -a & -a\\ -a & 3a & -a & -a\\ -a & -a & 3a & -a\\ -a & -a & -a & 3a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

可得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，故 $\lambda=3a+1$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$k_1\neq 0$.

当 $\lambda=1-a$ 时，由 $[(1-a)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\\ -a & -a & -a & -a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，故 $\lambda=1-a$ 的特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_2,k_3,k_4 是不全为 0 的任意常数.

（方法二）（转换）

$$A=\begin{bmatrix}a&a&a&a\\a&a&a&a\\a&a&a&a\\a&a&a&a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-a&0&0&0\\0&1-a&0&0\\0&0&1-a&0\\0&0&0&1-a\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}B+(1-a)E.$$

由秩 $r(B)=1$ 有

$$|\lambda E-B|=\lambda^4-4a\lambda^3,$$

得矩阵 B 的特征值为 $4a,0,0,0$，从而矩阵 A 的特征值为 $3a+1,1-a,1-a,1-a$.

对于 B，当 $\lambda=4a$ 时，由 $(4aE-B)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}3a&-a&-a&-a\\-a&3a&-a&-a\\-a&-a&3a&-a\\-a&-a&-a&3a\end{bmatrix},$$

同方法一，下略. 由 B 就可得矩阵 A 关于 $\lambda=3a+1$ 的特征向量.

当 $\lambda=0$ 时，由 $(0E-B)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}-a&-a&-a&-a\\-a&-a&-a&-a\\-a&-a&-a&-a\\-a&-a&-a&-a\end{bmatrix},$$

同方法一，下略. 可得矩阵 A 关于 $\lambda=1-a$ 的特征向量.

(2) 抽象矩阵

【例 5.6】 设 A 是 3 阶矩阵，且矩阵 A 的各行元素之和均为 5，则矩阵 A 必有特征向量________.

分析 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 各行元素之和均为 5，即

$$\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=5,\\a_{21}+a_{22}+a_{23}=5,\\a_{31}+a_{32}+a_{33}=5.\end{cases}$$

用矩阵表示，有

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix},$$

即

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

故矩阵 A 必有特征值 $\lambda=5$，且必有特征向量 $[1,1,1]^{T}$.

【例 5.7】 设 A 是 n 阶矩阵，α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，即

$$A\alpha=\lambda\alpha,\quad \alpha\neq 0,$$

那么

$$(A+kE)\alpha=A\alpha+k\alpha=(\lambda+k)\alpha,$$

学习札记：

学习札记：

说明矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $\lambda+k$，对应的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$.

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha},$$

说明矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值是 λ^2，对应的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有

$$\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha},$$

说明矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 $\frac{1}{\lambda}$，对应的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$.

【例 5.8】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，如果非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有通解 $5\boldsymbol{b}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$，其中 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

解 由解的结构知 $5\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，即 $\boldsymbol{A}(5\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$，从而

$$\boldsymbol{Ab}=\frac{1}{5}\boldsymbol{b},$$

即 $\frac{1}{5}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{b}$ 是相应的特征向量.

又 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\eta}_2$，故 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\frac{1}{5},0,0$，对应的特征向量分别是 $k\boldsymbol{b}$，$k\neq 0$ 和 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2,k_1,k_2$ 不全为 0.

【例 5.9】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明 1 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明 因 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 有 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 又因 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$.

于是齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

从而 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，即 $\lambda=1$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

或设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\text{ 即 }\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$$

因 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，于是存在 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}(i=1,2,3)$ 即 $\lambda=1$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(3) 相似矩阵

【例 5.10】 如果 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，

(1) 若 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A\alpha}=\lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}),$$

说明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 的特征值是 λ，对应的特征向量是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(2) 若 $\boldsymbol{B\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\boldsymbol{AP\alpha}=\lambda\boldsymbol{P\alpha},$$

说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 λ，特征向量是 $\boldsymbol{P\alpha}$.

【例 5.11】 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 3 阶矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

证明 因 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}$$

学习札记：

即 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似，故 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值或由特征多项式

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}| &= |\lambda\boldsymbol{AA}^{-1}-\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B})| \\ &= |\boldsymbol{A}|\cdot|\lambda\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}| = |\lambda\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}| \\ &= |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}|,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

【例 5.12】　设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

解　由定义 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 和 1，对应的特征向量分别是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$，$k_1,k_2$ 不为 0.

或者利用相似，有 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，可知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$，亦可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 和 1.

又 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 分别是 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 0，1 的特征向量，从而 $\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0，1 的特征向量. 下略.

相似、相似对角化

相似

提示　1. 如 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；$\lambda_{\boldsymbol{A}}=\lambda_{\boldsymbol{B}}$；$\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$.

2. 如 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{BP}_2=\boldsymbol{\Lambda}\Rightarrow\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{PP}_2^{-1}$.

3. 如 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E}$，$(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})^n\sim(\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E})^n$.

【例 5.13】　若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1，2，3，那么行列式 $|2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=$ ________.

分析　因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，那么 $2\boldsymbol{B}$ 的特征值是 2，4，6，$2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 的特征值是 1，3，5，从而 $|2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=15$.

或者，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，又因 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值是 1，3，5，故 $|2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=15$.

学习札记：

【例 5.14】 不能相似对角化的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$. [ ]

分析 (A) 中矩阵的特征值是 1,3,0,有 3 个不同的特征值,故可相似对角化.

(B) 中矩阵的特征值是 1,1,3. 设(B) 中矩阵为 $\boldsymbol{A}$,因为

$$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}=2,$$

故$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系中仅有一个解向量,即$\lambda=1$(二重根) 只有一个线性无关的特征向量,所以 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

(C) 中矩阵设为 $\boldsymbol{A}$,由于 $r(\boldsymbol{A})=1$,有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-\sum a_{ii}\lambda^2=\lambda^3-6\lambda^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 6,0,0. 因为 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=1$,说明$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由 2 个解向量构成,即$\lambda=0$(二重根) 有 2 个线性无关的特征向量,所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

(D) 中矩阵设为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化.

【例 5.15】 在下列矩阵中,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&3&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{bmatrix}$$

两两相似的矩阵是________.

分析 这几个矩阵的秩分别是 1,2,1,1,由相似矩阵的秩相等知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不和 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}$ 相似,把 $\boldsymbol{B}$ 排除. 从特征值来看依次为 3,0,0;3,0,0;2,0,0;3,0,0,可知矩阵 $\boldsymbol{C}$ 要排除.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$,

秩 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1\Rightarrow n-r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$

$\Rightarrow(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解

$\Rightarrow\lambda=0$(二重根) 有 2 个线性无关的特征向量

$$\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}.$$

同理知 $\boldsymbol{D}\sim\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$. 因此 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{D}$.

学习札记：

【例 5.16】 判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是否相似，并说明理由.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&4\\0&0\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.

解 (1) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1，0，而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 2，0.

两个矩阵相似的必要条件是特征值相同. 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

注：本题也可用相似的必要条件：$\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$ 来说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

(2) 按相似的定义，如存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

现在任意 2 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，恒有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}(3\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只和它自己相似. 从而 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

或者，由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 3，3.

而秩　$r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}=1$

$$n-r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2-1=1$$

齐次方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有 1 个线性无关的解，

亦即 $\lambda=3$ 只有 1 个线性无关的特征向量，

那么矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不能相似对角化. 从而 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

(3) 如 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，由 $\boldsymbol{B\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P\alpha})=\lambda(\boldsymbol{P\alpha})$，即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对于 λ 线性无关的特征向量的个数必然相同. 而

$$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1,r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$$

对 $\lambda=2$，$\boldsymbol{A}$ 有 2 个线性无关的特征向量，$\boldsymbol{B}$ 只有 1 个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

【例 5.17】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&3&1\\2&0&1\end{bmatrix}$，判断 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似，并说明理由.

分析 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵必可对角化，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似首先要看 $\boldsymbol{B}$ 能否对角化. 若 $\boldsymbol{B}$ 不能对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 肯定不相似；若 $\boldsymbol{B}$ 能对角化，则应进一步检查 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是否有相同的特征值，特征值一致时才相似.

解 对于 $\boldsymbol{B}$，由特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\1&\lambda-3&-1\\-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

学习札记:

$$= \lambda(\lambda-3)^2 = 0,$$

可得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 3,3,0. 当 $\lambda = 3$ 时,

$$r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}) = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 = n - n_i,$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

又因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,且

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)^2,$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 3,3,0,所以 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

理由:$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 均可对角化,且都与 $\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 相似.

【例 5.18】 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ 的特征值有重根,判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化,并说明理由.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+10+a).$$

如果 $\lambda = 2$ 是重根,则 $\lambda^2-8\lambda+10+a$ 中含有 $\lambda-2$ 的因式,于是 $2^2-16+10+a=0$,解出 $a=2$. 此时 $\lambda^2-8\lambda+12=(\lambda-2)(\lambda-6)$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个特征值是 2,2,6.

对于 $\lambda = 2$,由于

$$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = r\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 1,$$

故 $\lambda = 2$(二重根)有 2 个线性无关的特征向量,$\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化.

若 $\lambda = 2$ 不是重根,则 $\lambda^2-8\lambda+10+a$ 是完全平方,于是

$$8^2-4(10+a)=0,$$

解出 $a=6$,从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2,4,4.

对于 $\lambda = 4$,由于

$$r(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = r\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 2,$$

说明 $\lambda = 4$(二重根)只有 1 个线性无关的特征向量,$\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

【例 5.19】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关的列向量，且

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（Ⅱ）判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能否相似对角化，说明理由；

（Ⅲ）求秩 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

解（Ⅰ）　由 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_3$，知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\lambda=0$ 的特征向量，据已知条件有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)&=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{0})\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\2&-6&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而知 $\boldsymbol{P}$ 可逆，于是

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB},\text{其中 }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\2&-6&0\end{bmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\1&\lambda-3&0\\-2&6&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2,$$

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 2,2,0，从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2,2,0.

对于矩阵 $\boldsymbol{B}$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\-2&6&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{B\beta}=\lambda\boldsymbol{\beta}$ 知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P\beta})=\lambda(\boldsymbol{P\beta})$，从而 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=2$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{P\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2,2,0；$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3),k_1\neq0$ 与 $k_2\boldsymbol{\alpha}_3,k_2\neq0$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $\lambda=2$ 和 $\lambda=0$ 的所有的特征向量.

（Ⅱ）因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对 $\lambda=2$，二重根只有 1 个线性无关的特征向量知 $\boldsymbol{B}$ 不能相似对角化. 而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

或直接地，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对 $\lambda=2$（二重根）只有 1 个无关的特征向量. 故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

（Ⅲ）因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$，所以

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=r\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&4&0\\2&-6&1\end{bmatrix}=3.$$

学习札记：

学习札记:

【例 5.20】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵满足 $\boldsymbol{A}^2=5\boldsymbol{A}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=2$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化.

证明 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,由 $r(\boldsymbol{A})=2$,不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

由 $\boldsymbol{A}^2=5\boldsymbol{A}$ 即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=5(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$

有 $\boldsymbol{A\alpha}_1=5\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=5\boldsymbol{\alpha}_2$,于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=5$ 的线性无关的特征向量.

又因 $r(\boldsymbol{A})=2<3$,齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是其基础解系,亦即 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量.

从而 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量,故 $\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化.

或者,由 $\boldsymbol{A}^2=5\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$.

于是 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\leqslant 3$.

又 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A})+r(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r[\boldsymbol{A}+(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]=3$,

从而 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})=3$,那么 $r(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$.

$n-r(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-1=2$,即 $\lambda=5$ 有 2 个线性无关的特征向量.

$n-r(\boldsymbol{A})=3-2=1$,即 $\lambda=0$ 有 1 个线性无关的特征向量.

因此,$\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量必可相似对角化.

相似对角化时的可逆矩阵 P

提示 若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,则 $\boldsymbol{P}$——$\boldsymbol{A}$ 的特征向量,$\boldsymbol{\Lambda}$——$\boldsymbol{A}$ 的特征值.

若 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B},\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{BP}_2=\boldsymbol{\Lambda}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.

【例 5.21】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{bmatrix}$,求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-4\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&2-\lambda\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-2&\lambda-3&-4\\-4&-2&\lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3&-4\\-2&\lambda-10\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-11)(\lambda-2)^2,$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 11,2,2.

当 $\lambda=11$ 时,由 $(11\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[2,1,2]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=2$ 时,由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-2,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,-2,1]^{\mathrm{T}}$.

那么,令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}11&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$.

* 这是一个基础题,复习时要重视,原理要清晰.

【评注】 求 $\boldsymbol{A}$ 相似标准形的方法(对可对角化的矩阵)

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$;

(2) 对每个特征值 λ_i,求 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;

(3) 令可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3).$$

【例 5.22】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&0&a\\0&0&3\end{bmatrix}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似,求 a 的值.并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-3&\lambda&-a\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-3&\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+1)(\lambda-3)^2,$$

得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $3,3,-1$.

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根,而 $\boldsymbol{A}$ 又与对角矩阵相似,故 $\lambda=3$ 必有 2 个线性无关的特征向量,那么秩 $r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$.

$$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-3&3&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&-a-3\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $a=-3$.

对 $\lambda=3$,解齐次线性方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-3&3&3\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=-1$,解齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

学习札记:

学习札记：

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&-1&-1\\-3&-1&3\\0&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-3,0]^{\mathrm{T}}$.

$$令\ \boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-3\\0&1&0\end{bmatrix},得\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&-1\end{bmatrix}.$$

【例 5.23】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性无关的 2 维列向量，且满足 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$.

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

解 （Ⅰ）按已知条件，有

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_2,-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}0&-2\\1&3\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P}_1=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&-2\\1&3\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}$，从而 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda&2\\-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 1,2，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2.

（Ⅱ）对矩阵 $\boldsymbol{B}$，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=[-2,1]^{\mathrm{T}}$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_2=[-1,1]^{\mathrm{T}}$.

那么，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$ 的特征向量分别是

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\beta}_1=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\beta}_2=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

令 $\boldsymbol{P}=[-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2]$，则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&\\&2\end{bmatrix}.$$

【评注】 关于可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 也可如下处理：

令 $\boldsymbol{P}_2=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$，有 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{BP}_2=\begin{bmatrix}1&\\&2\end{bmatrix}$，进而

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}(\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1)\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&\\&2\end{bmatrix},$$

得 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix}-2&-1\\1&1\end{bmatrix}=(-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$.

学习札记：

【例 5.24】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6 & a\\-1 & b\end{bmatrix}$ 相似，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

解 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知

$$\begin{cases}1+3=6+b,\\-5=a+6b,\end{cases}$$

解出 $a=7,b=-2$.

又 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4\\-2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $5,-1$.

由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1]^{\mathrm{T}}$.

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,1]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_1=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}$，得

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}5 & \\ & -1\end{bmatrix}.$$

类似地，由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\beta}_1=[-7,1]^{\mathrm{T}}$.

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\beta}_2=[-1,1]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}_2=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]=\begin{bmatrix}-7 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$，得 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{BP}_2=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}5 & \\ & -1\end{bmatrix}$.

由 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{BP}_2\Rightarrow\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$.

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -5\\0 & 2\end{bmatrix}$，有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}.$$

求参数的问题

提示 利用：相似的必要条件；由特征向量构造方程组；相似对角化原理.

【例 5.25】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\-2 & x & -2\\-4 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & y & 0\\0 & 0 & -4\end{bmatrix}$ 相似，则 $y=$ ________.

分析 (方法一) 因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知 $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$，又 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，知 $\lambda=-4$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故有

$$\begin{cases}1+x+1=5+y+(-4),\\|-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-5 & 2 & 4\\2 & -4-x & 2\\4 & 2 & -5\end{vmatrix}=0,\end{cases}$$

学习札记：

即$\begin{cases}x+1=y,\\9(x-4)=0,\end{cases}$ 解出 $y=5$.

【评注】

注意本题 $|5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}4 & 2 & 4\\2 & 5-x & 2\\4 & 2 & 4\end{vmatrix}=0$ 未出现 x 的方程.

（方法二） 因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$. 又

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\2 & \lambda-x & 2\\4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 2 & 4\\0 & \lambda-x & 2\\5-\lambda & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)[\lambda^2+(3-x)\lambda-3x-8],$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-5)(\lambda-y)(\lambda+4),$$

故 $\lambda^2+(3-x)\lambda-3x-8=\lambda^2+(4-y)\lambda-4y$, 即

$$\begin{cases}3-x=4-y,\\3x+8=4y,\end{cases}$$

解出 $x=4,y=5$.

【例 5.26】 (2000,4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\x & 4 & y\\-3 & -3 & 5\end{bmatrix}$, 已知 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值, 试求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角形矩阵.

解 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量, 而 $\lambda=2$ 是其二重特征值, 故 $\lambda=2$ 必有两个线性无关的特征向量, 因此方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个解向量构成, 故秩 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$. 由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-x & -2 & -y\\3 & 3 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\2-x & 0 & -y-2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

知 $x=2,y=-2$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 4 & -2\\-3 & -3 & 5\end{bmatrix},$$

由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\-2 & \lambda-4 & 2\\3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -1\\0 & \lambda-2 & 2\\\lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-6),$$

得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

对 $\lambda=2$, 由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-2 & -2 & 2\\3 & 3 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得到特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=6$,由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\-2 & 2 & 2\\3 & 3 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & 3 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得到特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-2,3]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -2\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$,有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{bmatrix}.$$

练习　(2003)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & a\end{bmatrix}$ 可逆,向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征向量,λ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.试求 a,b 和 λ 的值.

解题笔记

学习札记:

用相似求 A^n

提示　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$,从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^n$,故 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.

【例 5.27】　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & a & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$,且 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,求 a 和 $\boldsymbol{A}^n$.

解　由 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\0 & a & 2\\1 & -1 & 0\end{vmatrix}=4-2a=0$$

所以 $a=2$.

又 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\0 & \lambda-2 & -2\\-1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2),$$

学习札记：

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2,0.

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&-1&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $\lambda=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,-2,1]^{\mathrm{T}}$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&0&-2\\-1&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$.

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}-1&-1&-2\\0&-2&-2\\-1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $\lambda=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-2&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$,有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{bmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^n$,从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-2&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2^n&\\&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^n-1&1&2^n\\2^n-2&2&2^n\\1&-1&0\end{bmatrix}.$$

【例 5.28】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4\\-1&-1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$,求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

分析 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,有 $\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{P}$,从而可利用 $\boldsymbol{B}^{100}$ 间接求出 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&4\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-1&-1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-1&-3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}.$$

因为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C},$$

学习札记:

故 $$\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{C})^{100}=\boldsymbol{E}+100\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&100\\0&1\end{bmatrix},$$

那么 $$\boldsymbol{A}^{100}=(\boldsymbol{PBP}^{-1})^{100}=(\boldsymbol{PBP}^{-1})(\boldsymbol{PBP}^{-1})\cdots(\boldsymbol{PBP}^{-1})=\boldsymbol{PB}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&100\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}201&400\\-100&-199\end{bmatrix}.$$

反求矩阵A

提示 如 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$,则

$\boldsymbol{A}=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}$.

或 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$,

其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$.

【例 5.29】 (1995,4)设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$,其中列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-2,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[-2,-1,2]^{\mathrm{T}}$,试求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (方法一) 由 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3$,知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不同特征值的特征向量,它们线性无关.利用分块矩阵,有
$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3].$$
因为矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$可逆,故
$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3][\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1&4&-6\\2&-4&-3\\2&2&6\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{bmatrix}.$$

(方法二) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化,有
$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix},\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3],$$
那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\cdots$ 下略

【例 5.30】 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素全是 1,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,0]^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 个线性无关的特征向量,(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$,(Ⅱ)求齐次方程组$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解.

解 (Ⅰ)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别是特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量,则按特征值定义
$$\begin{bmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda_1=3,$$

学习札记：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda_2=0,$$

类似地 $\lambda_3=0.$

于是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}),$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\\&=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）因为齐次方程组$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系就是矩阵$\boldsymbol{A}$对于特征值$\lambda=3$的线性无关的特征向量，故方程组通解为

$$k(1,1,1)^{\mathrm{T}},k\text{ 为任意常数}.$$

实对称矩阵

提示 实对称矩阵有哪些特殊的性质？如何用来做题？

【例 5.31】 设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵，秩$r(\boldsymbol{A})=2$，若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值是__________.

分析 设λ是$\boldsymbol{A}$的任一特征值，$\boldsymbol{\alpha}$是属于λ的特征向量，即$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，那么

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}.$$

由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，有$\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即$(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值是1或0.

因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，知$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，且$\boldsymbol{\Lambda}$由$\boldsymbol{A}$的特征值所构成，根据秩$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})$，有

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix},$$

所以矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值是1,1,0.

【评注】 因为满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$的矩阵$\boldsymbol{A}$不唯一．例如

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix},\cdots$$

所以仅由条件$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$并不能确定矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，只是知道矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值只能取1或0.

【例 5.32】 n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix},$$

则秩 $r(A)=$ ________.

分析 因为 A 是实对称矩阵,$A\sim\Lambda$. 只要求出 $r(\Lambda)$ 就知 $r(A)$,为此由 A 的特征值入手. 因为

$$A=\begin{bmatrix} a-1 & & & & \\ & a-1 & & & \\ & & a-1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$=(a-1)E+B,$$

而矩阵 B 的秩为 1,有

$$|\lambda E-B|=\lambda^n-n\lambda^{n-1},$$

得到矩阵 B 的特征值是 $n,0,0,\cdots,0(n-1$ 个$)$,因此矩阵 A 的特征值是 $n+a-1,a-1,a-1,\cdots,a-1$.

又因 A 是实对称矩阵,故

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix} n+a-1 & & & \\ & a-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-1 \end{bmatrix},$$

那么

$$r(A)=\begin{cases} n, & \text{若 } a\neq 1 \text{ 且 } a\neq 1-n, \\ n-1, & \text{若 } a=1-n, \\ 1, & \text{若 } a=1. \end{cases}$$

练习 $(2017,\frac{1}{3})$ 设 α 为 n 维单位列向量,E 为 n 阶单位矩阵,则

(A) $E-\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 不可逆.　　(B) $E+\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 不可逆.

(C) $E+2\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 不可逆.　　(D) $E-2\alpha\alpha^{\mathrm T}$ 不可逆.

解题笔记

学习札记:

学习札记：

【例 5.33】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ -2 & 6 & -2\\ -4 & -2 & 3\end{bmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-6 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 0 & 7-\lambda\\ 2 & \lambda-6 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 0 & 0\\ 2 & \lambda-6 & 4\\ 4 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda^2-5\lambda-14),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=7,\lambda_3=-2$.

对 $\lambda=7$，由 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,2,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=-2$，由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,2]^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是同一个特征值的特征向量，不正交，故应 Schmidt 正交化. 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4\\ -2\\ 5\end{bmatrix},$$

单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-4\\ -2\\ 5\end{bmatrix}.$$

再对 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}.$$

那么，令

学习札记：

$$P = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

则 P 为正交矩阵，且

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

【评注】 这是基础题，搞清用正交矩阵把实对称矩阵 A 化为对角矩阵的步骤：

这一类题目在考场上往往要先处理一些未知的参数，然后

(1) 求矩阵 A 的特征值；

(2) 求矩阵 A 的特征向量；

(3) 单位化，当特征值有重根时，可能还要 Schmidt 正交化；

(4) 构造正交矩阵 P，得 $P^{-1}AP = \Lambda$　(P 与 Λ 次序要协调一致).

【例 5.34】 设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $AB - 6B = O$，其中

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -a \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 求矩阵 A 的特征值、特征向量；

(Ⅱ) 求 A 和 $(A - 3E)^{100}$.

解 (Ⅰ) 因 $AB = 6B$，若 B 可逆，则 $A = 6E$，

与 $r(A) = 2$ 相矛盾，从而 $|B| = 0$，

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 - 4a，所以\ a = 1.$$

(Ⅱ) 记 $B = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$，由 $AB - 6B = O$，得

$$A[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = 6[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3],$$

于是 $\lambda = 6$ 是 A 的特征值，γ_1, γ_2 是其线性无关的特征向量.

又 $r(A) = 2$，知 $|A| = 0$，所以 $\lambda = 0$ 是 A 的一个特征值.

因实对称矩阵中不同特征值的特征向量相互正交，设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量. 有 $\alpha^{\mathrm{T}} \cdot \gamma_1 = 0, \alpha^{\mathrm{T}} \cdot \gamma_2 = 0$，即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

解得基础解系为 $[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$.

故矩阵 A 的特征值为：6,6,0. $k_1(1,1,0)^{\mathrm{T}} + k_2(2,1,1)^{\mathrm{T}}$（其中 k_1, k_2 不

学习札记：

全为 0）是 $\lambda=6$ 的所有特征向量.

$k_3(-1,1,1)^T,(k_3\neq 0)$ 是 $\lambda=0$ 的所有特征向量.

（Ⅲ）令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{bmatrix}$，那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&3&-3\\1&-1&2\\-1&1&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 有 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}-3\boldsymbol{E}$.

$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{100}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\Lambda}-3\boldsymbol{E})^{100}=3^{100}\boldsymbol{E}$.

从而 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{100}=\boldsymbol{P}(3^{100}\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}=3^{100}\boldsymbol{E}$.

【评注】 要会用正交来求特征向量. 如果实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值，若知道两个特征向量，就可求出第三个特征向量. 若特征值有重根，那么知道那个单根的特征向量就可求出重根的所有特征向量.

【例 5.35】 $\left(2010,\dfrac{2}{3}\right)$ 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{bmatrix}$，有正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\dfrac{1}{\sqrt6}[1,2,1]^T$，求 $a,\boldsymbol{Q}$.

分析 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，有 $\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}^{-1}$，因而 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$，即用正交矩阵把 $\boldsymbol{A}$ 相似对角化，$\boldsymbol{Q}$ 的列向量即为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

解 由于 $\dfrac{1}{\sqrt6}[1,2,1]^T$ 是正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列，因此 $[1,2,1]^T$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 设特征值为 λ_1，有

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{cases}0+(-2)+4=\lambda_1,\\-1+6+a=2\lambda_1,\\4+2a+0=\lambda_1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=2,\\a=-1.\end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{bmatrix}$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4),$$

学习札记:

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $2,5,-4$.

对 $\lambda=5$,由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=-4$,由 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}-4&1&-4\\1&-7&1\\-4&1&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$.

由于实对称矩阵中对应不同特征值的特征向量相互正交,故只需把 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,-1]^{\mathrm{T}},$$

那么令
$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

则有
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2&&\\&5&\\&&-4\end{bmatrix}.$$

【例 5.36】(定理 5.9)设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,λ_1 与 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 不同的特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是属于 λ_1 与 λ_2 的特征向量,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

证明 据已知有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_1\neq\lambda_2$,那么

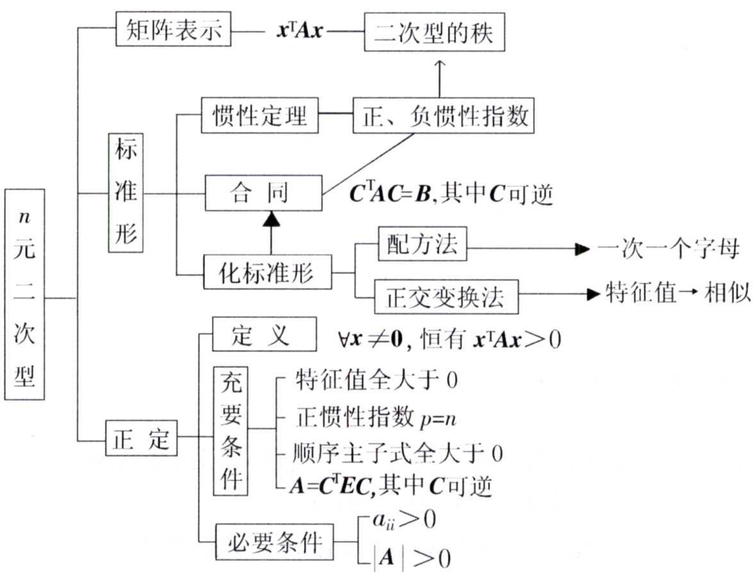
$$\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

所以 $(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$. 又 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

第六章　二次型

——重点，注意和特征值、特征向量的联系

一、知识结构网络图



注：二次型的标准形不唯一，可以用不同的坐标变换化二次型为标准形.

二次型的规范形唯一，可以用正交变换先把二次型化为标准形，然后再做“伸缩”化为规范形，亦可用配方法直接得规范形.

【评注】 二次型的两大板块要复习整理清楚，一个是标准形，另一个是正定性.

(1) 了解二次型的概念，掌握用矩阵形式表示二次型，了解合同变换和合同矩阵的概念.

(2) 理解二次型秩的概念，了解二次型的标准形、规范形等概念，了解惯性定理的条件和结论，掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，了解用配方法化二次型为标准形的方法.

(3) 理解正定二次型、正定矩阵的概念，掌握正定矩阵的性质.

学习札记：

今年考题

(2021,1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) 2,0.　　(B) 1,1.　　(C) 2,1.　　(D) 1,2.

数学家的小故事

欧拉在1741年至1766年之间给普鲁士王的侄女Anhalt-Dessau公主授课，这些授课内容后来以《给一位德国公主的信》发表.笛卡尔曾经在荷兰海牙附近的小镇隐居，在这里他教导了被放逐的伊丽莎白公主。1649年瑞典克里斯蒂娜女王邀请他去作自己的讲师，因为无法承受瑞典严寒以及肺炎的侵袭，最终在一年后死亡。

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

定义 6.1 含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\&+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\&+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n\end{aligned}$$

称为 n 元**二次型**. 若规定 $a_{ij}=a_{ji}$，$\forall\, i,j=1,2,\cdots,n$，则二次型有矩阵表示

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\tag{6.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，称 $\boldsymbol{A}$ 为**二次型的矩阵**. 秩 $r(\boldsymbol{A})$ 称为**二次型的秩**，记为 $r(f)$.

例如，二元二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+5x_2^2+6x_1x_2$，有

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=x_1^2+3x_1x_2+3x_1x_2+5x_2^2\\&=x_1(x_1+3x_2)+x_2(3x_1+5x_2)\\&=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}x_1+3x_2\\3x_1+5x_2\end{bmatrix}\\&=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1&3\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

为二次型的矩阵表示.

定义 6.2 如果二次型中只含有变量的平方项，所有混合项 $x_ix_j(i\neq j)$ 的系数全是零，即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2,\tag{6.2}$$

这样的二次型称为**标准形**.

在标准形中，若平方项的系数 d_j 为 $1,-1$ 或 0，即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2,\tag{6.3}$$

则称其为二次型的**规范形**.

定义 6.3 在二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形中，正平方项的个数 p 称为二次型的**正惯性指数**，负平方项的个数 q 称为二次型的**负惯性指数**.

定义 6.4 如果

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+c_{13}y_3,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+c_{23}y_3,\\x_3=c_{31}y_1+c_{32}y_2+c_{33}y_3\end{cases}\tag{6.4}$$

满足

学习札记：

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

称(6.4)为由 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$ 到 $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]^{\mathrm{T}}$ 的**坐标变换**.

【注】 坐标变换(6.4)用矩阵表示，即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \text{或} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵.

定义 6.5 两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}, \tag{6.5}$$

就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同，记作 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$. 并称由 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的变换为**合同变换**，称 $\boldsymbol{C}$ 为合同变换的矩阵.

如 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{C}$.

因 $\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{C}, \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ 可逆.

于是 $\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1)\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{C}$,

有 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 可逆且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{C}$.

定义 6.6 对二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$，则称二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是**正定二次型**，并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**正定矩阵**.

例如，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2$，平方项 x_3^2 的系数是 -4，如果取 $\boldsymbol{x} = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$，则有

$$f(0,0,1) = -4 < 0,$$

说明这个二次型不是正定的. 二次型的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

也不是正定矩阵.

类似地请考查 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_3$，若取 $\boldsymbol{x} = [0, 1, 0]^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$，有 $f(0,1,0) = 0$，由此知 $\boldsymbol{A}$ 正定的必要条件是 $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, 3)$.

如何判断 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ 正定？

主要定理

定理 6.1 变量 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 的 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后，化为变量 $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}}$ 的 n 元二次型 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

学习札记：

注意，n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

因为 $\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,

说明 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 是二次型的矩阵表示. 即以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量的二次型经坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为以 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为自变量的二次型. 二次型矩阵由 $\boldsymbol{A}$ 转换为 $\boldsymbol{B}$，经坐标变换二次型矩阵是合同的.

特别地，若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 是正交变换，即 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵，则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C},$$

即经过正交变换，二次型矩阵不仅合同而且相似.

定理 6.2 任意的 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 都可以通过坐标变换化成标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2,$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是实数.

定理 6.3 任一 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，总可以合同于一个对角矩阵，即

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

定理 6.4 （惯性定理）对于一个二次型，不论选取怎样的坐标变换使它化为仅含平方项的标准形，其中正平方项的个数 p，负平方项的个数 q 都是由所给二次型唯一确定的.

若二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为二次型 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$

$\Leftrightarrow p_{\boldsymbol{A}}=p_{\boldsymbol{B}},q_{\boldsymbol{A}}=q_{\boldsymbol{B}}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 有相同的规范形.

定理 6.5 对任一个 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，必存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵），使得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化成标准形

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

定理 6.6 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的充分必要条件有：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数是 n；

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$；

(3) $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正数；

(4) $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式均大于零.

推论 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的必要条件是：

(1) $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$；

(2) $|\boldsymbol{A}|>0$.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

二次型基本概念

【例 6.1】 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+3x_3)(x_1-2x_2+x_3)$$

的矩阵 $\boldsymbol{A}=$ ________.

分析 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}(1,-2,1)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\3&-6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-4&-2\\2&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

故二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-4&-2\\2&-2&3\end{bmatrix}$.

【评注】 本题中矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\3&-6&3\end{bmatrix}$ 不是对称矩阵，因而不是二次型的矩阵，改成对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的方法：$a_{ii}=b_{ii}$，$a_{ij}=\dfrac{1}{2}(b_{ij}+b_{ji})$.

【例 6.2】 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为 2，则 $a=$ ________.

分析 二次型 f 的秩为 2，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2. 由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix},$$

由 $|\boldsymbol{A}|=(a-1)(a+2)=0$，知 $a=1$ 或 -2. 易见 $a=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，故 $a=-2$.

学习札记:

【例 6.3】 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的正惯性指数 $p=$ ________.

分析
$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1\\&=2\left[x_1^2+x_1(x_2+x_3)+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2\right]+2x_2^2+\\&\quad 2x_3^2-2x_2x_3-\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2\\&=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2,\end{aligned}$$

可见 $p=2$.

【评注】 如果认为二次型的标准形是

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2, \tag{1}$$

从而讲 $p=3,q=0$ 就不正确了.

因为对于
$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2,\\y_2=\qquad x_2-x_3,\\y_3=x_1\qquad+x_3,\end{cases} \tag{2}$$

有行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=0,$$

从而(2)不是坐标变换,那么(1)也就不是本题中二次型 f 的标准形.

二次型的标准形

【例 6.4】 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_3^2+2x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $y_1^2+by_2^2-y_3^2$,则 $a=$ ________

分析 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 必存在坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化其为标准形 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$. 即实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使其与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 合同,亦即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$.

如果选择正交变换,即 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵,那么

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

说明在正交变换下,$\boldsymbol{A}$ 不仅与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 合同而且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似,因此 $\boldsymbol{\Lambda}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 另一方面,在二次型 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$ 中,$\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角线元素就是标准形平方项的系数.

因此,二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换化为标准形时,标准形中平方项的系数就是二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

由 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&&\\&b&\\&&-1\end{bmatrix}$,有 $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$ 和 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,即

学习札记：

$$\begin{cases}2+0+a=1+b+(-1),\\-2=-b,\end{cases}$$

解得 $a=0$.

或者，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\0 & \lambda & -1\\0 & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-a\lambda-1)$，

（*）

又 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $1,b,-1$，把 $\lambda=1$ 代入（*），得 $a=0$.

练习　(2011,3) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1，$\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为________.

解题笔记

【例 6.5】　已知二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为 2，$[2,1,2]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，那么经正交变换二次型的标准形是______.

分析　求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换下的标准形也就是求二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\a & -5 & b\\1 & b & 1\end{bmatrix},$$

又 $[2,1,2]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，有 $\begin{bmatrix}1 & a & 1\\a & -5 & b\\1 & b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$，即

$$\begin{cases}2+a+2=2\lambda_1,\\2a-5+2b=\lambda_1,\\2+b+2=2\lambda_1,\end{cases}$$

解出 $a=b=2,\lambda_1=3$.

从秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，知 $|\boldsymbol{A}|=0$，于是 $\lambda_2=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 再由 $\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$，有 $1+(-5)+1=3+0+\lambda_3$，知 $\lambda_3=-6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

因此，正交变换下二次型的标准形是 $3y_1^2-6y_3^2$.

【例 6.6】　已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,$$

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式；

学习札记：

(2) 用正交变换把二次型 f 化成标准形,并写出相应的正交矩阵.

解 (1) f 的矩阵表示为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-3&0\\-2&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

(2) 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+3&0\\2&0&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+3&0\\0&2(\lambda+3)&\lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1&-5&2\\-1&\lambda+3&0\\0&0&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda+4),$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $2,-3,-4$.

当 $\lambda=2$ 时,由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&5&0\\2&0&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-5&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[5,1,-2]^{\mathrm{T}}$,即 $\lambda=2$ 的特征向量.

当 $\lambda=-3$ 时,由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}-4&-1&2\\-1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$,即 $\lambda=-3$ 的特征向量.

当 $\lambda=-4$ 时,由 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{bmatrix}-5&-1&2\\-1&-1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,1,-2]^{\mathrm{T}}$,即 $\lambda=-4$ 的特征向量.

对于实对称矩阵,对应于不同特征值的特征向量相互正交,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 相互正交,故只需单位化,令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}5\\1\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}}&0&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$

学习札记:

则经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=2y_1^2-3y_2^2-4y_3^2.$$

【评注】 要掌握用正交变换化二次型为标准形的方法,标准形中平方项的系数是二次型矩阵的特征值,所用的正交变换矩阵就是经过改造的二次型矩阵的特征向量.具体解题步骤如下:(下设 $n=3$)

(1) 写出二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$;

(3) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;

(4) 改造特征向量(单位化、Schmidt 正交化)$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$;

(5) 构造正交矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]$,

则经坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$,得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2.$$

【注意】 特征值的顺序与正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中对应的特征向量的顺序是一致的.

如果涉及到求参数的问题,其方法与特征值中所归纳的方法是一样的.

【例 6.7】 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

的规范形是 $y_1^2+y_2^2$,

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)利用正交变换将二次型 f 化为标准形,并写出所用的正交变换.

解 (Ⅰ)二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{bmatrix},$$

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a-1&0&\lambda-a-1\\-1&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a-1&0&0\\-1&\lambda-a&2\\-1&1&\lambda-a+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $a+1,a+1,a-2$.

因为二次型的规范形是 $y_1^2+y_2^2$,说明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$+,+,0$.所以 $a=2$.

(Ⅱ)将 $a=2$ 代入矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中.

对 $\lambda=3$,由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

学习札记：

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=0$，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

因为 $\lambda=3$ 时，特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交，故需 Schmidt 正交化. 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

那么，经正交变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=3y_1^2+3y_2^2$.

【例 6.8】 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$$

为标准形，并写出所用坐标变换.

解

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3\\&=x_1^2+2x_1(x_2-2x_3)+(x_2-2x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2-(x_2-2x_3)^2\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+2x_2^2+4x_2x_3-x_3^2\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+2(x_2+x_3)^2-3x_3^2.\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2-2x_3,\\y_2=\qquad\ \ x_2+x_3,\\y_3=\qquad\qquad\ \ x_3,\end{cases}$ 即

学习札记:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 3y_3, \\ x_2 = \quad\quad y_2 - y_3, \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3, \end{cases}$$

则有 $f = y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$.

【例 6.9】 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准形,并写出所用坐标变换.

解 在 f 中不含平方项,由于含有 x_1x_2,故可先令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = \quad\quad\quad y_3, \end{cases}$$

作出平方项,然后再配方,即

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1x_2 + 4x_1x_3 \\ &= 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3 \\ &= 2y_1^2 + 4y_1y_3 + 2y_3^2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - y_3)^2, \end{aligned}$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 \quad + y_3, \\ z_2 = \quad y_2 - y_3, \\ z_3 = \quad\quad\quad y_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1 = z_1 \quad - z_3, \\ y_2 = \quad z_2 + z_3, \\ y_3 = \quad\quad\quad z_3, \end{cases}$ 即经坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2, \\ x_2 = z_1 - z_2 - 2z_3, \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad z_3, \end{cases}$$

二次型化为标准形 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2$.

【例 6.10】 化二次型

$$f = 2x_2^2 + 2x_1x_3$$

为规范形,并写出所用坐标变换.

解 (配方法)

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_1 - y_3, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{y}$.

$$\begin{aligned} f &= 2y_2^2 + 2(y_1 + y_3)(y_1 - y_3) \\ &= 2y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2 \end{aligned}$$

再令 $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} z_1, \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} z_2, \\ y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} z_3, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{z}$,

学习札记：

得规范形 $f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

所用坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，其中

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

（通过正交变换）

二次型矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

由 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 1)$，

$\boldsymbol{A}$ 的特征值：2，1，-1. 解出 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$$

单位化：$\boldsymbol{\gamma}_1 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\gamma}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3]$，则经 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

再令 $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}y_1, \\ z_2 = \qquad y_2, \\ z_3 = \qquad y_3, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$，

得规范形 $f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$，所用坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$，其中

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

【例 6.11】 设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

（Ⅰ）求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式；

（Ⅱ）若二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$ 的规范形是 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，求 k.

分析 求二次型表达式就是求矩阵 $\boldsymbol{A}$，故应由特征值、特征向量开始.

解 （Ⅰ）设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是属于 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$. 那么由 $\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，有 $(\lambda^2 - 2\lambda)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$.

学习札记:

又 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$,故 $\lambda^2 - 2\lambda = 0$,从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或 2.

又因 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系,知 $r(\boldsymbol{A}) = 2$,且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_1$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量.

因实对称 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$,$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\Lambda}) = 2$.

因此,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,2,2.

设 $[x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda = 2$ 的特征向量,那么 $[x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$ 与 $[0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 正交,得 $x_2 + x_3 = 0$.

解得 $\boldsymbol{\alpha}_2 = [1,0,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = [0,-1,1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda = 2$ 的特征向量.

于是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = (\mathbf{0}, 2\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_3)$,故

$$\boldsymbol{A} = (\mathbf{0}, 2\boldsymbol{\alpha}_2, 2\boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

所以二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$.

(Ⅱ)因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,2,2,故 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $k, k+2, k+2$.

由规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ 知 $\begin{cases} k < 0, \\ k + 2 > 0, \end{cases}$ 即 $-2 < k < 0$.

【例 6.12】 (2020,2)设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 得 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

分析 二次型 f 经坐标变换化为二次型 $g \Leftrightarrow f$ 与 g 有相同的规范形.

如求由 f 到 g 的坐标变换,就用规范形衔接过渡.

(Ⅰ)因 $g = (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2$,知二次型 g 的 $p = 2, q = 0$.

于是二次型 f 的正惯性指数 $p = 2$,负惯性指数 $q = 0$.

由二次型 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

因 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - 1 - 2a)(\lambda - 1 + a)^2$,

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值:$1 - a, 1 - a, 1 + 2a$.

从而 $\begin{cases} 1 - a > 0, \\ 1 + 2a = 0, \end{cases}$ 故 $a = -\dfrac{1}{2}$.

(Ⅱ)由配方法

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$$

$$= \left[x_1^2 - x_1(x_2 + x_3) + \frac{1}{4}(x_2 + x_3)^2\right] + x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 - \frac{1}{4}(x_2 + x_3)^2$$

学习札记：

$$= \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_3)^2$$

令 $\begin{cases} z_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ z_2 = \quad\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_3, \\ z_3 = \qquad\qquad\quad x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ (1)

有 $f = z_1^2 + z_2^2$.

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2, \\ z_2 = \qquad 2y_3, \\ z_3 = \quad y_2, \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ (2)

那么令

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即经 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Py}$ 有 $f \xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}} g$.

* 作为复习，可用矩阵运算加深领会.

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

* 作为坐标变换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是不唯一的.

学习札记：

二次型的正定性

【例 6.13】下列矩阵中，正定矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&0\\1&0&-3\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1&3&4\\3&9&2\\4&2&6\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&7\\3&7&10\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&5&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$.　　[　　]

分析 (A) 中 $a_{33}=-3<0$，(B) 中二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix}1&3\\3&9\end{vmatrix}=0$，(C) 中行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，故它们均不是正定矩阵. 所以应选(D).

或直接地，(D) 中三个顺序主子式 $\Delta_1=2,\Delta_2=6,\Delta_3=10$ 全大于0，而知(D) 正定.

【例 6.14】　二次型 $x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是______.

分析 二次型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&4&2\\-1&2&4\end{bmatrix}$$

的顺序主子式应全大于0，即

$$\Delta_1=1>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&t\\t&4\end{vmatrix}=4-t^2>0\quad\Rightarrow t\in(-2,2),$$

$$\Delta_3=|\boldsymbol{A}|=-4t^2-4t+8>0\quad\Rightarrow t\in(-2,1).$$

可见 $t\in(-2,1)$ 时，二次型正定.

【例 6.15】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，若 $k\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵，则 k ______.

分析 由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 或 -2，那么 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 或 $-2k$，$k\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值是 1 或 $1-2k$. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 是非零实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 一定有非零特征值 -2，从而 $k\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 一定有特征值 $1-2k$.

又因正定的充分必要条件是特征值全大于0，故 $k<\dfrac{1}{2}$.

【例 6.16】　已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定矩阵.

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，那么

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1},$$

学习札记：

于是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是对称矩阵.

关于正定性的证明可以有多种思路：

（方法一）用特征值　设矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，知其特征值 $\frac{1}{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 全大于 0. 因此矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定.

（方法二）用与 $\boldsymbol{E}$ 合同　因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，两边取逆，得到

$$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}.$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$，于是

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定.

（方法三）用定义，坐标变换　因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，那么 $\boldsymbol{A}$ 可逆，对二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$ 作坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么 $\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，又因 $\boldsymbol{A}$ 正定，那么有 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}>0$，故 $\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}>0$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定.

（方法四）用与已知的正定矩阵合同　因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，那么 $\boldsymbol{A}$ 对称且可逆，于是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同，即二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 合同，故它们有相同的正、负惯性指数. 由 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型，知 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$ 正定，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定.

【例 6.17】　已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 均是 n 阶正定矩阵，证明 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定矩阵.

证明　特征值法

由于 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$，知矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 是对称矩阵.

设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，那么 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $\lambda-1$，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 $1-\frac{1}{\lambda}$.

由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 正定，知 $\lambda>0$，$\lambda-1>0$. 故 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $\frac{\lambda-1}{\lambda}>0$. 所以矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定.

【例 6.18】　已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶对称矩阵，证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.

证明　必要性　如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，即二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型，那么存在坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}$ 使

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+d_3y_3^2,$$

学习札记:

其中 $d_i > 0(i = 1,2,3)$.

再令 $\begin{cases} z_1 = \sqrt{d_1}y_1, \\ z_2 = \sqrt{d_2}y_2, \\ z_3 = \sqrt{d_3}y_3, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}$,其中 $\boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{d_2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_3}} \end{bmatrix}$,

则有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

由于 $\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{E}$,故

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{C}_1^{-1} = (\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{C}_1^{-1} = (\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{C}_1^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{C}_1^{-1}).$$

记 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{C}_1^{-1}$,则 $\boldsymbol{C}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.

充分性　如果 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{C}$ 可逆,那么

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,由于 $\boldsymbol{C}$ 可逆,知 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\|^2 > 0,$$

从而 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型,即 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

【评注】　关于充分性也可如下证明:

因为 $\boldsymbol{C}$ 可逆,那么二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$,有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

可见正惯性指数 $p = n$,故 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

【例 6.19】　(1999,3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,已知矩阵 $\boldsymbol{B} = \lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,试证:当 $\lambda > 0$ 时,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

证明　(方法一) 定义法

因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = (\lambda\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}} + (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实对称矩阵.

构造二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$,有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ &= \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

因为 $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0, (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \geqslant 0$,所以,当 $\lambda > 0$ 时,$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,恒有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) > 0,$$

即二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 正定,故 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

(方法二) 用特征值　$\boldsymbol{B}$ 的对称性略. 设 μ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{\alpha}$ 是相应的特征向量,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \mu\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$,用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 左乘上式的两端得,

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) = \mu\,\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$,必有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} > 0$. 又 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$,故 $\mu \geqslant 0$.

学习札记:

因为 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda+\mu$,可见当 $\lambda>0$ 时,必有 $\lambda+\mu>0$,即 $\boldsymbol{B}$ 的特征值全大于 0,所以 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

【评注】 要会用定义法,要熟悉内积 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$. 本题是当年数学三考的最不好的一个题,得零分者居然高达 62%.

【例 6.20】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶反对称矩阵,证明矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2$ 可逆.

证明 由 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,由 $\boldsymbol{B}$ 是反对称矩阵知 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$,于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2,\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2$ 是对称矩阵.

构造二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{x}$,有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}).$$

因 $\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})\geqslant 0$,即 $\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{x}>0$,所以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{x}$ 是正定二次型. 因此 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2$ 的各阶顺序主子式均大于零,特别地有 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2|>0$,从而矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2$ 可逆.

【例 6.21】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,s)$,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 左乘(1)式,有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s=0, \tag{2}$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j)$ 代入(2)式得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0. \tag{3}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 正定,$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1>0$,从而 $k_1=0$.

同理可证 $k_2=0,\cdots,k_s=0$. 因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

矩阵的等价、相似、合同

1. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵,即同型矩阵

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 经过初等变换得到 $\boldsymbol{B}$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

2. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(1) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

(2) 不相似

学习札记：

①$\lambda_A \neq \lambda_B$ 或 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\boldsymbol{B})$ 或 $|\boldsymbol{A}| \neq |\boldsymbol{B}|$ 或 $\sum a_{ii} \neq \sum b_{ii}$.

②$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$ 但 $\boldsymbol{B}$ 不能相似对角化.

(3) 对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \lambda_A = \lambda_B.$$

3. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称矩阵

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同$\Leftrightarrow \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 可逆

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$ 有相同的正、负惯性指数.

【例 6.22】　矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$等价、合同但不相似.

解　因为秩 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 特征值不相同，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不相似.

因为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} = x_1^2 + 2x_2^2$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx} = x_1^2 + 4x_2^2$ 有相同的正、负惯性指数，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 或直接地由

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 4 \end{bmatrix},$$

知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

【例 6.23】　矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -4 \end{bmatrix}$不合同.

解　这是因为如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同，则有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$，从而

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}| = |\boldsymbol{C}|^2 |\boldsymbol{A}| > 0,$$

而 $|\boldsymbol{B}| < 0$，矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不合同.

当然，更可以直接由 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 和 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$ 的正、负惯性指数不一样来说 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不合同.

【例 6.24】　判断

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

是否等价、相似、合同.

解　因为秩 $r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\boldsymbol{B}) = 1$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

由 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - 3\lambda^2$，知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $3,0,0$. 又因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 必能相似对角化，且

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

实对称矩阵 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值

$\Rightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$ 有相同的正、负惯性指数

学习札记：

$\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

所以本题 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似、合同、等价均成立.

【评注】 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似 $\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\not\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

【例 6.25】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 1，2 两行互换后再 1，2 两列互换得到的矩阵是 $\boldsymbol{B}$，试判断 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否等价、相似、合同？

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必等价.

用初等矩阵表示，有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

因为 $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 既相似也合同.

练习 (1) 举 2 阶矩阵的例子，它们有相同的特征值但是不相似.

(2)(2013) 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件是

(A) $a = 0, b = 2$.　　(B) $a = 0, b$ 任意常数.

(C) $a = 2, b = 0$.　　(D) $a = 2, b$ 任意常数.

解题笔记

金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐等	2020 年 6 月
数学基础过关 660 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020 年 8 月
数学历年真题全精解析·基础篇(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020 年 10 月
数学公式的奥秘	刘喜波等	2020 年 10 月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020 年 12 月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021 年 1 月
数学强化通关 330 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021 年 2 月
高等数学辅导讲义	刘喜波　曹显兵	2021 年 2 月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2021 年 2 月
高等数学解题密码·选填题	武忠祥	2021 年 6 月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021 年 2 月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021 年 2 月
线性代数满分过关 150	姜晓千	2021 年 4 月
概率论与数理统计满分过关 150	姜晓千	2021 年 7 月
数学压轴大题满分过关 150	姜晓千	2021 年 9 月
数学核心知识点乱序高效记忆手册	宋浩	2021 年 9 月
数学决胜冲刺 6 套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021 年 10 月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021 年 10 月
经济类联考数学复习全书	李永乐等	2021 年 4 月
经济类联考数学通关无忧题	薛威	2021 年 4 月
农学门类联考数学复习全书	李永乐等	2021 年 4 月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018 年 12 月
大学数学高等数学辅导	章纪民	2021 年 5 月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2021 年 5 月

线性代数期末高效复习笔记	宋浩	2021年7月
高等数学期末高效复习笔记	宋浩	2021年7月
概率论与数理统计期末高效复习笔记	宋浩	2021年7月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021年5月
思想政治理论精雕细刻1000题	米鹏	2021年5月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021年10月
思想政治理论最后20天必背20题	米鹏	2021年10月
考研政治高分秘训900题	桑宏斌	2021年5月
考研政治冲刺密押题	全国考研政治金榜命题研究中心	2021年11月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2020年10月
考研英语语法和长难句实战突破18讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2020年10月
考研英语阅读理解精雕细刻80篇	全国考研英语金榜命题研究中心	2021年4月
考研词伙	李超	2019年3月
考研句伙	李超	2019年3月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018年11月
考研英语语法长难句抓分攻略	欧阳栾天	2021年2月
考研英语实用语法与疑难句精讲笔记	白子墨	2020年12月
考研英语写作精讲笔记	白子墨	2021年6月
词维风暴	娄晗	2019年9月
考研英语长难句核心语法	高维 赵亮	2021年2月
考研英语核心词汇	赵亮 高维	2021年7月
考研英语词汇通关“密”籍	许密杉	2021年5月
考研英语阅读通关“密”籍	许密杉	2021年6月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
写作复习指南	房文学	2021年1月
逻辑复习指南	房文学	2021年3月

逻辑精练900题	房文学	2021年3月
逻辑真题全解	房文学	2021年3月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020年12月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020年12月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020年12月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上、下册)	贺银成	2020年12月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020年12月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020年12月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020年12月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020年12月
国家临床执业及助理医师资格考试抢分速记定心丸	高鑫	2021年3月
刘应科中医执业(助理)医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2021年4月
刘应科中医执业(助理)医师综合笔试通关掌中宝	刘应科	2021年4月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021年3月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021年3月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021年3月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021年3月

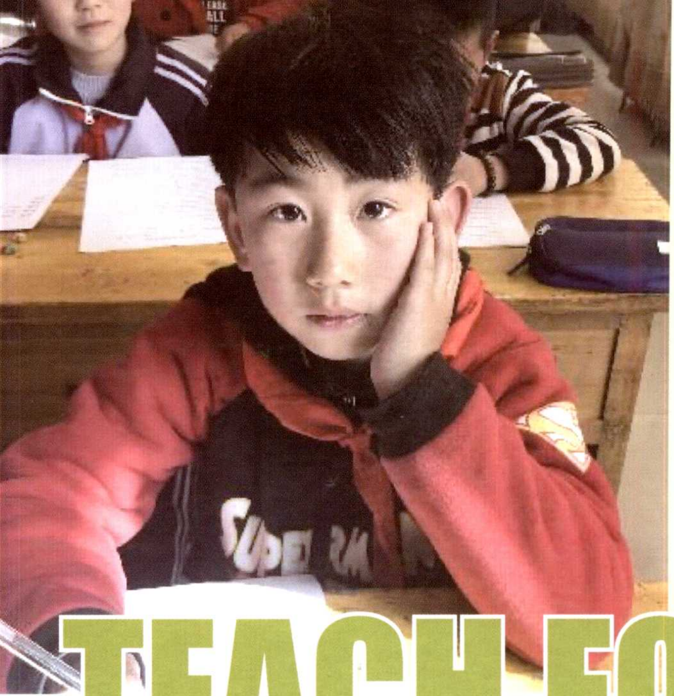
考研中医系列

书名	作者	出版时间
刘应科考研中医综合教材	刘应科	2021年3月
刘应科考研中医综合教材同步练习3000题	刘应科	2021年3月
刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2021年3月
刘应科考研中医综合终极预测试卷	刘应科	2021年9月

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018 年 12 月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018 年 12 月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018 年 12 月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018 年 12 月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018 年 12 月
老人与海	[美]海明威	2018 年 12 月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018 年 12 月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018 年 12 月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018 年 12 月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019 年 3 月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018 年 4 月
呼兰河传	萧红	2018 年 4 月
骆驼祥子	老舍	2018 年 4 月
我这一辈子	老舍	2018 年 4 月
茶馆	老舍	2018 年 4 月

以上图书书名及出版时间仅供参考，以实际出版物为准，均属金榜时代（北京）教育科技有限公司！



乡 村 艺 术 Ke 梦 想 社

音体美教师
志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代

TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

项目简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2021乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：

CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你对社会公益的理解，参加本次活动的原因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括3节课以上的教案或课件）

附件2：个人简历（Word格式）

金榜时代 考研数学系列

书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年2月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年2月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年2月	强化提高
数学强化通关330题	2021年2月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

G20210011

微信扫一扫
解锁更多精彩内容

关注作者团队微博
与名师一起互动交流

责任编辑 / 吕睿

ISBN 978-7-109-27952-0

9 787109 279520 >

定价：59.80元